第四版

(4th ed.)

常用不等式

Applied Inequalities

匡继昌　著

By Kuang Jichang



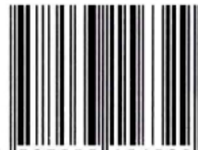
山东科学技术出版社

www.lkj.com.cn

责任编辑　何慧颖　刘大诚　郑淑娟
艺术总监　史速建
封面设计　孙　佳



常用不等式
Applied Inequalities


ISBN 978-7-5331-5632-9
定价：89.00 元

常用不等式
Applied Inequalities

第四版

(4th ed.)

山东科学技术出版社
Shandong Science and Technology Press

图书在版编目（CIP）数据

常用不等式 / 匡继昌著. —第四版. —济南：山东科学技术出版社，2010. 8
ISBN 978-7-5331-5632-9

Ⅰ.①常... Ⅱ.①匡... Ⅲ.①不等式 Ⅳ.①O178

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 124153 号

常用不等式

第四版

匡继昌 著

出版者：山东科学技术出版社
地址：济南市玉函路 16 号
邮编：250002 电话：(0531)82098088
网址：www.lkj.com.cn
电子邮件：sdkj@sdpress.com.cn

发行者：山东科学技术出版社
地址：济南市玉函路 16 号
邮编：250002 电话：(0531)82098071

印刷者：日照昆城印业有限公司
地址：日照市北京路北段西侧
邮编：276826 电话：(0633)8373328

开本： 787mm×1092mm 1/16
印张： 56
版次： 2010 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-5331-5632-9
定价：89.00 元

内容提要

本书第四版对2004年第三版的内容作了全面细致的修订，并补充了第三版出版以来不等式研究的新的重要成果，充分反映了20世纪以来，特别是20世纪90年代以来不等式理论和方法的最新进展. 全书共分17章，包含了美国数学评论(MR)2000主题分类中所有关于不等式论题的40个三级分类项目，还包括了国内外历年来大、中学生各类数学竞赛和研究生入学考试中所出现的新的不等式，以及工程技术问题中常用的不等式，所收录的不等式增加到6千多个，第四版还总结了不等式的常用证法55种，提出了212个未解决或值得进一步研究的问题. 由于不等式在数学各个领域和科学技术中都是不可缺少的基本工具，加上本书起点低，因而本书的读者面是非常广泛的，各种不同专业水平的读者，不论是大中学师生，数学研究者，还是工程技术人员，都可以从中找到各自感兴趣的有用材料和研究课题.

第四版序言

匡继昌教授数十年来致力于不等式的研究和著述，最有影响的著作当推《常用不等式》一书(简称“匡著”). 我有幸于 1993 年与 2004 年相继得到了“匡著”的第二版和第三版. 第三版篇幅计有 700 余页，内容分 17 章，各类不等式的总数已多达 5000 多个，所以我把它称之为海内外独一无二的“不等式巨著”，而且曾写过一篇书评，刊载于“数学研究与评论”(2004 年第 3 期).

现今“匡著”已出第四版，书中不等式的个数已增至 6000 多个. 更重要的是已对原书第十七章的内容有了重要补充，后面还要提及此事. 当然，第三版由于编辑工作的失误(即将“参考文献”条目作了乱序排列)带来的“不幸”已在新版中被消除了.

我乐于为“匡著”新版作序. 新版对第三版在题材方面有许多新的增补，但总体说来仍保持原有的基本体例与内容，因此我在书评中说到该书的“5 点特色”仍然有效，且已有所加强. 现再重述如下供读者参考.

一是此著作包含了美国《数学评论》(MR)2000 主题分类中所有涉及不等式论题的 40 个三级分类项目，已概括地反映了不等式在诸多数学分支领域中的现代发展.

二是此书在内容题材的广度与深度方面都充分反映了 20 世纪 90 年代后的新进展.

三是全书的前 16 章，内含大批不等式的分类列条及题名，显得颇为繁细，十分便于查用，故具有工具书的功能与特色. 特别，书中还展示了众多中国学者的研究成果，无疑海内外研究工作者及数学史专家会更感兴趣.

四是书中对许多基本而重要的经典不等式，都附有简史与研究现状介绍，而且书中还包含有大批初等不等式与几何不等式，中学、大学中的教师与学生们对此也会很感兴趣. 特别值得指出的是，此书已从浩繁的文献资料中理出一条主线来，这无疑有助于初学者能较快地进入研究前沿.

五是本书的最后一章(第十七章)在原有基础上重新改写并总结了不等式的 55 种证明方法，而且还在附录中提出了 212 个未解决问题. 这应看做是本书的最大特色，也是本书著者多年来用力最大之处. 任何一位不等式研究工作

者如果从本书的附录及第十七章中获得了启发和教益，自然都应感谢著者的辛劳与心得.

正是上述一些特色，使得"匡著"兼具有学术研究的参考使用价值和数学教育价值；因此我认为"匡著"应是分析与计算数学工作者的必备书，也是一般数学专业与应用数学专业研究生的常备参考书. 我预祝此书在国内帮助培育数学理论及应用人才方面，将起到一份历久不衰的促进作用.

徐利治

2010 年 5 月于北京寓所

（徐利治是一级教授，博士生导师，大连理工大学数学科学研究所名誉所长，国际性刊物《Analysis in Theory and Applications》杂志主编，《数学研究与评论》主编.）

A Review of Kuang's Book "Applied Inequalities"(4th Edition)

HSU L. C.

(Inst. of Math. ,Dalian University of Technology,Dalian 116024,China)

Abstract: It is remarked that the fourth edition of Applied Inequalities by Kuang Jichang has 5 main features, of which the most attractive ones are Kuang's summary of 55 different methods for proving inequalities, and his compilation of 212 unsolved problems.

Key words: inequalities; proof-methods of inequalities.

第四版前言

由于不等式有三个显著的特点：一是其应用的广泛性.不等式在数学的各个领域和科学技术中都是必不可少的基本工具；二是其方法的高度技巧性，被称为是“创造性的艺术”；三是其研究队伍越来越大.这是因为不等式可以在数学的不同层次和不同科学背景上进行研究.事实上，20 世纪以来，不等式就一直是一个非常活跃而又有吸引力的研究领域.因此，本书从第一版到第三版的出版，都一直得到广大读者的厚爱和鼓励.著名数学家徐利治教授在“数学研究与评论”2004 年第 3 期上发表书评，指出本书第三版至少有 5 点特色，“堪称为现今海内外独一无二的不等式巨著”.同时也指出由于编辑工作的失误，将原稿中参考文献的前面 158 部著作全部重新编号，而正文中引文号码又未作相应的改动，导致正文中引文的编号与书末的参考文献不一致，给读者带来不便.这次再版，已将上述失误和已发现的其他错误彻底改正过来.这次再版还有一个重要的目的，就是希望尽可能收入新的不等式的研究成果.但是，作者发现，进入 21 世纪以来，由于互联网的迅猛发展和普及，不等式的研究出现了两个新的特点.一是不等式的新文献呈爆炸式增长；二是通过互联网查阅新老文献已越来越方便和快捷.因此，要想全面收入新的不等式研究成果，第一个特点说明已无可能，第二个特点说明已无必要.如果说，在 30 年前，南斯拉夫 Mitrinovic 和 Vasic 合作写作“Analytic inequalities”的目的是为了帮助“所有分析学家都要花费一半的研究时间通过文献去查阅他们要用而又不能证明的不等式”，那么，在互联网时代的今天，不等式著作的写作，就必须跳出这种传统的“收集整理”的思维模式.这就是说，面对海量信息必须要有所选择和取舍.徐利治教授在对本书第三版的书评中提出的衡量不等式价值的三条标准，即普适性(普遍可应用性)、优美性(简单性)和精确性(不可改进性)，恰好为本书第三版的修订指明了方向.华罗庚曾指出，刚出来的新文献，往往精少而粗多.这就要按上述三条标准对新文献进行“去粗取精，去伪存真，由此及彼，由表及里”的加工改造.例如，对于 Hilbert 不等式的研究，我们没有(也不可能)罗列几百篇新文献的结果和证明，而是从这几百篇文献中深入挖掘其中值得我们关注的新的思想方法和新的分析技巧，以及对今后研究工作的新的

启示等，在第四版中将它们归纳为 11 个方面. 我们还继续注意从新的非不等式专著中收录新的不等式，这些不等式往往很有用而在其他不等式专著和互联网上都是很难查到的. 就是对于第三版中已收入的不等式，也按这三条标准重新进行审视和细致的修订. 例如，对于经常使用的 Hölder 不等式，我们往往只注意到其中的 p,q 要满足共轭指数的条件，即 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ 1\leqslant p\leqslant\infty$，而忽略了它对于满足条件 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\geqslant 1,\ 1\leqslant\min\{p,q\}\leqslant\infty$ 的非共轭指数 p,q 也成立. 我们在第四版中就特别提到这一点. 类似的这种细致的修订，其目的都是为了尽可能揭示基本不等式的使用价值，基本的思想方法和基本的分析技巧，从而给读者带来更大的方便. 因此，这次修订，虽然基本框架没有变，但内容的变化却比较大，所收录的不等式已增加到 6000 多个，其中包括作者还没有发表的新结果. 作者深知，这次修订，仅仅是朝这个方向努力的第一步，今后还任重道远.

随着不等式研究的新进展和作者对不等式认识的不断深化，这次对第十七章不等式的证明方法作了修改，证明方法从 50 种增加到 55 种. 附录中未解决的问题增加到 212 个. 其目的是希望能为初学者尽快进入不等式的研究前沿提供一些帮助. 这是因为根据作者几十年的经验教训，学会自己提出新的问题，进而学会自己提出有意义的新的研究课题，是一个研究工作者必需要具备的一种基本功.

作者衷心感谢徐利治教授长期的关怀和指教. 无论是本书的多次修订，还是作者的“实分析引论”(湖南教育出版社，1996)和“实分析与泛函分析”(高等教育出版社，2002)的写作与出版，都得到了徐先生热情的指导，并都为之作序.

作者非常感谢“Tamkang J. Math.”编辑部多年来为作者提供了丰富的不等式新文献，感谢瑞典著名数学家 Lech Maligranda 教授和国内外新老朋友 L. Debnath(美国)、Themistocles M. Rassias (希腊)、王挽澜、杨必成、祁锋、高明哲、石焕南、褚小光、褚玉明、张小明等的帮助和寄来的大量不等式新文献.

作者要特别感谢山东科学技术出版社和本书的新老编辑刘大诚等为编辑出版本书所付出的辛勤劳动和重大贡献.

本书从 1989 年出版第一版到今天的第四版，是长达 20 年不断修订的过程，也是作者对不等式的认识不断深化的过程. 作者深知，这种认识过程是永

无止境的.如果从作者收集不等式的资料算起,已有半个世纪,查阅的著作和文献成千上万,大部分靠手写抄录,就难免抄错,或抄不全,经常要反复找原文核对好多次.有时忘了抄录文献的出处,就再也找不到原文了.这都表明,本书的不断修订过程是一个巨大浩繁的工程.因此,本书虽然经过多次修订,仍可能存在不少错误.作者本着活到老、学到老和精益求精的精神,今后仍对本书不断修订.希望今后能继续得到广大读者和专家学者的指导和帮助.

匡继昌

2010 年 3 月 5 日　于湖南师范大学数学系

邮编:410081,　Email: jckuang@163.com

第三版前言

本书第二版出版后受到国内外广泛好评. 美国《数学评论》(MR)两次为本书发表评论,指出本书极有价值,并向全世界的研究学者、数学教师、工程师和各国的数学、科学、工程技术图书馆推荐. SCI 和国内外著名杂志对本书的引用率越来越高,使得本书由国内走向国际. 著名数学家 Fan Ky 教授多次从美国来信指出:本书第二版"内容之丰富,显然比哪一本关于不等式的书都超过很多,非常钦佩! 它必定是一本有久远影响的巨著. …… 因此我极赞成您写一本英文版的". 著名数学家徐利治教授则多次指出,"Fan 先生的意见是十分正确的,与我不谋而合". 第二版一问世后很快销售一空,国内的读者则希望能重印.

不等式一直是 20 世纪非常活跃而又有吸引力的研究领域,特别是该世纪 90 年代不等式研究空前活跃,研究的深度和广度都在迅速扩大. 美国数学评论(MR)为此迅速作出反应,将有关不等式的三级主题分类由 MR1991 的 28 个增加到 MR2000 的 40 个. 除了原有的国际性杂志,如[301],[305],[308],[309],[326],[327],[330]等大量发表有关不等式研究的新成果外,又先后创办了几个国际性不等式专业杂志(如[302]、[303]、[304]等),国内则有[351]等,新的不等式著作也大量出版,从本书参考文献中看出,20 世纪 90 年代出版的就占近一半,但是这些著作大多限于一般不等式的某些特殊专题,缺乏概括反映不等式在数学各个领域发展的著作,这就是说,本书仍然起着现有著作所不可替代的作用.

从 1993 年起,作者下定决心对第二版重写,历时 10 年,几易其稿,删去了第二版中次要的一些不等式,而收录的不等式反而上升至 5000 多个,包含了 MR2000 主题分类中所有关于不等式论题的 40 个三级分类项目和国内外历年来大、中学生各级各类数学竞赛和研究生入学考试中所出现的新的不等式. 初稿完成后,发现篇幅仍过于庞大,于是又删去了一些不等式,更多的是删去了已收录的许多证明. 由于不等式在数学各个领域和科学技术中都是不可缺少的基本工具,正如美国"数学评论"为本书第二版写的评论中所指出的那样,"不等式的重要性无论怎么强调都不会过分",因此,本书的读者面是非常广泛

的.而为了兼顾不等式的研究者,我们除了尽可能指出不等式的出处(不一定是原始出处)外,还专门写了一章不等式的50种常用证法,提出了152个未解决或值得进一步研究的课题.总之本书第三版无论是广度还是深度都远远超过了第二版.

本书无疑是一部专著,同时又力图使它具有工具书的功能,为了使读者查阅方便,在内容编排方面作了许多考虑,并用详细目录来代替按笔划排列的主题与作者索引.

为了照顾不同专业水平的广大读者,本书将起点放低,不但不等式的叙述遵循由初等向高等逐步推广的原则,而且仍大量收录了初等不等式,具有中等水平的读者完全可以从书中找到大量自己感兴趣的有用材料和研究课题.当然,初等不等式的大量收录,不仅仅是为了兼顾中等文化水平的读者和中学数学教学和各类数学竞赛培训的需要,而是初等不等式在大学数学教学与研究中,仍占有十分重要的地位.例如,[61]指出,“在逼近论的研究中,就常常为寻找一个形状简单,直观易懂但远非简单易证的初等不等式而深陷困境.”从证明方法上看,许多初等不等式的证明常常用到高等数学的工具,可以充分体现初等数学与高等数学在思想方法上的继承性和相互渗透性.

作者衷心感谢老一辈著名数学家徐利治教授、Fan ky教授、胡克教授、Yang Yisong教授等的关怀和指导,他们多年来一直关心本书的修订和英文版的出版工作,先后提出了许多极为宝贵的指导意见,热情寄来各种不等式的新文献,并且一直热心为国内外专家、学者推荐本书;作者非常感谢Debnath. L.教授(美国)、Rassias,Th. M.教授(希腊)以及南斯拉夫、印度、新加坡等国的许多教授和国内的祁锋、杨必成、高明哲、王挽澜、石焕南等教授和一大批专家学者、读者,作者与他们建立了长期友好合作交流与合作研究的联系,使作者深受教益;作者还要感谢台湾淡江大学杨国胜教授和“Tamkang J. of Math.”杂志编辑部对本书修订的关心和支持.没有上述的关心和支持,要想完成本书的修订是不可能的.

作者还要感谢北京九章图书有限公司和晁洪先生为本书修订和出版发行所作的努力,他们在沟通读者、作者与出版社三方面的联系以及加强中外数学图书的交流等方面做了大量卓有成效的工作,正因如此,本书才得以出版.

作者特别感谢山东科学技术出版社为出版本书第三版所作的巨大努力,

感谢本书责任编辑为编辑出版本书所付出的辛勤劳动.

由于文献浩繁,又受学识水平和文献资料的限制,本书仍无法完全避免差错,恳请广大读者赐教.

匡继昌

2003 年 10 月于湖南师范大学数学系

第二版前言

本书自第一版问世以来，受到国内外的好评．继在湖南师范大学被评为优秀专著后，1991 年又在第一次全国优秀数学传播类图书评选中被评为七本数学传播优秀图书之一（见《中国数学会通讯》1991 年第 2 期 P12～13）．美国“数学评论”、德国“数学文摘”和国内多家报刊杂志先后发表了热情洋溢的评论，指出这是“一本很有价值和受欢迎的数学不等式新文献”，这都是对作者极大的鼓励和鞭策．

鉴于不等式理论的惊人发展和广大读者对不等式日益增长的兴趣，作者对第一版进行了修订和补充．收集的不等式从 1600 多个增加到 3600 多个．另附有不等式常用证法 42 种及 100 个未解决的不等式问题．

新收录的不等式，主要来自两方面：其一是不等式理论的新发展．20 世纪 70 年代以来不等式的研究成果超过了前 300 年的六、七倍．例如，1989 年出版的 Recent Advances in Geometric Inequalities（见[19]），收集的几何不等式就达 3000 多个；不等式的方法和论题的范围也在迅速扩大；“国际一般不等式会议”每 2～3 年就举行一次，并出版会议文集（见〔5〕、〔54〕）．由于文献浩繁，许多国家都投入了很大的人力物力，而且是跨国的数学家通力合作，收集资料，出版专著，以此作为推动数学发展的一项基本建设．但国内外出版的这些著作，一般只限于不等式的某些专题，如“几何不等式”，“三角不等式”“数论中的不等式”等等（见本书所附的参考文献），还未见有概括反映不等式在数学各个领域发展的书．本书试图填补这一空白，并注意反映我国学者的工作．其二是来自教学和科研中用得较多的不等式及国内外各种数学竞赛、高考、研究生入学考试中新出现的不等式．它们往往在现行不等式著作和不等式的专题文献中都是难于查找的．据统计，在历年高考中用到不等式知识和方法的试题占总分的1/3以上（见[348]1990，10：12～15）．在各种数学竞赛和大学的教学与研究中，不等式更是必不可少的技巧性工具．

第二版仍重视初等不等式，这不仅是中学数学的需要，近代数学的发展也离不开它．例如熟知的 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式是建立 L^p 空间的

基本工具;在复变函数理论、函数空间嵌入理论、变分计算、黎曼流形、近代调和分析等分支的发展中都离不开几何不等式;甚至从一个量的非负何时导致另一个量的非负的问题看来十分简单,却发展成正算子理论和微分不等式理论,而拟线性化理论则是动态规则理论和正算子理论的融合(见〔54〕2).

本书力图从浩繁的文献中理出一条主线,以便用较小的篇幅向读者提供尽可能多的信息.因此,对材料的编排方式作过多种尝试,尽可能使读者查阅方便,而且还能从上下文的联系中得到解决问题和发现新不等式的启示.

作者衷心感谢徐利治教授、陆善镇教授多年的教导.他们对本书的修订提出过许多宝贵的建议,并寄来了新作.徐先生曾多次强调学习和掌握不等式的重要性,告诫年青的数学工作者及早掌握这些方法和技巧(见〔8〕前言).

作者非常感谢著名不等式专家王挽澜教授、陈计先生以及单墫、李宗铎等教授和许多读者的支持和鼓励,有的还寄来了已发表或尚未发表的佳作.作者还感谢本单位的领导和师生的大力支持和帮助.

作者还要特别感谢湖南教育出版社在学术著作的出版陷入困境的艰难条件下,仍克服重重困难,出版拙作,感谢欧阳维诚和责任编辑胡坚等同志的帮助和为编辑出版本书所付出的辛勤劳动.许多读者赞扬这是"独具慧眼".

作者作了极大的努力来确保书中结果的准确可靠,除了常见的和容易证明的结果外,大多作了提示或给出了文献出处.但由于本书内容涉及面广,文献浩繁,受学识水平和资料的限制,无法对有关文献作系统的考查工作.例如,本书冠有人名的不等式,一般是按习惯称,但有时不见得合适,因为可能有别的学者更早地发现了这些结果,而许多著名的不等式,往往是几代人奋斗的结晶.由于水平有限,难免差错,恳请广大读者赐教.

匡继昌

1992年2月于湖南师范大学数学系

"Applied Inequalities"by Kuang Jichang

First Edition 1989

Second Edition 1993

Third Edition 2004

Fourth Edition 2010

美国《数学评论》对《常用不等式》(第一版)的评论

Mathematical Reviews (MR)91c:26001:

This book is a collection of more than 1600 inequalities arising in various fields of mathematics. The materials overlap part of the celebrated book by Hardy, Littlewood and Polya, yet contain a large number of results that have become known from developments in fields other than analysis. The style of presentation of the book is similar to that of Hardy, Littlewood and Polya. In most places proofs are omitted, but a hint or a discussion concerning relevant references is usually given. Although the selection of some of the contents reflects the author's own personal preference, the book is certainly a useful and welcome addition to the literature on mathematical inequalities.

Yisong Yang (I-NM-S)

美国《数学评论》对《常用不等式》(第二版)的评论

Mathematical Reviews (MR) 95j:26001:

This is a much enlarged and improved edition of a monograph under the same title. The first edition was published in 1989 [MR91c:26001], and contained about 1600 inequalities collected from various fields with about 470 book pages. The present edition contains more than 3600 inequalities and has about 800 pages. The style of presentation of materials remains the same as in the first edition. The author classifies these inequalities into 10 large families under the following chapter headings: 1. Fundamental inequalities, 2. Basic in-

equalities, 3. Inequalities involving special functions, 4. Inequalities involving complex numbers and analytic functions, 5. Matrix and determinant inequalities, 6. Sequence and series inequalities, 7. Differential inequalities, 8. Integral inequalities. 9. Inequalities involving operators. 10. Inequalities arising from probability and statistics. Chapter 11 discusses some commonly used methods in proving inequalities. In the Appendix the author also lists some 100 open problems. The importance of inequalities can never be overemphasized. Numerous inequalities are spread out in the vast literature. This book will certainly be a very useful resource. It is clear that the author has made enthusiastic and ambitious efforts towards a comprehensive collection of inequalities. As in the first edition, the proofs are often sketchy or sometimes only some lines of hint are given instead of giving a complete proof. However, readers with sound mastery of mathematical analysis should have no diffculty filling the gaps or convincing themselves of the results. Furthermore, the author makes frequent careful citations of the literature so that the original source may be consulted by the reader when there is such a need. This book may be used by researchers, mathematics teachers, engineers. I recommend it to any mathematics, science, or engineering library without hesitation. It will be a valuable addition to any mathematics book collection.

The reader will find that there are no subject indices and author indices in the book. The way the literature is cited does not follow certain standard conventions widely adopted in scientific works. In the reviewer's opinion, the author could improve the book significantly if some of the unimportant inequalities were eliminated and other more useful inequlities were added with sufficient highlights. For example, it would be more useful if the book contained additional things, such as the Sobolev type embedding inequalities, eigenvalue inequalities for differential operators. e. g. Laplacian, isoperimetric inequalities. combinatorial inequalities, inequalities arising from graph theory, optimization, control, algebraic topology, and curvature problems.

In conclusion, this book has the potential to become a standard reference.

Yisong Yang (1-PINY; Brooklyn, NY)

符号说明

为节省篇幅和简化排版，在不致引起混淆的情况下，采用以下省略符号：

N,Z,R,C 依次表示自然数集（不包括数 0）、整数集、实数集、复数集. m,n,k,j,n_k 等表示自然数（不包括数 0），a,b,c,x,y 等表示实数，z,ω,ζ 等表示复数，$z=x+iy$，$\bar{z}=x-iy$，$i^2=-1$，$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$，$\mathrm{Re}z=x$，$\mathrm{Im}z=y$，$\arg z$ 为 z 的辐角主值，即 $-\pi<\arg z\leqslant\pi$；$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，$\{x\}=x-[x]$.

$\sum a_k$ 表示 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 或 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$，$\sum a_{jk}$ 表示 $\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{k=1}^{n}a_{jk}$ 或 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{jk}$，$\prod a_k$ 表示 $\prod\limits_{k=1}^{n}a_k$ 或 $\prod\limits_{k=1}^{\infty}a_k$，其中 j,k 的变化范围由上下文判别，在一个不等式中含有 a,b,c 等字母时，$\sum$、$\prod$ 分别表示循环和、积. 例如，$\sum f(a)=f(a)+f(b)+f(c)$，$\sum f(a,b)=f(a,b)+f(b,c)+f(c,a)$，$\prod f(a)=f(a)f(b)f(c)$ 等，（第三 ~ 四章用得最多）.

$\exp x$ 表示 e^x，$\log x$ 表示 $\ln x$（以 e 为底）.

$$\log^+|f(x)|=\begin{cases}\log|f(x)|, & 若\ |f(x)|\geqslant 1,\\ 0, & 若\ |f(x)|<1.\end{cases}$$

x 的符号函数 $\mathrm{sgn}x=\begin{cases}1, & 若\ x>0\\ 0, & 若\ x=0\\ -1, & 若\ x<0.\end{cases}$ $\quad\varphi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\notin A\end{cases}$ 表示 A 的特征函数.

$+\infty$ 通常用 ∞ 表示.

$R^n=\{x=(x_1,\cdots,x_n):-\infty<x_k<\infty,1\leqslant k\leqslant n\}$ 表示 n 维欧氏空间，对于 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in R^n$. $\|x\|=(\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|^2)^{1/2}$. $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 为多重指标，其中 α_k $(1\leqslant k\leqslant n)$ 为非负整数，$|\alpha|=\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k$，$\alpha!=\prod\limits_{k=1}^{n}\alpha_k!$，$D^\alpha=\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$ 表示微分算子.

$\dbinom{\alpha}{k}=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}\quad(\alpha\in R^1,k\in N)$，$\dbinom{\alpha}{0}=1$，特别当 $\alpha=n$ 为自然数时，

$$\binom{n}{k}=C_n^k=\begin{cases}\dfrac{n!}{k!(n-k)!}, & 若\ n\geqslant k,\\ 0, & 若\ n<k.\end{cases}$$

C^n 表示 n 维酉空间. 即 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in C^n$ 时，$x_1,\cdots,x_n$ 均为复数，$y=(y_1,\cdots,y_n)\in C^n$，$(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\bar{y}_k$ 为 x,y 的内积.

若无特别声明，本书出现的集 E 均为测度空间 $(X,\sum,\mu)$ 中可测集. $\mu(E)$ 表示集 E

的测度，$f\in C(E)$ 表示 f 在 E 上连续；$\int f$ 表示积分 $\int_E f(x)\mathrm{d}\mu$ 或 $\int_{R^n} f(x)\mathrm{d}x$，积分区域由上下文判别，当 f 是周期为 $T=2\pi$ 的一元函数时，$\int f$ 表示 $\int_T f(x)\mathrm{d}x$ 或 $\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x$. $f\in L^p(E)$ 表示 f 在 E 上 p 次 (L) 可积，当 f 是周期 2π 的函数时，记为 $f\in L^p_{2\pi}(1\leqslant p\leqslant\infty)$.

$$\|f\|_X=\begin{cases}\|f\|_C=\sup\{|f(x)|:x\in E\}, & \text{若 } f\in C(E),\\ \|f\|_p=\left(\int_E |f(x)|^p\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}, & \text{若 } f\in L^p(E),1\leqslant p<\infty,\end{cases}$$

$\|f\|_\infty=\inf\limits_{\mu(A)=0}\{\sup\limits_{x\in E-A}|f(x)|\}$，$\|f\|_{p,\omega}=\left(\int_E |f(x)|^p\omega(x)\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}\quad(1\leqslant p<\infty)$，其中 $\omega(x)$ 是 E 上非负权函数. 而 $\|f\|$ 表示泛函 f 的范数. $f\in BV[a,b]$ 表示 f 是 $[a,b]$ 上有界变差函数，$f\in AC[a,b]$ 表示 f 是 $[a,b]$ 上绝对连续函数. 数列 $a=(a_1,\cdots,a_n,\cdots)\in l^p(1\leqslant p<\infty)$ 的加权范数记为 $\|a\|_{p,\omega}=\left(\sum|a_k|^p\omega_k\right)^{1/p}$，式中 $\omega=(\omega_1,\cdots,\omega_n,\cdots,)$，$\forall\omega_k>0$. $\{f>\alpha\}=\{x\in E:f(x)>\alpha\}$ 为 f 的水平集，$\alpha\in R^1$.

数学式的编号：在第三章和第十三章中是以题号为单位，例如(27.1)是指第 27 号(记为 No.27)中第一式，而其余各章是以节为单位，例如(3.1)是指该章第 3 节第一式. 题号后“MC”表示数学竞赛试题(Mathematical Competition)，其中“MCM”表示中学生数学竞赛试题，“MCU”表示大学生数学竞赛试题或研究生入学试题，“IMO”表示数学奥林匹克试题，算术几何平均不等式记为 AG 不等式.

引用期刊文献时，按期刊名. 年份，卷号(期号)：页码次序；外文期刊按国际标准缩写，例如[305]1986,93(6):466～468;表示“美国数学月刊”，1986 年第 93 卷第 6 期，第 466～468 页. 但目前国际上还流行另一种格式. 记为[305]93(6)(1986),466～468. 本书由于历史原因，对这两种格式都混用. 对于图书的著录，[56]Vol. 2:112 或[56]2:112 均表示参考文献第 56 号，即波利亚、舍贵，《数学分析中的问题和定理》第 2 卷第 112 页. [120]2(1):161 表示华罗庚，《高等数学引论》第二卷第一分册第 161 页.

Contents

目　　录*

第一章　基本不等式

* 为读者阅读方便,目录包含按笔画排列的主题与作者索引

第二章 数论与组合不等式

第三章　代数不等式

第四章 几何不等式

第五章　初等超越函数不等式

第六章　多项式不等式

第七章 凸函数与变分不等式

第八章　其他函数不等式

第九章 复数与解析函数不等式

第十章 行列式与矩阵不等式

第十一章 序列与级数不等式

第十二章　微分不等式

第十三章　积分不等式

第十四章 范数与算子不等式

第十五章 概率统计不等式

第十六章　集论与图论不等式

附　录

第一章　基本不等式

§1　不等式的基本性质

一、　不等式的基本性质

从实数的有序性出发,容易证明实数的下述基本性质.

1. **三分律**:任何两个实数 a,b 都有确定的序关系,即
   $a < b, a = b, a > b$ 中有且仅有一个成立.
2. **对逆性**:$a > b \Leftrightarrow b < a$.
3. **序的传递性**:若 $a < b, b < c$,则 $a < c$.
4. **加法的单调性**:若 $a < b$,则 $a + c < b + c$.

推论　(1)　若 $a < b, c < d$,则 $a + c < b + d$.

　　　　(2)　若 $a < b, c > d$,则 $a - c < b - d$.

注意:同向不等式不能相减,异向不等式不能相加.

5. 若 $a < b, c > 0$,则 $ac < bc$.
   若 $a < b, c < 0$,则 $ac > bc$.

推论　(1)　若 $a > b \geqslant 0, c > d \geqslant 0$,则 $ac > bd$.

　　　　(2)　若 $a > b > 0, d > c > 0$,则 $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$.

　　　　(3)　若 $a > b, ab > 0$,则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

6. 设 $a > b \geqslant 0$,若 $c > 0$,则 $a^c > b^c$;若 $c < 0$,则 $a^c < b^c$.
7. 设 $x > y$,若 $a > 1$,则 $a^x > a^y$;若 $0 < a < 1$,则 $a^x < a^y$.
8. 设 $x > y > 0$,若 $a > 1$,则 $\log_a x > \log_a y$;若 $0 < a < 1$,则 $\log_a x < \log_a y$.
9. 设 $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$,且 b,d 同号,则 $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.　　(1.1)

推论　设 $a < b, c > 0$,则 $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c} < 1$.

　　设 a_k 为实数,$b_k > 0, c_k > 0, 1 \leqslant k \leqslant n$,则

$$\min\left\{\frac{a_1}{b_1},\cdots,\frac{a_n}{b_n}\right\} \leqslant \frac{\sum a_k c_k}{\sum b_k c_k} \leqslant \max\left\{\frac{a_1}{b_1},\cdots,\frac{a_n}{b_n}\right\}, \tag{1.2}$$

仅当序列 $a = (a_1,\cdots,a_n)$ 和 $b = (b_1,\cdots,b_n)$ 成比例时等号成立. 特别,当所有 $c_k = 1$ 时,(1.2) 式称为 **Cauchy 不等式**;若 c_k 还满足 $c_1 > c_2 > \cdots > c_n > 0$. 则(1.2) 式还可改进为

$$\min\left\{\frac{a_1}{b_1},\cdots,\frac{a_n}{b_n}\right\}\leqslant\min\{\sigma_1,\cdots,\sigma_n\}\leqslant\frac{\sum a_kc_k}{\sum b_kc_k}\leqslant\max\{\sigma_1,\cdots,\sigma_n\}\leqslant\max\left\{\frac{a_1}{b_1},\cdots,\frac{a_n}{b_n}\right\},\tag{1.3}$$

式中 $\sigma_k=(\sum_{j=1}^k a_j)/(\sum_{j=1}^k b_j),1\leqslant k\leqslant n.$

10. 设 $a_k>0,b_k>0,1\leqslant k\leqslant n$,则

$$\min\left\{\frac{a_1}{b_1},\cdots,\frac{a_n}{b_n}\right\}\leqslant\left(\frac{\prod a_k}{\prod b_k}\right)^{1/n}\leqslant\max\left\{\frac{a_1}{b_1},\cdots,\frac{a_n}{b_n}\right\}.\tag{1.4}$$

二、 绝对值不等式

1. $|a|\leqslant b,b>0\Leftrightarrow-b\leqslant a\leqslant b.$

特别地,$-|a|\leqslant a\leqslant|a|$,仅当 $a\leqslant0$ 时,左边的等号成立;而仅当 $a\geqslant0$ 时,右边的等号成立.

2. $|a|>b>0\Leftrightarrow a>b$ 或 $a<-b.$

3. **三角不等式:** $|a+b|\leqslant|a|+|b|$,仅当 $ab\geqslant0$ 时等号成立.

推论 1 $|a+b|\geqslant||a|-|b||$,仅当 $ab\leqslant0$ 时等号成立;

推论 2 设 $\{a_k\}$ 为实或复数列,则

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}a_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|;$$

推论 3 $\left|\sum a_k\right|\geqslant|a_j|-\sum_{k\neq j}|a_k|.$

4. 设 $z=x+iy$ 为复数,$\bar{z}=x-iy$ 为 z 的共轭复数,则 $|x|\leqslant|z|,|y|\leqslant|z|,$

$$\max\{|x|,|y|\}\leqslant|z|\leqslant2\max\{|x|,|y|\},$$

$$\frac{1}{\sqrt2}(|x|+|y|)\leqslant|z|\leqslant|x|+|y|,\tag{1.5}$$

$$||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|.\tag{1.6}$$

仅当 $z_1\bar{z}_2\geqslant0$ 时,(1.6) 式右边的等号成立,而仅当 $z_1\bar{z}_2\leqslant0$ 时,(1.6) 式左边的等号成立,当 $z_1\neq0,z_2\neq0$ 时,(1.6) 式右边仅当存在 $c>0$,使 $z_2=cz_1$ 时等号成立.

5. **Hlawka 不等式:**

$$|a_1|+|a_2|+|a_3|-|a_1+a_2|-|a_2+a_3|-|a_3+a_1|+|a_1+a_2+a_3|\geqslant0.\tag{1.7}$$

当 a_1,a_2,a_3 为 R^m 中的向量或实赋范线性空间中的向量,(1.7) 式仍成立.([305]1965,72:753 ~ 754).2000 年,Takahasi,S. E. 等推广了(1.7) 式并证明了在 Banach 空间$(X,\|\cdot\|)$中(1.7) 式与下述 **Djokovic 不等式**等价:

$$\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\left\|\sum_{m=1}^k a_{i_m}\right\|\leqslant\binom{n-2}{k-2}\left\{\frac{n-k}{k-1}\sum_{k=1}^n\|a_k\|+\left\|\sum_{k=1}^n a_k\right\|\right\},(2\leqslant k\leqslant n-1),n\geqslant3.$$

([303]2000,3(1):63 ~ 67 和[398]2000,1(3):343 ~ 350)

1963 年 Freudenthal,H 提出:设 $a_k \in R^m$. 对于什么样的 n,成立

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} |a_i + a_j| + \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} |a_i + a_j + a_k| - \cdots + (-1)^{n-1} \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \geqslant 0$$

1997 年 Jiang-cheng 证明上式仅对 $n=1, n=2$(Minkowski 不等式) 和 $n=3$(即(1.7) 式) 成立. (Vietnam J. Math, 1997, 25(3): 271 ~ 273). $n \geqslant 4$ 时上式不成立.

1964 年 Adamovic 将(1.7) 式推广为

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} |a_i + a_j| \leqslant (n-2)\sum_{k=1}^{n} |a_k| + \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right|. \tag{1.8}$$

式中 $a_k \in R^m$. ([355]1964, 1(16): 39 ~ 43)

6. **Hornich 不等式**:设 $a, a_k \in R^m$ 满足

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = -ta, t \geqslant 1, \tag{1.9}$$

则

$$\sum_{k=1}^{n} (|a_k + a| - |a_k|) \leqslant (n-2)|a|. \tag{1.10}$$

注意当(1.9) 式中的 $t < 1$ 时,(1.10) 式不一定成立. ([4]2.25.3 中利用(1.7) 式,对(1.10) 式给出了一个简洁的证明).

三、 超距不等式

距离空间(X,d) 中的距离 d 满足

三角不等式 $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z), x,y,z \in X.$ (1.11)

其加强形式 $d(x,z) \leqslant \max\{d(x,y), d(y,z)\}$ (1.12)

称为**超距不等式** 当 $d(x,y) \neq d(y,z)$ 时,(1.12) 式中等号成立.

四、 不等式延拓原理

设(X,d) 为距离空间,$\overline{R} = [-\infty, \infty]$ 为广义实直线,$f, g: X \to \overline{R}$ 为连续映射,A 为 X 的稠密子集. 若 $\forall x \in A, f(x) \leqslant g(x)$,则 $\forall x \in X, f(x) \leqslant g(x)$. (证明见[74]Vol. 1,57)

§2 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式

著名的 Hölder 不等式与 Minkowski 不等式最初是用数列形式给出的,后由 Riesz,F. 将其推广到积分形式,成为建立 L^p 空间理论的基本工具. 而且在许多领域都是最常用的基本不等式.

一、Hölder 不等式的基本形式

(一) Hölder 不等式的基本形式

1889 年 Hölder 证明:设 $a_k, b_k \geqslant 0, k = 1,2,\cdots,n, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,若 $p > 1$,则

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.1}$$

若 $0 < p < 1$,则(2.1)式中不等号反向,仅当$\{a_k\}$或$\{b_k\}$为零数列,或存在两个不同时为零的非负常数 c_1, c_2,使得 $c_1 a_k^p = c_2 b_k^q, k = 1, 2, \cdots, n$,(2.1)式中等号成立.

注 Roger 比 Hölder 早一年即 1888 年得出(2.1)式,因此,1998 年 L. Maligranda 提出(2.1)式应称为 Roger 不等式或至少应称为 Roger-Hölder 不等式,([303]1998,1(1):69 ~ 83).但本书仍按惯例称为 Hölder 不等式.

1. **Hölder 不等式的离散形式(有限和或无穷和)**:设 $a = (a_1, \cdots, a_n)$ 或 $a = (a_1, \cdots, a_n, \cdots)$ 为实数或复数列,令

$$\|a\|_p = \begin{cases} \left(\sum_k |a_k|^p\right)^{1/p}, & 0 < p < \infty, \\ \sup_k |a_k|, & p = \infty, \end{cases} \tag{2.2}$$

满足条件$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ 的 p, q 称为共轭指数,当 $p = 1$ 时规定 $q = \infty$.若 $1 \leqslant p \leqslant \infty$,则

$$\|ab\|_1 \leqslant \|a\|_p \|b\|_q, \tag{2.3}$$

即

$$\sum_k |a_k b_k| \leqslant \begin{cases} \left(\sum_k |a_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_k |b_k|^q\right)^{1/q}, & 1 < p < \infty, \\ \left(\sum_k |a_k|\right)\left(\sup_k |b_k|\right), & p = 1, \\ \left(\sup_k |a_k|\right)\left(\sum_k |b_k|\right), & p = \infty. \end{cases} \tag{2.4}$$

若 $0 < p < 1$,则上述不等号反向.当 $1 < p < \infty$ 时仅当存在实数 θ 和不全为零的非负实数 c_1, c_2,使得对所有的 k,$c_1 |a_k|^p = c_2 |b_k|^q$ (即 $|b_k| = c|a_k|^{p-1}, c > 0$),而且 $\arg(a_k b_k) = \theta$ 时等号成立.

注 1 若 $p < 0$(这时要求所有 $a_k \neq 0$),则 $0 < q < 1$,于是,将 p, q 互换,a, b 互换,又归结为 $0 < p < 1$ 的情形.

当 $p = q = 2$ 时,(2.4)式称为 Cauchy 不等式(或 Schwarz 不等式,Cauchy-Schwarz 不等式,或 Bunyakovskii 不等式).

注 2 当 p, q 为满足条件"$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} \geqslant 1, \min\left\{\dfrac{1}{p}, \dfrac{1}{q}\right\} > 1$"的非共轭指数时,Hölder 不等式仍成立.

证明如下:设$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = r > 1$.令 $p' = pr$,$q' = qr$,则$\dfrac{1}{p'} + \dfrac{1}{q'} = 1$.于是

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p}{\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^{pr}\right)^{\frac{1}{r}}} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{|a_k|^{pr}}{\sum_{j=1}^{n} |a_j|^{pr}}\right)^{\frac{1}{r}} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{|a_k|^{pr}}{\sum_{j=1}^{n} |a_j|^{pr}}\right) = 1.$$

从而

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}} = \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^{pr}\right)^{\frac{1}{pr}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^{qr}\right)^{\frac{1}{qr}}$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

证毕.

设 $0 < r < p$,则存在 $q > 0$,使得$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$,而且

$$\| ab \|_r \leqslant \| a \|_p \| b \|_q.$$

注 3 $a = (a_1, \cdots, a_n)$ 或 $a = (a_1, \cdots, a_n, \cdots)$ 的加权形式定义为:

$$\| a \|_{p,\omega} = \left(\sum_{k} |a_k|^p \omega_k\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 0 < p < \infty,$$

$$\| a \|_{\infty,\omega} = \sup_{n} |a_k| \omega_k.$$

式中 $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_n)$ 或 $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_n, \cdots)$ 为正权.

Liapunoff 不等式:设 $0 < p < s < r$,则$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^s w_k\right)^{r-p}$

$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p w_k\right)^{r-s} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^r w_k\right)^{s-p}$$

Hölder 不等式的逆命题:设 $p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, B > 0$,则对所有满足

$$\| a \|_p = \left(\sum_{k} |a_k|^p\right)^{1/p} \leqslant A \tag{2.5}$$

的 $a = \{a_k\}$,成立

$$\| ab \|_1 = \sum_{k} |a_k b_k| \leqslant AB$$

的充要条件是 $\| b \|_q = \left(\sum_{k} |b_k|^q\right)^{1/q} \leqslant B.$

(2.3) 式可推广为:设 $a_{jk} > 0$,且 $r > 0, p_j > 0, \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{p_j} \geqslant \frac{1}{r}$, 则

$$\left(\sum_{k} \prod_{j=1}^{m} a_{jk}^{1/p_j}\right)^{1/r} \leqslant \prod_{j=1}^{m} \left(\sum_{k} a_{jk}^{1/r}\right)^{1/p_j}, \tag{2.6}$$

仅当$\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{p_j} = \frac{1}{r}$且矩阵$(a_{jk})$的列向量成比例时等号成立.(2.3)式还可推广为加权形式:

设 $1 < p_j < \infty, \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{p_j} = 1, \omega_k > 0$,则

$$\sum_{k} \left(\omega_k \prod_{j=1}^{m} |a_{jk}|\right) \leqslant \prod_{j=1}^{m} \left(\sum_{k} \omega_k |a_{jk}|^{p_j}\right)^{1/p_j}. \tag{2.7}$$

2. **Hölder 不等式的积分形式**:设 p, q 为共轭指数,即$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.令

$$\| f \|_p = \left(\int_E |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}, 0 < p < \infty, \tag{2.8}$$

$$\| f \|_\infty = \operatorname*{esssup}_{x \in E} |f(x)| = \inf_{\mu(A)=0} \{ \sup_{x \in E-A} |f(x)| \}. \tag{2.9}$$

若 $f \in L^p(E)$, $g \in L^q(E)$，则当 $1 \leqslant p \leqslant \infty$ 时，$fg \in L^1(E)$，且

$$\| fg \|_1 \leqslant \| f \|_p \| g \|_q. \tag{2.10}$$

即

$$\int_E | f(x)g(x) | \mathrm{d}x \leqslant \left(\int_E | f(x) |^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \left(\int_E | g(x) |^q \mathrm{d}x\right)^{1/q}, \ 1 < p < \infty; \tag{2.11}$$

$$\int_E | f(x)g(x) | \mathrm{d}x \leqslant \left(\int_E | f(x) | \mathrm{d}x\right)(\operatorname*{esssup}_{x\in E} | g(x) |), \ p = 1, \tag{2.12}$$

若 $0 < p < 1$，则上述不等号反向. 当 $1 < p < \infty$ 时，仅当存在实数 β 和不全为零的实数 c_1, c_2，使得

$$c_1 | f(x) |^p = c_2 | g(x) |^q \text{ 和 } \arg(f(x)g(x)) = \beta \tag{2.13}$$

在 E 上几乎处处成立时(2.11)式中等号成立. 当 $p = 1$ 时，仅当存在实数 λ，使得 $| g(x) | \leqslant \lambda$ $a.e.$ 于 E 且 $f(x) \neq 0$ 时，$| g(x) | = \lambda$，(2.12)式中等号成立.

特别当 $p = q = 2$ 时，

$$\int_E | f(x)g(x) | \mathrm{d}x \leqslant (\int_E | f(x) |^2 \mathrm{d}x)^{1/2} (\int_E | g(x) |^2 \mathrm{d}x)^{1/2} \tag{2.14}$$

称为 **Cauchy 不等式(或与(2.4)式类似称为 Schwarz 不等式等)**.

将(2.8)式中 $\| f \|_p$ 换成加权范数：

$$\| f \|_{p,\omega} = (\int_E | f(x) |^p \omega(x) \mathrm{d}x)^{1/p}, 1 < p < \infty, \tag{2.15}$$

式中 $\omega(x)$ 在 E 上几乎处处大于零，称为**权函数**，则

$$\| fg \|_{1,\omega} \leqslant \| f \|_{p,\omega} \| g \|_{q,\omega} \quad (1 \leqslant p \leqslant \infty), \tag{2.16}$$

即

$$\int_E | f(x)g(x) | \omega(x) \mathrm{d}x \leqslant (\int_E | f(x) |^p \omega(x) \mathrm{d}x)^{1/p} (\int_E | f(x) |^q \omega(x) \mathrm{d}x)^{1/q} \tag{2.17}$$

$(1 < p < \infty)$ 称为**加权 Hölder 不等式**.

3. 利用抽象测度空间 $(X, \sum, \mu)$ 上的积分，可以统一处理上述离散量求和的形式和连续量的积分形式：设 $E \in \sum$，令

$$\| f \|_{p,\omega} = (\int_E | f |^p \omega \mathrm{d}\mu)^{1/p}, 0 < p < \infty. \tag{2.18}$$

$$\| f \|_{\infty,\omega} = \inf_{\mu(A)=0} \{ \sup_{x \in E-A} | f(x) | \omega(x) \}. \text{ 则}$$

$$\| fg \|_{1,\omega} \leqslant \| f \|_{p,\omega} \| g \|_{q,\omega} \quad (1 \leqslant p \leqslant \infty). \tag{2.19}$$

特别当 $1 < p < \infty$ 时，有

$$\int_E | fg | \omega \mathrm{d}\mu \leqslant (\int_E | f |^p \omega \mathrm{d}\mu)^{1/p} (\int_E | g |^q \omega \mathrm{d}\mu)^{1/q}.$$

Hölder 不等式的逆命题：设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$，$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$，$f$ 在 E 上可测，则

$$\| f \|_{p,\omega} = \sup\{ | \int_E fg\omega \mathrm{d}\mu | : \| g \|_{q,\omega} \leqslant 1 \}; \tag{2.20}$$

若 μ 是半定的(特别是 σ 有限的),则还成立

$$\| f \|_{\infty,\omega} = \sup\{ | \int_E fg\omega \mathrm{d}\mu | : \| g \|_{1,\omega} \leqslant 1 \}. \tag{2.21}$$

(2.19) 式还有以下有用的变形:设 E 上的可测函数 f 满足:对所有在 E 上可积的简单函数 g,都成立

$$\int_E | fg | \omega \leqslant C \| g \|_{q,\omega}. \tag{2.22}$$

则当 μ 为半定(特别是 σ 有限) 时,$f \in L_\omega^p(E)$ 且 $\| f \|_{p,\omega} \leqslant C$.

注 设 $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k, E_k \in \sum, \mu(E_k) < \infty$,则称 μ 是 σ 有限的;若对所有 $A \in \sum$,$\mu(A) < \infty$,都存在 $B \in \sum$,使得 $B \subset A$,且 $0 < \mu(B) < \infty$,则称 μ 为半定的,每个 σ 有限测度都是半定的,但其逆不成立. 在本书中,对于 $\| f \|_\infty$ 的情形,我们总假设 μ 是半定的(或 σ 有限的).

(2.19) 式可推广为:设 $1 < p_k < \infty, \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{p_k} = 1, f_k \in L_\omega^{p_k}(E)$,则 $\prod_{k=1}^{m} f_k \in L_\omega^1(E)$,且

$$\int_E | \prod_{k=1}^{m} f_k | \omega \mathrm{d}\mu \leqslant \prod_{k=1}^{m} (\int_E | f_k |^{p_k} \omega \mathrm{d}\mu)^{1/p_k}. \tag{2.23}$$

4. 关于泛函的广义 **Hölder 不等式**:设 X 为任一集合,$x: X \to R_+^1, x(t) > 0, t \in X$,泛函 f 满足:

1) $f(0) = 0$;

2) $\forall \lambda > 0, f(\lambda x) = \lambda f(x)$;

3) 若 $0 < x(t) \leqslant y(t)$,则 $f(x) \leqslant f(y)$;

4) $f(x + y) \leqslant f(x) + f(y)$,式中 $x(t), y(t) > 0$.

$1 < p_k < \infty, \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{p_k} = 1$,则

$$f(| \prod_{k=1}^{m} x_k |) \leqslant \prod_{k=1}^{m} [f(| x_k |^{p_k})]^{1/p_k}. \tag{2.24}$$

5. 1985 年邱福成将 Hölder 不等式推广到正线性算子上去,称为线性算子的广义 Hölder 不等式:

设 $T: L[a,b] \to L[a,b]$ 为正线性算子,$-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty, f \in L^p[a,b], g \in L^q[a,b], 1 \leqslant p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,则对 $[a,b]$ 中几乎所有的 x,成立

$T(| fg |, x) \leqslant [T(| f |^p, x)]^{1/p} [T(| g |^q, x)]^{1/q}, 1 < p < \infty$;

$T(| fg |, x) \leqslant T(| f |, x) \operatorname{esssup}_x | g(x) |, p = 1$.

(证明见[339]1985,5(3):55 ~ 58)

(二) Hölder 不等式基本形式的典型证明方法

Hölder 不等式基本形式的证明,可以在实分析与泛函分析的许多著作中找到,如[58],[64],[98] 等,下面对(2.19) 式与(2.20) 式给出一个简洁的证明.

引理 2.1 设 $a, b \geqslant 0, 0 < \lambda < 1$,则成立 **Young 不等式**:

$$a^{\lambda}b^{1-\lambda} \leqslant \lambda a + (1-\lambda)b. \tag{2.25}$$

仅当 $a = b$ 时等号成立.

证 若 $b = 0$,则(2.25) 式成立,若 $b > 0$,令 $t = a/b$,则(2.25) 式归结为

$$t^{\lambda} \leqslant \lambda t + (1-\lambda). \tag{2.26}$$

令 $f(t) = t^{\lambda} - \lambda t$,则 $t < 1$ 时 f 严格递增,$t > 1$ 时 f 严格递减,所以,$f(t) \leqslant f(1) = 1-\lambda$. 此即(2.26) 式.

(2.19) 式的证明:不妨设 $\| f \|_{p,\omega} = \| g \|_{q,\omega} = 1$.(否则 f,g 可分别用 $\dfrac{f}{\| f \|_{p,\omega}}$, $\dfrac{g}{\| g \|_{q,\omega}}$ 代替.)在(2.25) 式中令 $\lambda = \dfrac{1}{p}$,$a = | f(x) |^p$,$b = | g(x) |^q$,则

$$| fg | \leqslant \frac{1}{p} | f |^p + \frac{1}{q} | g |^q.$$

两边乘以 $\omega > 0$ a.e. 并且在 E 上积分得到

$$\int_E | fg | \omega \mathrm{d}\mu \leqslant \frac{1}{p}\int_E | f |^p \omega \mathrm{d}\mu + \frac{1}{q}\int_E | g |^q \omega \mathrm{d}\mu = \frac{1}{p} \| f \|_{p,\omega}^p + \frac{1}{q} \| g \|_{q,\omega}^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \| f \|_{p,\omega} \| g \|_{q,\omega}.$$

仅当 $| f |^p = | g |^q$ a.e. 于 E 时等号成立. 对于(2.19) 式中等号仅当满足(2.13) 式时成立.

(2.20) 式的证明:若 $f = 0$ a.e. 于 E,则(2.20) 式成立.

下面设 $\| f \|_{p,\omega} \neq 0$. 若 $1 \leqslant p < \infty$,则由 Hölder 不等式(2.19) 式,有 $\left| \int_E fg\omega \mathrm{d}\mu \right| \leqslant \| f \|_{p,\omega} \| g \|_{q,\omega}$,从而

$$\sup\left\{ \left| \int_E fg\omega \mathrm{d}\mu \right| : \| g \|_{q,\omega} \leqslant 1 \right\} \leqslant \| f \|_{p,\omega}. \tag{2.27}$$

为证反向不等式. 取 $g = \dfrac{| f |^{p-1}}{\| f \|_{p,\omega}^{p-1}}(\mathrm{sgn} f)$,则 $\| g \|_{q,\omega} = 1$,且

$$\int_E fg\omega \mathrm{d}\mu = \int_E \frac{| f |^{p-1}}{\| f \|_{p,\omega}^{p-1}}(\mathrm{sgn} f) f\omega \mathrm{d}\mu = \| f \|_{p,\omega}. \tag{2.28}$$

所以(2.20) 式成立.

当 $p = \infty$ 时,对于 $\| g \|_{1,\omega} \leqslant 1$,由 Hölder 不等式(2.19),有

$$\left| \int_E fg\omega \mathrm{d}\mu \right| \leqslant \| f \|_{\infty,\omega} \| g \|_{1,\omega} \leqslant \| f \|_{\infty,\omega}. \tag{2.29}$$

另一方面,由 μ 的半定性,$\forall \varepsilon > 0$,$\exists A \in \sum$,使得

$$| f | > \| f \|_{\infty,\omega} - \varepsilon \quad \text{a.e. 于 } A, \text{且 } 0 < \mu(A) < \infty.$$

取 $g = \dfrac{1}{\omega(A)}(\mathrm{sgn}\ f)\varphi_A$,式中 φ_A 为 A 的特征函数,$\omega(A) = \int_A \omega \mathrm{d}\mu$.

则 $\| g \|_{1,\omega} = 1$,且

$$\int_E fg\omega \mathrm{d}\mu = \frac{1}{\omega(A)}\int_A f(\mathrm{sng}\ f)\omega \mathrm{d}\mu \geqslant \| f \|_{\infty,\omega} - \varepsilon.$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性,知(2.21) 式成立.

利用加权 AG 不等式：设 $a_k \geqslant 0, p_k > 0, \sum_{k=1}^{m} p_k = 1$. 则

$$\prod_{k=1}^{m} a_k^{p_k} \leqslant \sum_{k=1}^{m} p_k a_k. \tag{2.30}$$

可类似地证明(2.23) 式.

二、 Minkowski 不等式的基本形式

1. **Minkowski 不等式的离散形式(有限和或无穷和)**(1896)：设 $a = (a_1, \cdots, a_n)$ 或 $a = (a_1, \cdots, a_n, \cdots)$ 是实数或复数列，$\| a \|_p$ 仍按(2.2) 式定义. 则当 $1 \leqslant p \leqslant \infty$ 时，有

$$\| a + b \|_p \leqslant \| a \|_p + \| b \|_p. \tag{2.31}$$

即：$(\sum_k | a_k + b_k |^p)^{1/p} \leqslant (\sum_k | a_k |^p)^{1/p} + (\sum_k | b_k |^p)^{1/p}, 1 \leqslant p < \infty,$

$$\sup_k | a_k + b_k | \leqslant \sup_k | a_k | + \sup_k | b_k |, \ p = \infty.$$

当 $p < 1\ (p \neq 0)$ 时不等号反向. 当 $p < 0$ 时，要求所有 a_k, b_k 和 $a_k + b_k$ 均不为零. 当 $p \neq 0, 1$ 时，仅当存在不全为零的非负实数 c_1, c_2，使得 $\forall k, c_1 a_k = c_2 b_k$ 时等号成立；当 $p = 1$ 时，(2.31) 式中仅当 $\forall k, \arg a_k = \arg b_k$ 时等号成立.

(2.31) 式可推广为：设 $a_j = (a_{j1}, \cdots, a_{jk}, \cdots), 1 \leqslant j \leqslant m$，则

$$\| (\sum_{j=1}^{m} a_j) \|_p \leqslant \sum_{j=1}^{m} \| a_j \|_p, 1 \leqslant p \leqslant \infty. \tag{2.32}$$

即当 $1 \leqslant p < \infty$ 时，有

$$[\sum_k (\sum_{j=1}^{m} | a_{jk} |)^p]^{1/p} \leqslant \sum_{j=1}^{m} (\sum_k | a_{jk} |^p)^{1/p}. \tag{2.33}$$

注　在(2.31) 式中，将 p 换成 $1/p$，得到常用的另一形式：

当 $1 \leqslant p < \infty$ 时，有

$$(\sum_k | a_k + b_k |^{1/p})^p \geqslant (\sum_k | a_k |^{1/p})^p + (\sum_k | b_k |^{1/p})^p; \tag{2.34}$$

而当 $0 < p < 1$ 时，不等号反向，即

$$(\sum_k | a_k + b_k |^{1/p})^p \leqslant (\sum_k | a_k |^{1/p})^p + \sum_k | b_k |^{1/p})^p. \tag{2.35}$$

(2.33) 式还可推广为加权形式：设 $p_j, q_k > 0, 1 < p < \infty$，则

$$\{\sum_{k=1}^{\infty} q_k (\sum_{j=1}^{\infty} p_j | a_{jk} |)^p\}^{1/p} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} p_j (\sum_{k=1}^{\infty} q_k | a_{jk} |^p)^{1/p}. \tag{2.36}$$

注　(2.31)、(2.33) 式中关于求和号 $\sum$ 是齐次的，因而它们有关于各种平均的类似. 例如，设 $g(x) = \log x, M_g(a_k) = g^{-1}(\sum_k g(a_k))$，则

$$M_g(\frac{a_k + b_k}{2}) \leqslant \frac{1}{2} M_g(a_k) + \frac{1}{2} M_g(b_k). \tag{2.37}$$

2. **Minkowski 不等式的积分形式**：设 $f, g \in L^p(E), 1 \leqslant p \leqslant \infty$，则 $f + g \in L^p(E)$，且

$$\| f+g \|_p \leqslant \| f \|_p + \| g \|_p. \tag{2.38}$$

即当 $1 \leqslant p < \infty$ 时，有

$$\left(\int_E |f+g|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_E |f|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} + \left(\int_E |g|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}. \tag{2.39}$$

当 $0 < p < 1$ 时，上述不等号反向. (2.38) 式中等号成立的充要条件：当 $p > 1$ 时是存在不全为零的非负实数 c_1, c_2，使得

$$c_1 f(x) = c_2 g(x) \quad \text{a.e. 于 } E;$$

而当 $p = 1$ 是 $\arg f(x) = \arg g(x)$ a.e. 于 E. 或存在非负可测函数 h，使得 $fh = g$ a.e. 于集 $A = \{x : f(x)g(x) \neq 0\}$.

3. 利用抽象测度空间 $(X, \sum, \mu)$ 上的积分，可以统一处理上述离散形式和积分形式. 利用(2.18) 式，有

$$\| f+g \|_{p,\omega} \leqslant \| f \|_{p,\omega} + \| g \|_{p,\omega} (1 \leqslant p \leqslant \infty). \tag{2.40}$$

特别当 $1 \leqslant p < \infty$ 时，有

$$\left(\int_E |f+g|^p \omega \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_E |f|^p \omega \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} + \left(\int_E |g|^p \omega \mathrm{d}\mu\right)^{1/p}. \tag{2.41}$$

当 $0 < p < 1$ 时，不等号反向.

注 因为 $0 < p < 1$ 时，(2.40) 式中不等号要反向. 所以，$\| \cdot \|_{p,\omega}$ 不是范数，但由于这时成立与(2.40) 式等价的：

$$\| f+g \|_{p,\omega}^p \leqslant \| f \|_{p,\omega}^p + \| g \|_{p,\omega}^p \quad (0 < p < 1), \tag{2.42}$$

故仍可按 $d(f,g) = \| f-g \|_{p,w}^p$ 定义距离，使 $L^p(E)$ 形成一个完备的距离空间. 当 $0 < p < 1$ 时，还成立

$$\| f \|_{p,\omega} + \| g \|_{p,\omega} \leqslant \| f+g \|_{p,\omega} \leqslant 2^{(1/p)-1} (\| f \|_{p,\omega} + \| g \|_{p,\omega}).$$

证 若 $p = 1$ 或 $f+g = 0$ a.e. 于 E，则(2.40) 式显然成立.

若 $1 < p < \infty$，则从 $|f+g|^p \omega \leqslant (|f|+|g|)|f+g|^{p-1}\omega$. 和 Hölder 不等式(2.19) 式并注意到 $(p-1)q = p$ (p, q 为一对共轭指数)，得到

$$\| f+g \|_{p,\omega}^p = \int_E |f+g|^p \omega \mathrm{d}\mu \leqslant \| f \|_{p,\omega} \| |f+g|^{p-1} \|_{q,\omega}$$

$$+ \| g \|_{p,\omega} \| |f+g|^{p-1} \|_{q,\omega} = (\| f \|_{p,\omega} + \| g \|_{p,\omega}) \left(\int_E |f+g|^p \omega \mathrm{d}\mu\right)^{1/q}.$$

从而 $\| f+g \|_{p,\omega} = \left(\int_E |f+g|^p \omega \mathrm{d}\mu\right)^{1-(1/q)} \leqslant \| f \|_{p,\omega} + \| g \|_{p,\omega}$. 证毕.

1986 年，王志雄通过证明函数

$$f(t) = \left(\left[\sum_{k=1}^n x_k (y_k + t)^\alpha\right]^{1/\alpha}\right) / \left(\left[\sum_{k=1}^n x_k (y_k + t)^\beta\right]^{1/\beta}\right)$$

$(x_k, y_k > 0, \beta > \alpha)$ 在 $[0, \infty)$ 上递增且仅当 $y_1 = y_2 = \cdots = y_n$ 时 $f(t)$ 为常值函数，证明

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k{}^\alpha\right)^{1/\alpha} \leqslant \left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^r \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k{}^\beta\right)^{1/\beta}, \text{式中 } r = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta},$$

仅当 $y_1 = \cdots = y_n$ 时等号成立.

取 $\alpha = 1, \beta = p > 1, x_k = b_k^q, y_k = (\frac{a_k^p}{b_k^q})^{1/p}$，即得 Hölder 不等式(2.1).

取 $\alpha = 1, \beta = p > 1, x_k = (a_k + b_k)^p, y_k = a_k/(a_k + b_k)$，即可得 Minkowski 不等式(2.31).([345]1986,3:36 ~ 37)

4. **广义 Minkowski 不等式**：设 $(X, \sum_1, \mu_1)$ 和 $(Y, \sum_2, \mu_2)$ 是两个抽象测度空间. f 在 σ 有限的乘积空间 $X \times Y$ 上可测，则当 $1 \leqslant p < \infty$ 时，成立

$$\left\{\int_Y \left(\int_X | f(x,y) | \mathrm{d}\mu_1\right)^p \mathrm{d}\mu_2\right\}^{1/p} \leqslant \int_X \left(\int_Y | f(x,y) |^p \mathrm{d}\mu_2\right)^{1/p} \mathrm{d}\mu_1, \tag{2.43}$$

仅当 $f(x,y) = g_1(x)g_2(y)$ 时等号成立. 若将(2.43)式记为

$$\left\| \int_X | f(x, \cdot) | \mathrm{d}\mu_1 \right\|_p \leqslant \int_X \| f(x, \cdot) \|_p \mathrm{d}\mu_1, \tag{2.44}$$

则(2.44)式对 $p = \infty$ 也成立.

证 设 φ 是 Y 上正的可测函数，且 $\|\varphi\|_q \leqslant 1$.

记 $g(y) = \int_X | f(x,y) | \mathrm{d}\mu_1$，则由 Fubini 定理，

$$\int_Y g(y)\varphi(y)\mathrm{d}\mu_2 = \int_Y \left(\int_X | f(x,y) | \mathrm{d}\mu_1\right)\varphi(y)\mathrm{d}\mu_2$$

$$= \int_X \left(\int_Y | f(x,y) | \varphi(y)\mathrm{d}\mu_2\right)\mathrm{d}\mu_1.$$

由 Hölder 不等式(2.19)有

$$\int_Y | f(x,y) | \varphi(y)\mathrm{d}\mu_2 \leqslant \left(\int_Y | f(x, \cdot) |^p \mathrm{d}\mu_2\right)^{1/p}\left(\int_Y \varphi(y)^q \mathrm{d}\mu_2\right)^{1/q}$$

$$= \| f(x, \cdot) \|_p \|\varphi\|_q.$$

于是，$\left| \int_Y | g(y) | \varphi(y)\mathrm{d}\mu_2 \right| \leqslant \int_X \| f(x, \cdot) \|_p \mathrm{d}\mu_1 \cdot \|\varphi\|_q$.

再由(2.20)式，得

$$\| g \|_p = \sup\left\{\int_Y | g(y) | \varphi(y)\mathrm{d}\mu_2 : \|\varphi\|_q \leqslant 1\right\} \leqslant \int_X \| f(x, \cdot) \|_p \mathrm{d}\mu_1.$$

5. **Minkowski 型不等式的其他形式：**

(1) **乘积型 Minkowski 不等式**：设 $a_k, b_k \geqslant 0$，则

$$\left\{\prod_{k=1}^n (a_k + b_k)\right\}^{1/n} \geqslant \left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{1/n}. \tag{2.45}$$

证 由 AG 不等式，有

$$\left\{\prod_{k=1}^n a_k\right\}^{1/n} = \min\left\{\sum_{k=1}^n \frac{a_k c_k}{n} : \prod_{k=1}^n c_k = 1, c_k \geqslant 0\right\}.$$

于是，(下面求 min 的范围是 $D(c) = \{c = (c_1, \cdots, c_n) :. \prod_{k=1}^n c_k = 1, c_k \geqslant 0\}$)

$$\left\{\prod_{k=1}^n (a_k + b_k)\right\}^{1/n} = \min \sum_{k=1}^n \frac{(a_k + b_k)c_k}{n} \geqslant \min \sum_{k=1}^n \frac{a_k c_k}{n} + \min \sum_{k=1}^n \frac{b_k c_k}{n}$$

$$= \left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{1/n}. \qquad ([2]26)$$

(2) **Mahler 不等式**：设 X 为 Hilbert 空间，若函数 F 满足：

① $F(x) > 0,\ x \neq 0$；

② 对 $t \geqslant 0,\ F(tx) = tF(x)$；

③ $F(x+y) \leqslant F(x) + F(y)$.

则称 $F(x)$ 为 x 的**广义范数**.

$G(y) = \max_x \left\{ \frac{(x,y)}{F(x)} \right\}$ 称为 F 的极函数，则内积

$$(x,y) \leqslant F(x)G(y). \tag{2.46}$$

(3) **行列式的 Minkowski 不等式**：设 A、B 为 n 阶正定矩阵，则

$$|A|^{1/n} + |B|^{1/n} \leqslant |A+B|^{1/n}. \tag{2.47}$$

式中 $|A| = \det A$ 表示 A 相应的行列式.

推论 设 A_k 为 n 阶正定矩阵，则 $\forall \lambda_k > 0$，有

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k |A_k|^{1/n} \leqslant \left| \sum_{k=1}^m \lambda_k A_k \right|^{1/n}, \tag{2.48}$$

仅当任意两个矩阵 A_j, A_k 相差一个正数倍时等号成立.

证明可用数学归纳法或凸函数不等式，也可用高等代数方法. ([2]70，[345]1985，3:31 和 1987，8:39. [335]1991，3:64 ~ 66)

三、 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式的改进和推广

Hardy 等在名著[1]中再三强调 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式"极为重要"和"到处都要用到"，这两个不等式和 AG 不等式就构成了[1]中前面 6 章的主题，占了全书一半以上的篇幅. [2]，[4]，[10]，[22]中又补充了大量新的研究文献，一百多年来，对这两个不等式的种种改进和推广的工作一直没有中断，这么多文献已无法容纳在一本书之中. 下面仅介绍若干重要的和最新的结果.

1. 设 $a_{jk} > 0, p_j > 0, \sum_{j=1}^m \frac{1}{p_j} \geqslant 1, \omega_k \geqslant 1$，则

$$\sum_{k=1}^n \omega_k \left(\prod_{j=1}^m a_{jk} \right) \leqslant \prod_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^n \omega_k a_{jk}^{p_j} \right)^{1/p_j}. \tag{2.49}$$

若 $p_1 > 0, p_j < 0\ (j = 2, \cdots, m), \sum_{j=1}^m \frac{1}{p_j} \leqslant 1$，则(2.49)式中不等号反向.

证明(2.49)式时，可利用第 3 章 No. 103 Jensen 不等式.

2. 设 $a_k, b_k > 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} < 1, p, q > 0$. $\|a\|_p$ 由(2.2)式定义，则

$$2\|ab\|_1^{1/r} \leqslant \|a\|_p \cdot \|b\|_q + \left(\sum_k a_k^{2-p} b_k^2 \right)^{1/p} \sum_k a_k^2 b_k^{2-q})^{1/q}. \tag{2.50}$$

(Daykin-Eliezer，[319]1968，64:1023 ~ 1027)

若 $p, q > 0$，或 $p > 0, q < 0, r < 0$，则

$$\|ab\|_r \leqslant \|a\|_p \|b\|_q, \tag{2.51}$$

当 $p < 0, q < 0$ 或 $p > 0, q < 0, r > 0$ 时不等号反向.

(Aczel-Beckenbach, 1978[54]2, 转引[345]1983, 3: 24 ~ 28)

3. 1968 年 Daykin-Eliezer 证明：设 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}, Q=\prod_{j,k=1}^{n}(a_j a_k b_j b_k)^{a_j a_k b_j b_k}$,

(1) 若 $0<a_k<1, 0<b_k<1$ 或 $Q<1$ 且 $\frac{1}{r}<1$，则

$$\| ab \|_1^{1/r} \leqslant (\sum_k a_k^{2-p} b_k^2)^{1/p} (\sum_k a_k^2 b_k^{2-q})^{1/q}. \tag{2.52}$$

(2) 若 $a_k>1, b_k>1$，或 $Q>1$ 且 $\frac{1}{r}<1$，则

$$\| ab \|_1^{1/r} \leqslant \| a \|_p \| b \|_q. \tag{2.53}$$

Daykin-Eliezer 利用

$$F(x)=\left\{\sum_k a_k b_k \left(\frac{a_k^p}{a_k b_k}\right)^x\right\}^{1/p} \left\{\sum_k a_k b_k \left(\frac{a_k^q}{a_k b_k}\right)^x\right\}^{1/q}$$

的凸性来证明，证法很繁([319]1968, 64: 1023 ~ 1027). 1995 年高明哲给出了一个十分简洁的证明：因为 $0<a_k<1, 0<b_k<1$，所以 $(a_k b_k)^{1-r}\geqslant 1$. 从而 $a_k b_k \leqslant (a_k b_k)(a_k b_k)^{1-r} = (a_k b_k)^2/(a_k b_k)^r$. 对 k 求和，得到

$$\sum_k a_k b_k \leqslant \sum_k \frac{a_k^2 b_k^2}{(a_k b_k)^r} = \sum_k (a_k^{2r/p} b_k^{2r/p} a_k^{-r})$$
$$\times \left(\frac{a_k^{2r/q} b_k^{2r/q}}{b_k^r}\right) \leqslant \left(\sum_k \frac{a_k^2 b_k^2}{a_k^p}\right)^{r/p} \left(\sum_k \frac{a_k^2 b_k^2}{b_k^q}\right)^{r/q}.$$

两边开 r 次方，即得(2.52)式. ([350]1995.3)

1996 年刘证将(2.50)、(2.52)式和(2.53)式推广到 $\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{p_j}<1$ 的情形. ([344]1998, 28(4): 302 ~ 308)

4. 1990 年郝雅传证明：设 $a_{jk}>0, q_j>0, Q_m=\sum_{j=1}^{m} q_j<1, 1\leqslant j\leqslant m, 1\leqslant k\leqslant n$，则

$$\sum_{k=1}^{n}(\prod_{j=1}^{m} a_{jk}^{q_j}) \leqslant n^{(1-Q_m)} \prod_{j=1}^{m}(\sum_{k=1}^{n} a_{jk})^{q_j}, \tag{2.54}$$

仅当 $(a_{1k}), (a_{2k}), \cdots, (a_{mk})$ 中每组都是常数时等号成立.

推论 设 $a_k>0, q_k>0, 1\leqslant k\leqslant n. 0<\sum_{k=1}^{n} q_k<1$，则

$$\prod_{k=1}^{n} a_k^{q_k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} q_k a_k + (1-\sum_{k=1}^{n} q_k). \tag{2.55}$$

这些结果还推广到四元数矩阵上. ([342]1990, 5(4): 42 ~ 47)

5. 1998 年高明哲将内积空间 X 中的 Cauchy 不等式

$$|(x,y)| \leqslant \| x \| \| y \| \tag{2.56}$$

改进为

$$|(x,y)|^2 \leqslant \| x \|^2 \| y \|^2 - G(x,y,z), \tag{2.57}$$

式中 $\| x \| = \sqrt{(x,x)}, z\in X$ 为任意向量，且 $\| z \| = 1$.

$$G(x,y,z)=(\|x\|(y,z)-\|y\|(x,z))^2. \tag{2.58}$$

仅当 x,y,z 线性相关时(2.57) 式中等号成立.

([301]1999,234:727 ~ 734). (2.58) 式的基本证明思路是考虑 Gram 行列式

$$A=\begin{vmatrix}(x,x) & (x,y) & (x,z)\\ (y,x) & (y,y) & (y,z)\\ (z,x) & (z,y) & (z,z)\end{vmatrix}$$，证明 $A>0$,然后将行列式 A 展开.

利用内积(x,y),可以将 Hölder 不等式记为

$$(x,y)\leqslant \|x\|_p\|y\|_q,(x,y)\in L^p\times L^q. \tag{2.59}$$

1999 年,Alfredo,N. 等证明:设 $z=y|y|^{q-2}$,$1<p<\infty$,$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,则当 $1<p\leqslant 2$ 时,(2.59) 式可改进为

$$\|x\|_p\|y\|_q-(x,y)\geqslant\frac{1}{p}[(\|x\|_p+\|z\|_p)^p-\|x+z\|_p^p]\geqslant 0; \tag{2.60}$$

而当 $p\geqslant 2$ 时,成立

$$0\leqslant\|x\|_p\|y\|_q-(x,y)\leqslant\frac{1}{p}[(\|x\|_p+\|z\|_p)^p-\|x+z\|_p^p]. \tag{2.61}$$

([308]1999,127(8):2405 ~ 2415)

当 $x=(x_1,\cdots,x_n)$,$y=(y_1,\cdots,y_n)\in R^n$ 时,$(x,y)=\sum_{k=1}^n x_k y_k$,$\|x\|_p=(\sum_{k=1}^n|x_k|^p)^{1/p}$,记 $|x|^p=(|x_1|^p,\cdots,|x_n|^p)$. $\log|x|=(\log|x_1|,\cdots,\log|x_n|)$,$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,$1<p<\infty$,若 $x,y\in R^n-\{0\}$,则

$$0\leqslant 1-\frac{(|x|,|y|)}{\|x\|_p\|y\|_q}\leqslant(\alpha,\beta), \tag{2.62}$$

式中 $\alpha=\frac{|x|^p}{\|x\|_p^p}-\frac{|y|^q}{\|y\|_q^q}$,$\beta=\frac{1}{q}\log|x|-\frac{1}{p}\log|y|$.

证明(2.62) 式的基本工具是利用 R 的开区间上凸的可微映射的 Jensen 不等式的推广. (Dragomir-Goh, Mitt. Math. Ges. Hamburg. 1997,16:99 ~ 106)

6. 1991 年 Dragomir, S. S. 给出了 Cauchy 不等式的一种加细:设 a_k,b_k 为实数且 $|a_k|+|b_k|\neq 0$,则

$$(\sum_k a_k b_k)^2\leqslant(\sum_k(a_k^2+b_k^2))(\sum_k\frac{a_k^2b_k^2}{a_k^2+b_k^2})\leqslant(\sum_k a_k^2)(\sum_k b_k^2). \tag{2.63}$$

(Rad. Mat. 1991,7(2):299 ~ 303)

7. **胡克不等式**:设 $p\geqslant q\geqslant 0$,$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,$1-e_n+e_m\geqslant 0$,$a_n,b_n\geqslant 0$,则

$$\sum_n a_n b_n\leqslant(\sum_n b_n^q)^{(1/q-1/p)}\Big\{(\sum_n b_n^q)^2(\sum_n a_n^p)^2 -[(\sum_n b_n^q e_n)\sum_n a_n^p-(\sum_n b_n^q)(\sum_n a_n^p e_n)]^2\Big\}^{\frac{1}{2p}}. \tag{2.64}$$

相应的积分形式是：设 $p \geqslant q \geqslant 0, \frac{1}{P}+\frac{1}{q}=1, f(x), g(x) \geqslant 0, 1-\omega(x)+\omega(y) \geqslant 0$，则

$$\int fg \leqslant \left(\int g^q\right)^{\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)}\left\{\left(\int g^q\right)^2\left(\int f^p\right)^2-\left[\left(\int g^q\omega\right)\left(\int f^p\right)-\left(\int g^q\right)\left(\int f^p\omega\right)\right]^2\right\}^{\frac{1}{2p}}. \tag{2.65}$$

推论 设 $a_n \geqslant 0, p>1, 1-e_n+e_m \geqslant 0, n, m=1,2,\cdots,N$，则

$$\left(\sum_{k=1}^N a_k\right)^{2(2p-1)} \leqslant \left(\sum_{k=1}^N a_k^p\right)^2\left\{N^2\left(\sum_{k=1}^N a_k\right)^2-\left[N\sum_{k=1}^N a_k e_k-\left(\sum_{k=1}^N a_k\right)\left(\sum_{k=1}^N e_k\right)\right]^2\right\}^{p-1}. \tag{2.66}$$

相应的积分形式是：设 $f \geqslant 0, f \in L^p[a,b], 1-\omega(x)+\omega(y) \geqslant 0, x, y \in [a,b]$，$p>1$，则

$$\left(\int_a^b f\right)^{2(2p-1)} \leqslant \left(\int_a^b f^p\right)^2\left\{(b-a)^2\left(\int_a^b f\right)^2-\left[(b-a)\int_a^b f\omega-\left(\int_a^b f\right)\left(\int_a^b \omega\right)\right]^2\right\}^{p-1}. \tag{2.67}$$

在(2.65)式中取 $\omega(x)=\frac{1}{2}\cos\frac{\pi(x-a)}{b-a}$，得到

$$\left(\int_a^b f\right)^{2(2p-1)} \leqslant \left(\int_a^b f^p\right)^2\left\{(b-a)^{2\left(1-\frac{1}{p}\right)}\left(\int_a^b f^p\right)^{2/p}-\frac{1}{4}\left(\int_a^b f^p\cos\frac{\pi(x-a)}{b-a}\right)^{2/p}\right\}^{p-1}.$$

胡克不等式克服了 Hölder 不等式在使用时的缺陷，改进和推广了许多重要的著名不等式，美国"数学评论"称为是一个"杰出的非凡的新不等式". 例如，可将 Minkowski 不等式改进为：设 $p \geqslant 1, a_k, b_k \geqslant 0$，则

$$\left\{\sum_k (a_k+b_k)^p\right\}^{1/p} \leqslant \left(\sum_k a_k^p\right)^{1/p}+\left(\sum_k b_k^p\right)^{1/p}-\frac{1}{2}g(p)R^2(a,b), \tag{2.68}$$

式中 当 $p \geqslant 2$ 时 $g(p)=1/(2p)$；当 $1 \leqslant p<2$ 时，$g(p)=(p-1)/(2p)$，

$$R(a,b)=\frac{\sum_k (a_k^p+b_k^p)\left[\sum_k (a_k+b_k)^p e_k\right]-\left[\sum_k (a_k^p+b_k^p)e_k\right]\sum_k (a_k+b_k)^p}{\left\{\sum_k (a_k+b_k)^p\right\}^{3/2}},$$

$1-e_k+e_j \geqslant 0$. ([29])

1998 年，胡克又进一步证明：设 $f, g \geqslant 0, f \in L^p[0,b], g \in L^q[0,b], p \geqslant q>1$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$|\bar{\omega}(x)\omega(y)-\omega(x)\overline{\omega(y)}| \leqslant 1, x, y \in [0,b]$.

$$F_s(t)=\left\{\left(\int_0^t g^q\right)^{(2/q-2/p)}\right\}^s$$
$$\times\left\{\left(\int_0^t f^p\right)^2\left(\int_0^t g^q\right)^2-\left[\left(\int_0^t f^p\omega\right)\left(\int_0^t g^q\bar{\omega}\right)-\left(\int_0^t f^p\bar{\omega}\right)\left(\int_0^t g^q\omega\right)\right]^2\right\}^{s/p}-\left(\int_0^t fg\right)^{2s}, \tag{2.69}$$

则对于 $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant b, s=1,2,\cdots$，成立

$$F_s(t_2) \geqslant F_s(t_1) \geqslant 0. \tag{2.70}$$

(Acta Math. Sci 1998, 18(2): 192 ～ 199. 另见[121]1 ～ 4)

设 $a=(a_1,\cdots,a_n)$，$b=(b_1,\cdots,b_n)$，$a_k,b_k>0$，$1\leqslant k\leqslant n$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1=\frac{1}{r}$，$p,q>0$. 则

$$\|ab\|_1^{1+\frac{1}{r}}\leqslant(\|a\|_p\|b\|_q\|a^{2/p-1}b^{2/p}\|_p\|a^{2/q}b^{2/q-1}\|_q)^{1/2};$$

而且

$$f(x)=\|(ab)^{(1-x)/p}a^x\|_p\|(ab)^{(1-x)/q}b^x\|_q$$

是对数凸函数，当 $r=\infty$ 即 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 达到最小值，从而改进了 Daykin-Eliezer 的相应结果.（王中烈等，Congr. Numer 1992，87：119 ~ 128）

8. (1) 设 $a_{jk}>0$，$j=1,\cdots,m$，$k=1,\cdots,n$，$p_j>0$，$\sum_{j=1}^m\frac{1}{p_j}=1$，令

$$h(t)=\prod_{i=1}^n\Big[\sum_{j=1}^m\Big(\prod_{k=1}^n a_{jk}\Big)^{1-t}(a_{ji}^{p_i})^t\Big]^{1/p_i},\tag{2.71}$$

则 h 是 t 的递增函数. 特别

$$h(0)\leqslant h(\frac{1}{2})\leqslant h(1)\tag{2.72}$$

是 Hölder 不等式的加细.（Yang Xianjing，[301]2000，247(1)：328 ~ 330）

Pecaric，J. E. 证明了 Hölder 不等式的单调性质：

设 $a_k,b_k\geqslant0$，$u_k\geqslant v_k\geqslant0$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$1<p<\infty$，则

$$0\leqslant\Big(\sum_{k=1}^n v_ka_k^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{k=1}^n v_kb_k^q\Big)^{1/q}-\sum_{k=1}^n v_ka_kb_k\leqslant$$
$$\leqslant\Big(\sum_{k=1}^n u_ka_k^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{k=1}^n u_kb_k^q\Big)^{1/q}-\sum_{k=1}^n u_ka_kb_k,\tag{2.73}$$

当 $0<p<1$ 时，不等号反向.（Mat. Bilt，1993，17：69 ~ 74）

Minkowski 不等式也有单调性质：设 $a_k,b_k\geqslant0$，$u_k\geqslant v_k\geqslant0$，若 $p\geqslant1$ 或 $p<0$，则

$$0\leqslant\Big\{\Big(\sum_{k=1}^n v_ka_k^p\Big)^{\frac{1}{p}}+\Big(\sum_{k=1}^n v_kb_k^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big\}^p-\sum_{k=1}^n v_k(a_k+b_k)^p$$
$$\leqslant\Big\{\Big(\sum_{k=1}^n u_ka_k^p\Big)^{\frac{1}{p}}+\Big(\sum_{k=1}^n u_kb_k^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big\}^p-\sum_{k=1}^n u_k(a_k+b_k)^p,$$

当 $0<p<1$ 时，不等号反向.

(2) 设 (X,Σ_1,μ) 和 (Y,Σ_2,υ) 为正的测度空间，$\mu(x)=1$，$0<\upsilon(y)<\infty$. f 是 $X\times Y$ 上实值有界可测函数. 定义 $h:R\to R^+$ 为

$$h(t)=\exp\left\{\int_X\log\Big[\int_Y G(y)e^{tH(x,y)}d\upsilon(y)\Big]d\mu(x)\right\},$$

式中

$$G(y)=\exp\left\{\int_X f(x,y)d\mu(x)\right\},$$

$$H(x,y)=f(x,y)-\int_X f(x,y)d\mu(x).$$

则

$$h \in C^{\infty}(R),\quad th'(t) \geqslant 0,\quad h''(t) \geqslant 0,\quad \forall t \in R^1,$$
$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ 或 } h''(t) = 0.$$

h 是$[0,\infty)$ 上严格递增且严格凸的函数. 特别,

$$\int_Y \exp\left(\int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu(x)\right)\mathrm{d}\upsilon(y) \leqslant h(t)$$
$$\leqslant \exp\left\{\int_X \log\left(\int_Y \mathrm{e}^{f(x,y)}\mathrm{d}\upsilon(y)\right)\mathrm{d}\mu(x)\right\},\quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

9. Hölder 不等式的改进往往依赖于 Young 不等式(2.25) 的改进. (2.25) 式可写成以下形式:设 $a,b \geqslant 0, 1 < p < \infty, \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$,则

$$ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q. \tag{2.74}$$

Hirzallah, Omar 等将(2.74) 式改进为

$$a^2b^2 + \frac{1}{r^2}(a^p - b^q)^2 \leqslant \left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right)^2, \tag{2.75}$$

式中 $r = \max\{p,q\}$,在(2.75) 式中取 $a = |f(x)|/\|f\|_{p,w}, b = |g(x)|/\|g\|_{q,\omega}$, $\|f\|_{p,\omega}$ 的定义见(2.18) 式,即可得出 Hölder 不等式的改进:

$$\|fg\|_{1,\omega}^2 + \frac{1}{r^2}\int_E (|f|^p\|g\|_{q,\omega} - |g|^q\|f\|_{p,\omega})^2\omega\mathrm{d}\mu \leqslant \|f\|_{p,\omega}^2\|g\|_{q,\omega}^2. \tag{2.76}$$

([386]2000, 308(1 ~ 3):77 ~ 84)

10. 当对数列 $x = (x_1,\cdots,x_n,\cdots), y = (y_1,\cdots,y_n,\cdots)$,或函数 $f.g$ 加上一些限制后,Hölder 不等式还可以得到进一步的改进,例如:

(1) 设 $0 < x_1 \leqslant \dfrac{x_2}{2} \leqslant \cdots \leqslant \dfrac{x_n}{n}, 0 < y_n \leqslant y_{n-1} \leqslant \cdots \leqslant y_1$,则 Cauchy 不等式可改进为

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^n y_k \sum_{k=1}^n \left(x_k^2 - \frac{1}{4}x_k x_{k-1}\right)y_k;$$

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{j=1}^n y_j\right)\left\{\sum_{k=1}^n \left(\frac{7k+1}{8k}x_k^2 - \frac{k}{8(k-1)}x_{k-1}^2\right)y_k\right\}, \tag{2.77}$$

且仅当 $\forall x_k = kx_1, y_k = y_1$ 时等号成立. 式中 $x_0 = 0$. (Liu Zheng, [301]1998, 218:13 ~ 21) Alzer, H. 则进一步改进为仅当 $\alpha \geqslant 3/4, \beta \geqslant 1-\alpha$ 时成立

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{j=1}^n y_j\right)\left\{\sum_{k=1}^n \left(\alpha + \frac{\beta}{k}\right)x_k^2 y_k\right\}. \tag{2.78}$$

([301]1999, 234:6 ~ 14)

(2) 设 $1 < p < \infty, 1/p + 1/q = 1, 0 \leqslant x_n \leqslant x_{n-1} \leqslant \cdots \leqslant x_1, 0 \leqslant y_n \leqslant y_{n-1} \leqslant \cdots \leqslant y_1, B_n = \dfrac{1}{m-k}\displaystyle\sum_{j=k+1}^n y_j$,则

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k \leqslant \left(\sum_{i=1}^m x_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{j=1}^k y_j^q + (m-k)B_n^q\right)^{1/q}, \tag{2.79}$$

式中 $0 \leqslant k \leqslant m \leqslant n$. ([151])

(3) 设 $a_k, b_k \geqslant 0, k = 1, \cdots, n$. $\{A_k\}, \{B_k\}$ 分别是 $\{a_k\}, \{b_k\}$ 按递减次序的值,即 $A_1 \geqslant A_2 \geqslant \cdots \geqslant A_n, B_1 \geqslant B_2 \geqslant \cdots \geqslant B_n$. 若 $1 < p < \infty, 1/p + 1/q = 1$,则

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{m} A_k^p\right)^{1/p} \left\{\sum_{j=1}^{m-k-1} B_j^q + (k+1)^{-(q/p)} B_{[n-k]}^q\right\}^{1/q}, \tag{2.80}$$

式中 $B_{[j]} = \sum_{i=j}^{n} B_i$,而 k 是满足条件 $kB_{m-k} < B_{[m-k+1]}$ 和 $(k+1)B_{m-k-1} \geqslant B_{[m-k]}$, $(0 \leqslant k \leqslant m-1)$ 的最大整数. $1 \leqslant m \leqslant n$.

若 $0 < p < 1$,则对所有 $a_k, b_k > 0$, $\{A_k\}$ 是 $\{a_k\}$ 的递增次序值, $\{B_k\}$ 是 $\{b_k\}$ 的递减次序值时,(2.80) 式中不等号反向. ([301]1984,102(2):435 ~ 441)

(4) 设 $f, g_k: [a,b] \to R$ 非负递增,且 $g_k' \in L^p[a,b]$,则当 $1 < p < \infty$ 时,成立 Minkowski 型不等式:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\int_a^b (g_k^p(t))' f(t) \mathrm{d}t\right)^{1/p} \leqslant \left\{\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{n} g_k^p(t)\right)' f(t) \mathrm{d}t\right\}^{1/p},$$

若 f 递减且 $g_k(a) = 0, k = 1, \cdots, n$. 则不等号反向. (Sanja, V. ,[361]1995,20(1):250 ~ 255)

(5) Minkowski 不等式(2.31) 可写成以下形式:

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k + b_k}{2}\right)^p\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\} \quad (p \geqslant 1).$$

Cooper 由此给出了它的两种推广:

① 设 f 是 $[0, \infty)$ 上凹的递增函数,记 $F(x) = \int_0^x f(t) \mathrm{d}t$,则

$$F^{-1}\left\{\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} F(a_k + b_k)\right\} \leqslant F^{-1}\left\{\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} F(a_n)\right\} + \sum_{k=1}^{n} b_k, \quad (\forall m \in N);$$

② 设 f 是 $[0, \infty)$ 上严格递增的凸函数, $f(0) = 0$,则

$$f^{-1}\left\{\sum_{k=1}^{n} C_k f\left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} a_{jk}\right)\right\} \leqslant m\sum_{j=1}^{m} f^{-1}\left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{m} f(a_{jk})\right\}.$$ ([317]2(1927),159 ~ 163)

(6) 设 $a_k, b_k > 0$, $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant 2$ 或 $0 \leqslant q \leqslant p \leqslant 1$,则

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p b_k^{2-p}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{2-p} b_k^p\right) \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^q b_k^{2-q}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{2-q} b_k^q\right)$$
$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

(Callebaut[301]12(1965),491 ~ 494)

(7) 设 a_k, b_k 为实数, $0 \leqslant x \leqslant 1$,则

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + x\sum_{k \neq j} a_k b_j\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2x\sum_{k<j} a_k a_j\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 + 2x\sum_{k<j} b_k b_j\right).$$

当 $x = 0$ 时,它归结为 Cauchy 不等式. ([22]85 ~ 85)

(8) 设 $f, g \in L[0,1]$, $0 \leqslant g(x) \leqslant 1$, $\forall x \in [0,1]$, $\int_0^1 f(x) \mathrm{d}x = 0$. 则

$$\int_0^1 fg \leqslant \frac{1}{2}\left(\int_0^1 f^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(Elem, Math. 29(1974), 150 ~ 151)

(9) L^p 空间中的 Orlicz 不等式：设 $f,g\in L^p[0,1]$，$p>2$. 则存在常数 $c>0$，使得

$$\int_0^1 |f(x)|^p\mathrm{d}x + c\int_0^1 |g(x)|^p\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 |f(x)+\alpha g(x)|^p\mathrm{d}x,$$

式中 $\operatorname{sgn}\alpha=\pm 1$. ([104]117)

我们问：常数 c 的最佳值是多少？

(10) 设 $1<p\leqslant 2$，$f\in L^p$，$g\in L^q$，$\|f\|_p>0$，$\|g\|_q>0$.

记 $t_+=\max\{t,0\}$，则

$$\|f\|_p\|g\|_q\left\{1-\frac{1}{p}\left\|\left(\frac{|f|}{\|f\|_p}\right)^{\frac{p}{2}}-\left(\frac{|g|}{\|g\|_q}\right)^{\frac{q}{2}}\right\|_2^2\right\}_+\leqslant \|fg\|_1$$

$$\leqslant \|f\|_p\|g\|_q\left(1-\frac{1}{q}\left\|\left(\frac{|f|}{\|f\|_p}\right)^{\frac{p}{2}}-\left(\frac{|g|}{\|g\|_q}\right)^{\frac{q}{2}}\right\|_2^2\right)_+.$$

当 $2\leqslant p\leqslant\infty$ 时，上述不等式中含 $\frac{1}{p}$ 与 $\frac{1}{q}$ 的项互换位置. ([301]343(2008), 842 ~ 852)

(11) $h:[a,b]\to R^1$ 是 $p-c-$ Hölder 型函数，是指它满足以下条件：

$$|h(x)-h(y)|\leqslant c|x-y|^p,\quad c>0,\quad 0<p\leqslant 1,\quad x,y\in[a,b].$$

设 f,g 在 $[a,b]$ 上可测，且 $\frac{f}{g}$ 是 $p-c-$ Hölder 型函数，则

$$0\leqslant\left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right)-\left(\int_a^b fg\right)^2$$

$$\leqslant c^2\times\begin{cases}\dfrac{(b-a)^{2p+2}}{(2p+1)(2p+2)}\|g\|_\infty^4, & g\in L^\infty[a,b],\\[2ex] \dfrac{2^{-(\frac{1}{\beta})}(b-a)^{2p+(\frac{2}{\alpha})}}{(2p\alpha+1)^{\frac{1}{\alpha}}(2p\alpha+2)^{\frac{1}{\alpha}}}\|g\|_{2\beta}^4, & g\in L^{2\beta}[a,b],\quad \dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=1,\quad \alpha>1,\\[2ex] \dfrac{1}{2}(b-a)^{2p}\|g\|_2^4, & g\in L^2[a,b].\end{cases}$$

([399]21(2008), 388 ~ 393)

11. **反向 Hölder 不等式和反向 Minkowski 不等式**：设 $1<p<\infty$，$1/p+1/q=1$，寻找常数 c_{pq}，使得

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{1/q}\leqslant c_{pq}\sum_{k=1}^n a_k b_k,\tag{2.81}$$

式中 $a_k,b_k\geqslant 0$，则(2.81)式称为反向 Hölder 不等式.

这方面的研究也有很长的历史. 如见([1][2]) 下面的 $\|a\|_p$ 仍按(2.2)式定义.

(1) 设 $a=\{a_k\}$，$b=\{b_k\}$ 为实数列，则

$$-\frac{1}{4}(\|a-b\|_1+\|a\|_1-\|b\|_1)(\|a-b\|_1-\|a\|_1+\|b\|_1)$$

$$\leqslant \sum_k |a_k b_k| \leqslant \frac{1}{4}(\|a+b\|_1 + \|a\|_1 - \|b\|_1)(\|a+b\|_1 - \|a\|_1 + \|b\|_1);$$

$$-\frac{1}{2}(\|a\|_1 + \|b\|_1 - \|a+b\|_1)\max\{\|a\|_1, \|b\|_1\} \leqslant \sum_k |a_k b_k|$$

$$\leqslant \frac{1}{2}(\|a\|_1 + \|b\|_1 - \|a-b\|_1)\max\{\|a\|_1, \|b\|_1\}.$$

([331]1979,No. 634 ～ 677:143 ～ 147)

(2) 1989 年游光荣证明:设 $0 < m_1 \leqslant a_k \leqslant M_1, 0 < m_2 \leqslant b_k \leqslant M_2, 1 \leqslant k \leqslant n$, $1/p + 1/q = 1/r$.

① 若 $p, q > 0$,则

$$\left(\frac{m_1}{M_1}\right)^{r/q}\left(\frac{m_2}{M_2}\right)^{r/p} \leqslant \frac{\|ab\|_r}{\|a\|_p \|b\|_q} \leqslant 1; \tag{2.82}$$

② 若 $p > 0, q < 0, r > 0$,则

$$1 \leqslant \frac{\|ab\|_r}{\|a\|_p \|b\|_q} \leqslant \left(\frac{m_1}{M_1}\right)^{r/q}\left(\frac{M_2}{m_2}\right)^{r/p}; \tag{2.83}$$

若 $p > 0, q < 0, r < 0$,则(2.83) 式中不等号全部反向;

③ 若 $p < 0, q < 0$,则

$$1 \leqslant \frac{\|ab\|_r}{\|a\|_p \|b\|_q} \leqslant \left(\frac{M_1}{m_1}\right)^{r/q}\left(\frac{M_2}{m_2}\right)^{r/p}.$$

④ 若 $r = 1$,则当 $p > 1$ 时,成立

$$\left(\frac{m_1 + m_2}{M_1 + M_2}\right)^{1/p}\left[\left(\frac{m_1}{M_1}\right)^{1/q}\|a\|_p + \left(\frac{m_2}{M_2}\right)^{1/q}\|b\|_q\right]$$

$$\leqslant \|a+b\|_p \leqslant \|a\|_p + \|b\|_p. \tag{2.84}$$

而当 $0 < p < 1$ 时, $\|a\|_p + \|b\|_p \leqslant \|a+b\|_p$

$$\leqslant \left(\frac{M_1 + M_2}{m_1 + m_2}\right)^{1/p}\left[\left(\frac{m_1}{M_1}\right)^{1/q}\|a\|_p + \left(\frac{m_2}{M_2}\right)^{1/q}\|b\|_p\right]. \tag{2.85}$$

([356]1989,9(1 ～ 2):35 ～ 43)

(3) 设 $0 < m_1 \leqslant a_k \leqslant M_1, 0 < m_2 \leqslant b_k \leqslant M_2, k = 1, \cdots, n, 1/p + 1/q = 1$,则

$$\|a\|_p \cdot \|b\|_q \leqslant c_{p,q}\|ab\|_1, \tag{2.86}$$

式中

$$c_{p,q} = \frac{M_1^p M_2^q - m_1^p m_2^q}{[p(M_1 m_2 M_2^q - m_1 M_2 m_2^q)]^{1/p}[q(m_1 M_2 M_1^p - M_1 m_2 m_1^p)]^{1/q}}.$$

(Diaz-Goldman-Metcalf,SIAN Review,1979,21(4):550 ～ 557).特别,取 $p = q = 2$,得

$$\|ab\|_1 \leqslant \|a\|_2 \|b\|_2 \leqslant c_2 \|ab\|_1. \tag{2.87}$$

1925 年 Polya-Szego 证明式中

$$c_2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{M_1 M_2}{m_1 m_2}} + \sqrt{\frac{m_1 m_2}{M_1 M_2}}\right).$$

(2.87) 式右边等号成立的充要条件是:令

$$\beta_1 = \frac{M_1/m_1}{(M_1/m_1) + (M_2/m_2)}, \beta_2 = \frac{M_2/m_2}{(M_1/m_1) + (M_2/m_2)},$$

则 $k=\beta_1 n, l=\beta_2 n$ 都是整数且有 k 个 a_j 与 m_1 重合，其余 $l=n-k$ 个与 M_1 重合，而相应的 b_j 则分别与 M_2, m_2 重合.（[56]Vol. 1:74）

1967 年 Shisha 证明

$$\frac{\| a \|_2^2}{\| ab \|_1}-\frac{\| ab \|_1}{\| b \|_1^2} \leqslant \left(\sqrt{\frac{M_1}{m_2}}-\sqrt{\frac{m_1}{M_2}}\right)^2.$$

1968 年 Ozeki 证明

$$(\| a \|_2 \| b \|_2)^2-\| ab \|_1^2 \leqslant \frac{n^2}{4}(M_1 M_2-m_1 m_2)^2.$$

1963 年 Diaz 和 Metcalf 证明

$$\| b \|_2^2+\frac{m_2 M_2}{M_1 m_1}\| a \|_2^2 \leqslant \left(\frac{M_2}{m_1}+\frac{m_2}{M_1}\right)\| ab \|_1. \text{（[22]121）}$$

设 $1<p \leqslant q<\infty, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 则

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k \omega_k\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^n \frac{\omega_k}{a_k}\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{\frac{M_1}{p}+\frac{m_1}{q}}{(M_1 m_1)^{\frac{1}{q}}}\left(\sum_{k=1}^n \omega_k\right);$$

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \omega_k\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \omega_k\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{\frac{M_1 M_2}{p}+\frac{m_1 m_2}{q}}{(M_1 m_1)^{\frac{1}{q}}(M_2 m_2)^{1/p}}\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \omega_k\right).$$

若 $m \leqslant \frac{b_k}{a_k} \leqslant M$，则

$$\frac{1}{p} \sum_{k=1}^n b_k^2 \omega_k+\frac{1}{q} M m \sum_{k=1}^n a_k^2 \omega_k \leqslant\left(\frac{m}{q}+\frac{M}{p}\right) \sum_{k=1}^n a_k b_k \omega_k. \text{（[22]122 ～ 123）}$$

1986 年邵剑波证明：设 $0<m_1 \leqslant|a_k| \leqslant M_1, 0<m_2 \leqslant|b_k| \leqslant M_2, 1 \leqslant k \leqslant n$，则

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{m_2 M_2}{m_1 M_1}}\left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2\right)+\sqrt{\frac{m_1 M_1}{m_2 M_2}}\left(\sum_{k=1}^n |b_k|^2\right) \\
&\quad \leqslant\left(\sqrt{\frac{M_1 M_2}{m_1 m_2}}+\sqrt{\frac{m_1 m_2}{M_1 M_2}}\right)\left(\sum_{k=1}^n |a_k b_k|\right),
\end{aligned}$$

仅当有 p 个 a_k 与 m_1 重合，其余 $n-p$ 个 a_k 与 M_1 重合，而相应的 b_k 分别与 M_2, m_2 重合时等号成立.

证 从假设条件，$\frac{m_1}{M_2} \leqslant\left|\frac{a_k}{b_k}\right| \leqslant \frac{M_1}{m_2}$，于是

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^n\left\{m_2 M_2|a_k|^2-(m_1 m_2+M_1 M_2)|a_k b_k|+m_1 M_1|b_k|^2\right\} \\
&\quad=\sum_{k=1}^n m_2 M_2|b_k|^2\left(\left|\frac{a_k}{b_k}\right|-\frac{M_1}{m_2}\right)\left(\left|\frac{a_k}{b_k}\right|-\frac{m_1}{M_2}\right) \leqslant 0.
\end{aligned}$$

从而

$$m_2 M_2 \sum_{k=1}^n |a_k|^2+m_1 M_1 \sum_{k=1}^n |b_k|^2 \leqslant(m_1 m_2+M_1 M_2) \sum_{k=1}^n |a_k b_k|.$$

两边同除以 $\sqrt{m_1 m_2 M_1 M_2}$ 即可得证.（[344]1986,3:76 ～ 78）

1964 年 Diaz-Metcalf 对(2.87) 式中的 c_2 作了改进，证明

$$\frac{m_1M_1\|b\|_2^2+m_2M_2\|a\|_2^2}{m_1m_2+M_1M_2}\leqslant\|ab\|_1.$$ ([301]1964,9:59 ~ 74)

1969 年 Barnes,D. C. 还证明：若 $0\leqslant a_1\leqslant\cdots\leqslant a_n,0\leqslant b_n\leqslant b_{n-1}\leqslant\cdots\leqslant b_1$，且 $a_{k-1}+a_{k+1}\leqslant 2a_k,\quad b_{k-1}+b_{k+1}\leqslant 2b_k,k=2,\cdots,n-1$. 则 $c_2=(2n-1)/(n-2)$，且仅当 $a_k=n-k,b_k=k-1$ 时(2.87) 式中右边的等号成立.

相应的积分形式是：设 $f\in L^p[0,a],g\in L^q[0,a]$. 若 f,g 是$[0,a]$上非负的凹函数，且 $0<\|f\|_p<\infty,0<\|g\|_q<\infty$. 则在

$$\|f\|_p\|g\|_q\leqslant c_{p,q}\|fg\|_1 \tag{2.88}$$

中，当 $p>1$ 时，$c_{p,q}=\dfrac{6}{(1+p)^{1/p}(1+q)^{1/q}a^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}$. 而当 $|p|<1,|q|<1$ 时，

$$c_{p,q}=\frac{3}{(1+p)^{1/p}(1+q)^{1/q}a^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}.$$

([301]1969,26:82 ~ 87，或[4]530 ~ 532)

1986 年，陈广卿利用凸函数不等式证明：当 $p,q>0,\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ 时，(2.86) 式中 $c_{p,q}$ 为

$$c_{p,q}=\frac{(\frac{1}{p})^{1/p}(\frac{1}{q})^{1/q}\begin{vmatrix}x_2 & f(x_2)\\ x_1 & f(x_1)\end{vmatrix}}{(x_2-x_1)^{1/q}(f(x_1)-f(x_2))^{1/p}}.$$

式中　$f(x)=x^{-q/p}$，而且

$$x_1=\min_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{\frac{|a_k|^p}{|a_kb_k|}\right\}<x_2=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{\frac{|a_k|^p}{|a_kb_k|}\right\}.$$ ([301]1986,1:54 ~ 57)

(2.87) 式的加权形式是：设 $a_k,b_k>0,\omega_k\geqslant 0$ 且不全为零. $1\leqslant k\leqslant n$，则

$$1\leqslant\frac{(\sum_{k=1}^n a_k^2\omega_k)(\sum_{k=1}^n b_k^2\omega_k)}{(\sum_{k=1}^n a_kb_k\omega_k)^2}\leqslant\max_{k,j}\frac{(a_kb_j+a_jb_k)^2}{4a_ka_jb_kb_j}.$$ ([2]45)

Zagier 不等式的加权形式：设 f 与 g 在$[a,b]$上递减，$f(b)=g(b)=0$，非负权函数 ω 在$[a,b]$上可积，则

$$\|f\|_{2,\omega}^2\|g\|_{2,\omega}^2\leqslant\max\left\{f(a)\int_a^b g\omega,g(a)\int_a^b f\omega\right\}\|fg\|_{1,\omega},$$

(Pecaric,J. E. ,[404]1994,12(3):125 ~ 127)

1991 年楼宇同证明：设 $0<m_1\leqslant f(x)\leqslant M_1,0<m_2\leqslant g(x)\leqslant M_2,x\in E,f,g,\omega\in L(E),\omega\geqslant 0$，则

$$\|f\|_{2,\omega}\|g\|_{2,\omega}\leqslant C\|fg\|_{1,\omega};$$

离散类似是：

$$\|a\|_{2,\omega}\|b\|_{2,\omega}\leqslant C\|ab\|_{1,\omega},$$

式中 $0<m_1\leqslant a_k\leqslant M_1, 0<m_2\leqslant b_k\leqslant M_2, C=\dfrac{m_1m_2+M_1M_2}{2\sqrt{m_1m_2M_1M_2}}$.([353]1991,4:24～28)

(4) 1990 年刘晓华证明:设 $p,q>0, 1/p+1/q=1, 0<m_1\leqslant a_k\leqslant M_1, 0<m_2\leqslant b_k\leqslant M_2$,则

$$\|a\|_p\|b\|_q\leqslant c_{p,q}\left(\frac{m_1m_2}{M_1M_2}\right)\|ab\|_1, \tag{2.89}$$

式中

$$c_{p,q}(\zeta)=(p^{1/p}q^{1/q})^{-1}\frac{(1-\zeta)\zeta^{\frac{1}{pq}}}{(1-\zeta^{1/p})^{1/p}(1-\zeta^{1/q})^{1/q}}. \tag{2.90}$$

它的加权形式是:设 $0<m\leqslant a_k/b_k\leqslant M, \omega_k\geqslant 0$,则

$$\|a\|_{p,\omega}\|b\|_{q,\omega}\leqslant c_{p,q}\left(\frac{m}{M}\right)\|ab\|_{1,\omega}, \tag{2.91}$$

式中 $\|a\|_{p,\omega}=(\sum_k a_k^p\omega_k)^{1/p}$. (2.91) 式的积分形式是:设 $(X,\sum,\mu)$ 为测度空间,f,g 为 X 上关于 μ 的非负可测函数,若 $0<m\leqslant f(x)/g(x)\leqslant M$ 在 X 上几乎处处成立,$f\cdot g\in L(X), 1/p+1/q=1, p,q>0$,则

$$\|f\|_{p,\omega}\|g\|_{q,\omega}\leqslant c_{p,q}\left(\frac{m}{M}\right)\|fg\|_{1,\omega}, \tag{2.92}$$

式中 $\|f\|_{p,\omega}=(\int_X f^p\omega)^{1/p}$.([301]1990,1:84～88)

庄亚栋(Zhuang Ya-Dong)证明:设 $0<m_1\leqslant a_k\leqslant M_1, 0<m_2\leqslant b_k\leqslant M_2, 1\leqslant k\leqslant n, 1/p+1/q=1, 1<p<\infty$,则 $\forall\alpha,\beta>0$,成立.

$$\|a\|_p\|b\|_q\leqslant c_{p,q}\|ab\|_1. \tag{2.93}$$

式中 $c_{p,q}=(\alpha p)^{-1/p}(\beta q)^{-1/q}\max\left\{\dfrac{\alpha M_1^p+\beta m_2^q}{M_1m_2},\dfrac{\alpha m_1^p+\beta M_2^q}{m_1M_2}\right\}$,

庄还通过证明(2.74)式的反向不等式:

$$\frac{1}{p}a^b+\frac{1}{q}b^q\leqslant c_{p,q}ab, \tag{2.94}$$

式中 $1<p<\infty, 1/p+1/q=1, 0<m_1\leqslant a\leqslant M_1, 0<m_2\leqslant b\leqslant M_2$.

$$c_{p,q}=\max\left\{\left(\frac{1}{p}m_1^p+\frac{1}{q}M_2^q\right)/(m_1M_2),\left(\frac{M_1^p}{p}+\frac{m_2^q}{q}\right)/(M_1m_2)\right\}, \tag{2.95}$$

利用(2.94)式得到反向 Hölder 不等式的积分形式:设 $0<m_1\leqslant f(x)\leqslant M_1, 0<m_2\leqslant g(x)\leqslant M_2, x\in E$,则

$$\|f\|_p\|g\|_q\leqslant c_{pq}\|fg\|_1. \tag{2.96}$$

式中 $c_{p,q}$ 由(2.95)式给出.([301]1991,161(2):566～575;1994,181:280～281;1995,196(3):795～799)

(5) **加细 Hölder 不等式**:设 $a_k,b_k>0, 1/p+1/q=1, 1<p<\infty$,记 $p\vee q=\max\{p,q\}, p\wedge g=\min\{p,q\}$. $S_n=\dfrac{\sum_k a_k^{p/2}b_k^{q/2}}{(\sum_k a_k^p)^{1/2}(\sum_k b_k^q)^{1/2}}$,则

$$\frac{2}{p \vee q}(1-S_n) \leqslant 1-\frac{\| ab \|_1}{\| a \|_p \| b \|_q} \leqslant \frac{2}{p \wedge q}(1-S_n). \tag{2.97}$$

(2.97) 式的证明,依赖于下述 Young 不等式的加细:

$$\frac{1}{p \vee q}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \leqslant \frac{1}{p}a+\frac{1}{q}b-a^{1/p}b^{1/q} \leqslant \frac{1}{p \wedge q}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2.$$

(6) 对于 f,g 加上一些特殊的限制后,反向 Hölder 不等式和反向 Minkowski 不等式可以得到改进.

例如,Barnard,R. W. 将(2.88) 式推广为幂权 $\omega_1(t)=t^\alpha$ 和指数权 $\omega_2(t)=e^{-x}$ 的情形,即设 f,g 是 $E=[0,1]$ 上非负凹函数,$\omega_1(t)=t^\alpha$,$\alpha>-1$,则对于 $1\leqslant p<\infty$,成立

$$\| fg \|_{1,\omega_1} \geqslant c_2 \| f \|_{2,\omega_1} \| g \|_{2,\omega_1}, \tag{2.98}$$

式中 $c_2=\left(\frac{\alpha+1}{2(\alpha+2)}\right)^{1/2}$,仅当 $f(t)=t,g(t)=1-t$ 时等号成立,而当 $p\geqslant 1$ 时,成立

$$\int_0^1 f(t)t^\alpha \mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)B(p+1,\alpha+1)^{1/p}}\left(\int_0^1 f^p(t)t^\alpha \mathrm{d}t\right)^{1/p}, \tag{2.99}$$

仅当 $f(t)=1-t$ 时等号成立,式中 $B(u,v)$ 为 Beta 函数.

设 f,g 是$(0,\infty)$ 上非负的凹函数,$1<p<\infty$,$1/p+1/q=1$,则对于权 $\omega_2(t)=e^{-x}$,成立

$$\| fg \|_{1,\omega_2} \geqslant c_{p,q} \| f \|_{p,\omega_2} \| g \|_{q,\omega_2}, \tag{2.100}$$

式中 $\| f \|_{p,\omega_2}=\left(\int_0^\infty f^p(t)e^{-x}\mathrm{d}t\right)^{1/p}$. $c_{p,q}=\min\{\Gamma(p+1)^{-(1/p)},\Gamma(q+1)^{-(1/q)}\}$. $\Gamma(\alpha)$ 为 Gamma 函数. 仅当 $f(t)=1,g(t)=t$ 时等号成立.

证明的基本思路是选择适当的对称核 $K(x,t)$,将 f,g 表示为形如$\int_a^b K(x,t)f(t)\mathrm{d}t$ 的积分变换,再利用极小化过程. 我们以证明(2.98) 式为例:令

$$K(x,t)=\begin{cases} x(1-t),0\leqslant x\leqslant t\leqslant 1, \\ t(1-x),0\leqslant t\leqslant x\leqslant 1. \end{cases} \tag{2.101}$$

并设 u,v 是$[0,1]$ 上非负可积函数,则

$$f(t)=\int_0^1 K(t,x)u(x)\mathrm{d}x,g(t)=\int_0^1 K(t,x)v(x)\mathrm{d}x \tag{2.102}$$

构成了$[0.1]$ 上所有非负凹函数的一个稠密子集.

我们设由(2.102) 式所定义的 f,g 满足正规化条件

$$\int_0^1 f^2(t)t^\alpha \mathrm{d}t=1,\int_0^1 g^2(t)t^\alpha \mathrm{d}t=1, \tag{2.103}$$

将上述 f,g 代入 $\min\int_0^1 f(t)g(t)t^\alpha \mathrm{d}t$,并利用迭核

$$K_\alpha(x,y)=\int_0^1 K(x,t)K(t,y)t^\alpha \mathrm{d}t,G_\alpha(x,y)=\frac{K_\alpha(x,y)}{(K_\alpha(x,x)K_\alpha(y,y))^{1/2}}$$

得出$\int_0^1 f(t)g(t)t^\alpha \mathrm{d}t \geqslant \min\{G_\alpha(x,y):0\leqslant x,y\leqslant 1\}$

$$\times\int_0^1\int_0^1 \sqrt{K_\alpha(x,x)}\cdot\sqrt{K_\alpha(y,y)}u(x)v(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{2.104}$$

于是从(2.102)式,(2.103)式及 Cauchy 不等式,得出

$$1=\int_0^1 f^2(t)t^\alpha \mathrm{d}t=\int_0^1 f(t)[\int_0^1 K(t,x)u(x)\mathrm{d}x]t^\alpha \mathrm{d}t$$

$$=\int_0^1 u(x)[\int_0^1 K(t,x)f(t)t^\alpha \mathrm{d}t]\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \int_0^1 u(x)[\int_0^1 K^2(t,x)t^\alpha \mathrm{d}t]^{1/2}[\int_0^1 f^2(t)t^\alpha \mathrm{d}t]^{1/2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 u(x)(K_\alpha(x,x))^{1/2}\mathrm{d}x.$$

同理可证 $1\leqslant \int_0^1 v(y)(K_\alpha(y,y))^{1/2}\mathrm{d}y$. 从而(2.104)式变成

$$\int_0^1 f(t)g(t)t^\alpha \mathrm{d}t\geqslant \min\{G_\alpha(x,y):0\leqslant x,y\leqslant 1\}.$$

再证明 $\min\{G_\alpha(x,y):0\leqslant x,y\leqslant 1\}=(\frac{\alpha+1}{2(\alpha+2)})^{1/2}$.

([301]1990,147(1):198 ~ 213). 1993 年,Wang Hann Tzong 等进一步将(2.98)式推广为

$$\| fg\|_{1,\omega_1}\geqslant c_{p,q}\| f\|_{p,\omega_1}\| g\|_{q,\omega_1}. \tag{2.105}$$

式中 $1<p<\infty, 1/p+1/q=1$. $c_{p,q}=\min\{c_1(p,q),c_1(q,p),c_2(p,q)\}$,

$$c_1(p,q)=\frac{\sqrt[q]{\alpha+q+1}}{(\alpha+2)(\alpha+3)\sqrt[p]{B(p+1,\alpha+1)}},$$

$$c_2(p,q)=\frac{B(3,\alpha+1)}{B(p+1,\alpha+1)^{1/p}B(q+1,\alpha+1)^{1/q}},$$

$B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t$ 为 Beta 函数. 仅当 $f(t)=t, g(t)=1-t$ 时等号成立. ([301]1993,176(1):92 ~ 107,1998,225(2):624 ~ 629. 另[330]1992,23(2):117 ~ 121)

(7) 设 f,g 是 D 上正的可测函数,$D\subset R^1$, $0\leqslant\omega\in L^1(D)$, $\omega(D)=\int_D \omega(x)\mathrm{d}x$.

若 $\| f\|_{2,\omega}\leqslant c_2\| f\|_{1,\omega}$,则

$$\left(\frac{2}{\omega(D)}-c_2^2\right)\| f\|_{1,\omega}\| g\|_{1,\omega}\leqslant \| fg\|_{1,\omega},$$

若 $\| f\|_{r,\omega}\leqslant c_r\| f\|_{1,\omega}$, $r>1$, $r=p$ 或 q, $1\leqslant p,q<\infty$,则

$$(c_pc_q)^{-1}\left(\frac{2}{\omega(D)}-c_2^2\right)\| f\|_{p,\omega}\| g\|_{q,\omega}\leqslant \| fg\|_{1,\omega}. \tag{2.106}$$

(8) 设 f,g 是[0,1]上非负的凹函数,$0<r\leqslant 1\leqslant p,q<\infty$, ω,u,v 为[0,1]上权函数,则

$$\| f\|_{pu}\| g\|_{qv}\leqslant C\| fg\|_{r,\omega} \tag{2.107}$$

成立的充要条件是

$$C=\sup_{s,t\in(0,1)}\frac{\| K(\cdot,t)\|_{p,u}\cdot\| K(\cdot,s)\|_{q,v}}{\| K(\cdot,t)K(\cdot,s))\|_{r,\omega}}<\infty.$$

式中 $K(x,y)=\begin{cases}x(1-y), & 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1\\ y(1-x), & 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$

((7)(8) 见[329]116(1995),133 ~ 165)

(9) **Zagier 的 Cauchy 反向不等式**:设 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n>0,b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n>0$,则

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)\leqslant c_2\sum_{k=1}^n a_kb_k,\text{式中}\quad c_2=\max\{a_1\sum_{k=1}^n b_k,b_1\sum_{k=1}^n a_k\}.$$

仅当 $a_1=\cdots=a_n$ 且 $b_1=\cdots=b_n$ 时等号成立.(Alzer,H.,[360]1992,58(2):157 ~ 159)

它的积分形式是:设 f,g 在 $[0,\infty)$ 上非负递减,则对任何可积函数 $F,G:[0,\infty)\to[0,1]$,成立

$$(f,F)(g,G)\leqslant c_2(f,g),$$

式中 $c_2=\max\{\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x,\int_0^\infty g(x)\mathrm{d}x\}.(f,g)=\int_0^\infty f(x)g(x)\mathrm{d}x.$

([305]1995,102(10):919 ~ 920).1995 年 Pecaric,J. E. 给出了它们的加权形式:设 $\{a_k\}$,$\{b_k\}$,$\{u_k\}$,$\{v_k\}$ 均为递减数列,$\omega_k>0$,则

$$\left(\sum_{k=1}^n\omega_ka_ku_k\right)\left(\sum_{k=1}^n\omega_kb_kv_k\right)\leqslant c_2\left(\sum_{k=1}^n\omega_ka_kb_k\right),$$

式中 $c_2=\max\{u_1\sum_{k=1}^n\omega_kv_k,v_1\sum_{k=1}^n\omega_ku_k\}$.([360]1995,64(5):415 ~ 417)

(10) 设实数 p_j 满足 $\sum_{j=1}^m\frac{1}{p_j}=\frac{1}{r},r>0,m\geqslant 2,a_{jk}>0,j=1,\cdots,m,k=1,\cdots,n$,则仅当 $\{p_j\}$ 中只有一个 $p_j>0$ 而其他 $p_k<0(\forall k\neq j)$ 时

$$\prod_{j=1}^m\|a_{jk}\|_{p_j}\leqslant\|\prod_{j=1}^m a_{jk}\|_r.\tag{2.108}$$

仅当 $\frac{a_{i1}^{p_i}}{a_{j1}^{p_j}}=\frac{a_{i2}^{p_i}}{a_{j2}^{p_j}}=\cdots=\frac{a_{in}^{p_i}}{a_{jn}^{p_j}}(i,j=1,\cdots,m)$ 时,(2.108) 式中等号成立.

(Sun Xiehua(孙燮华),[357]1997,23(2):241 ~ 252)

(11) 1948 年,Toyama,H. 给出反向 Minkowski 不等式:设 $a_{jk}\geqslant 0$,但不全为零,$0<r<s$,则

$$\frac{\left[\sum_{k=1}^n\left(\sum_{j=1}^m a_{jk}^s\right)^{r/s}\right]^{1/r}}{\left[\sum_{j=1}^m\left(\sum_{k=1}^n a_{jk}^r\right)^{s/r}\right]^{1/s}}\leqslant(\min\{m,n\})^{\frac{1}{r}-\frac{1}{s}}.\tag{2.109}$$

上界是最佳的,2000 年 Alzer,H. 等给出了(2.109) 式的加权形式,([358]2000,216(1 ~ 3):253 ~ 256)

(12) Cauchy 不等式的加权形式:

$$\|ab\|_{1,\omega}\leqslant\|a\|_{2,\omega}\|b\|_{2,\omega}.$$

若 $\sum_{k=1}^n a_kb_k\omega_k=0$,则

$$\| ab \|_{\infty,\omega} \leqslant \frac{1}{2} \| a \|_{2,\omega} \| b \|_{2,\omega};$$

若 $\sum_{k=1}^{n} \omega_k = 1$，且 $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = 0$，则

$$\left(\frac{\| a \|_{2,\omega}}{\| a \|_2}\right)^2 + \left(\frac{\| b \|_{2,\omega}}{\| b \|_2}\right)^2 \leqslant 1,$$

由此推出

$$\| a \|_{2,\omega} \cdot \| b \|_{2,\omega} \leqslant \frac{1}{2} \| a \|_2 \cdot \| b \|_2;$$

若 $\sum_{k=1}^{n} \omega_k = 1$，则

$$\max_{1 \leqslant x \leqslant n} \left\{ \omega_k \mid a_k - \sum_{j=1}^{n} \omega_j a_j \mid \right\} \leqslant \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \omega_k \left| a_k - \sum_{j=1}^{n} \omega_j a_j \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \omega_k \mid a_k \mid^2 - \left| \sum_{j=1}^{n} \omega_j a_j \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$ ([330]39(2008), 291 ~ 301)

(13) 设 $1 < p < \infty$，$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，$0 < r < 1$，$a = (a_1, \cdots, a_n)$，$b = (b_1, \cdots, b_n)$，$e = (1, \cdots, 1)$，$(a, b) = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ 为 a, b 的内积，

若 $(a, b) \geqslant 0$，$(e, a) \leqslant 2^{-1}(e, e)$，$(e, b) \leqslant 2^{-1}(e, e)$，

$(\| e \|_p - \| a \|_p)(\| e \|_q - \| b \|_q) > 0$，

则

$$(a,b)^r - (e-a, e-b)^r \leqslant (\| a \|_p \| b \|_q)^r - \{(\| e \|_p - \| a \|_p)(\| e \|_q - \| b \|_q)\}^r;$$

$$\frac{(a,b)}{(e-a, e-b)} \leqslant \frac{\| a \|_p \| b \|_q}{(\| e \|_p - \| a \|_p)(\| e \|_q - \| b \|_q)}$$

仅当 $a_1 = \cdots = a_n$ 和 $b_1 = \cdots b_n$ 时等号成立.（文家金，王挽澜，[351]2008(1)：8 ~ 21）

12. 设 f, g 在 $[0,1]$ 上非负，$f^{\frac{1}{a}}, g^{\frac{1}{b}}$ 是 $[0,1]$ 上的凹函数，$a, b > 0$，$c_1, c_2 > 0$.

(1) 若 $p, q \geqslant 1$，则

$$\int_0^1 fg \geqslant B(a+1, b+1)(pa+1)^{\frac{1}{p}}(qb+1)^{\frac{1}{q}} \| f \|_p \| g \|_q,$$

仅当 $f(x) = c_1 x^a$，$g(x) = c_2(1-x)^b$ 时等号成立；

若 $0 < p, q \leqslant 1$，则

$$\int_0^1 fg \leqslant \frac{(pa+1)^{\frac{1}{p}}(qb+1)^{\frac{1}{q}}}{a+b+1} \| f \|_p \| g \|_q,$$

仅当 $f(x) = c_1 x^a$，$g(x) = c_2 x^b$ 或 $f(x) = c_1(1-x)^a$，$g(x) = c_2(1-x)^b$ 时等号成立.

(2) 若 $0 < p \leqslant r$，$0 < q \leqslant s$，则

$$\int_0^1 f^r g^s \leqslant \frac{(pa+1)^{\frac{r}{p}}(qb+1)^{\frac{s}{q}}}{ar+bs+1} \| f \|_p^r \| g \|_q^s,$$

若 $p \geqslant r > 0$，$q \geqslant s > 0$，则

$$\int_0^1 f^r g^s \geqslant B(ar+1, bs+1)(pa+1)^{\frac{r}{p}}(qb+1)^{\frac{s}{q}} \| f \|_p^r \| g \|_q^s.$$

([301]187(1994), 306 ~ 323)

13. 设 f 是 $[a,b]$ 上非负可测的凹函数，$0 < \alpha \leqslant \beta$，则

$$\left(\frac{\beta+1}{b-a}\int_a^b f^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}} \leqslant \left(\frac{\alpha+1}{b-a}\int_a^b f^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

取 $\alpha = 1$，$\beta = p$，即 $p \geqslant 1$，则

$$\int_a^b f^p \leqslant \frac{2^p}{(b-a)^{p-1}(p+1)}\left(\int_a^b f\right)^p;$$

取 $\alpha = p$，$\beta = 1$，即 $0 < p \leqslant 1$，则

$$\left(\int_a^b f\right)^p \leqslant \frac{(p+1)(b-a)^{p-1}}{2^p}\int_a^b f^p. \text{ ([2]44)}$$

14. 设 f, g 是 $[0,1]$ 上非负凹函数，$p, q \geqslant 1$，则

$$\int_0^1 fg \geqslant \frac{1}{6}(p+1)^{\frac{1}{p}}(q+1)^{\frac{1}{q}} \| f \|_p \| g \|_q + \frac{1}{6}[f(0)g(0) + f(1)g(1)].$$

(Borell 不等式). ([301]187(1994), 306 ~ 323)

15. 设 f 在 $[0,1]$ 上非负可积，$f^{\frac{1}{a}}$ 是 $[0,1]$ 上的凹函数，$a > 0$. 则当 $p \geqslant 1$ 时，

$$\int_0^1 f \geqslant \frac{(pa+1)^{\frac{1}{p}}}{a+1} \| f \|_p \quad \text{(Favard)},$$

当 $0 < p \leqslant 1$ 时，不等号反向. ([301]187(1994), 306 ~ 323)

16. 设 f, g 在 $[0,\infty)$ 上递减，则 $\int_0^\infty fg \geqslant \frac{1}{c}\left(\int_0^\infty f^2\right)\left(\int_0^\infty g^2\right)$，式中

$$c = \max\left\{f(0)\int_0^\infty g, g(0)\int_0^\infty f\right\}. \quad \text{([22]155)}$$

17. 设 λ 是方程 $x + 1 - \left(\frac{3}{2}\right)^x = 0$ 的根($\lambda \approx 3.939$). f, g 是 $[0,1]$ 上非负递增的凹函数，$1 \leqslant p, q < \infty$，则

(1) $\int_0^1 fg \geqslant c \| f \|_p \| g \|_q$，式中

$$c = \min\left\{\frac{1}{2}(1+p)^{\frac{1}{p}}, \frac{1}{2}(1+q)^{\frac{1}{q}}, \frac{1}{3}(1+p)^{\frac{1}{p}}(1+q)^{\frac{1}{q}}\right\}.$$

若 $p, q \geqslant \lambda$，则 $c = \frac{1}{3}(1+p)^{\frac{1}{p}}(1+q)^{\frac{1}{q}}$，且仅当 $f = g = x$ 时等号成立；

若 $p \leqslant \lambda$ 或 $q \leqslant \lambda$，且 $p \geqslant q$，则 $c = \frac{1}{2}(1+p)^{\frac{1}{p}}$，且仅当 $f(x) = x$ 和 $g(x) = 1$ 时等号成立.

(2) 设 $p \geqslant \lambda$，则 $\int_0^1 fg \geqslant c \| f \|_p \| g \|_\infty$，式中 $c = \frac{1}{3}(1+p)^{\frac{1}{p}}$，且仅当 $f = g = x$ 时等号成立；

若 $p \leqslant \lambda$，则 $c = \frac{1}{2}$，仅当 $f = x$，$g = 1$ 时等号成立.

(3) $\int_0^1 fg \geqslant \frac{1}{3} \| f \|_\infty \| g \|_\infty$，仅当 $f = g = x$ 时等号成立.([22]149 ~ 150)

18. 设 f, g 在[0,1]上非负，$f^{\frac{1}{a}}, g^{\frac{1}{b}}$ 是[0,1]上的凹函数，$a, b > 0$. 则

$$c_1\left(\int_0^1 f\right)\left(\int_0^1 g\right) \leqslant \int_0^1 fg \leqslant c_2\left(\int_0^1 f\right)\left(\int_0^1 g\right),$$

式中

$$c_1 = (a+1)(b+1)B(a+1, b+1), B(u,v) \text{ 是 Beta 函数}.$$

$$c_2 = \frac{(a+1)(b+1)}{a+b+1}.$$ ([301]187(1994), 306 ~ 323)

19. 设 $a_k \geqslant 0$, $0 < p_k \leqslant 1$, f_k 是[0,1]上非负函数.

(1) 若 $f_k^{\frac{1}{a_k}}$ 是[0,1]上的凹函数，则

$$\int_0^1 \left(\prod_{k=1}^n f_k\right) \leqslant \left(1 + \sum_{k=1}^n a_k\right)^{-1} \prod_{k=1}^n (p_k a_k + 1)^{\frac{1}{p_k}} \| f_k \|_{p_k},$$

仅当 $f_k(x) = x^{a_k}$ 或 $(1-x)^{a_k}$ 时等号成立.

(2) 若 $f_k^{\frac{1}{a_k}}$ 是[0,1]上的凸函数，且 $f_k(0) = 0$，则上述不等式反向，且仅当 $f_k(x) = x^{a_k}$ 时等号成立.([301]187(1994), 306 ~ 323)

20. 设在[0,1]上，f 非负递增，g 非负递减，$f^{\frac{1}{a}}, g^{\frac{1}{b}}$ 为凹函数，$a, b > 0$, ω 为[0,1]上正的可积函数，$p, q \geqslant 1$，则

$$\| fg \|_{1,\omega} \geqslant c \| f \|_{p,\omega} \| g \|_{q,\omega},$$

式中

$$c = \left(\int_0^1 x^a (1-x)^b \omega(x) \mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 x^{ap} \omega(x) \mathrm{d}x\right)^{-\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 (1-x)^{bq} \omega(x) \mathrm{d}x\right)^{-\frac{1}{q}},$$

仅当 $f(x) = x^a$ 和 $g(x) = (1-x)^b$ 时等号成立.([301]187(1994), 306 ~ 323)

21. 设 f_k 是 $[a,b]$ 上正的连续函数，$p_k > 0$ 且 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k} = 1$，则

$$\int_a^b \left(\prod_{k=1}^n f_k\right) \leqslant G(t) \leqslant \prod_{k=1}^n \left(\int_a^b f_k^{p_k}\right)^{\frac{1}{p_k}},$$

式中

$$G(t) = \prod_{k=1}^n \left\{\int_a^b \left(\prod_{j=1}^n f_j\right)^{1-t} (f_k^{p_k})^t\right\}^{\frac{1}{p_k}}.$$

(刘证，[330]34(2003), 383 ~ 385)

22. 设 $x_k \geqslant a_k \geqslant 0$, $y_k \geqslant b_k \geqslant 0$, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 记

$$\| x - a \|_p = \left\{\sum_{k=1}^n (x_k^p - a_k^p)\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

则

$$\| x - a \|_p \cdot \| y - b \|_q \leqslant \| x \|_p \cdot \| y \|_q - \| a \|_p \cdot \| b \|_q,$$

仅当 $\| x \|_p^p \| b \|_q^q = \| y \|_q^q \| a \|_p^p$ 时等号成立. 由此推出

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k^p - a_k^p)^{\frac{1}{p}}(y_k^q - b_k^q)^{\frac{1}{q}} \leqslant \|x\|_p \|y\|_q - \|a\|_p \|b\|_q,$$

仅当$\frac{a_k}{x_k} = \frac{b_k}{y_k} = \lambda$ $(\lambda > 0)$ 时等号成立.(杨定华,徐丹,[345]47(4)(2008),52,54)

23. **线性泛函的 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式.**

设 E 是非空集,L 是线性泛函的集合,即满足条件:

$L_1: f,g \in L \Rightarrow (c_1 f + c_2 g) \in L,\quad c_1, c_2 \in R^1$;

$L_2: 1 \in L$ 即若 $f(t) = 1,\ t \in E$,则 $f \in L$.

设 $A: L \to R^1$ 是正线性泛函,即满足条件:

$A_1: A(c_1 f + c_2 g) = c_1 A(f) + c_2 A(g),\quad f,g \in L,\quad c_1, c_2 \in R^1$,

A_2:若 $f \in L,\ f(t) \geqslant 0, t \in E$,则 $A(f) \geqslant 0$.

(1) 若 $1 < p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ f, g, \omega \geqslant 0,\ f^p\omega,\ g^q\omega, fg\omega,\ (f+g)^p\omega \in L$,则

$$A(fg\omega) \leqslant \{A(f^p\omega)\}^{\frac{1}{p}}\{A(g^q\omega)\}^{\frac{1}{q}};$$

$$\{A((f+g)^p\omega)\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \{A(f^p\omega)\}^{\frac{1}{p}} + \{A(g^p\omega)\}^{\frac{1}{p}}.$$

当 $0 < p < 1$(或 $p < 0$) 且 $A(g^q\omega) > 0$,(或 $A(f^p\omega) > 0$) 时,不等号均反向.

(2) 设 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,若 $0 < m \leqslant f(x)g(x)^{-\frac{q}{p}} \leqslant M,\ x \in E$,则当 $1 < p < \infty$ 时,

$$A(fg\omega) \geqslant \lambda[A(f^p\omega)]^{\frac{1}{p}}[A(g^q\omega)]^{\frac{1}{q}};$$

当 $0 < p < 1$(或 $p < 0$) 且 $A(g^q\omega) > 0$(或 $A(f^p\omega) > 0$) 时,不等号反向;

若 $1 < p < \infty, 0 < m \leqslant f(f+g)^{-\frac{q}{p}},\ g(f+g)^{\frac{q}{p}} \leqslant M$,则

$$[A(f+g)^p\omega]^{\frac{1}{p}} \geqslant \lambda\{[A(f^p\omega)]^{\frac{1}{p}} + [A(g^p\omega)]^{\frac{1}{p}}\},$$

当 $0 < p < 1$(或 $p < 0$ 且 $A(f+g)^p\omega) > 0$) 时,不等号反向.式中

$\lambda = |p|^{\frac{1}{p}}\,|q|^{\frac{1}{q}}(M-m)^{\frac{1}{p}}\,|mM^p - Mm^p|^{\frac{1}{q}} \cdot |M^p - m^p|^{-1}$.([22]135 ~ 136)

(3) 设 $A, B: L \to R^1$ 是正线性泛函. $f_k, g_k: E \to [0,\infty)$ 满足:

$$f_k^p,\ \left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right)^p,\ g_k^q,\ \left(\sum_{k=1}^{n} g_k\right)^q \in L.\ 1 \leqslant p < \infty,\ q > 0,\ A(g_k^q) > 0,$$

则

$$\left\{\frac{A\left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right)^p}{B\left(\sum_{k=1}^{n} g_k\right)^q}\right\}^{\frac{1}{p-q}} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{A(f_k^p)}{B(g_k^q)}\right\}^{\frac{1}{p-q}}.$$ ([301]110(1985),536 ~ 552)

(4) 设 $A, B: L \to R^1$ 是正线性泛函,$f_k: E \to [0,\infty)$ 满足:

$$f_k^q,\ f_k^r,\ \left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right)^p,\ \left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right)^r \in L.$$

若 $q \leqslant 1 \leqslant r, q \neq 0,\ 1 \leqslant p < \infty$,则

$$\frac{\left\{A\left[\left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right)^r\right]\right\}^{\frac{p}{r}}}{\left\{B\left[\left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right)^q\right]\right\}^{\frac{p-1}{q}}} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{[A(f_k^r)]^{\frac{p}{r}}}{[B(f_k^q)]^{\frac{p-1}{q}}};$$

若 $q,r \leqslant 1$, $q,r \neq 0$, $0 < p \leqslant 1$,则上述不等号反向.([22]158)

24. **Orlicz 空间中的 Hölder 不等式**

设 φ 是$[0,\infty)$上非负递增的凸函数,$\varphi(0)=0$, $\varphi(\infty)=\infty$,φ 在$(0,\infty)$内不恒为 0 或 ∞,则称 φ 是 Young 函数.令

$$\varphi^*(s) = \sup_{t\geqslant 0}(st - \varphi(t)),\quad s \geqslant 0.$$

则 φ^* 称为 φ 的凸共轭函数,φ^* 也是 Young 函数,且 $\varphi^{**} \equiv \varphi$. 于是成立 Young 不等式:

$$st \leqslant \varphi(t) + \varphi^*(s),\qquad s,t > 0.$$

令 $N_\varphi(f) = \int_{R^n}\varphi(|f(x)|)\mathrm{d}x$, $(f,g) = \int_{R^n} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x$.

定义 Orlicz 空间为

$$L_\varphi(R^n) = \{f: f \text{ 在 } R^n \text{ 上可测且 } N_\varphi(\lambda f) < \infty,\ \lambda > 0\}.$$

范数

$$\| f \|_{L_\varphi} = \inf\left\{\frac{1}{\lambda}(N_\varphi(\lambda f) + 1) : \lambda > 0\right\}.$$

设 φ,φ^*,为共轭 Young 函数,则成立 Hölder 不等式:

$$\frac{1}{2}\| f \|_{L_\varphi} \leqslant \sup\left\{\frac{|(f,g)|}{\| g \|_{L_{\varphi^*}}} : g \in L_{\varphi^*}\right\} \leqslant \| f \|_{L_\varphi},\quad f \in L_\varphi.$$

([368]28(3)(1979),512 ~ 513)

25. **抽象测度空间$(X,\sum,\mu)$上 Hölder 不等式与 Minkouski 不等式的改进和推广:**

(1) 设$(X,\sum_1,\mu_1)$和$(Y,\sum_2,\mu_2)$是两个 σ 有限的测度空间,$\mu(X)=1$,f 是 $X\times Y$ 上正的可测函数,则

$$\int_Y \exp\left(\int_X \ln f \mathrm{d}\mu_1\right)\mathrm{d}\mu_2 \leqslant \exp\left\{\int_X \ln\left(\int_Y f\mathrm{d}\mu_2\right)\mathrm{d}\mu_1\right\}.\tag{2.110}$$

(Kwon,E. G. ,[359]1995,51(3):369 ~ 375)

(2) 设$(X,\sum,\mu)$为测度空间,$A,B\in\sum$ 且 $0<\mu(A)<1<\mu(B)$,$f_k:(0,\infty)\to(0,\infty)$为任意双射函数. $\varphi: X\to R$ 为非负可积的简单函数,它构成的线性空间记为 S_+,$E=\{x\in X:\varphi(x)\neq 0\}$,记

$$p_f(\varphi) = \begin{cases} f^{-1}\left(\int_E f\circ|\varphi|\mathrm{d}\mu\right), & \mu(E) > 0,\\ 0, & \mu(E) = 0.\end{cases}$$

若 $$\int_X \left(\prod_{k=1}^n \varphi_k\right)\mathrm{d}\mu \leqslant \prod_{k=1}^n p_{f_k}(\varphi_k),\ \forall \varphi_k \in S_+,\tag{2.111}$$

则 f_k 必为共轭幂函数,即 $f_k(x) = c_k x^{q_k}$,$x>0$,c_k 为常数,且 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{q_k} = 1$.

(2.111)式的证明思路主要依赖于下述结果:

设 $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$,$0<a<1<a+b$,$a<b$ 且

$af(x)+bf(y)\leqslant f(ax+by)$,$x,y>0$,则 $f(x)=cx$.

(Mathowski,[362]1997,50(1 ~ 2):135 ~ 143)

Mathowski 在 1994 年还证明了下述 Minkowski 不等式：若 f^{-1} 在 0 点连续，且

$$p_f(\varphi_1+\varphi_2)\leqslant p_f(\varphi_1)+p_f(\varphi_2),\varphi_1,\varphi_1\in S_+. \tag{2.112}$$

则当 $1\leqslant q<\infty$ 时，$f(x)=f(1)x^q,x\geqslant 0$；而当 $0<q\leqslant 1$，且(2.112) 式中不等号反向时，$f(x)=f(1)x^q$. 作者还进一步证明了下述广义 **Hölder-Minkowski 不等式**：

$$h\left(\frac{\int_E f\mathrm{d}\mu}{\int_E g\mathrm{d}\mu}\right)\int_E g\mathrm{d}\mu\leqslant\int_E\left[h\cdot\left(\frac{f}{g}\right)\right]g\mathrm{d}\mu, \tag{2.113}$$

式中 $h:(0,\infty)\to R^1$ 为凸函数，非负函数 $f,g\in L(E),E\in\sum,\mu(E)>0$，若 h 为凹函数，则不等号反向，特别当 $h(t)=t^{1/p}$ 时得 Hölder 不等式，当 $h(t)=(t^{1/p}+1)^p$ 时得到 Minkowski 不等式. 这是因为当 $0<p<1$ 时 h 为凸函数，$1<p<\infty$ 时 h 为凹函数.

(2.113) 式的证明思路是：定义测度 $v:\sum\to[0,\infty]$ 为

$$v(A)=\frac{\int_A g\mathrm{d}\mu}{\int_E g\mathrm{d}\mu},\ A\subset E,$$

则 $(E,\sum,v)$ 为正规化的测度空间，且 $f/g\in L(v)$，由凸函数的 Jensen 积分不等式，得到

$$h\left(\int_E\frac{f}{g}\mathrm{d}v\right)\leqslant\int_E h\cdot\left(\frac{f}{g}\right)\mathrm{d}v.$$

再将 $\mathrm{d}v$ 的表达式代入即得(2.113) 式.([329]1994,109(2):171 ～ 182. 进一步的改进[302]1999,3(2):127 ～ 135)

(3)　设 f,g 是 R^1 上有紧支集的非负连续函数，$1<p<\infty,1/p+1/q=1$，则

$$\sup_x\int f(x-y)g(y)\mathrm{d}y\leqslant\|f\|_p\|g\|_q\leqslant\int\sup_y\{f(x-y)g(y)\}\mathrm{d}x. \tag{2.114}$$

1972 年 Leindler, L. 证明了一个更强的结果：

$$\int\sup_y\{f(x-y)g(y)\}\mathrm{d}x\geqslant p^{1/p}q^{1/q}\|f\|_p\|g\|_q.$$

当 f 是 $[0,1/p]$ 的特征函数而 g 是 $[0,1/q]$ 的特征函数时等号成立.([369]1972,33:217 ～ 223，或[305](1991)98:650 ～ 652)

(4)　**Hölder 不等式的对数推广**：设　$0\leqslant a<1,b,c>0,\beta=b+c,\delta=\beta\left[\frac{1}{1-a}+\frac{1}{c}\right]$，定义 $f,g:[1,\infty)\to R^1$ 为：$f(x)=x^a(\log x)^b$；$g(y)=y^{1-b}(\delta+\log y)^{-\beta}$，再定义 $H:[1,\infty)\times[1,\infty)\to R^1$ 为

$$H(x,y)=\begin{cases}f(x)g(y), & x\geqslant 1,1\leqslant y\leqslant\dfrac{x^{\beta/b}}{e^\delta},\\ \dfrac{b^bc^c}{\beta^\beta}x^ay^{1-a}\left(\delta+\dfrac{1}{x}\log y\right)^{-c}, & x\geqslant 1,y\geqslant p,\end{cases}$$

式中　$p=\max\{1,e^{-\delta}x^{\beta/b}\}$，若 (X,μ) 为概率空间，$\varphi,\psi:X\to[1,\infty)$，则

$$\int_X(f\circ\varphi)(g\circ\psi)\mathrm{d}\mu\leqslant H\left(\int_X\varphi\mathrm{d}\mu,\int_X\psi\mathrm{d}\mu\right).$$

(Ginibre,J. 等[302]1999,3(4):389 ~ 400)

(5) **Hölder 不等式的Rado型推广**:设 μ 为空间 X 上正测度,$\mu(X)\neq 0$,f_k 是 X 上正的 μ 可积函数,$q_k>0$,$Q_k=\sum_{j=1}^{k}q_j$,$Q_n=1$,$p_j=\frac{q_j}{Q_k}$,$k<n$.,$1<r<\infty$,则

$$1-\frac{\int_X(\prod_{j=1}^{n}f_j^{q_j})^r\mathrm{d}\mu}{\prod_{k=1}^{n}(\int_X f_k^r\mathrm{d}\mu)^{q_k}}\geqslant\frac{k}{n}\left\{1-\frac{\int_X(\prod_{j=1}^{k}f_j^{p_j})^r\mathrm{d}\mu}{\prod_{j=1}^{k}(\int_X f_j^r\mathrm{d}\mu)^{p_j}}\right\}.$$

(Kwon,Ern Gun 等 J. Korea Soc,Math. Educ. Ser. B Pure Appl. Math,2000,7(1):1 ~ 6)

四、 若干重要的推论

1. 设 $a=\{a_k\}$ 为实数列或复数列,令(见(2.2) 式):

$$\|a\|_p=(\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^p)^{1/p}.0<p<\infty,\ \|a\|_\infty=\sup_k|a_k|:$$

则数列空间 l^p 定义为:

$$l^p=\{a=(a_1,\cdots,a_n,\cdots):\ \|a\|_p<\infty\}.$$

$$c=\{a=(a_1,\cdots,a_n,\cdots):\ \lim_{n\to\infty}x_n\text{ 存在(有限)}\}.$$

若 $1<p_1<p_2<\infty$,则

$$l^1\subset l^{p_1}\subset l^{p_2}\subset c\subset l^\infty. \tag{2.115}$$

而且存在常数 α,使得 $\|a\|_{p_2}\leqslant\alpha\|a\|_{p_1}$,

$$\lim_{p\to\infty}\|a\|_p=\|a\|_\infty. \tag{2.116}$$

证 (1) 设 $a=\{a_n\}\in l^{p_1}$,则 $\|a\|_{p_1}^{p_1}=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^{p_1}<\infty$,由级数收敛的必要性,$\lim_{n\to\infty}a_n=0$,从而 $\exists n_0$,使得 $\forall n>n_0$ 时,$|a_n|\leqslant 1$. 从而 $|a_n|^{p_2}\leqslant|a_n|^{p_1}$. 于是

$$\|a\|_{p_2}^{p_2}\leqslant\sum_{k=1}^{n_0}|a_k|^{p_2}+\sum_{k=n_0+1}^{\infty}|a_k|^{p_1}<\infty,a\in l^{p_2}.\text{这表明 }l^{p_1}\subset l^{p_2}.$$

(2) 若 $a\in l^{p_0}$,则 $\forall p\geqslant p_0$,$a\in l^p$,因为 $|a_n|\to 0(n\to\infty)$,则存在 $|a_k|$ 的最大值,记为 $|a_{k_0}|$,于是 $\|a\|_\infty=|a_{k_0}|$. 又因为 $|\frac{a_k}{a_{k_0}}|\leqslant 1$,所以,$\sum_{k=1}^{\infty}|\frac{a_k}{a_{k_0}}|^p$ 当 $p\to\infty$ 时递减(从而有界)记为 $\sum_{k=1}^{\infty}|\frac{a_k}{a_{k_0}}|^p\leqslant M$. $\|a\|_p^p=\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^p=\sum_{k=1}^{\infty}|\frac{a_k}{a_{k_0}}|^p|a_{k_0}|^p\leqslant M|a_{k_0}|^p=M\|a\|_\infty^p$,

所以从 $\|a\|_\infty=|a_{k_0}|\leqslant\|a\|_p\leqslant\sqrt[p]{M}\|a\|_\infty$ 和 $\sqrt[p]{M}\to 1(p\to\infty)$,得出(2.116) 式.

2. 设 $(X,\sum,\mu)$ 为测度空间,$E\in\sum$,$\mu(E)<\infty$,$1\leqslant p_1<p_2\leqslant\infty$,则

(1) $C(E)\subset L^\infty(E)\subset L^{p_2}(E)\subset L^{p_1}(E)\subset L(E)$; (2.117)

(2) $\|f\|_{p_1}\leqslant c(p_1,p_2)\|f\|_{p_2}$. (2.118)

式中 $c(p_1,p_2)=\begin{cases}(\mu(E))^{(1/p_1-1/p_2)}, & p_2<\infty,\\ (\mu(E))^{(1/p_1)}, & p_2=\infty.\end{cases}$

(3) $$\lim_{p\to\infty}\|f\|_p=\|f\|_\infty. \tag{2.119}$$

证 设 $1<p_1<p_2<\infty$,由 Hölder 不等式有

$$\|f\|_{p_1}^{p_1}=\int_E|f|^{p_1}\mathrm{d}\mu\leqslant\left(\int_E(|f|^{p_1})^{p_2/p_1}\mathrm{d}\mu\right)^{p_1/p_2}\left(\int_E\mathrm{d}\mu\right)^{1-p_1/p_2}$$

$=\|f\|_{p_2}^{p_1}(\mu(E))^{1-p_1/p_2}$. 两边开 p_1 次方即得(2.118)式.

为证(2.119)式,$\forall A\subset E,\mu(A)=0$,有

$$\|f\|_p^p=\int_E|f|^p\mathrm{d}\mu=\int_{E-A}|f|^p\mathrm{d}\mu\leqslant(\sup_{x\in E-A}|f(x)|^p)\mu(E-A),$$

两边对 $\forall A\subset E$ 取下确界,得 $\|f\|_p^p\leqslant\|f\|_\infty^p\mu(E)$. 于是

$$\operatorname{linsup}_{p\to\infty}\|f\|_p\leqslant\|f\|_\infty\lim_{p\to\infty}(\mu(E))^{1/p}=\|f\|_\infty. \tag{2.120}$$

另一方面,令 $B=\{x\in E:|f(x)|>\|f\|_\infty-\varepsilon\}$. 则 $\mu(B)>0$,且

$$\|f\|_p\geqslant\left(\int_B|f|^p\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}\geqslant(\|f\|_\infty-\varepsilon)(\mu(B))^{1/p},$$

于是,$\liminf_{p\to\infty}\|f\|_p\geqslant\|f\|_\infty-\varepsilon$,由 $\varepsilon>0$ 的任意性,得

$$\liminf_{p\to\infty}\|f\|_p\geqslant\|f\|_\infty. \tag{2.121}$$

从(2.120)式,(2.121)式得(2.119)式.

注 (2.115)式中的包含关系正好与(2.117)式相反. 而且当 $\mu(E)=\infty$ 时,(2.117)式不成立.

3. 设$(X,\sum,\mu)$为测度空间,$E\in\sum$,若 $f,g\in L^q(E)$,$0<q<\infty$,则当 $p\geqslant q>0$ 时,

$$(\|f\|_q^p+\|g\|_q^p)^{1/p}\leqslant\|(|f|^p+|g|^p)^{1/p}\|_q; \tag{2.122}$$

而当 $0<p\leqslant q$ 时,不等号反向.

若 z 为复数,且 $|z|=1$,则当 $1\leqslant p\leqslant q\leqslant 2$ 时,

$$\|f+zg\|_q^p+\|f-zg\|_q^p\geqslant|(\|f\|_q+z\|g\|_q)|^p+|(\|f\|_q-z\|g\|_q)|^p, \tag{2.123}$$

若 $2\leqslant q\leqslant p<\infty$,则不等号反向.

若 $0<p<1$,$p\leqslant q\leqslant 2$,$|\mathrm{Re}z|\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{2-p}}$,则(2.123)式成立.

(Pavlovic,M.,[301]1996,202:160 ~ 168)

4. 设 $0<p,q<\infty$,$f\in L^p(E)\cap L^q(E)$,则 $\forall r:p<r<q$,有 $f\in L^r(E)$,且成立 **Lyapunov 不等式**:

$$\|f\|_r\leqslant\|f\|_p^{1-\alpha}\|f\|_q^\alpha, \tag{2.124}$$

式中 $0<\alpha<1$ 由 $\dfrac{1}{r}=\dfrac{1-\alpha}{p}+\dfrac{\alpha}{q}$ 确定.

证 令 $p_1=\dfrac{p}{(1-\alpha)r}$,$q_1=\dfrac{q}{\alpha r}$,则 $\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{q_1}=1$,$q_1>1$. 由 Hölder 不等式,有

$$\|f\|_r^r=\int_E|f|^r=\int_E|f|^{\alpha r}\cdot|f|^{(1-\alpha)r}\leqslant(\int_E|f|^{\alpha r q_1})^{1/q_1}(\int_E|f|^{(1-\alpha)rp_1})^{1/p_1}$$

$$=[(\int_E|f|^q)^{1/q}]^{\alpha r}[(\int_E|f|^p)^{1/p}]^{(1-\alpha)r}=\|f\|_q^{\alpha r}\|f\|_p^{(1-\alpha)r}.$$

两边开 r 次方即得(2.124)式.

推论 1 设 $f\in L^p(E)\cap L^\infty(E)$, $0<p<\infty$,则对于 $p<q<\infty$,有 $f\in L^q(E)$,且

$$\|f\|_q\leqslant\|f\|_q^{p/q}\|f\|_\infty^{1-p/q}.\tag{2.125}$$

推论 2 设 $0<p<r<q\leqslant\infty$, $f\in L^p(E)\cap L^q(E)$. 则 $f\in L^r(E)$,且

$$\|f\|_r\leqslant\max\{\|f\|_p,\|g\|_q\}.\tag{2.126}$$

5. 设 $1\leqslant p\leqslant r\leqslant q<\infty$, $f\in L^p(E)\cap L^q(E)$,则

$$\|f\|_r^r\leqslant\|f\|_p^p+\|f\|_q^q.\tag{2.127}$$

证 令 $A=\{x\in E:|f(x)|\leqslant1\}$, $B=\{x\in E:|f(x)|>1\}$. 则 $E=A\cup B$,而且

$$\|f\|_r^r=\int_A|f|^r\mathrm{d}\mu+\int_B|f|^r\mathrm{d}\mu\leqslant\int_A|f|^p\mathrm{d}\mu+\int_B|f|^q\mathrm{d}\mu\leqslant\|f\|_p^p+\|f\|_q^q.$$

注 (2.124)式说明 $\|f\|_p$ 是 $1/p$ 的对数凸函数.

利用 Hölder 不等式还可证明. $\|f\|_p^p$ 是 p 的对数凸函数,这是因为设 $0\leqslant\alpha\leqslant1$, $r=\alpha p+(1-\alpha)q$,则

$$\|f\|_r^r=\int_E|f|^r\mathrm{d}\mu=\int_E|f|^{\alpha p}\cdot\int_E|f|^{(1-\alpha)q}\mathrm{d}\mu\leqslant$$

$$\leqslant(\int_E|f|^p\mathrm{d}\mu)^\alpha(\int_E|f|^q\mathrm{d}\mu)^{1-\alpha}=\|f\|_p^{\alpha p}\|f\|_q^{(1-\alpha)q}.$$

6. 设 $\mu(E)=1$, $f\in L^p(E)$, $p>0$,则对于 $0<q<p$. 有 $f\in L^q(E)$,而且

(1) $$\int_E(\log|f|)\mathrm{d}\mu\leqslant\log\|f\|_q\leqslant\frac{1}{q}(\int_E|f|^q\mathrm{d}\mu-1),\tag{2.128}$$

(2) $$\lim_{q\to0}\frac{1}{q}(\int_E|f|^q\mathrm{d}\mu-1)=\int_E(\log|f|\,\mathrm{d}\mu).\tag{2.129}$$

(3) $$\lim_{q\to0}\|f\|_q=\exp(\int_E(\log|f|)\mathrm{d}\mu).\tag{2.130}$$

提示:利用第 7 章 Jensen 不等式和(2.118)式. 有

$$\exp\left(\int_E(\log|f|)\mathrm{d}\mu\right)\leqslant\int_E\exp(\log|f|)\mathrm{d}\mu=\|f\|_1\leqslant(\mu(E))^{1-\frac{1}{q}}\|f\|_q.$$

注意到 $\mu(E)=1$,即得(2.128)式左边不等式.

利用初等不等式 $\log t\leqslant t-1$, $(0<t<\infty)$,用 $t=\frac{|f|^q}{\|f\|_q^q}$ 代入并在 E 上积分,得

$$\int_E(\log|f|^q-\log\|f\|_q^q)\mathrm{d}\mu\leqslant\frac{1}{\|f\|_q^q}\int_E|f|^q\mathrm{d}\mu-\mu(E)=0.$$

即 $$\int_E(\log|f|\,\mathrm{d}\mu)\leqslant\log\|f\|_q.\tag{2.131}$$

另一方面,当 $q\to+0$ 时,$\frac{|f|^q-1}{q}$ 递减趋于 $\log|f|$,又 $\frac{1}{p}(|f|^p-1)\in L(E)$. 由

Levi 单调收敛定理.

$$\lim_{q\to 0}\frac{1}{q}\left(\int_E |f|^q \mathrm{d}\mu - 1\right) = \lim_{q\to 0}\int_E \left(\frac{|f|^q - 1}{q}\right)\mathrm{d}\mu = \int_E \log|f|\,\mathrm{d}\mu.$$

所以,

$$\int_E \log|f|\,\mathrm{d}\mu = \lim_{q\to 0}\frac{1}{q}\left(\int_E |f|^q\mathrm{d}\mu - 1\right)$$
$$\geqslant \limsup_{q\to 0}\frac{1}{q}\log\left(\int_E |f|^q \mathrm{d}\mu\right) = \limsup_{q\to 0}\log\|f\|_q. \tag{2.132}$$

从(2.131)式和(2.132)式即可推出(2.129)式,(2.130)式.

7.　**函数的积分平均不等式**:设 $0<\mu(E)<\infty, 1\leqslant p<\infty$,记

$$N_p(f) = \left(\frac{1}{\mu(E)}\int_E |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p}. \tag{2.133}$$

$N_p(f)$ 称为 f 关于集合 E 和指数 p 的平均值,它除了满足 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式以外,还有关于 p 递增等优点,即

(1)　**Hölder 不等式**:$N_1(fg)\leqslant N_p(f)N_q(g)$;式中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, 1<p<\infty$.

(2)　**Minkowski 不等式**:$N_p(f+g)\leqslant N_p(f)+N_p(g), 1\leqslant p<\infty$.

(3)　$\lim\limits_{p\to\infty}N_p(f) = \|f\|_\infty$.

(4)　$N_p(f)$ 关于 p 递增:$1\leqslant p_1\leqslant p_2 \Rightarrow N_{p_1}(f)\leqslant N_{p_2}(f)$.

(5)　$N_p(f)$ 关于积分区域 E 递增,即设 $E_1\subset E_2$,则

$$\left(\frac{1}{\mu(E_1)}\int_{E_1}|f|^p\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}\leqslant\left(\frac{1}{\mu(E_2)}\int_{E_2}|f|^p\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}.$$

(6)　$(N_p(f))^p$ 为 p 的对数凸函数,即 $\log(N_p(f))^p$ 为凸函数;$N_p(f)$ 是 $1/p$ 的对数凸函数,这是因为

$$N_r(f)\leqslant (N_p(f))^{1-\alpha}(N_q(f))^\alpha, \tag{2.134}$$

式中　$0<\alpha<1$ 由 $1/r=(1-\alpha)/p+\alpha/q$ 确定.

注 1　我们可以进一步考虑 f 关于 E 和 p 的加权平均:

$$N_{p,\omega}(f) = \left(\frac{1}{\omega(E)}\int_E |f|^p\omega\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}, \tag{2.135}$$

式中　$\omega(E)=\int_E\omega(x)\mathrm{d}\mu$, $\omega(x)>0$, a. e. 于 $x\in E$. 它与 $N_p(f)$ 有类似的性质.

注 2　对于离散量求和,令 $A_n(p)=\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $a_k>0$. 则 $A_n(p)$ 关于 p 递增,即:$0<p_1\leqslant p_2\Rightarrow A_n(p_1)\leqslant A_n(p_2)$.

8.　设 $0<\mu(E)<\infty$, f,g 在 E 上非负可测,在 E 上 f 递增而 g 递减,则

$$\int_E fg\,\mathrm{d}\mu\leqslant\frac{1}{\mu(E)}\left(\int_E f\,\mathrm{d}\mu\right)\left(\int_E g\,\mathrm{d}\mu\right).$$

证:利用 f,g 的单调性,得到

$$\int_E\int_E[f(x)-g(x)][g(y)-g(x)]\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y)\geqslant 0.$$

将积分拆开即可得到所要证的不等式.

9. 设 $1 < p < \infty$, $f,g \in L^p(E)$, $0 < \mu(E) < \infty$,则

$$\left(\int_E |f+g|\,d\mu\right)^p \leqslant [2\mu(E)]^{p-1}\left(\int_E |f|^p d\mu + \int_E |g|^p d\mu\right).$$

10. 设 $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $f \in L^p(-\infty,\infty)$, $g \in L^q(-\infty,\infty)$.

令 $F(t) = \sup\{f(x)g(y): x+y=t\}$,则

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\,dt \geqslant p^{\frac{1}{p}}q^{\frac{1}{q}} \| f \|_p \cdot \| g \|_q.$$ (Leindler,[369]33(1972),217 ~ 223)

11. 设 $p,q,r \geqslant 1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1+\frac{1}{r}$, $f \in L^p(-\infty,\infty)$, $g \in L^q(-\infty,\infty)$, f,g 非负,则

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}[f(x)g(y-x)]^r dx\right\}^{\frac{1}{r}} dy \geqslant \| f \|_p \| g \|_q.$$

设 f,g 是以为 2π 周期的非负函数,若将范数改为

$$\| f \|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

则 $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[f(x)g(y-x)]^r dx\right\}^{\frac{1}{r}} dy \geqslant \| f \|_p \| g \|_q$. ([22]168 ~ 169)

12. 令 $F(t) = \sup\{f(x,y): \lambda x + (1-\lambda)y = t\}$,则

$$\max_{\lambda\in[0,1]}\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\,dt \geqslant \left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f^p(x,y)\,dx\right]^{\frac{q}{p}} dy\right\}^{\frac{1}{q}},$$

式中 $1 < p,q < \infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. (证明及更一般的结果见[369]37(1975),261 ~ 262)

13. 上述 No. 10 ~ 11 的离散类似是:设 $a_k, b_k \geqslant 0$, $a=\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$, $b=\{b_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$, $\| a \|_p = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $p,q,r \geqslant 1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1+\frac{1}{r}$, 记 $A_n = \sup\{a_k b_j : k+j=n\}$. 则

(1) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \geqslant 2\| a \|_2 \| b \|_2$;

(2) $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}(a_k b_{n-k})^r\right]^{\frac{1}{r}} \geqslant \| a \|_p \| b \|_q$.

14. 设 $1 \leqslant r < \infty$, $1+\frac{1}{r} \leqslant p,q \leqslant \infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $\| a \|_\infty = \sup_n |a_n|$,若 $a_n, b_n \geqslant 0$,则

$$\| a \|_\infty \| b \|_\infty + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}(a_k b_{n-k})^r\right]^{\frac{1}{r}} \geqslant p^{\frac{1}{p}}q^{\frac{1}{q}} \| a \|_p \| b \|_q.$$

当 $r=\infty$ 时,变成 $1 < p,q < \infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,于是

$$\| a \|_\infty \| b \|_\infty + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sup_n\{a_k b_{n-k}\} \geqslant p^{\frac{1}{p}}q^{\frac{1}{q}} \| a \|_p \cdot \| b \|_q.$$

(Leindler,[369]33(1972),11 ~ 14,[354]128(1972),305 ~ 309)

§3 平均不等式

平均不等式在不等式理论中处于核心地位,AG 不等式(算术平均 - 几何平均不等式)是 Hardy 等名著[1] 的三大主题之一(另两个主题是 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式). 1988 年出版的专著"Means and their inequalities"[10] 达 459 页,但仍有大量的平均不等式未能收入,本节仅介绍若干基本的结果和 20 世纪 90 年代以来的最新结果.

一、AG 不等式

(一) AG 不等式的基本形式

1. 中学数学中,常称以下三个不等式为基本不等式:

(1) $\sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2} \quad (a,b \geqslant 0)$; (3.1)

(2) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geqslant 2 \quad (a,b$ 同号); (3.2)

(3) $2ab \leqslant a^2 + b^2$, $(a,b$ 为实数). (3.3)

仅当 $a = b$ 时,以上三个不等式中的等号成立.

应注意的是,仅当 $a,b > 0$ 时,以上三个不等式才等价,在一般情形下,它们对 a,b 所要满足的条件是不同的,(3.1) 式等价于$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0$.

2. 设 $a = (a_1,\cdots,a_n)$,$a_k \geqslant 0$,$1 \leqslant k \leqslant n$,则 $A_n(a) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 称为 $a_1,\cdots,a_n$ 的算术平均(值),$G_n(a) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ 称为 $a_1,\cdots,a_n$ 的几何平均(值).

$$G_n(a) \leqslant A_n(a) \text{ 即 } \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \tag{3.4}$$

称为 AG 不等式,仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时等号成立.

AG 不等式是最重要的基本不等式,利用这个不等式,可将和的形式缩小为积的形式,或将积的形式放大为和的形式,因而可以叙述成两个等价的共轭命题:

(1) 其和为 S 的 n 个正数之积,在这些数都相等时为最大,最大值为$(S/n)^n$;

(2) 其积为 σ 的 n 个正数之和,在这些数都相等时为最小,最小值为 $n\sigma^{1/n}$.

因此,AG 不等式有许多独特的应用价值,例如在几何学中求最大最小问题时,给定表面积的所有长方体中,正方体具有最大的体积;而给定体积的所有长方体中,正方体具有最小的表面积等.

AG 不等式的加权形式是:

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k^{q_k}\right)^{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} q_k\right)^{-1}} \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} q_k a_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} q_k}.$$

特别，

$$G_n(a,q) \leqslant A_n(a,q), \tag{3.5}$$

式中 $G_n(a,q) = \prod_{k=1}^{n} a_k^{q_k}, A_n(a,q) = \sum_{n=1}^{n} q_k a_k,\ q_k > 0, \sum_{k=1}^{n} q_k = 1.$

通过对数变换可以将这两种平均联系起来，记 $\ln a = (\ln a_1, \cdots, \ln a_n)$，则

$$\ln G_n(a,q) = \sum_{k=1}^{n} q_k \ln a_k = A_n(\ln a, q).$$

即正数 $a_1,\cdots,a_n$ 的加权几何平均 $G_n(a,q)$ 的对数等于 $a_1,\cdots a_n$ 的对数 $\ln a_1,\cdots,\ln a_n$ 的加权算术平均.

(3.5) 式的进一步推广是：设 $a_{jk} > 0, q_k > 0$，且 $\sum_{k=1}^{n} q_k = 1$，则

$$\sum_{j=1}^{m} (\prod_{k=1}^{n} a_{jk}^{q_k}) \leqslant \prod_{k=1}^{n} (\sum_{j=1}^{m} a_{jk})^{q_k}, \tag{3.6}$$

仅当

$$\frac{a_{j1}}{\sum_{j=1}^{m} a_{j1}} = \frac{a_{j2}}{\sum_{j=1}^{m} a_{j2}} = \cdots = \frac{a_{jn}}{\sum_{j=1}^{m} a_{jn}}, (j = 1, \cdots, m)$$ 时等号成立([1] 定理 11).

3. **AG 不等式的证明**：早在公元前 500 多年的毕达哥拉斯(Pythagoras) 时代，就有正数 a_1, a_2 的算术平均 $A_2(a)$ 和几何平均 $G_2(a)$ 等概念，而 $G_2(a) \leqslant A_2(a)$ 是欧几里得(Euclid) 证明的. 1821 年 Cauchy 对(3.4) 式用反向归纳法给出了一个精彩的证明. 此后，对 AG 不等式寻求各种不同的证法，一直是人们研究的一个热点. 20 世纪 60 年代以前的证明可参看[1],[2],[4] 及其所引用的参考文献. 20 世纪 80 年代王挽澜教授在他的讲义“不等式方法”中总结了 53 种不同的证明. 事实上至今已有上百种不同的证明方法，下面仅介绍若干典型的、简洁的和新的精彩证明.

为了叙述方便，下面将(3.4) 式简记为 $G_n \leqslant A_n$，并设 $a_1,\cdots,a_n$ 是不全相等的正数(因为 $a_1 = \cdots = a_n$ 时，等号成立)，与(3.4) 式等价的两种形式是：

若 $\prod_{k=1}^{n} a_k = 1$，则 $\sum_{k=1}^{n} a_k \geqslant n$;

若 $\sum_{k=1}^{n} a_k = 1$，则 $\prod_{k=1}^{n} a_k \leqslant (\frac{1}{n})^n$.

(1) **数学归纳法**：$n = 2$ 时，归结为 $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geqslant 0$. 关键是如何从 $G_n \leqslant A_n$ 推出 $G_{n+1} \leqslant A_{n+1}$？这里有许多不同的技巧，例如：

① **用反向归纳法**：1821 年 Cauchy 巧妙地分为两步：第一步，从 $n = k$ 时(3.4) 式成立容易推出 $n = 2k$ 时该式也成立：

$$\begin{aligned}\frac{a_1 + \cdots + a_{2k}}{2k} &= \frac{1}{2}(\frac{a_1 + \cdots + a_k}{k} + \frac{a_{k+1} + \cdots + a_{2k}}{k}) \\ &\geqslant \frac{1}{2}[(a_1 \cdots a_k)^{1/k} + (a_{k+1} \cdots a_{2k})^{1/k}] \\ &\geqslant [(a_1 \cdots a_k)^{1/k}(a_{k+1} \cdots a_{2k})^{1/k}]^{1/2} = (a_1 \cdots a_k a_{k+1} \cdots a_{2k})^{1/2k}.\end{aligned}$$

由此推出 $n=2^m$ 时(3.4)式成立.

第二步 设 $n\neq 2^m$,则必存在 $r\in N$,使得 $n+r=2^m$.

$$A_n=\frac{(n+r)A_n}{n+r}=\frac{(a_1+\cdots+a_n)+(A_n+\cdots+A_n)}{n+r}$$
$$\geqslant[a_1\cdots a_n\cdot\underbrace{A_n\cdots A_n}_{r\text{个}}]^{\frac{1}{(n+r)}}=(G_n^nA_n^r)^{\frac{1}{(n+r)}}.$$

即 $A_n^{n+r}\geqslant G_n^n\cdot A_n^r$,从而 $A_n\geqslant G_n$.

另一思路是从 $A_{n+1}\geqslant G_{n+1}$ 推出 $A_n\geqslant G_n$ 成立.事实上

$$A_n=\frac{nA_n+A_n}{n+1}=\frac{a_1+\cdots+a_n+A_n}{n+1}\geqslant(a_1a_2\cdots a_nA_n)^{\frac{1}{n+1}},$$

即 $A_n^{n+1}\geqslant a_1\cdots a_nA_n$,从而 $A_n^n\geqslant a_1\cdots a_n=G_n^n$.即 $A_n\geqslant G_n$.

② 令 $b_k=\frac{a_k}{G_{n+1}}$.则 $b_1b_2\cdots b_{n+1}=1$.由于$\{a_k\}$不全相等,所以$\{b_k\}$也不全相等,不妨设 $b_1<1,b_{n+1}>1$.记 $c=\frac{a_1a_{n+1}}{G_{n+1}}$,则由 $G_n\leqslant A_n$ 得到

$$n=n(\frac{c}{G_{n+1}}\cdot b_2\cdots b_n)^{1/n}\leqslant\frac{c}{G_{n+1}}+b_2+\cdots+b_n.$$

两边各加上 $b_1+b_{n+1}-\frac{c}{G_{n+1}}$,得到

$$\sum_{k=1}^{n+1}b_k\geqslant n+b_1+b_{n+1}-\frac{c}{G_{n+1}}=n+1+(1-b_1)(b_{n+1}-1)>n+1,\text{即 }G_{n+1}<A_{n+1}.$$

③ 不妨设 $G_n=1$.由假设 $A_n\geqslant G_n=1$,即 $\sum_{k=1}^{n}a_k\geqslant n$.设 $a_1\cdots a_na_{n+1}=1$,若 $a_1\geqslant 1,a_2\leqslant 1$,则 $(a_1-1)(a_2-1)\leqslant 0$,即 $a_1a_2+1\leqslant a_1+a_2$.从而 $a_1+\cdots+a_{n+1}\geqslant 1+a_1a_2+a_3+\cdots+a_{n+1}\geqslant 1+n$.(Ehlers,1954,[2]9～10)

④ 利用 Young 不等式:$a^{1/p}b^{1/q}\leqslant(1/p)a+(1/q)b,\quad 1/p+1/q=1,1<p<\infty$,得到

$$a_{n+1}^{1/n}\cdot A_{n+1}^{(1-1/n)}\leqslant(1/n)a_{n+1}+(1-1/n)A_{n+1}.$$

记 $G=a_{n+1}^{1/n}A_{n+1}^{(1-1/n)}$,$A=(1/n)a_{n+1}+(1-1/n)A_{n+1}$.

则 $A_{n+1}=(A_n+A)/2\geqslant(A_nA)^{1/2}\geqslant(G_nG)^{1/2}=(G_{n+1}^{n+1}A_{n+1}^{n-1})^{1/2n}$,即 $A_{n+1}\geqslant G_{n+1}$.(Diananda,P. H.,[305]1960,67:1007)

⑤ 从 $G_n\leqslant A_n$ 证 $G_{n+1}\leqslant A_{n+1}$.即要证

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}\geqslant(n+1)(a_1a_2\cdots a_na_{n+1})^{\frac{1}{n+1}}.$$

由 $G_n\leqslant A_n$,只要证

$$n(a_1\cdots a_n)^{1/n}+a_{n+1}\geqslant(n+1)(a_1\cdots a_{n+1})^{\frac{1}{n+1}}.$$

上式可改写成:

$$n(\frac{a_1\cdots a_{n+1}}{a_{n+1}^{n+1}})^{1/n}+1\geqslant(n+1)(\frac{a_1\cdots a_{n+1}}{a_{n+1}^{n+1}})^{\frac{1}{n+1}}.$$

令 $\dfrac{a_1\cdots a_{n+1}}{a_{n+1}^{n+1}}=x^{n(n+1)}$，则上式变成

$$nx^{n+1}+1\geqslant(n+1)x^n. \tag{3.7}$$

令 $f(x)=nx^{n+1}+1-(n+1)x^n$. 则

$$f'(x)=n(n+1)x^n-(n+1)nx^{n-1}=n(n+1)x^{n-1}(x-1).$$

于是 $x>1$ 时 $f'(x)>0$，$x<1$ 时 $f'(x)<0$. 所以当 $x>0$ 时，$f(1)$ 是最小值，即 $f(x)\geqslant f(1)=0$. 此即(3.7)式，而当 $x=0$ 时，(3.7)式显然成立.

⑥ 不妨设 $0<a_1\leqslant\cdots\leqslant a_n$，$a_1<a_n$，则 $a_1<A_n<a_n$. 从而

$$A_n(a_1+a_n-A_n)-a_1a_n=(a_1-A_n)(A_n-a_n)>0. \tag{3.8}$$

由于 $a_2,a_3,\cdots,a_{n-1}$ 和 $a_1+a_n-A_n$ 的算术平均是 A_n. 由归纳法假设 $G_{n-1}\leqslant A_{n-1}$，得到 $A_n^{n-1}\geqslant a_2a_3\cdots a_{n-1}(a_1+a_n-A_n)$，两边乘上 A_n 并由(3.8)式. 有

$$A_n^n\geqslant A_n(a_1+a_n-A_n)a_2a_3\cdots a_{n-1}\geqslant a_1a_na_2a_3\cdots a_{n-1}. \text{ 即 } A_n\geqslant G_n.$$

(Kong-Ming Chong. [305]1976,83:369)

⑦ 令 $f(x)=\dfrac{a_1+\cdots+a_n+x}{n+1}-(a_1\cdots a_nx)^{\frac{1}{(n+1)}}$，$0<x<\infty$，$f'(x)=0$ 有唯一驻点 $x_0=G_n(a)$. 又 $f''(x)>0$. 所以，由归纳假设，$f(x_0)=\dfrac{A_n(a)-G_n(a)}{n+1}\geqslant0$，$\forall x>0$，$\Rightarrow f(x)\geqslant f(x_0)\geqslant0$.

特别，取 $x=a_{n+1}$，得 $f(a_{n+1})=A_{n+1}(a)-G_{n+1}(a)\geqslant0$. 证毕.

⑧
$$\begin{aligned}A_{n+1}&=\frac{1}{2}\left[\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}+\frac{a_{n+1}+A_{n+1}+\cdots+A_{n+1}}{n}\right]\\&\geqslant\frac{1}{2}\{(a_1\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}+(a_{n+1}A_{n+1}^{n-1})^{\frac{1}{n}}\}\\&\geqslant\{(a_1\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}(a_{n+1}A_{n+1}^{n-1})^{\frac{1}{n}}\}^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

$$A_{n+1}^{2n}\geqslant a_1\cdots a_{n+1}A_{n+1}^{n-1}=G_{n+1}^{n+1}A_{n+1}^{n-1}\Rightarrow A_{n+1}\geqslant G_{n+1}.$$

(2) 设 $a_k>0$，由多项式展开式：

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^{mn}\geqslant\frac{(mn)!}{(m!)^n}\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^m$$

因为

$$k(k+n)\cdots(k+(m-1)n)>1\cdot n\cdots(m-1)n=(m-1)!n^{m-1},$$
$$(k=1,2,\cdots,n),$$

所以，$\dfrac{(mn)!}{(m!)^n}>\dfrac{n^{mn}}{(mn)^n}$，于是，

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^{mn}>\frac{n^{mn}}{(mn)^n}\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^m,$$

两边开 m 次方，得到

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^n\ \frac{n^n\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)}{(mn)^{\frac{n}{m}}}.$$

因为$\lim\limits_{m\to\infty}(mn)^{\frac{n}{m}}=1$,所以

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^n\geqslant n^n\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)\Rightarrow A_n(a)\geqslant G_n(a).$$ ([317]10(2)(1935),114)

(3) 利用第 7 章 S 凸函数所满足的 Schur 条件:

$$(x_1-x_2)\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}-\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)\geqslant 0.$$ (另见[9]57).

令 $f(a)=A_n(a)-G_n(a)=\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)-\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^{\frac{1}{n}}$.

当 $a_1=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{a_k\}>a_2=\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{a_k\}$ 时

$$\frac{\partial f}{\partial a_1}-\frac{\partial f}{\partial a_2}=\frac{1}{n}G_n(a)\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}\right)>0\Leftrightarrow a_1>a_2.$$

由 S 凸性基本定理,得到 $A_n(a)\geqslant G_n(a)$.(详见张小明等[351]2006(4):345 ~ 354)

(4) 利用 Hölder 不等式的积分形式:设 $a_k>0$,利用$\frac{1}{a_k}=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-a_k t}\mathrm{d}t$,得到

$$\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k}=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\left(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\right)t}\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{-a_k t}\right)\mathrm{d}t\leqslant\prod_{k=1}^{n}\left\{\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-na_k t}\mathrm{d}t\right\}^{\frac{1}{n}}$$

$$=\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{na_k}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}\frac{1}{\left(\prod\limits_{k=1}^{n}a_k\right)^{\frac{1}{n}}},$$

即 $G_n\leqslant A_n$.

(5) **Lagrange 乘数法**:求 $f(x)=(x_1\cdots x_n)^{1/n}$ 在条件$x_1+\cdots+x_n=a$下的最大值,作辅助函数 $F(x)=(x_1\cdots x_n)^{1/n}+\lambda(x_1+\cdots+x_n-a)$.

F 对 x_k 求偏导数 $F'_{x_k}=0$,得出

$$f(x)=-n\lambda x_k,k=1,\cdots,n. \tag{3.9}$$

对 k 求和,得到 $nf(x)=-n\lambda(x_1+\cdots+x_n)=-\lambda na$. 即

$$f(x)=-\lambda a. \tag{3.10}$$

从(3.9),(3.10)式得出 $x_k=\frac{a}{n}$. 于是 f 在$\left(\frac{a}{n},\cdots,\frac{a}{n}\right)$点取得最大值$\sqrt[n]{\left(\frac{a}{n}\right)\cdots\left(\frac{a}{n}\right)}$ $=\frac{a}{n}$,即 $\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}\leqslant\frac{a}{n}=\frac{1}{n}(x_1+\cdots+x_n)$.

(6) **动态规则中的函数方程法**:设乘积 $x_1x_2\cdots x_n$ 在条件$\sum\limits_{k=1}^{n}x_k=a$下的最大值为 $f_n(a)$. 当 x_n 取定后,乘积 $x_1x_2\cdots x_{n-1}$ 在条件$\sum\limits_{k=1}^{n-1}x_k=a-x_n$ 下的最大值为 $f_{n-1}(a-x_n)$,于是 $f_1(a)=a,f_n(a)=\max\limits_{0\leqslant x_n\leqslant a}\{x_nf_{n-1}(a-x_n)\},n=2,3,\cdots$,作换元 $x_k=ay_k,k=1,\cdots,n$,得出 $f_n(a)=a^nf_n(1)$,从而

$$f_n(1)=f_{n-1}(1)\left[\max_{0\leqslant y\leqslant 1}y(1-y)^{n-1}\right]=\frac{f_{n-1}(1)(n-1)^{n-1}}{n^n}.$$

又 $f_1(1)=1$,从而 $f_n(1)=\frac{1}{n^n}$. 这表明在条件 $\sum_{k=1}^{n}y_k=1$ 下,$y_1y_2\cdots y_n\leqslant\frac{1}{n^n}$. 此即(3.4)式.

(Bellman,R.,Dynamic programming,Princeton,1957)

(7) 利用不等式 $e^x\geqslant 1+x$,得出

$$1=e^0=\exp\{\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{A_n}-n\}=\prod_{k=1}^{n}\exp\{\frac{a_k}{A_n}-1\}\geqslant\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{A_n}\right)=\frac{G_n^n}{A_n^n},$$ 此即 $G_n\leqslant A_n$.

(8) 利用不等式 $e^x>x^e(x\neq e)$,即 $x>e\ln x$. 于是

$$a_k\geqslant e\ln a_k,k=1,\cdots,n. \tag{3.11}$$

我们可选择权系数 $q=(q_1,\cdots,q_n)$,$q_k>0$,且 $\sum_{k=1}^{n}q_k=1$,使得

$$G_n(a,q)=\prod_{k=1}^{n}a_k^{q_k}=e. \tag{3.12}$$

于是从(3.11)式对 k 求和,得到

$$\sum_{k=1}^{n}q_ka_k\geqslant e\sum_{k=1}^{n}q_k\ln a_k=e\ln(\prod_{k=1}^{n}a_k^{q_k})=e=\prod_{k=1}^{n}a_k^{q_k}.$$ 此即(3.5)式.

(9) 利用不等式 $\ln x\leqslant x-1\quad(x>0)$,得到 $\log\frac{a_k}{A_n}\leqslant\frac{a_k}{A_n}-1$,对 k 求和,得到

$$\sum_{k=1}^{n}\log(\frac{a_k}{A_n})\leqslant(\sum_{k=1}^{n}a_k)/A_n-n=0,$$ 即 $\log(\prod_{k=1}^{n}\frac{a_k}{A_n})=\log(\frac{G_n}{A_n})^n=n\log(\frac{G_n}{A_n})\leqslant 0.$

从而 $\log\frac{G_n}{A_n}\leqslant 0$,即 $\frac{G_n}{A_n}\leqslant 1$,此即(3.4)式.

(10) 利用不等式 $x(n-x^{n-1})\leqslant n-1,x>0.$ (3.13)

取 $x=(\frac{a_1}{A_n})^{\frac{1}{n-1}}$,则从(3.13)式得到 $A_n^n\geqslant a_1\left(\frac{a_2+\cdots+a_n}{n-1}\right)^{n-1}$.

对上式右边逐次用(3.13)式,得到

$$A_n^n\geqslant a_1a_2\left(\frac{a_3+\cdots+a_n}{n-2}\right)^{n-2}\geqslant\cdots\geqslant a_1a_2\cdots a_n=G_n^n.$$

(Akerberg,B.,[305]1963,76:997 ~ 998)

(11) **利用函数的单调性**:令

$$f(x)=\begin{cases}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k^x)^{1/x}, & x\neq 0.\\ (\prod_{k=1}^{n}a_k)^{1/n}, & x=0.\end{cases}$$

则 f 在 $[-\infty,\infty]$ 上严格递增(当 $a_1,\cdots,a_n$ 是不全相等的正数时),于是 $f(0)<f(1)$,即(3.4)式成立.(王继岳,徐沥泉,[345]1985,6:45 ~ 46)

(12) **利用凸函数的 Jensen 不等式**:设 f 是 $(0,\infty)$ 上的凸函数,$q_k>0$,$\sum_{k=1}^{n}q_k=1$,$a_k>0$,则

$$f(\sum_{k=1}^{n}q_ka_k)\leqslant\sum_{k=1}^{n}q_kf(a_k). \tag{3.14}$$

取 $f(x)=e^x$. 令 $y=\log x$,则 $x_k^{q_k}=\exp(q_k\log x_k)=\exp(q_k y_k)$. 由(3.14)式,有

$$\prod_{k=1}^{n} a_k^{q_k}=\exp(\sum_{k=1}^{n} q_k a_k)\leqslant \sum_{k=1}^{n} q_k \exp y_k=\sum_{k=1}^{n} q_k x_k.$$ 此即(3.5)式成立.

(13) **利用积分的性质**:不妨设 $0\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$,于是必存在某个 k,$1\leqslant k\leqslant n-1$,使得 $a_k\leqslant G_n\leqslant a_{k+1}$. 用 A_n 表示 $A_n(a,q)$,G_n 表示 $G_n(a,q)$,则

$$\frac{A_n}{G_n}-1=\sum_{j=1}^{k} q_j\int_{a_j}^{G_n}(\frac{1}{t}-\frac{1}{G_n})\mathrm{d}t+\sum_{j=k+1}^{n} q_j\int_{G_n}^{a_j}(\frac{1}{G_n}-\frac{1}{t})\mathrm{d}t\geqslant 0,$$

(14) **概率证法**:设 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$:$a_k>0$,构造离散型随机变量 ξ,使其取值 a_k 的概率 $p(\xi=a_k)=q_k$,式中 $q_k>0$,$\sum_{k=1}^{n} q_k=1$. 因为 $f(x)=\ln x$ 为$(0,\infty)$上的凹函数,由 Jensen 不等式,$Ef(\xi)\leqslant f(E\xi)$,得到

$$\sum_{k=1}^{n} q_k \ln a_k\leqslant \ln(\sum_{k=1}^{n} q_k a_k).$$

此即(3.5)式成立.

此外,还有幂级数法,Bohr 的优化方法,Hurwitz 方法,Jacobsthal 方法,用 Bernoulli 不等式,等周不等式,逐步调整原理、反证法、排序不等式、图表法、微微对偶不等式、物理方法、矩阵法等. 例如[345]1984,12:45;1985,6:45;1987,10:28;1989,7;1994:3;1995,3. 王中烈,[357]1980,6:149 ～ 152; 王挽澜等,成都大学学报(自然版)1989,2:1 ～ 6; [305]1967,74:305 ～ 306;1981,88:192 ～ 194;[301]1980,76:209 ～ 212;[317]1935,10:114;[350]1986,1:27.

(二) AG 不等式的改进和推广

1. AG 不等式与下述三个不等式等价:

(1) **Rado 不等式**:设 $R_n(a)=n[A_n(a)-G_n(a)]$. 则

$$R_{n-1}(a)\leqslant R_n(a). \tag{3.15}$$

仅当 $a_n=G_{n-1}(a)$ 时等号成立.

证 $R_n(a)-R_{n-1}(a)=a_n+(n-1)G_{n-1}-nG_n\geqslant 0$,这是因为由 AG 不等式,有

$$\frac{a_n+(n-1)G_{n-1}}{n}\geqslant (a_n G_{n-1}^{n-1})^{1/n}=G_n.$$

(2) **Popovic 不等式**:设 $P_n(a)=(A_n(a)/G_n(a))^n$,则

$$P_{n-1}(a)\leqslant P_n(a), \tag{3.16}$$

仅当 $a_n=A_{n-1}(a)$ 时等号成立.

(3) **Jacobsthal 不等式**:设 $a,b>0$,则

$$na^{n-1}b\leqslant (n-1)a^n+b^n, \tag{3.17}$$

仅当 $a=b$ 时等号成立.

证 $n=1$ 时,(3.17)式成立,要从(3.17)式(记为命题 $P(n)$)推出 $P(n+1)$ 成立,在(3.17)式两边乘以 a,得

$$(n-1)a^{n+1}+ab^n\geqslant na^n b.$$

上式两边加上 $a^{n+1}-b^na+b^{n+1}$,得到

$$na^{n+1}+b^{n+1}\geqslant na^nb+a^{n+1}-b^na+b^{n+1}\geqslant(n+1)a^nb.$$

这是因为上式右边的不等式等价于 $(a^n-b^n)(a-b)\geqslant 0$.

推论 $A_n(a)\geqslant[A_{n-1}(a)]^{\frac{n-1}{2}}a_n^{1/n}$, (3.18)

仅当 $A_{n-1}(a)=a_n$ 时等号成立.

(以上不等式等价性的证明见[348]1983,8,[350]1984,6)

注 1986 年杨克昌用数学归纳法证明了 $R_n(a)$ 的一个下界估计:

$$R_n(a)\geqslant(\sqrt{M}-\sqrt{m})^2,$$

式中 $m=\min\{a_1,\cdots,a_n\}$, $M=\max\{a_1,\cdots,a_n\}$. ([350]1986,4:19 ~ 20)

当 $a=\{a_k\}$ 是正的递减数列时,还可改进为

$$R_n(a)\geqslant\frac{(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_n})^2}{n}.$$

1982 年 Rasa. I,将 Rado 和 Popovic 不等式改进为:设 $0<m<a_k<M$, $k=1,\cdots,n$,则

$$\frac{1}{2}m(1-\frac{1}{n})\log^2(\frac{a_n}{G_{n-1}(a)})\leqslant R_n(a)-R_{n-1}(a)\leqslant\frac{1}{2}M(1-\frac{1}{n})\log^2(\frac{a_n}{G_{n-1}(a)}).\tag{3.19}$$

1984 年王中烈建立了凸函数 f 的 Rodo-Popovic 型不等式:

设 $a_k,b_k>0$,令 $B_n=\sum_{k=1}^n b_k$, $A_n=\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^n a_kb_k$, $A_n(f)=\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^n b_kf(a_k)$, f 为 $(0,\infty)$ 上的凸函数,则

$$B_{n-1}[A_{n-1}(f)-f(A_{n-1})]\leqslant B_n[A_n(f)-f(A_n)];\tag{3.20}$$

$$\left(\frac{A_{n-1}(f)}{f(A_{n-1})}\right)^{B_{n-1}}\leqslant\left(\frac{A_n(f)}{f(A_n)}\right)^{B_n}.\tag{3.21}$$

([301]1984,100(2):436 ~ 446)

记 $m=\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$, $M=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,若 $\forall a_k>0$,令 $C=M/m$,则

$$1\leqslant\frac{A_n(a)}{G_n(a)}\leqslant\frac{(C-1)C^{\frac{1}{C-1}}}{e\log C}\qquad\text{(Docev)};$$

$$\frac{A_n(a)}{G_n(a)}\geqslant\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}\{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}(\frac{a_i}{a_j}+\frac{a_j}{a_i})\}^{1/n}.\text{ ([10]98,124)}$$

1990 年,Alzer,H. 利用定义在[0,1]上的函数 $f(x)=(3/e)(1-x)e^{-x}+xe^{-\frac{1}{x}}$ 的性质,证明了

$$A_n(a)-G_n(a)\geqslant(e/3)[A_n(a)\exp(-\frac{G_n(a)}{A_n(a)})-G_n(a)\exp(-\frac{A_n(a)}{G_n(a)})],\tag{3.22}$$

仅当所有 a_k 相等时等号成立,$e/3$ 是最佳常数. ([404]1990,8(2):195 ~ 197)

1988 年张先觉和 1991 年张尧先后将 Rado,Popovic 不等式统一推广为:

$$n[A_n(a)-\lambda^{n+1}G_n(a)]\leqslant(n+1)[A_{n+1}(a)-\lambda^nG_{n+1}(a)],\tag{3.23}$$

式中 $\lambda>0$,仅当 $a_{n+1}=\lambda^{n+1}G_n(a)$ 时等号成立.

特别当 $\lambda=1$ 时得 Rado 不等式(3.15);当 $\lambda=(\frac{A_n(a)}{G_n(a)})^{\frac{1}{n+1}}$ 时,得到 Popovic 不等式(3.16).(证明见[350]1988.2 和[99](6 ~ 9)270 ~ 272)

1989 年黄礼平证明:设 $b_1,\cdots,b_n$ 是正数 $a_1,\cdots,a_n$ 的任一排列,则

$$A_n(a)-G_n(a)\geqslant\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{b_k}-\sqrt{b_{k-1}})^2,$$

仅当 $b_1b_n=b_kb_{k-1}(1\leqslant k\leqslant n)$ 时等号成立,其中 $b_0=b_n$;

$$A_n(a)-G_n(a)\geqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m}(\sqrt{b_k}-\sqrt{b_{n+1-k}})^2,$$

式中 $m=[\frac{n+1}{2}]$,仅当 $b_1b_n=b_kb_{n+1-k}(1\leqslant k\leqslant m)$ 时等号成立.([348]1989,12:3 ~ 5)

2. 在利用 $G_n(a)\leqslant A_n(a)$ 时,若 $a_1,\cdots,a_n$ 之间相差很大,就会造成很大的误差,例如设 $a_k\geqslant 0$,$\sum_{k=1}^{\infty}a_k<\infty$,要证 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_1\cdots a_n)^{1/n}<\infty$,即证 $\sum_{n=1}^{\infty}G_n(a)<\infty$.若用 AG 不等式,所得 $\sum_{n=1}^{\infty}A_n(a)$ 是发散的!这时可将 AG 不等式变形为:

引入待定的参数 $\lambda_k>0$,只要 $\prod_{k=1}^{n}\lambda_k=1$.于是

$$G_n(a)=[(\lambda_1a_1)\cdots(\lambda_na_n)]^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\lambda_ka_k.$$

选取 $\lambda_k=\frac{k}{n!}$,即得([67]52 ~ 54)

$$G_n(a)=\frac{\sqrt[n]{a_1(2a_2)\cdots(na_n)}}{\sqrt[n]{n!}}\leqslant\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(ka_k). \tag{3.24}$$

3. 1981 年,Zaciu,Radu 证明

$$\left(\frac{A_n(a)}{A_n(b)}\right)^{A_n(a)}\leqslant\frac{G_n(a_k^{a_k})}{G_n(b_k^{a_k})}. \tag{3.25}$$

特别,若 $a_1=\cdots=a_n=1$,得到 $G_n(b)\leqslant A_n(b)$;若 $b_1=\cdots=b_n=1$,并令 $x_k=\frac{1}{n}a_k$,就得到 Reutter,O. 等的结果:

$$(\sum_{k=1}^{n}x_k)^{(\sum_{n=1}^{n}x_k)}\leqslant\prod_{k=1}^{n}(nx_k)^{x_k}.\ ([363]1981,86(10):376\sim 380)$$

同一年,Fink,A. M. 又证明:设实函数 $q(x)$ 满足.

(1) $q^{(n+1)}\in L(0,1)$; (2) $q(0)\geqslant 0,q(x)=1,x\geqslant 1$;

(3) $q^{(k)}(1)=0,1\leqslant k\leqslant n-1$; (4) $(-1)^n\int_0^t x^nq^{(n+1)}(x)\mathrm{d}x\geqslant 0,0\leqslant t\leqslant 1$;

(5) $(-1)^n\int_0^1 x^nq^{(n+1)}(x)\mathrm{d}x\geqslant(-1)^nq^{(n)}(1)$;若 $x_k>0\ (k=1,\cdots,n)$,则

$$\sum_{k=1}^{n}[x_k^n\prod_{i=1}^{n}q(\frac{x_i}{x_k})]\geqslant n\prod_{k=1}^{n}x_k, \tag{3.26}$$

仅当所有 x_k 相等时，等号成立，特别，取 $q=1$，又得到 $G_n(a)\leqslant A_n(a)$.（[331]1981，716 ~ 734：35 ~ 40）

若取上述 q 为

$$q(x)=\begin{cases}1-(1-x)^n, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1, & x>1,\end{cases}$$

又得到 Jodeit 的结果.（[308]1976，61(2)：255 ~ 261）

4. **Carlson 不等式：**

(1) 设 $a_{jk}\geqslant 0, j=1,2,\cdots,m; k=1,\cdots,n$；令

$G_j=(\prod_{k=1}^n a_{jk})^{1/n}, A_k=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^m a_{jk}$，则

$$\frac{1}{m}(\sum_{j=1}^m G_j)\leqslant(\prod_{k=1}^n A_k)^{1/n}. \tag{3.27}$$

(2) 设正实数 $a_1,\cdots,a_n$ 中每次取 $n-1$ 个数的算术平均和几何平均分别定义为

$A_k=\frac{1}{n-1}(\sum_{j=1}^n a_j-a_k)$；$G_k=(\frac{1}{a_k}\prod_{j=1}^n a_j)^{\frac{1}{n-1}}$，则

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n G_k\leqslant(\prod_{k=1}^n A_k)^{\frac{1}{n}}\quad(n\geqslant 3). \tag{3.28}$$

证 对于 $j\neq k$，令 $A_{jk}=\frac{1}{n-2}(\sum_{i=1}^n a_i-a_j-a_k), G_{jk}=(\frac{1}{a_ja_k}\prod_{i=1}^n a_i)^{\frac{1}{n-2}}$. 而当 $j=k$ 时，记 $A_{kk}=A_k, G_{kk}=G_k$. 则 $\sum_{j=1}^n A_{jk}=nA_k, \prod_{k=1}^n G_{jk}=G_j^n$. 由 Hölder 不等式，有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n G_k&=\sum_{k=1}^n(\prod_{j=1}^n G_{jk})^{1/n}\leqslant\prod_{j=1}^n(\sum_{k=1}^n G_{jk})^{1/n}\\&\leqslant\prod_{j=1}^n(\sum_{k=1}^n A_{jk})^{1/n}=\prod_{j=1}^n(nA_j)^{1/n}=n(\prod_{j=1}^n A_j)^{1/n}.\end{aligned}$$（[8]161 ~ 162）

注 (3.28) 中 A_k, G_k 不应与 $A_k(a)=\frac{1}{k}\sum_{j=1}^k a_j$ 与 $G_k(a)=(\prod_{j=1}^k a_j)^{1/k}$ 相混淆. 对于后者，成立 $A_m(G_k)\leqslant G_m(A_k)$，即

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^m G_k(a)\leqslant(\prod_{k=1}^m A_k(a))^{1/m},$$

仅当所有 a_k 相等时等号成立.（Kiram, K.，[305]1994，101(4)：355 ~ 357）

5. Alzer, H. 先后证明了以下结果：

(1) $$F(n)=n\frac{A_n(a)}{G_n(a)}-(n-1)\frac{A_{n-1}(a)}{G_{n-1}(a)}\quad(n\geqslant 2) \tag{3.29}$$

严格递增到 $e/2$.（Comment, Math, Univ, Carolin, 1994，35(2)：409 ~ 412）

(2) 设 $a_1,\cdots,a_n$ 为正数，记 $a^n=(a_1^n,\cdots,a_n^n)$.

$H_n(a)=\dfrac{n}{\sum_{k=1}^n\frac{1}{a_k}}$ 称为 $a_1,\cdots,a_n$ 的调和平均，则

$$1 \leqslant n\frac{A_n(a)}{H_n(a)} - (n-1) \leqslant \frac{A_n(a^n)}{H_n(a^n)}. \tag{3.30}$$

若 $n = 2$，则右边的等式成立，否则仅当 $a_1 = \cdots = a_n$ 时等号成立．([372]1991,34,1992：11 ～ 13)．王挽澜利用 Schur 凸性理论进一步证明：

$$A_n^{r-1}(a)G_n(a) \leqslant \lambda A_n(a^r) + (1-\lambda)G_n(a^r). \tag{3.31}$$

相应的积分形式是

$$\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right)^{r-1}\exp\left\{\frac{1}{b-a}\int_a^b \log f\right\} \leqslant \frac{\lambda}{b-a}\int_a^b f^{\,r} + (1-\lambda)\exp\left\{\frac{r}{b-a}\int_a^b \log f\right\}, \tag{3.32}$$

式中 $\lambda = \dfrac{r^2-r+1}{r^2}$，$r \geqslant 1$，$f(x) > 0$，$x \in [a,b]$．当 $r = 1$ 时(3.31)式归结为 $G_n(a) \leqslant A_n(a)$．作者进一步提出，使(3.31)式，(3.32)式成立的最小 λ 是多少？(成都大学学报，1994,2:1 ～ 3)

6. **HGA 不等式的加细**($H_n(a)$ 为调和平均)．

(1) 设 $a = \{a_k\}$ 是递增数列，$0 < a_k \leqslant 1$，则

$$\frac{1}{H_n(a)} \leqslant \frac{1+A_n(a)}{1+[H_n(a)]^{-1}} \leqslant G_n(a) \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^n \dfrac{a_k}{1+a_k}}{\sum\limits_{k=1}^n \dfrac{1}{1+a_k}} \leqslant A_n(a). \tag{3.33}$$

相应的积分形式是：设 f 在[0,1]上递增．$0 < f(x) \leqslant 1$，则

$$\int_0^1 \frac{1}{f} \leqslant \frac{1+\int_0^1 f}{1+\int_0^1 \frac{1}{f}} \leqslant \exp\int_0^1 \ln f \leqslant \frac{\int_0^1 \frac{f}{1+f}}{\int_0^1 \frac{1}{1+f}} \leqslant \int_0^1 f. \tag{3.34}$$

(成都大学学报，1996,15(2))

(2) 设 $a_k > 0$，$0 < p < q \leqslant 1/2$，$a = (a_1,\cdots,a_n)$，令

$S_n(a,p) = 2(\sum\limits_{k=1}^n a_k^p)(\sum\limits_{k=1}^n a_k^{1-p}) - (\sum\limits_{k=1}^n a_k)$，$n \geqslant 2$，则

$$n(2n-1)G_n(a) \leqslant S_n(a,q) \leqslant S_2(a,p) \leqslant n(2n-1)A_n(a).$$

(Alzer. H.，Vtilitas Math，1992,41:249 ～ 252)

(3) 设 $a_k > 0$，则

$$\{G_n(a)\}^n \leqslant \left\{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k^n + (n-1)\{G_n(a)\}^n}\right\}^{-1} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k^n.$$ ([351]2001,1:17 ～ 19)

7. **幂平均不等式：**

(1) $[G_n(a)]^{A_n(a)} \leqslant [A_n(a)]^{A_n(a)} \leqslant (\prod\limits_{k=1}^n a_k^{a_k})^{1/n}$；

(2) $[A_n(a)]^{A_n(a)} \leqslant \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n a_k^{a_k}$.

提示：考虑 $f(x) = x^x$ 在 $(0,\infty)$ 内的凸性．

(3) 记 $S_n(a) = \sum\limits_{k=1}^n a_k$，$\sigma_n(a) = \prod\limits_{k=1}^n a_k^{a_k}$，

$$R_n(a) = \frac{1}{\sigma_n(a)}[S_n(a)]^{S_n(a)}, \quad Q_n(a,b) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k b_k}{a_k + b_k},$$则

① $R_n(a)R_n(b) \leqslant R_n(a+b)$.

提示：利用 AG 不等式或 $f(x) = x\ln x$ 的凸性.

② $S_n(a+b)Q_n(a,b) \leqslant S_n(a)S_n(b)$.([305]1987,94(1):77 ~ 78)

8. 设 $a_1,\cdots,a_n$ 是不全相等的正数，则

$$1 < \frac{A_n(a) - H_n(a)}{A_n(a) - G_n(a)} < n. \tag{3.35}$$

([8]140)

9. **Sierpinski 不等式：**

$$A_n(a)[H_n(a)]^{n-1} \leqslant [G_n(a)]^n \leqslant [A_n(a)]^{n-1}H_n(a), (n \geqslant 2). \tag{3.36}$$

1990 年，Alzer,H. 对以上不等式加细为

$$\frac{1}{n}[G_n(a)]^{n-1}[G_n(a) - H_n(a)] \leqslant [A_n(a)]^{n-1}H_n(a) - [G_n(a)]^n;$$

$$\frac{1}{n}[H_n(a)]^{n-1}[A_n(a) - G_n(a)] \leqslant [G_n(a)]^n - A_n(a)[H_n(a)]^{n-1};$$

仅当所有 a_k 相等时等号成立.(Acta Math. Univ. Comenian,1990;158 ~ 159,1991:175 ~ 180).(3.36) 式可用数学归纳法证明.([8]140 ~ 141)

同年，Alzer,H. 还证明：设 $0 < a_k \leqslant 1/2$，则

$$\frac{1}{H_n(1-a)} - \frac{1}{H_n(a)} \leqslant \frac{1}{G_n(1-a)} - \frac{1}{G_n(a)} \leqslant \frac{1}{A_n(1-a)} - \frac{1}{A_n(a)},$$

式中 $A_n(1-a) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(1-a_k)$，$G_n(1-a) = (\prod_{k=1}^{n}(1-a_k))^{1/n}$，$H(1-a)$ 类似定义，仅当所有 a_k 相等时等号成立.([366]1990,22(4):362 ~ 366)

10. **胡克不等式**(1982)：设 f 是(α,β) 上的凸函数，$x = (x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$ 是(α,β) 中无穷数列，$p = (p_1,p_2,\cdots,p_n,\cdots)$ 是正数序列，令

$$g(n) = (\sum_{k=1}^{n} p_k)\{A_n(f(x),p) - f[A_n(x,p)]\}, \tag{3.37}$$

式中 $f(x) = (f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n),\cdots)$，则

$$0 = g(1) \leqslant g(2) \leqslant \cdots \leqslant g(n) \leqslant \cdots. \tag{3.38}$$

梁法驯用(3.38) 式导出了一系列加权平均值不等式：

以下均设 $a = (a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots)$ 为正数序列.

(1) 取 $f(x) = e^x$，$x_k = \ln a_k$，则(3.38) 式中的 $g(n)$ 为

$$g(n) = (\sum_{k=1}^{n} p_k)\{A_n(a,p) - G_n(a,p)\};$$

(2) 取 $f(x) = e^x$，$x_k = -\ln a_k$ 则(3.38) 式中的 $g(n)$ 为

$$g(n) = (\sum_{k=1}^{n} p_k)\{\frac{1}{H_n(a,p)} - \frac{1}{A_n(a,p)}\};$$

(3)　取 $f(x)=\frac{1}{x}, x_k=\frac{1}{a_k}$,则(3.38)式中的 $g(n)$ 为

$$g(n)=(\sum_{k=1}^{n} p_k)\{A_n(a,p)-H_n(a,p)\};$$

(4)　设 $f(x)=-\ln x$,若取 $x_k=a_k$,则从(3.38)式,得到

$$\frac{A_{n-1}(a,p)}{G_{n-1}(a,p)}\leqslant\frac{A_n(a,p)}{G_n(a,p)};$$

若取 $x_k=1/a_k$,得到

$$\frac{G_n(a,p)}{H_n(a,p)}\geqslant\frac{G_{n-1}(a,p)}{H_{n-1}(a,p)} \quad 和 \quad \frac{A_n(a,p)}{H_n(a,p)}\geqslant\frac{A_{n-1}(a,p)}{H_{n-1}(a,p)}.$$

([348]1984.2 或[33]60 ~ 61)

11.　**郝稚传不等式:**

$$G_n(a,q)\leqslant\{p\int_0^{\infty}[\prod_{k=1}^{n}(x+a_k)^{q_k}]^{-p-1}\mathrm{d}x\}^{-1/p}\leqslant A_n(a,q), \tag{3.39}$$

式中 $p>0, a_k>0, q_k>0, \sum_{k=1}^{n} q_k=1$.

证　在加权 AG 不等式　$G_n(a,q)\leqslant A_n(a,q)$ 中,将 a_k 换成 $x+a_k(x\geqslant 0)$,得到

$0<\prod_{k=1}^{n}(x+a_k)^{q_k}\leqslant\sum_{k=1}^{n} q_k(x+a_k)=x+\sum_{k=1}^{n} q_k a_k$. 积分得到

$\int_0^{\infty}[\prod_{k=1}^{n}(x+a_k)^{q_k}]^{-p-1}\mathrm{d}x\geqslant\int_0^{\infty}[x+\sum_{k=1}^{n} q_k a_k]^{-p-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{p}(\sum_{k=1}^{n} q_k a_k)^{-p}=\frac{1}{p}[A_n(a,q)]^{-p}$;另一方面,由 Hölder 积分不等式(2.23),有

$$\int_0^{\infty}[\prod_{k=1}^{n}(x+a_k)^{q_k}]^{-p-1}\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\prod_{k=1}^{n}[(x+a_k)^{-p-1}]^{q_k}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\prod_{k=1}^{n}(\int_0^{\infty}(x+a_k)^{-p-1}\mathrm{d}x)^{q_k}=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{p}a_k^{-pq_k}=\frac{1}{p}(G_n(a,q))^{-p}.$$

于是(3.39)式得证.

推论 1　$G_n(a)\leqslant\{p\int_0^{\infty}[\prod_{k=1}^{n}(x+a_k)]^{-(\frac{p+1}{n})}\mathrm{d}x\}^{-1/p}\leqslant A_n(a)\quad(p>0)$　(3.40)

推论 2　设 $a_{jk}>0, p>0$,则

$$\sum_{j=1}^{m}(\prod_{k=1}^{n} a_{jk}^{q_k})\leqslant\left\{p\int_0^{\infty}[\prod_{k=1}^{n}(x+\sum_{j=1}^{m} a_{jk})^{q_k}]^{-p-1}\mathrm{d}x\right\}^{-1/p}\leqslant\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} q_k a_{jk}. \tag{3.41}$$

([313]1990,143(1):43 ~ 46). 此后,作者在[339]1993,1:84 ~ 88 和冯慈璜、王挽澜等又作了进一步的推广. 例如:设 $r\geqslant 0, \lambda>0$,并令

$$J(a,q,p,r,\lambda)=\left\{p\int_0^{\infty}[\frac{1}{\lambda}(\prod_{k=1}^{n}(r+\lambda(x+a_k))^{q_k}-r)]^{-p-1}\mathrm{d}x\right\}^{-1/p}.$$

则对 $p>0$,成立

$$G_n(a,q)\leqslant J(a,q,p,o,\lambda)\leqslant J(a,q,p,r,\lambda)\leqslant A_n(a,q).$$

(冯慈横,杭州大学学报,1995,22(3):222 ~ 225)

1997 年 Kittaneh,Fuad 将郝稚传的结果(3.39)式进一步推广为:设 $r\geqslant 1$,则

$$\sum_{k=1}^{n} q_k a_k \leqslant \{p\int_0^\infty [\sum_{k=1}^{n} p_k (x+a_k)^r]^{-(\frac{p+1}{r})} \mathrm{d}x\}^{-1/p} \leqslant (\sum_{k=1}^{n} q_k a_k^r)^{1/r}, \tag{3.42}$$

当 $r \leqslant 1$ 时(3.42)式中两个不等号均反向.([301]1997,214(1):307 ~ 313)

设 $p > 0, 0 < r \leqslant 1, \mu(E) = 1, f \in L^1(E), f > 0, f$ 在 E 的几何平均与算术平均分别为

$$G(f) = \exp\{\int_E \log f(x) \mathrm{d}\mu(x)\}, \quad A(f) = \int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x),$$

则成立

$$G(f) \leqslant \left\{p\int_0^\infty (\int_E (y+f(x))^r \mathrm{d}\mu(x))^{-(\frac{p+1}{r})} \mathrm{d}y\right\}^{-\frac{1}{p}} \leqslant A(f).$$

(Kwon,Ern Gun 等,Finite or infinite dimensional complex analysis,Fukuoka. 1999,233 ~ 235)

12. Alzer,H. 定义了伪 AG 平均:

设 $a = (a_1, \cdots, a_n)$ 和 $p = (p_1, \cdots, p_n)$ 均为正数序列. 则

$$A_n(a,p) = a_1 + \sum_{k=2}^{n} (a_1 - a_k)(\frac{p_k}{p_1}), \qquad G_n(a,p) = a_1 \prod_{k=2}^{n} (\frac{a_1}{a_k})^{(p_k/p_1)}$$

分别称为 $a = (a_1, \cdots, a_n)$ 的伪算术平均和伪几何平均,并证明:

$$\frac{G_{n-1}(a,p)}{A_{n-1}(a,p)} \leqslant \frac{G_n(a,p)}{A_n(a,p)},$$

仅当 $a_1 = \cdots = a_n$ 时等号成立. 若 $a_1 \leqslant a_k \leqslant \frac{1}{2}, k = 2, \cdots, n$, 则

$$\frac{A_n(a,p)}{A_n(1-a,p)} \leqslant \frac{G_n(a,p)}{G_n(1-a,p)},$$

仅当 $a_1 = \cdots = a_n$ 时等号成立. 式中 $A_n(1-a,p), G_n(1-a,p)$ 是将 $A_n(a,p), G_n(a,p)$ 中的 a_k 换成 $1-a_k$. ([54]6)

13. 设 $a = (a_1, \cdots, a_n)$ 与 $b = (b_1, \cdots, b_n)$ 为两个正数序列,则成立几何 — 调和平均的 Minkowski 不等式:

(1) $H_n(a) + H_n(b) \leqslant H_n(a+b)$;

(2) $G_n(a) + G_n(b) \leqslant G_n(a+b)$.

仅当 $(a_1, \cdots, a_n)$ 与 $(b_1, \cdots, b_n)$ 线性相关时等号成立.

证 在[2]26 中利用拟线性化技巧证明,以证(2)为例.

令 $D = \{z = (z_1, \cdots, z_n): z_k \geqslant 0, \prod_{k=1}^{n} z_k = 1\}$. 由 AG 不等式,有

$G_n(a) = \min_{z\in D}\{\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k z_k}{n}\}$, 从而

$$G_n(a+b) = \min_{z\in D}\{\sum_{k=1}^{n} \frac{(a_k+b_k)z_k}{n}\} \geqslant \min_{z\in D}\{\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k z_k}{n}\} + \min_{z\in D}\{\sum_{k=1}^{n} \frac{b_k z_k}{n}\}$$
$$= G_n(a) + G_n(b).$$

14. **Henrici 不等式**(下述(1) ~ (3)):设 $a = (a_1, \cdots, a_n)$ 是正数序列,记

$$P_n(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+a_k}, Q_n(a) = \frac{n}{1+G_n(a)}.$$

$$g_k = \prod_{j=1}^{k} a_j, A_n(a) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k, G_n(a) = (\prod_{k=1}^{n} a_k)^{1/n},$$

(1) 若 $g_{n-1} > 1$,且 $a_n \geqslant (g_{n-1})^{\frac{-1}{n+1}}$,则

$$P_n(a) - Q_n(a) \geqslant P_{n-1}(a) - Q_{n-1}(a).$$

(2) 若 $g_k \geqslant 1$,且 $a_{k+1} \geqslant (g_k)^{-\frac{1}{k+2}}$,$1 \leqslant k \leqslant n-1$,则 $Q_n(a) \leqslant P_n(a)$;
若(1)(2) 的条件中的不等式全部反向,则两个结论中的不等号也都反向.

(3) 设 $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant 1$(上界 1 可放宽为$\frac{1}{G_{n-1}(a)}$),则

$$\frac{1}{n}P_n(a) \leqslant \frac{A_n(a)}{A_n(a) + [G_n(a)]^n}.$$

(以上见[4]285 ~ 287)

(4) $[1 + A_n(a)]P_n(a) \geqslant n$; $[1 + G_n(a)]P_n(a) \geqslant n$,
仅当 $a_1 = \cdots = a_n$ 时等号成立.

(5) $\sum_{k=1}^{n}(k!)^{1/k}\frac{G_k(a)}{k+1} < nA_n(a)$;(Akerberg,[379]1961,57:184 ~ 186)

(6) 当 $p > 1$ 时,$\sum_{k=1}^{n} a_k^p \geqslant n[A_n(a)]^p$,当 $0 < p < 1$ 时,不等号反向.

提示:求条件极值.

(7) 设 $p > 0$,q 为实数,则当 $a_k > \max\{0, p/q\}$ 时,成立

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(p + a_k)^q} < \frac{n}{(p + G_n(a))^q},$$

当 $a_k < p/q$ 时,不等号反向.([4]389)

15. **Kober 不等式**:设 $a_k \geqslant 0$,$k = 1,\cdots,n$,$n > 2$,且$\{a_k\}$ 不全相等,则

$$(n-2)A_n(a) + G_n(a) - \frac{2}{n}\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n}(a_i a_j)^{1/2} \geqslant 0,$$

仅当对某个 k,$a_k = 0$ 且 $a_1 = \cdots = a_{k-1} = a_{k+1} = \cdots = a_n$ 时等号成立.(证明见[4]522 ~ 523)

16. 设 $a_k > 0$,$c > 0$,记 $A_n(a+c) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k + c)$, $G_n(a+c) = \left\{\prod_{k=1}^{n}(a_k + c)\right\}^{\frac{1}{n}}$,
则

$$\frac{G_n(a)}{A_n(a)} \leqslant \frac{G_n(a+c)}{A_n(a+c)}.$$ ([305]115(3)(2008),268)

17. 设 $a_k > 0$, $a = (a_1,\cdots,a_n)$, $1 + a = (1 + a_1,\cdots,1 + a_n)$. 则

(1) $1 + G_n(a) \leqslant G_n(1 + a) \leqslant 1 + A_n(a)$;

(2) $1 + G_n(a)^{-1} \leqslant G_n(1 + a^{-1}) \leqslant 1 + A_n(a)^{-1}$;

(3) 设 f 是递增函数,$f(0) \geqslant 0$,则

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} f(a_k)\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} (f(a_k)a_k^n);$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left[1+f(a_k)\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)\right] \leqslant \prod_{k=1}^{n}[1+f(a_k)a_k^n].\text{ ([22]73)}$$

18. 设 $a=(a_1,\cdots,a_n)$，$a_k>0$，$a^p=(a_1^p,\cdots,a_n^p)$. 则

(1) $[A_n(a)]^p \geqslant n^{1-p}A_n(a^p)+(1-n^{1-p})[G_n(a)]^p$ 成立的充要条件是

$$p \geqslant \frac{n}{n-1}.$$

(2) 设 $0<p<1$，则 $[A_n(a)]^p \geqslant \lambda A_n(a^p)+(1-\lambda)[G_n(a)]^p$ 成立的充要条件是

$$\lambda \leqslant \left(\frac{n}{n-1}\right)^{1-p}.$$

([351]2009(2),168 ~ 173 及其引用的文献)

(3) 设 $1\leqslant p\leqslant n$，则 $[A_n(a)]^p \leqslant (1-\frac{1}{n})^{p-1}A_n(a^p)+\left(1-(1-\frac{1}{n})^{p-1}\right)[G_n(a)]^p$.

(4) $A_n(a)A_n(a^{n-1}) \leqslant (1-\frac{1}{n})A_n(a^n)+\frac{1}{n}[G_n(a)]^n$.

((3)(4)[351]2006(4):382 ~ 389)

二、 两个正数的各种平均

(一) 两个正数的各种平均的定义

1987 年，Borwein 等在研究了两个正数 a,b 各种平均的共同本质之后，将正数 a,b 的平均 $M(a,b)$ 定义为

$M:(0,\infty)\times(0,\infty)\to(0,\infty)$ 的二元连续函数，并满足条件：

(1) $\min\{a,b\}\leqslant M(a,b)\leqslant\max\{a,b\}$，即 $M(a,b)$ 要位于 a 与 b 之间；

(2) 对称性：$M(a,b)=M(b,a)$ 和正齐性：$M(ta,tb)=tM(a,b)(t\geqslant 0)$；

其中条件(1) 是本质的，而条件(2) 通常不是必要的. ([305]1987,94(6):519 ~ 522). $M(a,b)$ 连续条件可换成单调性条件：$a_1\leqslant a_2, b_1\leqslant b_2\Rightarrow M(a_1,b_1)\leqslant M(a_2,b_2)$. 事实上，正数 a,b 之间的任何数 c，在某种意义上，都是 a 与 b 的一个平均值.

下面是若干重要的平均：设 $a,b>0$.

1. **幂平均(Hölder 平均)**：

$$M_p(a,b)=\left[\frac{1}{2}(a^p+b^p)\right]^{1/p}, p\neq 0. \tag{3.43}$$

当 $p\neq 0$ 时，$M_p(a,b)$ 是 p 的严格递增函数，且当 $0<a<b$ 时，$\lim_{p\to-\infty}M_p(a,b)=a$，$\lim_{p\to\infty}M_p(a,b)=b$，$M_0(a,b)=\lim_{p\to 0}M_p(a,b)=\sqrt{ab}=G(a,b)$ 为几何平均；

$M_1(a,b)=(a+b)/2=A(a,b)$ 为算术平均；

$$M_{-1}(a,b)=\frac{2}{1/a+1/b}=\frac{2ab}{a+b}=H(a,b) \text{ 为调和平均；}$$

$M_2(a,b)=\left[\frac{1}{2}(a^2+b^2)\right]^{1/2}$ 为平方根平均；

$M_{-2}(a,b)=(\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2})^{1/2}$ 为调和平方根平均.

2. **Lehmer 平均**:

$$L_p(a,b)=\frac{a^p+b^p}{a^{p-1}+b^{p-1}}. \tag{3.44}$$

当 $p>0, a\neq b$ 时,$L_p(a,b)$ 是 p 的严格递增函数. $L_2(a,b)=\frac{a^2+b^2}{a+b}$ 称为反调和平均;只有 $L_1(a,b)=A(a,b), L_{1/2}(a,b)=G(a,b), L_0(a,b)=M_{-1}(a,b)=H(a,b)$ 这三个平均既是幂平均又是 Lehmer 平均.

注 $H(a,b)$ 与 $A(a,b), G(a,b)$ 的关系:

$$H(a,b)=\frac{[G(a,b)]^2}{A(a,b)};$$

$G(a,b)$ 和 $H(a,b)$ 还可推广为参数形式:

$$G_{p,q}(a,b)=(pa^2+(1-p-q)ab+qb^2)^{1/2},$$

式中 $0\leqslant p,q\leqslant 1$, $G_{0,0}(a,b)=G(a,b)$;

$$H_{p,q,r,s}(a,b)=\frac{pa^2+(r+s-p-q)ab+qb^2}{ra+sb},$$

式中 $0\leqslant p\leqslant r, 0\leqslant q\leqslant s$. $H_{0,0,1,1}(a,b)=H(a,b)$.

它们之间的不等式见“Seminar on Math. Analysis”(Cluj-Napoca,1988 ~ 1989:21 ~ 28)

3. 设 $0\leqslant t<\infty$,我们可以定义两个正数 a,b 的齐次平均:

$$K_t(a,b)=\frac{1}{2}(a^tb^{1-t}+a^{1-t}b^t). \tag{3.45}$$

特别,取 $t=r=\frac{1}{2}(1+\sqrt{p}), p\geqslant 0$,则 $s=1-t=\frac{1}{2}(1-\sqrt{p})$,就得到对称平均:

$$Q_p(a,b)=\frac{1}{2}(a^rb^s+a^sb^r).$$

$K_{\frac{1}{2}}(a,b)=Q_0(a,b)=G(a,b), K_0(a,b)=K_1(a,b)=Q_1(a,b)=A(a,b)$.

4. **广义对数平均(Stolarsky 平均)**:

$$S_p(a,b)=\begin{cases}\left(\dfrac{b^p-a^p}{p(b-a)}\right)^{\frac{1}{p-1}}, & a\neq b, p\neq 0,1,\\ b, & a=b.\end{cases} \tag{3.46}$$

当 $a\neq b$ 时,$S_p(a,b)$ 是 p 的严格递增函数.

$$S_0(a,b)=\lim_{p\to 0}S_p(a,b)=\begin{cases}\dfrac{b-a}{\ln b-\ln a}, & a\neq b\\ b, & a=b\end{cases} \tag{3.47}$$

称为对数平均(在有的文献中,S_0,S_1 分别记为 L,E(或 I)).

$$S_1(a,b)=\lim_{p\to 1}S_p(a,b)=\begin{cases}e^{-1}(a^a/b^b)^{\frac{1}{a-b}}, & a\neq b\\ b, & a=b\end{cases} \tag{3.48}$$

称为指数平均(或恒等平均);而 $S_2(a,b)=A(a,b)$; $S_{-1}(a,b)=G(a,b)$.

5. **Gini 平均:**

$$S_{ab}(x,y)=\left(\frac{x^a+y^a}{x^b+y^b}\right)^{\frac{1}{a-b}},a\neq b;S_{aa}(x,y)=\exp\left(\frac{x^a\ln x+y^a\ln y}{x^a+y^a}\right). \quad (3.49)$$

Losonczi, L. 和 Pales, Zs. 证明了关于 $S_{ab}(x,y)$ 的 Minkowski 不等式:

$$S_{ab}(x_1+x_2,y_1+y_2)\leqslant S_{ab}(x_1,y_1)+S_{ab}(x_2,y_2). \quad (3.50)$$

仅当 $a+b\geqslant 1$ 和 $0\leqslant\min\{a,b\}\leqslant 1$ 时成立.([369]1996,62(3~4):413~425)

$S_{a1}(x,y)=\left(\frac{x^a+y^a}{x+y}\right)^{\frac{1}{a-1}}$ 称为广义反调和平均,记为 $C_a(x,y)$ 或 C_a.

特别地:$C_1=\lim\limits_{a\to 1}C_a=(x^xy^y)^{\frac{1}{x+y}}$, $c_{-\infty}=\min\{a,b\}$, $c_\infty=\max\{a,b\}$.

6. 1989 年杨任尔、曹冬极和 Alzer, H. 分别将对数平均 $S_0(a,b)$ 推广为**单参数平均**:

$$J_p(a,b)=\frac{p(a^{p+1}-b^{p+1})}{(p+1)(a^p-b^p)},p\neq 0,-1, \quad (3.51)$$

当 $a\neq b$ 时,$J_p(a,b)$ 是 p 的严格递增函数.

$J_0(a,b)=\lim\limits_{p\to 0}J_p(a,b)=S_0(a,b)$ 为对数平均;

$J_{-\infty}(a,b)=\lim\limits_{p\to-\infty}J_p(a,b)=\min\{a,b\}$;

$J_\infty(a,b)=\lim\limits_{p\to\infty}J_p(a,b)=\max\{a,b\}$;

$J_{-\frac{1}{2}}(a,b)=G(a,b)$ 为几何平均;$J_1(a,b)=A(a,b)$ 为算术平均;

$J_{-2}(a,b)=H(a,b)$ 为调和平均;

$J_{-1}(a,b)=\frac{[G(a,b)]^2}{S_0(a,b)}$;

$J_{\frac{1}{2}}(a,b)=\frac{1}{3}(a+\sqrt{ab}+b)=h(a,b)$ 称为 **Heron 平均;**

$J_2(a,b)=\frac{2(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}=g(a,b)$ 称为**形心平均.**

(宁波大学学报 1989,(2):105~108;[370]1989,20(1):186~189)

7. 1975 年 Stolarsky 定义了**双参数平均:**

$$E(p,q;a,b)=\left(\frac{p(b^q-a^q)}{q(b^p-a^p)}\right)^{\frac{1}{q-p}}, \quad (3.52)$$

式中 p,q 为实数,$pq(p-q)(a-b)\neq 0$,

$$E(p,p;a,b)=\exp(-1/p)\cdot(a^{a^p}/b^{b^p})^{1/(a^p-b^p)},(\text{式中 } p\neq 0); \quad (3.53)$$

$$E(0,p;a,b)=\left(\frac{b^p-a^p}{p(\ln b-\ln a)}\right)^{1/p}=[S_0(a^p,b^p)]^{1/p}.\ p\neq 0; \quad (3.54)$$

$E(0,0;a,b)=G(a,b)$ 为几何平均;

$E(1,2;a,b)=A(a,b)$ 为算术平均;

$E(-2,-1;a,b)=H(a,b)$ 为调和平均;

$E(0,1;a,b)=S_0(a,b)$ 为对数平均;

$E(1,1;a,b) = S_1(a,b)$ 为指数平均；

$E(1,p;a,b) = S_p(a,b)$ 为广义对数平均；

$E(p,2p;a,b) = M_p(a,b)$ 为幂平均；

$E(p,q;a,b)$ 关于 p 和 q 均递增.([371]1975,48:87～92)1997 年,祁锋等证明 $E(p,q;a,b)$ 分别关于 a,b 也是递增的.([301]1998,224:356～359)1998 年,Losonczi L 等证明了 Minkowski 不等式：

$$E(p,q;a_1+a_2,b_1+b_2) \leqslant E(p,q;a_1,b_1)+E(p,q;a_2,b_2)$$

成立的充要条件是 $p+q \geqslant 3$,且 $\min\{p,q\} \geqslant 1$. 当 $(p,q) \neq (1,2),(p,q) \neq (2,1)$ 时,上述等号成立的充要条件是 $a_1/a_2 = b_1/b_2$.

([308]1998,126(3):779～789. 另[301]2003,278(2):274～284)

1997 年,祁锋还定义了**双参数加权广义平均**：

$$M_{\omega,f}(p,q;x,y) = \left[\frac{\int_x^y \omega(t)(f(t))^q \mathrm{d}t}{\int_x^y \omega(t)(f(t))^p \mathrm{d}t}\right]^{\frac{1}{q-p}},(p-q)(x-y) \neq 0;$$

$$M_{\omega,f}(p,p;x,y) = \frac{\int_x^y \omega(t)(f(t))^p \ln f(t)\mathrm{d}t}{\int_x^y \omega(t)(f(t))^p \mathrm{d}t},\ p(x-y) \neq 0.$$

式中 x,y,p,q 为实数,f,ω 是$[x,y]$上非负可积函数,且 $\omega(t) \not\equiv 0$,作者证明若 $f(t)$ 单调,则 $M_{\omega,f}(p,q;x,y)$ 关于 p,q 均递增；若 $f(t)$ 递增(或递减)时,$M_{\omega,f}(p,q;x,y)$ 关于 x,y 也递增(或递减).([377]1998,454:2723～2732)

祁锋还定义了**双参数的非齐次平均**：

$$E_{2n}(p,q;x,y) = \left\{\left(\frac{p}{q}\right)^{2n+1}\frac{u_{2n}(q,y)-u_{2n}(q,x)}{u_{2n}(p,y)-u_{2n}(p,x)}\right\}^{\frac{1}{q-p}},pq(q-p)(x-y) \neq 0;$$

$$E_{2n}(p,p;x,y) = \exp\left(\frac{1}{p}\cdot\frac{u_{2n+1}(p,y)-u_{2n+1}(p,x)}{u_{2n}(p,y)-u_{2n}(p,x)}\right),\quad p(x-y) \neq 0;$$

$E_{2n}(p,0;x,y) = L_{2n}(p;x,y),\quad x \neq y, p \in R^1$. $E_{2n}(p,q;x,x) = x$. 式中

$$L_{2n}(p;x,y) = \left(\frac{2n+1}{p^{2n+1}}\cdot\frac{u_{2n}(p,y)-u_{2n}(p,x)}{(\ln y)^{2n+1}-(\ln x)^{2n+1}}\right)^{1/p},p(x-y) \neq 0.$$

$$L_{2n}(0;x,y) = \exp\left(\frac{2n+1}{2n+2}\cdot\frac{(\ln y)^{2n+2}-(\ln x)^{2n+2}}{(\ln y)^{2n+1}-(\ln x)^{2n+1}}\right),x \neq y.$$

$L_{2n}(p;x,x) = x$. $u_n(t,y)$ 是满足下述方程的函数列：

$$t\frac{\partial u_n(t,y)}{\partial t}-(n+1)u_n(t,y) = u_{n+1}(t,y),u_0(t,y) = y^t,y > 0$$

作者还证明了 $E_{2n}(p,q;x,y)$ 关于 p,q 及关于 x,y 均递增.([330]1998,29(2):155～163)

1999 年,Pearce,C. E. M 等定义了更为一般的**泛函 Stolarsky 平均**：

设 g 是某个区间 I 上的严格单调的连续函数,f 是 g^{-1} 的值域上严格单调的连续函数,μ 是$[0,1]$上的概率测度,则 $x,y \in I$ 的加权泛函 Stolarsky 平均定义为

$$F(f,g;x,y,\mu) = f^{-1}\left\{\int_0^1 f[g^{-1}(tg(y)+(1-t)g(x))]\mathrm{d}\mu(t)\right\}.$$

当 $f(x)=x^{q-p}, g(x)=x^p, \mu$ 是 Lebesgue 测度时，就是 $E(p,q;x,y)$.

([303]1999,2(4):479 ~ 489)

双参数平均 $E(p,q;a,b)$ 和 Gini 平均的另一种推广是 M 凸函数 f：设 $M(x,y)$ 是区间 $D\subset R$ 上的二元平均，若 $\forall x,y\in D$，定义在 D 上的函数 f 满足：

$$f(M(x,y))\leqslant M(f(x),f(y)),$$

则称 f 为 M **凸函数.**

例如设 $f(x)=x^r,(x>0)$，则 f 为 M 凸且

$$M(x,y)=E(p,q;x,y)\Leftrightarrow(p+q)(r^2-r)\geqslant 0;$$

而 f 为 M 凹且 $M(x,y)=S_{a,b}(x,y)\Leftrightarrow(p+q)(r^2-r)\leqslant 0$. ([54]7(1995))

2005 年，杨镇杭定义了双参数齐次函数的广义平均：

设 $R_+=(0,\infty)$, $D\subset R_+\times R_+$, $f:D\to R_+$ 是 x,y 的 n 阶非负齐次函数，且连续，一阶偏导数存在，$a,b>0$, $a\neq b$, $p,q\in R^1$，若 $(1,1)\notin D$，则定义

$$H_f(p,q;a,b)=\left\{\frac{f(a^p,b^p)}{f(a^q,b^q)}\right\}^{\frac{1}{p-q}},\qquad p\neq q,\quad pq\neq 0;$$

$$H_f(p,p;a,b)=\lim_{q\to p}H_f(p,q;a,b)=G_{f,p}\qquad (p=q\neq 0),$$

式中

$$G_{f,p}=\{G_f(a^p,b^p)\}^{\frac{1}{p}},$$

$$G_f(x,y)=\exp\left\{\frac{xf'_x(x,y)\log x+yf'_y(x,y)\log y}{f(x,y)}\right\}.$$

若 $(1,1)\in D$，则定义

$$H_f(p,o;a,b)=\left\{\frac{f(a^p,b^p)}{f(1,1)}\right\}^{\frac{1}{p}},\qquad p\neq 0,\quad q=0;$$

$$H_f(o,q;a,b)=\left\{\frac{f(a^q,b^q)}{f(1,1)}\right\}^{\frac{1}{q}},\qquad p=0,\quad q\neq 0;$$

$$H_f(o,o;a,b)=\lim_{p\to 0}H_f(p,o;a,b)=a^ub^v,\qquad p=q=0,$$

式中

$$u=\frac{f_x'(1,1)}{f(1,1)},\qquad v=\frac{f_y'(1,1)}{f(1,1)}.$$

若 $f(x,y)=S_0(x,y)$（对数平均），就得到双参数对数平均 $E(p,q;a,b)$

([304]2005,6(4):No. 101. [351]2010,17(1):9 ~ 17)

8. 正数 a,b 关于权 ω 的加权平均：

$$M(\omega;a,b)=\frac{a+\omega b}{1+\omega},\omega>0. \tag{3.55}$$

特别地：$M(1;a,b)=A(a,b)$ 为算术平均；$M(\sqrt{\frac{a}{b}};a,b)=G(a,b)$ 为几何平均；$M(\frac{a}{b};a,b)=H(a,b)$ 为调和平均；

$M(\frac{b}{a};a,b)=L_2(a,b)=\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$ 为反调和平均；

$M((\frac{b}{a})^{p-1};a,b)=L_p(a,b)$ 为 Lehmer 平均；

取 $\omega_1=\frac{-(\sqrt{ab}+b-2a)}{\sqrt{ab}+a-2b}$，$\omega_2=\frac{-(\sqrt{a^2+b^2}-a\sqrt{2})}{\sqrt{a^2+b^2}-b\sqrt{2}}$，则

$M(\omega_1;a,b)=h(a,b)=\frac{1}{3}(a+\sqrt{ab}+b)$ 为 Heron 平均；

$M(\omega_2;a,b)=M_2(a,b)$ 为平方根平均；

取 $\omega_3=-\frac{a^2+ab-2b^2}{b^2+ab-2a^2}$，则 $M(\omega_3;a,b)=g(a,b)$ 为形心平均.

取 $\omega_4=\frac{5a-4\sqrt{ab}-b}{a+4\sqrt{ab}-5b}$，就得到 1999 年毛其吉定义的对偶 Heron 平均：

$$h_e(a,b)=\frac{a+4\sqrt{ab}+b}{6}=\frac{A(a,b)+2G(a,b)}{3},$$

毛还证明

$$M_{\frac{1}{3}}(a,b)\leqslant h_e(a,b)\geqslant M_{\frac{1}{2}}(a,b).$$

(苏州教育学院学报，1999，1 ～ 2)

取

$$\omega_5=\frac{(p+1)a(a^p-b^p)-p(a^{p+1}-b^{p+1})}{p(a^{p+1}-b^{p+1})-(p+1)b(a^p-b^p)},$$

则 $M(\omega_5;a,b)=J_p(a,b)$ 为单参数平均

2009 年匡继昌定义一种新的加权平均：

$$K(m,n)=\frac{mA+nG}{m+n}=\frac{m(a+b)+2n\sqrt{ab}}{2(m+n)}.$$

它也可以在(3.55)式中取

$$\omega_6=\frac{(m+2n)a-mb-2n\sqrt{ab}}{ma-(m+2n)b+2n\sqrt{ab}}$$

得到.

若定义 a,b 的加权幂平均

$$M_p(\omega;a,b)=\left(\frac{a^p+\omega b^p}{1+\omega}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

取 $\omega\equiv 1$，$M_p(1;a,b)$ 就是 a,b 的幂平均 $M_p(a,b)$. 取

$$\omega=\frac{2a^p-(ab)^{\frac{p}{2}}-b^p}{a^p+(ab)^{\frac{p}{2}}-2b^p},$$

就得到幂形 Heron 平均：

$$h_p(a,b)=\left(\frac{a^p+(ab)^{\frac{p}{2}}+b^p}{3}\right)^{\frac{1}{p}},\quad p\neq 0.$$

可见从一个简单的表达式(3.55)式和 $M_p(\omega;a,b)$ 出发，通过选取不同的权 ω，就可以得到许多不同的平均.

9. 设 $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k!\binom{n}{k}x^{n-k}$,则 **Toader 指数平均**定义为

$$E_n(x,y)=\left(\frac{P_n(x)e^x-P_n(y)e^y}{e^x-e^y}\right)^{1/n},x\neq y,E_n(x,x)=x; \tag{3.56}$$

而 Stolarsky 型平均定义为:

$$E(n,m;x,y)=\left(\frac{P_n(x)e^x-P_n(y)e^y}{P_m(x)e^x-P_m(y)e^y}\right)^{\frac{1}{n-m}},x\neq y,n\neq m. \tag{3.57}$$

$E(n,m;x,x)=x$.

(Pearce,C. E. M. 等,Octogon Math. Mag. 1997,5(2):3 ~ 7)

10. **Moskovitz 方法**:连接点$(a,f(a))$与$(b,-f(b))$的直线与 x 轴交点的横坐标称为正数 a,b 关于函数 f 的平均值,记为 $m_f(a,b)$:

$$m_f(a,b)=\frac{af(b)+bf(a)}{f(a)+f(b)}. \tag{3.58}$$

式中 $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ 为任意函数. 特别,取 $f(x)=x^p$,这时将 $m_f(a,b)$ 改记为

$$m_p(a,b)=\frac{ab^p+ba^p}{a^p+b^p}. \tag{3.59}$$

于是 $m_{-1}(a,b)=L_2(a,b)$ 为反调和平均;$m_0(a,b)=A(a,b)$ 为算术平均;

$m_{1/2}(a,b)=G(a,b)$ 为几何平均;$m_1(a,b)=H(a,b)$ 为调和平均;

当 $a\neq b$ 时,$m_p(a,b)$ 是 p 的严格递减函数,从而

$$H(a,b)<G(a,b)<A(a,b)<L_2(a,b). \tag{3.60}$$

([301]1983,90)

11. 1990 年,Horwitz,A 利用 Taylor 多项式来定义两个正数 a,b 的平均:设 $P_n(x)$,$Q_n(x)$ 分别表示 f 在点 a 和 b 的 n 阶 Taylor 多项式,当 $f^{(n+1)}(x)>0,x\in[a,b]$,n 为奇数时,$P_n(x)-Q_n(x)$ 在(a,b)内只有一个零点,用 $M_f^n(a,b)$ 表示这个零点. 当 $n=1$ 时,相应的零点记为

$$M_f(a,b)=\frac{[bf'(b)-f(b)]-[af'(a)-f(a)]}{f'(b)-f'(a)}. \tag{3.61}$$

若 f' 在(a,b)上绝对连续,则

$$M_f(a,b)=\left(\int_a^b xf''(x)\mathrm{d}x\right)/\left(\int_a^b f''(x)\mathrm{d}x\right). \tag{3.62}$$

特别,$f(x)=x^p$ 时的$M_f(a,b)$就是单参数平均 $J_{p-1}(a,b)$,$(p\neq 0,1)$. 而 $p=0$ 或 1 的极限情形分别对应于 $f(x)=\log x$ 和 $f(x)=x\log x$. 在后一情形下得到对数平均 $S_0(a,b)$.

设 f 严格单调,f 的值域包含$(0,\infty)$,记

$$N_f(a,b)=f[M_f(f^{-1}(a),f^{-1}(b))], \tag{3.63}$$

此外,若 $f(\alpha)=a,f(\beta)=b$,定义 $B_f(a,b)=L[M_f(\alpha,\beta)]$. 式中 $L=L_{a,b}$ 是通过(α,a)和(β,b)两点的割线.

若 f 是$(0,\infty)$上严格单调的凸函数,f 的值域包含$(0,\infty)$,则

$$N_{f^{-1}}(a,b)\leqslant N_f(a,b)\leqslant B_f(a,b); \tag{3.64}$$

若 f 为严格单调的凹函数,则(3.64)式中不等号均反向,且仅当$a=b$时等号成立,特

别，当 $f(x)=\sqrt{x}$ 时，又得到

$$H(a,b)\leqslant G(a,b)\leqslant A(a,b).$$

([301]1990,149:220 ～ 235)

1999 年 Sandor,J. 定义了一种新的广义平均：

$$M(f,\omega;a,b)=f^{-1}\left(\frac{\int_a^b f(x)\omega(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b \omega(x)\mathrm{d}x}\right), \tag{3.65}$$

式中 ω 是 $[a,b]$ 上正的可积函数，f 是 $[a,b]$ 上严格单调的连续函数.（Czechoslovak Math. J. 1999,49(1):53 ～ 62）

12.　**高斯复合平均**：先取初始值 $a_0=a,b_0=b$，将两个平均 $M(a,b)$ 和 $N(a,b)$ 的高斯平均迭代定义为

$$a_{n+1}=M(a_n,b_n),b_{n+1}=N(a_n,b_n). \tag{3.66}$$

若数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 的公共极限存在，则称这个公共极限值为 M,N 的高斯复合平均，记为 $M\otimes N(a,b)$，或简记为 $M\otimes N$. 例如取 $a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+b_n)=A(a_n,b_n),b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}=G(a_n,b_n)$，则

$$a_{n-1}>a_n>b_n>b_{n-1},a_n-b_n<\frac{1}{2}(a_{n-1}-b_{n-1})\text{，且}$$

$$A\otimes G(a,b)=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n \tag{3.67}$$

称为 a,b 的 AG 平均，它与椭圆积分有密切联系. 例如

$$A\otimes G(1,x)=(\frac{\pi}{2})(\int_0^{\frac{\pi}{2}}[1-(1-x^2)\sin^2t]^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t)^{-1}.$$

若令 $G_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a_n^2\cos^2x+b_n^2\sin^2x}}$，则

(1)　$\frac{\pi}{2a_n}<G_n<\frac{\pi}{2b_n}$；

(2)　令 $c_n=\sqrt{a_n^2-b_n^2}$，则 $c_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n-b_n)=\frac{c_n^2}{4a_{n+1}}\leqslant\frac{c_n^2}{4A\otimes G(a,b)}$.

设 $M_p(a,b)$ 为幂平均(见(3.43))，则 $M_p\otimes M_{-p}(a,b)=G(a,b)$ 为几何平均.

([305]1987,94(6):519 ～ 522,[301]1997,216:69 ～ 85;2000,252:167 ～ 176;Far East J. Math, Sci. 1998,6(6):939 ～ 947. 另见第 11 章 §1 No. 63)

若将 $b_{n+1}=G(a_n,b_n)$ 改为 $b_{n+1}=H(a_n,b_n)$，$1<a_1<b_1$，则 $0<b_{n+1}-a_{n+1}<\left[\frac{1}{2}(b_1-a_1)^2\right]^n$.（[317]1968,43:429 ～ 432）

13.　**拟算术平均**：设 $\varphi:(0,\infty)\to R$ 是严格单调的连续函数，$a,b>0$，则

$$M_\varphi(a,b)=\varphi^{-1}(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}) \tag{3.68}$$

称为 a,b 的拟算术平均. 特别地：$\varphi(x)=x^p$，得 $M_p(a,b)=(\frac{a^p+b^p}{2})^{1/p}$，即为幂平均. 见

(3.43) 式.(Haruki,H.—Rassias. Th. M.,[326]1995,18:749 ~ 756)

我们可以进一步定义 a,b 的带权 $r(0\leqslant r\leqslant 1)$ 的**加权拟算术平均**:

$$M_\varphi(r;a,b)=\varphi^{-1}[r\varphi(a)+(1-r)\varphi(b)]. \tag{3.69}$$

特别,当 $\varphi(x)=x^p$ 时,就得**加权幂平均**:

$$M_p(r;a,b)=(ra^p+(1-r)b^p)^{1/p}; \tag{3.70}$$

$M_1(r;a,b)=ra+(1-r)b$ 就是加权算术平均.

$M_0(r;a,b)=\lim\limits_{p\to 0}M_p(r;a,b)=a^rb^{1-r}$ 为加权几何平均.

$M_{-1}(r;a,b)=\dfrac{ab}{rb+(1-r)a}$ 为加权调和平均.

加权幂平均(3.70) 式的概念由 Jeong Sheok Vme 和 Young Hokim 于 1999 年引入,并讨论了它的若干性质.([301]2000,252:167 ~ 176)

14. 1998 年,Toader,Gh 定义了一种新平均:设 g 是$(0,\infty)\to(-\infty,\infty)$ 的严格单调函数,令

$$f(a,b;g,n)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}g[(a^n\cos^2\theta+b^n\sin^2\theta)^{1/n}]\mathrm{d}\theta, & n\neq 0,\\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}g(a^{\cos^2\theta}b^{\sin^2\theta})\mathrm{d}\theta, & n=0,\end{cases}$$

则 a,b 的平均定义为

$$M_{g,n}(a,b)=g^{-1}[f(a,b;g,n)].$$

通过对 g 不同的选取,就得 $A,G,A\otimes G$ 等平均.例如,设 g 是二次可微函数,则

$$f(M_p(a,b),M_q(a,b);g,n)=f(a,b;g,n)$$

成立的充要条件是

$$g(t)=\begin{cases}c_1t^{p+q-n}+c_2, & p+q\neq n,\\ c_1\log t+c_2. & p+q=n\end{cases}$$

式中 c_1,c_2 是任意常数.([301]1998,218(2):358 ~ 368)

15. 1995 年,Seiffert 定义了两个正数 a,b 的另一新的平均:

$$B(a,b)=\begin{cases}\dfrac{a-b}{4\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\pi}, & a\neq b\\ a, & a=b,\end{cases}$$

并利用级数展开式证明了

$$G(a,b)A(a,b)<S_0(a,b)B(a,b)<A(a,b)K(1,4),\quad a\neq b.$$

(左边不等式见[404],1995,13(2):195 ~ 198,右边不等式见何灯,[351]2010,1:55 ~ 58)

16. 2009 年匡继昌定义一种新的双权平均:

$$K(\omega_1,\omega_2,p)=\left(\frac{\omega_1A(a^p,b^p)+\omega_2G(a^p,b^p)}{\omega_1+\omega_2}\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\frac{\omega_1(a^p+b^p)+2\omega_2(ab)^{\frac{p}{2}}}{2(\omega_1+\omega_2)}\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$p\neq 0,\quad \omega_1,\omega_2\geqslant 0\quad \omega_1+\omega_2\neq 0.$$

特别,$K(1,\frac{\omega}{2},1)=\dfrac{a+\omega(ab)^{\frac{1}{2}}+b}{\omega+2}$ 就是 Janous 于 2001 年引入的广义 Heron 平均.

([303]4(3)(2001),369 ～ 375)

$K(1, \frac{\omega}{2}, p) = \left(\frac{a^p + \omega(ab)^{\frac{p}{2}} + b^p}{\omega + 2}\right)^{\frac{1}{p}}$ 就是含参数的广义 Heron 平均.

([302]2008)

记 $K(m,n,1) = K(m,n)$,

$K(2,1,p) = h_p(a,b)$ 为幂形 Heron 平均.(No. 8)

$K(1,1) = \frac{A+G}{2} = M_{\frac{1}{2}} = K(1,0,\frac{1}{2})$,

$K(2,1) = h(a,b)$ 为 Heron 平均,

$K(1,2) = h_e(a,b)$ 为共轭 Heron 平均,

$K(1,0,p) = M_p(a,b)$ 为幂平均.

利用这些记号,可以将李明、孙文彩证明的不等式改写成:

$$K(1,0,\frac{1}{4}) \leqslant K(1,3) \leqslant K(1,0,\frac{1}{3}) \leqslant K(1,2) \leqslant K(1,0,\frac{1}{2})$$
$$= K(1,1) \leqslant K(2,1) \leqslant K(1,0,\frac{2}{3}) \leqslant K(3,1) \leqslant K(1,0,\frac{3}{4}).$$

([351]2009,4:485 ～ 486)

2009 年何灯证明

$$K(1,0,\frac{2}{3}) - \frac{3\sqrt{2}-4}{12}|a-b| \leqslant K(2,1) \leqslant K(1,1) + \frac{1}{12}|a-b|$$
$$\leqslant K(1,2) + \frac{1}{6}|a-b| \leqslant K(1,0,\frac{1}{3}) + \frac{5}{24}|a-b|.$$

([351]2009,3:288 ～ 295)

17. **Seiffert 平均:**

$$B_1(a,b) = \begin{cases} \dfrac{a-b}{2\arcsin(\frac{a-b}{a+b})}, & a \neq b \\ a, & a = b \end{cases}$$

(1) 1995 年 Seiffert 证明

$$G(a,b) \leqslant S_0(a,b) \leqslant B_1(a,b) \leqslant S_1(a,b) \leqslant A(a,b).$$

([404]1995,13(2):195 ～ 198)

(2) 2001 年 Sandor 证明

$$(A^2G)^{\frac{1}{3}} \leqslant B_1 \leqslant K(2,1).$$

([306]2001,76(1):34 ～ 40)

(3) $K(1,1) < B_1 < K(2,1) \quad (a,b > 0,\ a \neq b)$.

18. 2008 年姜卫东引入反双曲正弦的平均:

$$N(a,b) = \begin{cases} \dfrac{a-b}{2\mathrm{sh}^{-1}(\frac{a-b}{a+b})}, & a \neq b, \\ a, & a = b, \end{cases}$$

并证明：

$$\frac{A+2M_2}{2A+M_2}<\frac{N}{A}<\frac{M_2}{A}.$$

([351]2008(3):259 ~ 261)

19.　2006年，Toader等定义了两个正数 a,b 的三角平均：令

$$f(x)=\sin x,\qquad g(x)=\tan x.$$

$$M_f(a,b)=\frac{bf(b)-af(a)}{f(b)-f(a)}-g(\frac{a+b}{2}),\qquad a,b\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right),$$

$$M_g(a,b)=\frac{bg(b)-ag(a)+\log(\frac{\cos b}{\cos a})}{g(b)-g(a)},\qquad a,b\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right).$$

([304]7(1)(2006),article 13)

2007年，姜卫东证明了 M_f 为Schur凹函数，M_g 为Schur凸函数，并由此证明了相应的不等式. 例如，设 $0\leqslant a<b<\frac{\pi}{2}$，则

$$M_f(a,b)\leqslant M_f\left(\frac{3a+b}{4},\frac{a+3b}{4}\right)\leqslant A(a,b)\leqslant M_g\left(\frac{3a+b}{4},\frac{a+3b}{4}\right)\leqslant M_g(a,b).$$

([351]2007,2:191 ~ 193)

(二)　两个正数的各种平均不等式

下面不妨设 $0<a<b$，并将 $M_p(a,b),L_p(a,b),S_p(a,b),J_p(a,b)$ 等分别简记为 M_p，L_p,S_p,J_p 等.

1.　1986年匡继昌证明了下述插值不等式：

$$a<M_{-2}<H<G<Q_{1/3}<S_0<M_{1/3}<M_{1/2}<h<M_{2/3}<S_1<A<g<M_2<M_3<L_2<b.\tag{3.71}$$

我们仅以证明 $M_3<L_2$ 为例，令 $t=\frac{b}{a}$，$M_3<L_2$ 就变成 $(\frac{1+t^3}{2})^{1/3}<\frac{1+t^2}{1+t}$ $(t>1)$. 令 $f(t)=t^6-3t^5+3t^4-2t^3+3t^2-3t+1$. 问题变成证明当 $t>1$ 时，$f(t)$ 严格递增，通过导数的符号是容易证明的. ([350]1986,5:28 ~ 29)

若令　$D=e(a^b/b^a)^{\frac{1}{b-a}}$，还容易证明：

$$H<D<S_0^{-1}<G<Q_{1/3}<S_0<D^{-1}<A.\tag{3.72}$$

([10]130)

1996年Stolarsky, K. B. 将(3.71)中 $M_3<L_2$ 推广为 $M_{2n+1}\leqslant L_{n+1}$. 并证明这个结果是最佳的，([301]1996,202(3):810 ~ 818). 2000年，Liu Zheng则证明 $L_{p-1}+L_{-p-2}\geqslant 2G$. ([301]2000,247(1):309 ~ 313).

Alzer, H. 则证明 $L_{5/6}<S_1<L_1$，式中下界中的常数5/6和上界中的常数1都是最佳的. (Ib. Rad. Prirod. Mat. Fak. Ser, Mat, 1993, 23(1):331 ~ 346)

设 $\lambda\geqslant 0,0<a<b,n>1$，则

$$G(a,b)<\left\{\frac{a^n+b^n+\lambda[(a+b)^n-a^n-b^n]}{2+\lambda(2^n-2)}\right\}^{1/n}<A(a,b).$$ ([305]1996,

103(6):509)

1996 年,Heinz-Seiffert,J. 还证明:

$$A - S_1 < \frac{1}{3}(A - G);\ \frac{1}{3}(G + 2A) < H_{2/3} < S_1;$$

若 $0 < p < \frac{1}{2}$,则 $G^{1-p}A^p < H_p < (1-p)G + pA$;

若 $\frac{1}{2} < p < 1$,则 $H_p > (1-p)G + pA$.([305]1996,103(8):696 ~ 697)

1996 年 Agarwal,R. P. 证明:$0 \leqslant S_0 - H \leqslant S_0\left(\frac{b-a}{a+b}\right)^2$.([394]1996,32(6):95 ~ 99)

1987 年,王振证明,在 $M_q \leqslant h \leqslant M_p$ 中,p 的最小值为 2/3,q 的最大值为 ln2/ln3.([348]1987,11:3 ~ 4)

2. **林同坡不等式**(1974):

$$G = M_0 < S_0 < M_{1/3}, \tag{3.73}$$

其中 1/3 不能再减小. 1982 年王中烈、王兴华用带余项的求积公式证明

$$G^p M_p^{1-p} < S_0 < M_p \quad \left(p = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right). \tag{3.74}$$

([352]1982,9(2):156 ~ 159;[326]1982,5(2):337 ~ 343). 1988 年陈计等证明(3.74)左边不等式对任意实数 p 均成立.(成都科技大学学报,1990,2:100 ~ 102)

1980 年,Pittenger,A. O. 对于实数 r,定义

$$\alpha = \frac{r+1}{3},\beta = \frac{(r-1)\ln 2}{\ln r} \quad (r > 0, r \neq 1);$$

$$p_1 = p_1(r) = \begin{cases} \min\{\alpha,\beta\} & r > 0, r \neq 1, \\ 2/3, & r = 1, \\ \min\{\alpha, 0\}, & r \leqslant 0; \end{cases}$$

$$p_2 = p_2(r) = \begin{cases} \max\{\alpha,\beta\} & r > 0, r \neq 1, \\ \ln 2, & r = 1, \\ \max\{\alpha, 0\}, & r \leqslant 0; \end{cases}$$

证明了

$$M_{p_1} \leqslant S_r \leqslant M_{p_2}. \tag{3.75}$$

仅当 $a = b$ 或 $r = -1, 1/2$ 或 2 时等号成立,其中 p_1, p_2 不能再改进. 当 $r = 0$ 时又归结为林同坡不等式(3.73). 若 $a \neq b$,且 $0 \leqslant q \leqslant 1/3 \leqslant p \leqslant 1$,则 $Q_q < S_0 < M_p$,而且 $q = 1/3$ 不能再改进. Q_q 与 M_p 可以比较的结果是:设 $a \neq b$,若 $0 \leqslant q < 1$ 且 $q \leqslant p$,则 $Q_q < M_p$;若 $q > 1$ 且 $q \geqslant p$,则不等号反向. 但当 $0 < p < q < 1$ 和 $1 < q < p$ 时,Q_q 与 M_p 不能比较.([331]:678 ~ 715(1980):19 ~ 23)

2000 年,John,M. 等证明了关于对数平均 S_0 的反向 Hölder 型不等式:设 $0 < a < x < b$,则

$$S_0(b,x)^{c_1} S_0(x,a)^{c_2} < S_0(a,b).$$

式中 $c_1=\dfrac{\ln(b/x)}{\ln(b/a)}, c_2=\dfrac{\ln(x/a)}{\ln(b/a)}$.([373]Ser 2000,B41,(3):401 ~ 409)

1995 年 Seiffert,H. －J. 证明

$$S_0<S_0(G^2,A^2)^{1/2}<S_1(G^2,A^2)^{1/2}<S_1.$$ ([360]1995,64(2):129 ~ 131)

1996 ~ 1997 年,戴立新等证明:对于 $p>0$,成立

$$G^pM_p^{1-p}<S_0<S_{p+1}(a^{\frac{1}{p+1}},b^{\frac{1}{p+1}})^{p+1};\quad S_p(a^{1/p},b^{1/p})^p<S_0;$$

([340]1996,16(2):231 ~ 232;荆州师专学报,1997,20(2):27 ~ 28)

注意到(3.74)左边不等式可改写成

$$S_{-1}(a^p,b^p)[S_2(a^p,b^p)]^{(1/p)-1}<S_0(a,b),(p\neq 0).$$

楼红卫将上式改进为

$$S_{-1}(a^p,b^p)[S_q(a^p,b^p)]^{(1/p)-1}<S_0(a,b).$$

并得到:设 $p>1,r\geqslant p-1$,则 $S_0(a,b)<[S_r(a^{1/p},b^{1/p})]^p$.(宁波大学学报,1997)

3. **Alzer 不等式:**

(1) $(GS_1)^{1/2}<S_0<(G+S_1)/2.$ (3.76)

(C. R. Math. Acad. Sci. Soc. R. Can1987,9:11 ~ 16)

(2) $(GA)^{1/2}<(S_0S_1)^{1/2}<\frac{1}{2}(S_0+S_1)<\frac{1}{2}(G+A);$ (3.77)

(3) $G<(S_0S_1)^{1/2}<M_{1/2}=(G+A)/2.$ (3.78)

([360]1986,47(5):422 ~ 426)

(4) $G<(S_{-p}S_p)^{1/2}<S_0\quad(p\neq 0).$ (3.79)

Alzer,H. 进一步提出猜想:

$$S_0<\frac{1}{2}(S_{-p}+S_p)<A. \tag{3.80}$$

([307]601:26014)

1996 年,鲁宁证明了 Alzer 的上述猜想:存在常数 $R>1$,使得 $|p|>R$ 时,(3.80)式成立.([344]1996,26(3):275 ~ 277)

(5) Alzer 和杨任尔,曹冬极分别证明:

$$G<(J_{-p}J_p)^{1/2}<S_0<\frac{1}{2}(J_{-p}+J_p)<A\quad(p\neq 0); \tag{3.81}$$

$$(G^2A)^{1/3}<(J_{-p}J_p)^{1/2}<S_0<\frac{1}{2}(J_{-p}+J_p)<\frac{1}{3}(3G+A); \tag{3.82}$$

式中第一个不等式对 $0<p\leqslant 1/2$ 成立,第三个不等式对 $0<p<1/2$ 成立.

$$a<G^2/S_0<G<G^{2/3}M_{1/3}^{1/3}<S_0<h<A<b. \tag{3.83}$$

([306]MR89m:26030;宁波大学学报,1989,2(2):105 ~ 108)

4. Sandor 不等式:

(1) $S_1>\frac{1}{2}(A+S_0);$ (3.84)

(2) $S_0S_1^{p-1}<S_0S_p^{p-1}<M_p^p\quad(p\neq 0).$ (3.85)

([367]1990,40(2 ~ 3):261 ~ 270)

5. (1) $\frac{1}{8b}(b-a)^2 < A-G < \frac{1}{8a}(b-a)^2.$ (3.86)

(2) 利用第七章 Hadamard 不等式的加细,可推出:设 $p \geqslant 1, 0 < t \leqslant 1$,则

$$A^p \leqslant \frac{1}{t(p+1)(b-a)}\left\{\left[A+t\left(\frac{b-a}{2}\right)\right]^{p+1} - \left[A-t\left(\frac{b-a}{2}\right)\right]^{p+1}\right\} \leqslant S_{p+1}^p \leqslant M_p^p;$$

$$\frac{1}{A} \leqslant \frac{1}{t(b-a)}\ln\left|\frac{A+t\left(\frac{b-a}{2}\right)}{A-t\left(\frac{b-a}{2}\right)}\right| \leqslant \frac{1}{S_0}.$$ ([301]1992,167(1):49 ~ 56)

6. 设 f 是 $[a,b]$ 上正的可积函数,g 是 $[G,A]$ 上严格递增函数,式中 $G=\sqrt{ab}, A=(a+b)/2$,则

$$g(G) < \frac{\int_a^b f(t)g(\sqrt{t(a+b-t)})\mathrm{d}t}{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t} < g(A). \quad (3.87)$$

(Seiffert, H. J. (1987), [306]MR88g:26025)

7. 设 $p > q > r$,则

$$G(a,b) < [S_0(a^{1/p}, b^{1/p})]^p < [S_0(a^{1/q}, b^{1/q})]^q < M_{\frac{1}{2q}}(a,b) < [S_1(a^{1/q}, b^{1/q})]^q$$
$$< [S_1(a^{1/r}, b^{1/r})]^r < M_{1/r}(a,b). \quad (3.88)$$

(严子浚,[344]1989,2:67)

8. 令 $B = (a^a b^b)^{\frac{1}{a+b}}$,则

$$\frac{A^2}{S_1} < \frac{4A^2-G^2}{3S_1} < B < \frac{A^4}{S_1^3} < \frac{A^2}{G}; \quad (3.89)$$

$$AS_0 + BS_1 < 2A^2 < B^2 + G^2; \quad (3.90)$$

$$\frac{4A^2-2G^2}{e} < BS_1 < (\frac{AS_0}{G})^2; \quad (3.91)$$

$$(\frac{B}{A})^2 < (\frac{S_1}{G})^3; \ \frac{B-G}{B-A} > \sqrt{2}; \quad (3.92)$$

$$\frac{A^2-G^2}{A^2} < \frac{\ln B}{G} < \frac{A^2-G^2}{G};$$ ([404]IV. 1997,15(1 ~ 2):51 ~ 55)

9. 楼红卫证明了广义对数平均 S_p 的下述不等式:

(1) 设 $a>1, b>1$. 若 $p<-1$,则 $S_p(1,ab) \leqslant S_p(a,b)$;若 $p>-1$,则不等号反向;

(提示:考虑 $t>1, x>1$ 时 $f(x) = \frac{x^{1+t}-1}{x^t-x}$ 的单调性)

(2) 设 $a>1, b>1, 1<p<\infty, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 若 $r>-1$,则

$S_r(1,ab) \leqslant [S_r(1,a^p)]^{1/p}[S_r(1,b^q)]^{1/q}$,

若 $r<-1$,则不等号反向,仅当 $a^p = b^q$ 时等号成立.(宁波大学学报,1996,(1):1 ~ 7)

1997 年,石敏琪、石焕南给出了 S_p 的一个上界估计:

$$S_p(a,b) < \frac{a+b}{p^{\frac{1}{p-1}}} \quad (p > 2). \tag{3.93}$$

为证上述不等式,只要证 $p > 2$ 时,$(b^p - a^p)/(b-a) \leqslant 1$.([345]1997.5:37 ~ 38).它与 1988 年杨镇杭证明的 S_p 的另一个上界:$S_p(a,b) < M_{p-1}(a,b)$([345]1988.2),是不可比较的.

1999 年李康海则进一步证明,当 $0 < p < 2, p \neq 1$ 时,(3.93) 式中不等号反向.([351]1999,1:7 ~ 8,[100]117 ~ 118).于是得到 S_p 的上下界估计:设 $p > 2$ 时,成立

$$\frac{a+b}{2} < S_p(a,b) < \frac{a+b}{p^{\frac{1}{p-1}}},$$

当 $0 < p < 2$ 且 $p \neq 1$ 时两个不等号均反向.

10. Alzer, H. 证明了单参数平均 $J_p(a,b)$ 不等式:

(1) 设 $p \geqslant 1$,则 $J_p(a+b) \leqslant J_p(a) + J_p(b)$. 当 $p \leqslant 1$ 时,不等号反向;

(2) 设 $p < -\frac{1}{2}$,则 $J_p(a,b) \geqslant J_p(a)J_p(b)$,当 $p \geqslant -\frac{1}{2}$ 时,不等号反向;

(3) 设 $r < s < p \leqslant -\frac{1}{2}$,则

$$(J_s(a,b))^{p-r} \leqslant (J_r(a,b))^{p-s}(J_p(a,b))^{s-r},$$

当 $-\frac{1}{2} \leqslant r < s < p$ 时,不等号反向.

问:$p\ln J_p(a,b)$ 是否为凸函数?

(Bayer, Akad. Wiss. Math. — Natur, kl. Sitzungsber, 1988, 23 ~ 39.(1989))

11. 1988 年陈计、王振将匡继昌建立的 Heron 平均和幂平均不等式 $M_{1/2} < h < M_{2/3}$ 推广为均值比的形式:设 $b_1 \geqslant b_2 > 0, \frac{a_1}{b_1} \geqslant \frac{a_2}{b_2} > 0$,则

$$\frac{M_{\frac{1}{2}}(a_1,a_2)}{M_{\frac{1}{2}}(b_1,b_2)} \leqslant \frac{h(a_1,a_2)}{h(b_1,b_2)} \leqslant \frac{M_{2/3}(a_1,a_2)}{M_{2/3}(b_1,b_2)}. \tag{3.94}$$

仅当 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ 时等号成立. 并证明下界中的 $\frac{1}{2}$ 和上界中的 $\frac{2}{3}$ 均不能再改进.([350]1988, 2:15 ~ 16)

1989 年,陈计、胡波证明:当 $0 < a < b \leqslant \frac{1}{2}$ 时,使得

$$\frac{M_p(a,b)}{M_p(1-a,1-b)} < \frac{S_1(a,b)}{S_1(1-a,1-b)} < \frac{M_q(a,b)}{M_q(1-a,1-b)} \tag{3.95}$$

成立的 p 的最大值为 $2/3$,q 的最小值为 $\log_2(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$;

而当 $\frac{2}{3} < p < \log_2(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$ 时,$\frac{M_p(a,b)}{M_p(1-a,1-b)}$ 与 $\frac{S_1(a,b)}{S_1(1-a,1-b)}$ 不能比较.(Facta Univ, 1989, 4:9 ~ 12)

1990 年胡波、陈计证明:当 $0 < a < b \leqslant \frac{1}{2}$ 时,使得

$$\frac{M_p(a,b)}{M_p(1-a,1-b)} < \frac{h(a,b)}{h(1-a,1-b)} < \frac{M_q(a,b)}{M_q(1-a,1-b)} \tag{3.96}$$

成立的 p 的最大值是指数方程$(3+\sqrt{2})^x = 2^x + 1$ 的根 $r \approx 0.630$，而 q 的最小值是 2/3. 由此推出对任意两个不同的正数 a,b，有

$M_{3/5}(a,b) < h(a,b) < M_{2/3}(a,b)$.（宁波大学学报，1990，3(2)：32 ～ 35）

12. 1987 年，王挽澜等将林同坡不等式(3.73) 式推广为：

设 $b_1 > b_2 > 0$，$\frac{a_1}{b_1} \geqslant \frac{a_2}{b_2} > 0$，则

$$\frac{G(a_1,a_2)}{G(b_1,b_2)} \leqslant \frac{S_0(a_1,a_2)}{S_0(b_1,b_2)} \leqslant \frac{M_{1/3}(a_1,a_2)}{M_{1/3}(b_1,b_2)}, \tag{3.97}$$

仅当$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ 时等号成立.

推论 设 $0 \leqslant a < b \leqslant 1/2$，则

$$\frac{G(a,b)}{G(1-a,1-b)} < \frac{S_0(a,b)}{S_0(1-a,1-b)} < \frac{M_{1/3}(a,b)}{M_{1/3}(1-a,1-b)}. \tag{3.98}$$

（成都科技大学学报，1988，6：83 ～ 88；1990，2：100 ～ 102）

13. 令 $f(p) = \frac{S_p(a,b)}{S_p(1-a,1-b)}$，$p \in R^1$，则当 $0 < a < b \leqslant \frac{1}{2}$ 时，$f(p)$ 严格递增. 当$\frac{1}{2} \leqslant a < b < 1$ 时，$f(p)$ 严格递减. 由此推出：

当 $0 < a < b \leqslant \frac{1}{2}$ 时，

$$\frac{a}{1-b} < \frac{G(a,b)}{G(1-a,1-b)} < \frac{S_0(a,b)}{S_0(1-a,1-b)} < \frac{S_1(a,b)}{S_1(1-a,1-b)} < \frac{A(a,b)}{A(1-a,1-b)} < \frac{b}{1-a}.$$

而当$\frac{1}{2} \leqslant a < b < 1$ 时，不等号全部反向.

问题：如何将以上结果推广到多元?([330]2007，38(2)：177 ～ 181)

14. 2007 年 Pachpatte 利用他建立的新型 Ostrowski 不等式证明

$\left|\frac{1}{A}\left(\frac{1}{A} - \frac{2}{S_0}\right) + \frac{1}{S_0^2}\right| \leqslant \frac{(b-a)^2(a^2+b^2+G^2)}{36G^6}$. ([330]2007，38(4)：335 ～ 339)

15. Alzer 等解决了 1986 年的猜想：

$$M_p(x,y) \leqslant \frac{1}{2}[S_0(x,y) + S_1(x,y)],$$

式中 p 的最佳值为 $p_0 = \frac{\ln 2}{1+\ln 2}$. ([360]2003，80：201 ～ 215)

16. (1) $pA + (1-p)S_0 < S_1 < qA + (1-q)S_0$ 成立的充要条件是 $p \leqslant \frac{1}{2}$，$q \geqslant \frac{2}{e}$.

(2) $pG + (1-p)S_1 < S_0 < qG + (1-q)S_1$ 成立的充要条件是 $p \leqslant \frac{1}{2}$，$q \geqslant 1$.

(3)　$pA+(1-p)G<S_0<qA+(1-q)G$ 成立的充要条件是 $p\leqslant 0$，$q\geqslant \frac{1}{3}$.

(4)　$pA+(1-p)G<S_1<qA+(1-q)G$ 成立的充要条件是 $p\leqslant \frac{2}{3}$，$q\geqslant \frac{2}{e}$.

(上述(1)～(3)见朱灵[303]11(2)(2008),229～235,(4)见Alzer等[360]2003,80:201～215)

17.　(1)　$\frac{AG}{S_1}<(GS_1)^{\frac{1}{2}}<S_0<A+G-S_1<\frac{1}{2}(G+S_1)$;

(2)　$S_0<M_2+G-A$;

(3)　$HS_1<G^2$.

(其中(1)见[22]40～41,(2)见[371]80(5)(2007),397,(3)见[10]130)

18.　(1)　$|A^{-1}-S_0^{-1}|\leqslant \frac{1}{8}(a^{-2}-b^{-2})(b-a)$;

(2)
$$|A^p-S_{p+1}^p|\leqslant\begin{cases}(\frac{p}{8})(b^{p-1}-a^{p-1})(b-a), & p<0,p>1,p\neq-1\\ (\frac{p}{8})(a^{p-1}-b^{p-1})(b-a), & 0<p<1\end{cases}$$

(3)　$|\ln A-\ln S_1|\leqslant \frac{1}{8}(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})(b-a)$.

([330]34(3)(2003),213～222)

19.　李世杰证明:

(1)　$G+M_2\leqslant 2A$;　(2)　$2G\leqslant A+H$;　(3)　$A+G\leqslant M_2+H$.

([351]2005,2:201～202)

20.　**Gini 平均 S_{ab} 不等式**:设 $xy>0$.

(1)　若 $a>b>1$ 或 $b>a>1$ 或 $a=b\geqslant 1$,则

$$S_{ab}\left(\frac{x+y}{2},\frac{x+y}{2}\right)\leqslant S_{ab}\left(\frac{3x+y}{4},\frac{x+3y}{4}\right)\leqslant S_{ab}(x,y)\leqslant S_{ab}(x+y,0);$$

(2)　若 $a>b>0$ 或 $b>a>0$ 或 $a=b\geqslant 0$,则

$$S_{ab}(\sqrt{xy},\sqrt{xy})\leqslant S_{ab}(x,y).$$

(石焕南,[351]2007,1:14～21)

21.　我们改用记号:

$$a=(a_1,a_2),\quad b=(b_1,b_2),\quad a+b=(a_1+b_1,a_2+b_2),$$
$$ab=(a_1b_1,a_2b_2),\qquad a^p=(a_1^p,a_2^p),$$

则 $A(a)=\frac{1}{2}(a_1+a_2)$ $(a_k>0)$,分别满足:

(1)　Hölder 不等式:设 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$1<p<\infty$,则

$$A(a,b)\leqslant[A(a^p)]^{\frac{1}{p}}[A(b^q)]^{\frac{1}{q}}.$$

当 $0<p<1$ 时,不等号反向.

(2)　Minkowski 不等式：设 $1 < p < \infty$，则

$$[A(a+b)]^{\frac{1}{p}} \leqslant [A(a)]^{\frac{1}{p}} + [A(b)]^{\frac{1}{p}}.$$

$0 < p < 1$ 时，不等号反向.

(3)　若 a,b 同序时，还满足 Chebyshev 不等式：

$$A(a)A(b) \leqslant A(ab).$$

杨镇杭证明了将上述 $A(a)$ 换成广义对数平均 $S_p(a)$ 和单参数平均 J_p 后，相应的不等式仍成立.([351]11(2)(2004),210 ～ 216,236 ～ 242)

我们要问：将 $A(a)$ 换成其他平均，例如幂平均 M_p，Gini 平均，Lehmer 平均等，是否也成立相应的不等式？

三、　加权平均不等式的一般形式

(2.135) 式定义的加权平均包括了通常的离散量求和和连续量求积分的形式，为了使用上的方便，我们还是将以上两种情形分开讨论.

(一)　离散量的加权平均

设 $a = (a_1,\cdots,a_n)$，$p = (p_1,\cdots,p_n)$，$a_k \geqslant 0$，$p_k \geqslant 0$，$\sum_{k=1}^n p_k > 0$，

$k = 1,\cdots,n$，则 $a_1,\cdots,a_n$ 的 r 阶加权平均定义为：

$$M_r(a,p) = \left(\frac{\sum_{k=1}^n p_k a_k^r}{\sum_{k=1}^n p_k}\right)^{1/r}, 0 < |r| < \infty; \tag{3.99}$$

$$M_0(a,p) = \left(\prod_{k=1}^n a_k^{p_k}\right)^{1/\sum_{k=1}^n p_k}, r = 0;$$

$$M_{-\infty}(a,p) = \min\{a_1,\cdots,a_n\}, M_\infty(a,p) = \max\{a_1,\cdots,a_n\},$$

式中 p_k 称为加权系数，p 称为权，特别，$M_{-1}(a,p) = H_n(a,p)$　(加权调和平均)，

$M_0(a,p) = G_n(a,p)$　(加权几何平均)，$M_1(a,p) = A_n(a,p)$　(加权算术平均)；

$\lim\limits_{r\to 0} M_r(a,p) = M_0(a,p)$，$\lim\limits_{r\to -\infty} M_r(a,p) = M_{-\infty}(a,p)$，

$\lim\limits_{r\to \infty} M_r(a,p) = M_\infty(a,p)$，

在应用中，常常将加权平均标准化，即令

$q_k = p_k / (\sum_{k=1}^n p_k)$，$k = 1,2,\cdots,n$，于是，$\sum_{k=1}^n q_k = 1$，从而得到 $a_1,\cdots,a_n$ 的 r 阶标准平均：

$$M_r(a,q) = \left(\sum_{k=1}^n q_k a_k^r\right)^{1/r}, 0 < |r| < \infty, \tag{3.100}$$

$$M_0(a,q) = \prod_{k=1}^n a_k^{q_k}, \quad r = 0. \tag{3.101}$$

其中 $M_0(a,q)$，$M_1(a,q)$ 在(3.5) 中分别记为

$G_n(a,q)=\prod_{k=1}^{n}a_k^{q_k}$ 和 $A_n(a,q)=\sum_{k=1}^{n}a_kq_k$. 而 $M_{-1}(a,q)$ 改记为

$$H_n(a,q)=\frac{1}{\sum_k\left(\frac{q_k}{a_k}\right)}.$$

特别地，取所有 $p_k=1$，即 $q_k=\frac{1}{n},k=1,2,\cdots,n$. 就得到 r 阶均匀加权平均，简称为 r 阶平均，这时，将(3.100)式改记为

$$M_n(a,r)=(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k^r)^{1/r},0<|r|<\infty,$$

其中 $M_n(a,-1)=\frac{n}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}}=H_n(a),M_n(a,0)=(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{1/n}=G_n(a)$,

$$M_n(a,1)=\frac{1}{n}\sum_{kl=1}^{n}a_k=A_n(a).$$

上述定义中的有限和可推广为收敛的无穷级数，还可进一步定义 $a_1,\cdots,a_n$ 的非对称拟算术平均：

$$M_\varphi(a,p)=\varphi^{-1}\left(\frac{\sum_k p_k\varphi(a_k)}{\sum_k p_k}\right),\tag{3.102}$$

式中 φ 是 $(0,\infty)$ 上严格单调函数，φ^{-1} 是 φ 的反函数，$a_k\geqslant 0,p_k\geqslant 0$，且 $\sum_k p_k>0$，特别地，可标准化为

$$M_\varphi(a,p)=\varphi^{-1}(\sum_k q_k\varphi(a_k)),\tag{3.103}$$

式中 $q_k\geqslant 0$ 且 $\sum_k q_k=1$，特别地，当 $\varphi(x)=x^r$ 时，(3.102)、(3.103) 分别归结为(3.99)和(3.100).

祁锋等将(3.102) 进一步推广为加权广义抽象平均：

$$M_n(p,a,f_1,f_2)=\varphi^{-1}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}p_kf_1(a_k)}{\sum_{k=1}^{n}p_kf_2(a_k)}\right).$$

式中，$\varphi=f_1/f_2$ 为严格单调函数，φ^{-1} 为 φ 的反函数，作者还讨论了该平均的基本性质和单调性. ([344]1999,29(2):169～173) 在[301]2002,270(2):499～518 中还定义了另一种 n 元的加权平均

$$M_n(\varphi,\omega,a)=\varphi^{-1}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}\omega(a_k)\varphi(a_k)}{\sum_{k=1}^{n}\omega(a_k)}\right).$$

Cooper 定义了广义平均：

$$M_n(\varphi,a,\lambda)=\varphi^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi(a_k,\lambda),\lambda\right),$$

式中 $\varphi(x,\lambda)$ 定义在 $[0,\infty)\times[\alpha,\beta]$ 上. α,β 不一定是正的或有限值. φ 关于 x 严格单调,令 $\psi\{\varphi(x,\lambda)\}=\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi(x,\lambda)$. 若 $\varphi(x,\lambda)$ 是 x 的递增(或递减)函数,$\psi(y,\lambda)$ 是 y 的凸函数;或者 $\varphi(x,\lambda)$ 是 x 的递减(或递增)函数,$\psi(y,\lambda)$ 是 y 的凹函数,则 $M_n(\varphi,a,\lambda)$ 是 λ 的递增(或递减)函数.([317]2(1927),159 ~ 163)

设 $x=(x_1,\cdots,x_n)$, $x_k>0$, $q=(q_1,\cdots,q_n)$, $q_k\geqslant 0$ 且

$$\sum_{k=1}^{n}q_k=1,\qquad E_{n-1}=\{(q_1,\cdots q_{n-1}):q_k>0\text{ 且}\sum_{k=1}^{n-1}q_k\leqslant 1\}.$$

$d\mu=d\mu_1\cdots d\mu_n$. 则 x 的单参数平均定义为

$$S_p(x)=\begin{cases}\left\{(n-1)!\int_{E_{n-1}}[A_n(x,q)]^p d\mu\right\}^{\frac{1}{p}}, & p\neq 0\\ \exp\left\{(n-1)!\int_{E_{n-1}}\log A_n(x,q)d\mu\right\}, & p=0\end{cases}$$

$$F_r(x)=(n-1)!\int_{E_{n-1}}M_r(x,q)d\mu.$$

([305]92(1985):99 ~ 104 和 Houston J. Math. 24(1998),459 ~ 465)

(二) 连续量的加权平均

设 E 为(L)可测集且 $0<\mu(E)<\infty$, f,ω 是 E 上非负(L)可积函数, $\omega(E)=\int_E\omega(x)d\mu>0$,则 f 关于权函数 ω 在 E 上的 r 次加权平均定义为:

$$M_r(f,\omega,E)=\left(\frac{1}{\omega(E)}\int_E(f(x))^r\omega(x)d\mu\right)^{1/r},0<|r|<\infty,\tag{3.104}$$

$$M_0(f,\omega,E)=\exp\left(\frac{1}{\omega(E)}\int_E(\ln f(x))\omega(x)d\mu\right),\tag{3.105}$$

$$M_{-\infty}(f,\omega,E)=\inf\{f(x):x\in E\},M_\infty(f,\omega,E)=\sup\{f(x):x\in E\}.$$

在所讨论的问题中,若函数都定义在 E 上,则 $M_r(f,\omega,E)$ 也可简记为 $M_r(f,\omega)$,当 $\omega(E)=1$ 时,表示平均的标准化. 特别当 $\omega(x)=1$, $M_r(f,1)$ 改记为 $M_r(f)$,这时

$$M_1(f)=\frac{1}{\mu(E)}\int_E f d\mu=A(f),\tag{3.106}$$

$$M_0(f)=\exp\left\{\frac{1}{\mu(E)}\int_E(\ln f)d\mu\right\}=G(f),\tag{3.107}$$

$$M_{-1}(f)=\frac{\mu(E)}{\int_E\left(\frac{1}{f}\right)d\mu}=H(f),\tag{3.108}$$

分别称为 f 在 E 上的算术平均、几何平均和调和平均.

$$\lim_{r\to 0}M_r(f,\omega,E)=M_0(f,\omega,E);\tag{3.109}$$

$$\lim_{r\to-\infty}M_r(f,\omega,E)=M_{-\infty}(f,\omega,E);\tag{3.110}$$

$$\lim_{r\to\infty}M_r(f,\omega,E)=M_\infty(f,\omega,E).\tag{3.111}$$

为证(3.109)式，可以对标准化即 $\omega(E)=1$ 进行证明，即证

$$\lim_{r\to 0}M_r(f)=\lim_{r\to 0}\left(\int_E (f(x))^r\omega(x)\mathrm{d}\mu\right)^{1/r}=M_0(f). \tag{3.112}$$

设 $f>0$. $f^r=e^{r\ln f}=1+r\ln f+0(r^2)$.

$$M_r(f)=\left(\int_E f^r\omega\mathrm{d}\mu\right)^{1/r}=\exp\left[\frac{1}{r}\ln\int_E f^r\omega\mathrm{d}\mu\right]$$

$$=\exp\left[\frac{1}{r}\ln\int_E(1+r\ln f+O(r^2))\omega\mathrm{d}\mu\right]$$

$$=\exp\left\{\frac{1}{r}\ln\left[1+r\int_E(\ln f)\omega\mathrm{d}\mu+O(r^2)\right]\right\}.$$

所以，$\lim\limits_{r\to 0}M_r(f)=\exp\left\{\int_E(\ln f)\omega\mathrm{d}\mu\right\}=M_0(f)$.

同理，可以在标准化情况下证明(3.111)式，即证

$$\lim_{r\to\infty}\left(\int_E f^r\omega\mathrm{d}\mu\right)^{1/r}=M_\infty(f). \tag{3.113}$$

实际上，$M_\infty(f)=\|f\|_\infty=\inf\limits_{\mu(A)=0}\{\sup\limits_{x\in E-A}|f(x)|\}$. $\|f\|_{r,\omega}=\left(\int_E|f|^r\omega\mathrm{d}\mu\right)^{1/r}$.

$$\forall A\subset E,\mu(A)=0,\ \|f\|_{r,\omega}^r=\int_E|f|^r\omega\mathrm{d}\mu=$$

$$=\int_{E-A}|f|^r\omega\mathrm{d}\mu\leqslant(\sup_{x\in E-A}|f(x)|)^r\mu(E-A).$$

两边 $\forall A:\mu(A)=0$ 取下确界得 $\|f\|_{r,\omega}^r\leqslant\|f\|_\infty^r\mu(E)$，于是

$$\limsup_{r\to\infty}\|f\|_{r,\omega}\leqslant\|f\|_\infty\lim_{r\to\infty}(\mu(E))^{1/r}=\|f\|_\infty.$$

另一方面，令 $B=\{x\in E:|f(x)|>\|f\|_\infty-\varepsilon\}$. 则 $\mu(B)>0$，且

$$\|f\|_{r,\omega}\geqslant\left(\int_B|f|^r\omega\mathrm{d}\mu\right)^{1/r}\geqslant(\|f\|_\infty-\varepsilon)(\mu(B))^{1/r}.$$

从而 $\liminf\limits_{r\to\infty}\|f\|_{r,\omega}\geqslant\|f\|_\infty-\varepsilon$. 由 $\varepsilon>0$ 的任意性，得 $\liminf\limits_{r\to\infty}\|f\|_{r,\omega}\geqslant\|f\|_\infty$. 所以，$\lim\limits_{r\to\infty}\|f\|_{r,\omega}=\|f\|_\infty$.

与(3.102)式相应的积分形式是：

$$M_\varphi(f,\omega)=\varphi^{-1}\left\{\frac{\int_E\varphi(f(x))\omega(x)\mathrm{d}\mu}{\omega(E)}\right\}, \tag{3.114}$$

式中 φ 是 E 上严格单调函数，φ^{-1} 是 φ 的反函数.

特别当 $\varphi(x)=x^r$ 时，(3.114)式归结为(3.104)式.

注 对于不熟悉 Lebesgue 积分理论的读者，可以将可测集 E 理解为 $[a,b]$，(L) 积分理解为 (R) 积分. 我们比较加权平均的离散形式(3.99)和连续形式(3.104)，就会发现，正如 Hardy[1] 所指出的那样，对于渴望避免陷入不必要细节的读者，可以认为适用于求和的式子，经过简单的修改，将求和号改为积分号，就适用于积分，反之亦然. 徐利治[8]则进一步指出将求和号改为积分号的一个判别标准，即对有穷不等式而言，符号 $\sum$ 在不等式两端出现的幂次必须是齐次的，因此，$M_r(a,p)$ 的许多性质都可按上述标准推广到

$M_r(f,\omega,E)$ 上，这也是发现新的积分不等式的重要方法之一，而且积分往往比级数更容易处理，事实上，当(3.104) 式中的 μ 是计数测度时，就归结为离散量的加权平均. 下面讨论加权平均不等式时，就对离散量(级数) 与连续量(积分) 对比叙述.

(三) 加权平均不等式

1. **单调性：**

(1) 设除所有 a_k 相等或某个 $a_j=0$ 且 $r\leqslant 0$ 外，由(3.99) 式定义的 $M_r(a,p)$ 关于 r 严格递增，即对于所有 α,β: $-\infty<\alpha<\beta<\infty$，成立

$$M_{-\infty}(a,p)<M_\alpha(a,p)<M_\beta(a,p)<M_\infty(a,p). \tag{3.115}$$

证 当 $t\neq 0$ 时，令

$$f(t)=\left(\frac{\sum_k p_k a_k^t}{\sum_k p_k}\right)^{1/t},F(t)=t^2\frac{f'(t)}{f(t)}.$$

因为 $f(t)>0$，所以 f' 与 F 同号，于是只要证 $F(t)>0$，而这只要考虑 $F'(t)$ 的符号.

因为 $\lim\limits_{t\to 0}f(t)=f(0)=M_0(a,p)$. 于是 $f(0)\leqslant f(1)$，即

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k^{p_k}\right)^{1/\sum_k p_k}\leqslant\frac{\sum_k p_k a_k}{\sum_k p_k}. \tag{3.116}$$

令 $q_k=\dfrac{p_k}{\sum_k p_k}$，得到 AG 不等式(3.5) 式.

推论 1 设 $a_k,p_k>0,k=1,\cdots,n$. 且至少存在一对 $i\neq j,a_j\neq a_j$，则

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{\sum_k \frac{p_k}{a_k}\ln a_k}{\sum_k(p_k/a_k)}\right)&<\frac{\sum_k p_k}{\sum_k(p_k/a_k)}<\left(\prod_{k=1}^n a_k^{p_k}\right)^{1/\sum_k p_k}\\&=\exp\left(\frac{\sum_k \frac{p_k}{a_k}\ln a_k}{\sum_k p_k}\right)<\frac{\sum_k p_k a_k}{\sum_k p_k}<\exp\left(\frac{\sum_k p_k a_k\ln a_k}{\sum_k p_k a_k}\right).\end{aligned} \tag{3.117}$$

提示：不等式各端取对数，并利用 $\ln t$ 的凸性.

特别地，当 $a_1,\cdots,a_n$ 是不全相等的正数，$r<0<\alpha<\beta$，则

$M_n(a,r)<M_n(a,0)<M_n(a,\alpha)<M_n(a,\beta)$，即

$$\left(\frac{1}{n}\sum_k a_k^r\right)^{1/r}<\left(\prod_k a_k\right)^{1/n}<\left(\frac{1}{n}\sum_k a_k^\alpha\right)^{1/\alpha}<\left(\frac{1}{n}\sum_k a_k^\beta\right)^{1/\beta}; \tag{3.118}$$

$H_n(a)<G_n(a)<A_n(a)$， 即 $\dfrac{n}{\sum_k\frac{1}{a_k}}<\left(\prod_k a_k\right)^{1/n}<\dfrac{1}{n}\sum_k a_k.$

(2) 设 $\omega\geqslant 0,\int_E\omega(x)\mathrm{d}\mu=\omega(E)>0$，$f$ 不是常值函数，$\inf\{f(x):x\in E\}>0$，则由(3.104)，(3.105) 所定义的 $M_r(f,\omega,E)$ 是 r 的严格递增函数，进而成立

$$\exp\left\{\frac{\int_E \frac{\omega(x)}{f(x)}\ln f(x)\mathrm{d}\mu}{\int_E \frac{\omega(x)}{f(x)}\mathrm{d}\mu}\right\}<\frac{\omega(E)}{\int_E \frac{\omega(x)}{f(x)}\mathrm{d}\mu}<\exp\left\{\frac{\int_E \omega(x)\ln f(x)\mathrm{d}\mu}{\omega(E)}\right\}$$
$$<\frac{\int_E f(x)\omega(x)\mathrm{d}\mu}{\omega(E)}<\exp\left\{\frac{\int_E \omega f\ \ln f\mathrm{d}\mu}{\int_E \omega f}\right\};\tag{3.119}$$

特别地，有 $H(f)<G(f)<A(f)$；

$$\exp\left\{\frac{\int_E \omega\ln f\mathrm{d}\mu}{\omega(E)}\right\}<\left\{\frac{\int_E \omega f^{\,r}\mathrm{d}\mu}{\omega(E)}\right\}^{1/r}<\left\{\frac{\int_E \omega f^{\,s}\mathrm{d}\mu}{\omega(E)}\right\}^{1/s},(0<r<s).$$

仅当 $f(x)=c\quad a.e.\ x\in E$ 时等号成立.

2. 1988 年，罗承辉、陈计证明：

(1) **Rado 型不等式**：

$$(n+1)[M_{n+1}(a,r_2)-M_{n+1}(a,r_1)]\geqslant n[M_n(a,r_2)-M_n(a,r_1)]$$

成立的充要条件是 $r_1\leqslant 1\leqslant r_2$.

(2) **Popovic 型不等式**：

$$\left(\frac{M_{n+1}(a,r_2)}{M_{n+1}(a,r_1)}\right)^{n+1}\geqslant\left(\frac{M_n(a,r_2)}{M_n(a,r_1)}\right)^n$$

成立的充要条件是 $r_1\leqslant 0\leqslant r_2$.（蛙鸣 34 期，31 ~ 35）

3. 1989 年，Alzer, H. 得到 Rado 型几何平均与调和平均不等式：

设 $0<a_k\leqslant\frac{1}{2},q_k>0,Q_n=\sum_{k=1}^n q_k=1$,

$$G_n(a,q)=\prod_{k=1}^n a_k^{q_k},G_n(1-a,q)=\prod_{k=1}^n(1-a_k)^{q_k};$$

$$H_n(a,q)=\left(\sum_{k=1}^n\frac{q_k}{a_k}\right)^{-1},\qquad H_n(1-a,q)=\left(\sum_{k=1}^n\frac{q_k}{1-a_k}\right)^{-1};$$

$$R_n(a,q)=G_n(1-a,q)-G_n(a,q);$$

$$S_n(a,q)=n\left[\frac{G_n(a,q)}{H_n(a,q)}-\frac{G_n(1-a,q)}{H_n(1-a,q)}\right].$$

则

(1) $R_{n-1}(a,q)\leqslant R_n(a,q)$；

(2) $S_{n-1}(a,q)\leqslant S_n(a,q)$.

([374]1989,32(9):199 ~ 206)

1997 年 Alzer, H. 又证明：

$$\frac{1}{2M}\sum_{k=1}^n q_k(a_k-G_n(a,q))^2\leqslant A_n(a,q)-G_n(a,q),$$

式中 $a_k>0,a=(a_1,\cdots,a_n),q_k\geqslant 0,\sum_{k=1}^n q_k=1,M=\max\{a_1,\cdots,a_n\}$.

([401],1997,27(3):663 ~ 667)

若加上条件 $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$，则

$$\frac{G_n(a,q)}{2a_n^2}\sum_{k=1}^n q_k[a_k - H_n(a,q)]^2 \leqslant G_n(a,q) - H_n(a,q)$$

$$\leqslant \frac{G_n(a,q)}{2a_1^2}\sum_{k=1}^n q_k[a_k - G_n(a,q)].$$

(Mercer,[301]2000,243(1):163 ~ 173)

4. 设 $1 \leqslant a_k \leqslant c, k = 1,\cdots,n$，则

$$\frac{(c-1)^2}{n(c+1)} \leqslant A_n(a) - H_n(a) \leqslant (\sqrt{c}-1)^2. \tag{3.120}$$

更一般地，令 $B_n = n[A_n(a) - M_n(a,r)]$. 则当 $r<1, r\neq 0$ 时，有 $B_{n-1} \leqslant B_n$. 特别，当 $r=-1$ 时，就得到 $n[A_n(a) - H_n(a)]$ 的递增性.

(Math,Comp. 1975,29:834 ~ 836,1984,42:193 ~ 194)

5. 1988 年，Pecaric，J. E. 将 Sierpinski 不等式(3.36) 推广为加权形式：令 $q = (q_1, \cdots, q_n), q_k > 0, Q_n = \sum_{k=1}^n q_k$，$x + t = (x_1 + t, \cdots, x_n + t)$，$x_k, t > 0$.

$$F(t) = \frac{[M_r(x+t;q)]^{Q_{n-1}}[M_{-r}(x+t;q)]^{Q_n}}{[M_0(x+t;q)]^{Q_n}}.$$

则当 $r>0$ 时，$F(t)$ 递增；$r<0$ 时，$F(t)$ 递减；而当 $t\to\infty$ 时，$F(t)\to 1$. ([301]1990, 149(2):497 ~ 512 和 Punime Mat. 1988,3:9 ~ 11)

6. (1) 设 $a_{jk} > 0, a_j = (a_{j1},\cdots,a_{jn})$ $(j = 1,\cdots,m)$ 不都成比例，则

$$\sum_{j=1}^m G_n(a_j) < G_n\left(\sum_{j=1}^m a_j\right); \tag{3.121}$$

若 $q_i > 0, \sum_{j=1}^m q_j = 1, r > 0$，则

$$M_n\left(\prod_{j=1}^m a_j; r\right) \leqslant \prod_{j=1}^m M_n\left(a_j; \frac{r}{q_j}\right). \tag{3.122}$$

相应的积分形式为

$$\sum_k G(f_k) \leqslant G\left(\sum_k f_k\right),$$

仅当 $f_n = c_n \sum_k f_k$ 或 $G(\sum_k f_k) = 0$ 时等号成立. 式中 $\sum$ 为有限和或无限和，$G(f)$ 是 f 在 E 上的几何平均，见(3.107) 式.

(2) 设 $a_k \geqslant 0, M_n(a,p) = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{1/p}$. $A_n(a^{p+q}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k^{p+q}$，$p, q$ 为实数，$p\neq 0$，则

$$[A_n(a)]^{p+q} \leqslant [M_n(a,p)]^{p+q} \leqslant A_n(a^{p+q}).$$

(Kin Young-Ho,[301]2000,245(2):628 ~ 632)

(3) 设 $a_k > 0, M_n(a,r) = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k^r\right)^{1/r}$，则对于 $p > q$，成立

$\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[M_k(a,q)]^p\}^{1/p} \leqslant \{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[M_k(a,p)]^q\}^{1/q}$，仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时等号成立.（唐立华，[351]2001，1：19 ～ 22）

(4) **Specht 不等式**：设 $0 < p \leqslant a_k \leqslant q, k = 1,\cdots,n,\quad t = q/p, s > r, sr \neq 0$，则

$$1 \leqslant \frac{M_s(a,q)}{M_r(a,q)} \leqslant (\frac{r}{t^r - 1})^{1/s}(\frac{t^s - 1}{s})^{1/r}(\frac{t^s - t^r}{s - r})^{\frac{1}{s}-\frac{1}{r}}. \tag{3.123}$$

$M_s(a,q)$ 与 $M_r(a,q)$ 的比与差的上、下界估计详见[4]104 ～ 107.

1964 年，Goldman 证明下述不等式：若 $rs < 0$，则

$$(q^s - p^s)(M_r(a,q))^r - (q^r - p^r)[A_s(a,q)]^s \leqslant p^r q^s - q^r p^s,$$

若 $rs > 0$，则不等号反向，利用上述不等式可证明(3.123) 式.

(5) **混合 AG 不等式**：设 $0 < r < 1$，则

$$n\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M_k(a,r)\right)^r \leqslant [A_n(a)]^r + (n-1)\left(\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}M_k(a,r)\right)^r,$$

若 $0 < p < q$ 或 $p < q < 0$，则

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[M_k(a,p)]^q\right\}^{1/q} \leqslant \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[M_k(a,q)]^p\right\}^{1/p},$$

猜想 $\forall p < q$ 时，上式仍成立.（马统一，[351]2003，2：7 ～ 16）

7. **Lyapunov 不等式**：

(1) 设 $a_1,\cdots,a_n$ 是不全相等的正数，且 $0 < b < r < c$，则 $g(r) = r\ln M_r(a,p)$ 是 r 的严格凸函数，即

$$g(r) < \frac{c-r}{c-b}g(b) + \frac{r-b}{c-b}g(c). \tag{3.124}$$

(2) 令 $g(r) = r\ln M_r(f,\omega,E)$，若 $0<b<r<c$，且 $M_c(f,\omega,E) < \infty$，则(3.124) 式成立.（[1] 定理 18 和 196）

8. **徐利治不等式**：

设 $a_1,\cdots,a_n$ 是不全相等的正数，$0 < t < s$. 则 r 阶幂平均 $M_r = M_n(a,r)$ 满足：

$$\frac{t}{s}(\frac{dM_t}{dt}) \leqslant \frac{M_s - M_t}{s - t} \leqslant \frac{s}{t}(\frac{dM_s}{ds}). \tag{3.125}$$

当 $M_r = M_r(f)$ 为函数 f 在 E 上的幂平均时，上式仍成立.

证 设 $0 < t < r < s$，取 $\lambda = \frac{(r-t)s}{(s-t)r}$，则 $0 < \lambda < 1$. 由(2.25) 式，有

$a^\lambda b^{1-\lambda} \leqslant \lambda a + (1-\lambda)b$. $(a,b \geqslant 0)$. 再由(3.124) 式，得到

$\lambda M_s + (1-\lambda)M_t \geqslant M_s^\lambda M_t^{1-\lambda} = (M_s^s)^{\frac{\lambda}{s}}(M_t^t)^{\frac{1-\lambda}{t}} > (M_r^r)^{1/r} = M_r$. 由此推出

$$t(\frac{M_s - M_t}{s - t}) < r(\frac{M_s - M_r}{s - r}).$$

令 $r \to s - 0$，即得(3.125) 右边不等式；令 $r \to t + 0$，即得(3.125) 左边不等式.（[8]1958 年新 1 版，144 ～ 145）

9. **Chebyshev 不等式**：

(1) 若 $\forall k,j,(a_k - a_j)(b_k - b_j) \geqslant 0$，则称 $a = (a_1,\cdots,a_n)$ 与 $b = (b_1,\cdots,b_n)$ 成似

序;若不等号反向,则称 a 与 b 成反序.设 a,b 都不是常数列,$r>0$,则当 a,b 成似序时,有

$$M_n(a,r)M_n(b,r)<M_n(ab,r). \tag{3.126}$$

特别,当 a 与 b 同时递增或同时递减时,成立

$$\sum_{k=1}^n a_k b_{n-k+1}<\frac{1}{n}(\sum_{k=1}^n a_k)(\sum_{j=1}^n b_j)<\sum_{k=1}^n a_k b_k. \tag{3.127}$$

令

$$D_k=k\sum_{j=1}^k a_j b_j-(\sum_{j=1}^k a_j)(\sum_{j=1}^k b_j),$$

则当 a,b 成似序时,成立 **Janic 不等式**:

$$0\leqslant D_1\leqslant D_2\leqslant\cdots\leqslant D_n, \tag{3.128}$$

而当 a,b 成反序时,上述不等号均反向;仅当

$a_1=a_2=\cdots=a_n$ 或 $b_1=b_2=\cdots=b_n$ 时等号成立.

证 $D_{n+1}-D_n=\sum_{k=1}^n(a_{n+1}-a_k)(b_{n+1}-b_k)\geqslant 0$.若 $\alpha\leqslant a_k\leqslant A,\beta\leqslant b_k\leqslant B,k=1,\cdots,n$,则

$$(A-\alpha)(B-\beta)\leqslant|D_n|\leqslant(A-\alpha)(B-\beta)[\frac{n}{2}](n-[\frac{n}{2}]).\text{(Grüss)}$$

推论 1 设 $0\leqslant a_{j1}\leqslant\cdots\leqslant a_{jn},j=1,2,\cdots,m$,则

$$\prod_{j=1}^m(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_{jk})\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n(\prod_{j=1}^m a_{jk}).$$

特别地,$(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k)^m\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k^m$.此即 $A_n(a)\leqslant M_n(a,m)$.

推论 2 设 $b_j>0,j=1,\cdots,m,0<a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$,则

$$\prod_{j=1}^m(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k^{b_j})\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k^{B_m},\text{式中 } B_m=\sum_{j=1}^m b_j.$$

1985 年,Behdzet 证明:设 $p_k,q_k\geqslant 0$,令

$$2D_n(a,b;p,q)=(\sum_k p_k)(\sum_k q_k a_k b_k)+(\sum_k q_k)(\sum_k p_k a_k b_k)$$
$$-(\sum_k p_k a_k)(\sum_k q_k b_k)-(\sum_k q_k a_k)(\sum_k p_k b_k),$$

则当 a,b 成似序时,成立

$$D_n(a,b;p,q)\geqslant 0, \tag{3.129}$$

仅当 a 或 b 为常数列时等号成立.(Rad. Mat. 1985,1(2):185 ~ 190)

特别当 $p_k=q_k$ 时,(3.129) 式变成

$$(\sum_k p_k a_k)(\sum_k p_k b_k)\leqslant(\sum_k p_k)(\sum_k p_k a_k b_k).$$

当 $\forall p_k=1$ 时,上式变成 Chebyshev 不等式的最初形式:

$$(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k)(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n b_k)\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k b_k.$$

Chebyshev 不等式有许多推广,例如 1959 年 Popoviciu 证明了

$$F(a,b)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}x_{jk}a_jb_k\geqslant 0$$

的充要条件：

① 设 $a=(a_1,\cdots,a_n)$ 与 $b=(b_1,\cdots,b_n)$ 同时递增.则 $F(a,b)\geqslant 0$ 成立的充要条件是

$$\sum_{j=r}^{n}\sum_{k=s}^{n}x_{jk}\geqslant 0,r=1,\cdots,n;s=2,\cdots,n;\quad \sum_{j=r}^{n}\sum_{k=1}^{n}x_{jk}=0,r=1,\cdots,n.$$

或 ② 设 $a=(a_1,\cdots,a_n)$ 与 $b=(b_1,\cdots,b_n)$ 非负且同时递增，则 $F(a,b)\geqslant 0$ 成立的充要条件是

$$\sum_{j=r}^{n}\sum_{k=s}^{n}x_{jk}\geqslant 0,r=1,\cdots,n;s=1,\cdots,n.$$

特别当 $j\neq k$ 时 $x_{jk}=-1,x_{kk}=n-1$，就得到 Chebyshev 不等式.(Gaz. Mat. Fiz. A. 1959,11(64):451 ～ 461)

设 $m_1\leqslant a_k\leqslant M_1,m_2\leqslant b_k\leqslant M_2,1\leqslant k\leqslant n$，则

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}b_k\right)\right|\leqslant\frac{1}{n}\left[\frac{n}{2}\right]\left(1-\frac{1}{n}\left[\frac{n}{2}\right]\right)(M_1-m_1)(M_2-m_2),$$

式中$[x]$是 x 的整数部分.(Li Xin 等,[301]2002,267(2):434 ～ 443)

1989 年 Alzer,H. 证明：设 $n\geqslant k\geqslant 2$，$q_j>0$，$0<a_1\leqslant\cdots\leqslant a_n$；$0<b_1\leqslant\cdots\leqslant b_n$；$a_1<a_k,b_1<b_k$，则

$$\frac{T_n}{T_k}>\frac{Q_k(Q_n-q_1)}{Q_n(Q_k-q_1)},\tag{3.130}$$

式中 $T_m=\sum_{j=1}^{m}(q_ja_jb_j)-\frac{1}{Q_m}(\sum_{j=1}^{m}q_ja_j)(\sum_{j=1}^{m}q_jb_j),Q_m=\sum_{j=1}^{m}q_j$.(3.130) 式中 T_n/T_k 的下界是最优的.(Southeast Asian Bull. Math,1989,13(2):97 ～ 100)

Chebyshev 不等式可进一步推广为排序不等式见第 3 章 No. 86.

若 $0<m_1\leqslant a_k\leqslant M_1$，$0<m_2\leqslant b_k\leqslant M_2$，记

$$A(a)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k,\qquad A(ab)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_kb_k,$$

则

$$|A(ab)-A(a)A(b)|\leqslant\frac{1}{4}\frac{(M_1-m_1)(M_2-m_2)}{\sqrt{M_1m_1M_2m_2}}A(a)A(b),$$

$$|A(ab)-A(a)A(b)|\leqslant(\sqrt{M_1}-\sqrt{m_1})(\sqrt{M_2}-\sqrt{m_2})[A(a)A(b)]^{\frac{1}{2}},$$

([330]35(2004),117 ～ 128)

$$|T_n|\leqslant\frac{1}{4}(M_1-m_1)(M_2-m_2)Q_n.$$

若 $Q_m=1$，则当 $1<p<\infty$ 时

$$|T_n|\leqslant\frac{1}{2}(M_2-m_2)\sum_{k=1}^{n}q_k\left|a_k-\sum_{k=1}^{n}q_ka_k\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2}(M_2-m_2)\Big\{\sum_{k=1}^{n}q_k\Big|a_k-\sum_{k=1}^{n}q_ka_k\Big|^p\Big\}^{\frac{1}{p}}.$$

([330]38(2007),37 ~ 49)

(2)　若 $\forall x_1,x_2\in E$,有 $[f(x_1)-f(x_2)][g(x_1)-g(x_2)]\geqslant 0$. 即 f,g 在 E 上同时递增或同时递减,则称 f,g 在 E 上成似序,若不等号反向,则称 f,g 在 E 上成反序. 设权函数 $\omega(x)>0,x\in E$,令

$$T(f,g;\omega)=\Big(\int_E\omega\Big)\Big(\int_E fg\omega\Big)-\Big(\int_E f\omega\Big)\Big(\int_E g\omega\Big).$$

则当 f,g 在 E 上成似序时,成立

$$T(f,g;\omega)\geqslant 0, \tag{3.131}$$

当 f,g 在 E 上成反序时,不等号反向.

证　将差式化为重积分:

$$T(f,g;\omega)=\int_E\int_E f(x)[g(x)-g(y)]\omega(x)\omega(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

在右边积分中交换 x,y 位置,两式相加即可得证.

特别地,若 $\forall x\in E$,有 $|f'(x)|\geqslant m_1$, $|g'(x)|\geqslant m_2$,则(3.131) 可改进为

$$T(f,g;\omega)\geqslant m_1m_2T(x-a,x-a;\omega)\geqslant 0. \tag{3.132}$$

([301]1984,102(2):479 ~ 487)

1999 年,Dragomir,S. S. 等证明:若二元连续函数 $f(x,y)$ 满足条件:

$f(x,y)+f(y,x)\leqslant f(x,x)+f(y,y)$, $\forall x,y\leqslant[a,b]$,则

$$F(u)=\int_a^u\omega(x)\mathrm{d}x\int_a^u\omega(x)f(x,x)\mathrm{d}x-\int_a^u\int_a^u\omega(x)\omega(y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant 0,$$

$\forall u\in[a,b]$. 此外,若 ω 连续,则 $F(u)$ 递增. ([331]1999,10:63 ~ 67)

令

$$T(f,g;\omega_1,\omega_2)=\Big(\int_E\omega_2\Big)\Big(\int_E fg\omega_1\Big)+\Big(\int_E\omega_1\Big)\Big(\int_E fg\omega_2\Big)-\Big(\int_E f\omega_1\Big)\Big(\int_E g\omega_2\Big)-\Big(\int_E f\omega_2\Big)\Big(\int_E g\omega_1\Big).$$

若 f,g 在 E 上成似序,则 $T(f,g;\omega_1,\omega_2)\geqslant 0$,若 f,g 在 E 上成反序,则不等号反向.

2008 年,文家金、王挽澜用降维方法推广 Chebyshev 不等式:

设 $0<a_k,b_k\leqslant\frac{1}{2}$, $0<p,q<1$, $e=(1,\cdots,1)$,

若 $a=(a_1,\cdots,a_n)$ 与 $b=(b_1,\cdots,b_n)$ 成似序,则

$$\frac{(a,b)}{(e-a,e-b)}\geqslant\frac{\|a\|_p\cdot\|b\|_q}{\|e-a\|_p\cdot\|e-b\|_q}.$$

若 $1<p,q\leqslant 2$ 且 a 与 b 成反序,则上述不等号反向. ([351]2008,1:8 ~ 21)

(3)　**反向 Chebyshev 不等式——Grüss 不等式**

设 f,g 在$[a,b]$ 上可积,$m_1\leqslant f(x)\leqslant M_1,m_2\leqslant g(x)\leqslant M_2,x\in[a,b]$,令

$$T(f,g)=\frac{1}{b-a}\int_a^b fg-\frac{1}{(b-a)^2}\Big(\int_a^b f\Big)\Big(\int_a^b g\Big).$$ 则

$$|T(f,g)| \leqslant \frac{1}{4}(M_1 - m_1)(M_2 - m_2). \tag{3.133}$$

取 $f(x) = g(x) = \mathrm{sgn}(x - \frac{a+b}{2})$，可看出(3.133)式中的常数 1/4 是最佳的.

若对 f,g 再加上其他条件，则(3.133)式还可改进，例如：

① 设 f,g 是 $(0,1)$ 上正的凸函数，则

$$|T(f,g)| \leqslant \frac{1}{3}\left(\int_0^1 f\right)\left(\int_0^1 g\right);$$

② 设 f,g 在 $(0,\infty)$ 上完全单调，则在积分区间 $(0,a)$ 上，下式成立

$$|T(f,g)| \leqslant \frac{1}{12}(M_1 - m_1)(M_2 - m_2);\text{(Hardy)}.$$

③ 设 f,g 在 $[a,b]$ 上绝对单调或 4 阶单调，则

$$|T(f,g)| \leqslant \frac{4}{45}(M_1 - m_1)(M_2 - m_2). \tag{3.134}$$

上述常数 $\frac{1}{12}$ 与 $\frac{4}{45}$ 都是最佳的.

注 1 绝对单调与 n 阶单调的定义见第 8 章 §1.

④ 设 f,g 在 $[a,b]$ 上有连续导数，则

$$|T(f,g)| \leqslant \frac{(b-a)}{12}\|f'\|_c\|g'\|_c.$$

⑤ 若 f,g 在 $[a,b]$ 上一阶单调，则(3.133)式仍成立；

若 f,g 在 $[a,b]$ 上 2 阶单调，则

$$|T(f,g)| \leqslant \frac{1}{9}(M_1 - m_1)(M_2 - m_2);$$

若 f,g 在 $[a,b]$ 上 3 阶单调，则

$$|T(f,g)| \leqslant \frac{9}{100}(M_1 - m_1)(M_2 - m_2).\text{([22]297)}$$

⑥ 设 $f \in AC[a,b]$，$f' \in L^2[a,b]$，g 在 $[a,b]$ 上有界可测且 $m \leqslant g(x) \leqslant M$，则

$$|T(f,g)| \leqslant \frac{\sqrt{b-a}}{2\pi}(M-m)\|f'\|_2.\text{([22]301)}$$

⑦ 设 $f' \in L^p[a,b]$， $g' \in L^q[a,b]$，若 $1 < p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，则

$$\begin{aligned}|T(f,g)| &\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b |x-y| \left|\int_x^y |f'(t)|^p \mathrm{d}t\right| \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b |x-y| \left|\int_x^y |g'(t)|^q \mathrm{d}t\right| \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leqslant \frac{1}{8}(b-a)\|f'\|_p\|g'\|_q;\end{aligned}$$

若 $p = \infty, q = 1$，则

$$|T(f,g)| \leqslant \frac{1}{2(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b |x-y| \left(\sup_{t\in[x,y]} |f'(t)|\right)\left|\int_x^y |g'(t)|\,\mathrm{d}t\right| \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\leqslant \frac{1}{8}(b-a)\|f'\|_{\infty}\|g'\|_1.$$

若 $1\leqslant p\leqslant\infty$,则

$$|T(f,g)|\leqslant\left(\frac{b-a}{4}\right)\left(\frac{2^p-1}{p(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{2^q-1}{q(q+1)}\right)^{\frac{1}{q}}\|f'\|_p\|g'\|_q,$$

特别,$p=q=2$ 时,$|T(f,g)|\leqslant\frac{b-a}{8}\|f'\|_2\|g'\|_2$,$p=1$,$q=\infty$ 时,$|T(f,g)|\leqslant\frac{b-a}{4}\|f'\|_1\|g'\|_{\infty}$.

但 1973 年 Lupas 已证明:设 $f,g\in AC[a,b]$ 且 $f',g'\in L^2[a,b]$,则

$$|T(f,g)|\leqslant\frac{b-a}{\pi^2}\|f'\|_2\|g'\|_2.$$

式中$\frac{b-a}{\pi^2}$是最佳的.这就表明上述因子$\frac{b-a}{8}$不是最佳常数.([330]36(1)(2005),39～42)

我们问:使得 $|T(f,g)|\leqslant C(p,q)\|f'\|_p\|g'\|_q(1\leqslant p\leqslant\infty,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ p\neq 2)$ 成立的 $C(p,q)$ 的最佳常数是什么?

⑧ 设 f,g 是$[a,b]$上的凸函数,则

$$T(f,g)\geqslant\frac{12}{(b-a)^3}\left[\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x\right]\left[\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)g(x)\mathrm{d}x\right]$$

当 f,g 中至少有一个是线性函数时,等号成立,它的离散类似是:

设 $a=\{a_k\}$, $b=\{b_k\}$ 是凸序列(定义见第 11 章 §1No.37),则

$$\sum_{k=1}^n a_kb_k-\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k\right)\geqslant\frac{12}{n(n^2-1)}\sum_{k=1}^n\left(k-\frac{n+1}{2}\right)a_k\sum_{k=1}^n\left(k-\frac{n+1}{2}\right)b_k,$$

当 a,b 中至少有一个是算术序列时等号成立.([22]262,272)

注 2 Grüss 不等式(3.133)可作如下推广:设 $f,g\in L_{\omega}(E)$,$m_1\leqslant f(x)\leqslant M_1$,$m_2\leqslant g(x)\leqslant M_2$. $x\in E$,不妨设 $\int_E\omega=\omega(E)=1$,记

$$T(f,g)=\left(\int_E\omega\right)\left(\int_E fg\omega\right)-\left(\int_E f\omega\right)\left(\int_E g\omega\right),\quad 则$$

$$|T(f,g)|\leqslant\frac{1}{4}(M_1-m_1)(M_2-m_2).\tag{3.135}$$

证 记 $F=\int_E f\omega$,$G=\int_E g\omega$.因为$\int_E\omega=1$,于是

$$T(f,g)=\int_E gf\omega-FG=\int_E(f-F)(g-G)\omega.\tag{3.136}$$

由 Cauchy 不等式,有 $T(f,f)=\int_E f^2\omega-F^2\geqslant 0$.

另一方面,$T(f,f)=(M_1-F)(F-m_1)-\int_E(M_1-f)(f-m_1)\omega$

$$\leqslant(M_1-F)(F-m_1).\tag{3.137}$$

再由 Cauchy 不等式，有

$$T(f,g)^2=\left[\int_E(f-F)(g-G)\omega\right]^2$$
$$\leqslant\left[\int_E(f-F)^2\omega\right]\left[\int_E(g-G)^2\omega\right]=T(f,f)T(g,g)$$
$$\leqslant(M_1-F)(F-m_1)(M_2-G)(G-m_2)\leqslant\frac{1}{4}(M_1-m_1)^2\cdot\frac{1}{4}(M_2-m_2)^2.$$

若令 $$T(f,g,\omega)=\frac{1}{\omega(E)}\int_E fg\omega-\left[\frac{1}{\omega(E)}\int_E f\omega\right]\left[\frac{1}{\omega(E)}\int_E g\omega\right],$$

式中 ω 在 E 上非负可积，$\omega(E)=\int_E\omega(x)\mathrm{d}x$，

$$\|f'\|_{2,\omega^{-1}}=\left(\int_E|f'|^2\omega^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

设 $f',g'\in AC(E)$，则

$$|T(f,g,\omega)|\leqslant\frac{\omega(E)}{\pi^2}\|f'\|_{2,\omega^{-1}}\|g'\|_{2,\omega^{-1}};$$

设 $f'\in AC(E)$，$m\leqslant g(x)\leqslant M$ a.e. 于 E，则

$$|T(f,g,\omega)|\leqslant\frac{\sqrt{\omega(E)}}{2\pi}(M-m)\|f'\|_{2,\omega^{-1}}.$$

（据[22]301 ～ 302 改写）

注 3 （3.133）式的进一步推广见第 13 章 No. 7.

（4） **Karamata 不等式**：设 f,g 在(0,1) 上可积，$0<m_1\leqslant f(x)\leqslant M_1$，$0<m_2\leqslant g(x)\leqslant M_2$，$x\in(0,1)$，

令 $c=\dfrac{\sqrt{m_1m_2}+\sqrt{M_1M_2}}{\sqrt{m_1M_2}+\sqrt{m_2M_1}}\geqslant 1$，则

$$\frac{1}{c^2}\leqslant\frac{\left(\int_0^1 f\right)\left(\int_0^1 g\right)}{\int_0^1 fg}\leqslant c^2. \tag{3.138}$$

（Acad. Serbe Sci，Publ，Inst. Math，1948，2：131 ～ 145）

（5） 设 f_k,g_k 是$[a,b]$上正的连续函数，且$\dfrac{f_k}{g_k}$ 与 g_k 同时递增或递减，则

$$\prod_{k=1}^n\int_a^b\left(\frac{f_k}{g_k}\right)\leqslant(b-a)^n\frac{\prod_{k=1}^n\int_a^b f_k}{\prod_{k=1}^n\int_a^b g_k}.\ ([22]251)$$

（6） 设 f,g 是$[0,a]$上正的凹函数. 则

$$\left(\int_0^a f\right)\left(\int_0^a g\right)\leqslant\frac{3}{2}a\int_0^a fg.\ ([361]17(1991\sim1992),211\sim247)$$

10\. **k 次对称平均不等式**：设 $a=(a_1,\cdots,a_n)$ 为正数序列，即 $\forall a_k>0,1\leqslant k\leqslant n$，$a$ 的 k 次对称函数 $E_n(a,k)$ 定义为

$$E_n(a,k)=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\prod_{j=1}^{k}a_{i_j},\tag{3.139}$$

式中$(i_1,\cdots,i_k)$取遍数集$\{1,2,\cdots,n\}$的所有k-组合，而a的k次对称平均定义为

$$P_n(a,k)=\left\{\frac{E_n(a,k)}{\binom{n}{k}}\right\}^{1/k},\text{式中}\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}.\tag{3.140}$$

特别地，$P_n(a,1)=A_n(a)$为a的算术平均. $P_n(a,n)=G_n(a)$为a的几何平均；

$$Q_n(a,k)=\left\{\frac{[A_n(a)]^k-\frac{k!}{n^k}E_n(a,k)}{1-\frac{k!}{n^k}\binom{n}{k}}\right\}^{1/k}\tag{3.141}$$

称为a的k次剩余对称平均$(2\leqslant k\leqslant n)$，特别地$Q_n(a,2)=M_n(a,2)=\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{1/2}$为$a$的2阶幂平均. 我们在第3章No. 132还要讨论$E_n(a,k)$的有关不等式.

(1) **Maclaurin不等式(对称平均值基本定理)：**

$$G_n(a)=P_n(a,n)\leqslant P_n(a,n-1)\leqslant\cdots\leqslant P_n(a,2)\leqslant P_n(a,1)=A_n(a).\tag{3.142}$$

(2) $$[A_n(a)]^p[G_n(a)]^{1-p}\leqslant P_n(a,k)\leqslant qA_n(a)+(1-q)G_n(a),\tag{3.143}$$

式中$p=\frac{n-k}{k(n-1)}$与$q=\left(\frac{n}{n-1}\right)\left(1-\frac{k}{n}\right)^{1/k}$均为最佳值.（文家金、石焕南，成都大学学报，2000，19(3)：1 ～ 8）

(3) 文家金等证明：使不等式

$$M_n(a,p)\leqslant P_n(a,k)\leqslant M_n(a,q)\tag{3.144}$$

成立的p的最小值为0，q的最大值为$\frac{2[\ln n-\ln(n-1)]}{\ln n-\ln(n-2)}$.

（西南民族学院学报，2000，26(3)：244 ～ 250）

(4) $$A_n(a)\leqslant Q_n(a,n)\leqslant Q_n(a,n-1)\leqslant\cdots\leqslant Q_n(a,3)\leqslant Q_n(a,2)=M_n(a,2).\tag{3.145}$$

（张日新，文家金，成都大学论文集，2001）

(3.142)式与(3.145)式中的等号仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n$时成立.

(5) 1982年，莫颂清用数学归纳法证明

$$[P_n(a,k)]^{2k}\geqslant[P_n(a,k+1)]^{k+1}[P_n(a,k-1)]^{k-1}.\tag{3.146}$$

式中$k=1,2,\cdots,n-1$. 规定$P_n(a,0)=1$，由此推出(3.142)式.（[345]1982，12：25 ～ 27）

(6) 我们还可考虑对称函数的各种推广和变形，如1979年Detemple, D. W和Robertson, J. M. 定义了a的广义k次对称平均：

$$P_n^*(a,k)=\binom{n+k-1}{n-1}^{-1}\sum_{i_1+\cdots+i_n=k}\left(\prod_{m=1}^{n}a_m^{i_m}\right).\tag{3.147}$$

并证明当$k\geqslant 1$时，下式成立

$$[P_2^*(a,k)]^2\leqslant P_2^*(a,k-1)\cdot P_2^*(a,k+1);\tag{3.148}$$

$$P_2^*(a,1)\leqslant[P_2^*(a,2)]^{1/2}\leqslant\cdots\leqslant[P_2^*(a,k)]^{1/k}\leqslant\cdots$$

而对于 $n\geqslant 3$，只证明

$$[P_n^*(a,k)]^2\leqslant P_n^*(a,k-1)\cdot P_n^*(a,k+1) \tag{3.149}$$

对 $k=1,2,3$ 成立. 1995 年张志华则进一步证明(3.149)式对任意 k 成立.(湖南教育学院学报,1995)

1998 年关开中则进一步证明：

① $[P_n^*(a,k)]^{1/k}\leqslant[P_n^*(a,k+1)]^{1/(k+1)}$；

② 当 $k=1,2$ 时，有 $\dfrac{P_n^*(a+b,k)}{P_n^*(a+b,k-1)}\leqslant\dfrac{P_n^*(a,k)}{P_n^*(a,k-1)}+\dfrac{P_n^*(b,k)}{P_n^*(b,k-1)}$. (3.150)

并猜想(3.150)式对 $\forall k\in N$ 成立.(重庆师院学报,1998,15(3):40 ~ 43)

1987 年孙家昶证明：

$$[P_n^*(a,k)]^{1/k}\leqslant[P_n^*(a,k+1)]^{\frac{1}{k+1}}. \tag{3.151}$$

我们要问：$P_n(a,k)$，$P_n^*(a,k)$ 与 $Q_n(a,k)$ 有什么关系？

$$E_n^*(a,k)=\prod_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\sum_{j=1}^{k}a_{i_j} \tag{3.152}$$

称为 $E_n(a,k)$ 的对偶式. $E_n(a,k)$ 与 $E_n^*(a,k)$ 都是 $R_+^n=\{x=(x_1,\cdots,x_n):x_k\geqslant 0,1\leqslant k\leqslant n\}$ 上递增的 Schur 凹函数.([9]59 ~ 60，石焕南，东北师范大学学报(自),2001,33(增刊):24 ~ 27)Schur 凹函数的概念见第 7 章 §1.

$E_n(a,k)$ 的另一种变形是 Hamy 对称函数：

$$F_n(a,k)=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\Big(\prod_{j=1}^{k}a_{i_j}\Big)^{1/k}, \tag{3.153}$$

$$\sigma_n(a,k)=\frac{F_n(a,k)}{\binom{n}{k}},1\leqslant k\leqslant n. \tag{3.154}$$

1981 年，张运筹证明了与(3.142)式类似的不等式：

$$G_n(a)=\sigma_n(a,n)\leqslant\sigma_n(a,n-1)\leqslant\cdots\leqslant\sigma_n(a,2)\leqslant\sigma_n(a,1)=A_n(a). \tag{3.155}$$

([348]1981.4)

将(3.153)式中的 $\dfrac{1}{k}$ 换成正实数 α_j，记 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，$x=(x_1,\cdots,x_n)$，$\alpha_j,x_j>0$.

我们得到 Hardy 函数：

$$H_n(x,\alpha)=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_n\leqslant n}\Big(\prod_{j=1}^{k}x_{i_j}^{\alpha_j}\Big).$$

文家金提出了 Hardy 函数不等式的若干猜想. 例如，证明或否定 $H_n(x,\alpha)\leqslant\prod_{k=1}^{n}\Big(\dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j^{\alpha_k}\Big)$.([351]11(3)(2004),392)

$a=(a_1,\cdots,a_n)\in R_+^n$ 的第 3 类 k 次对称平均定义为

$$\prod\nolimits_n^k(a)=\Big[\prod_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\Big(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}a_{ij}\Big)\Big]^{\binom{n}{k}^{-1}}.$$

设 $2\leqslant k\leqslant n-1$，则

$$\prod_n^k(a) \geqslant [A_n(a)]^p[G_n(a)]^{1-p}.$$

式中 $p = \frac{k-1}{n-1}$ 为最佳系数.([351]2006,4:345 ~ 354)

(7) **Fan Ky 不等式**:设 $0 < a_k \leqslant \frac{1}{2}, k = 1,2,\cdots,n$. 则

$$\frac{\prod_{k=1}^{n} a_k}{(\sum_{k=1}^{n} a_k)^n} \leqslant \frac{\prod_{k=1}^{n}(1-a_k)}{(\sum_{k=1}^{n}(1-a_k))^n} \tag{3.156}$$

仅当所有 a_k 相等时等号成立. $\frac{1}{2} \leqslant a_k \leqslant 1$ 时不等号反向. 这是[2]5 引用的 Fan Ky 未发表的结果,可以用反向归纳法证明. 这个有趣而有用的结果引起了广泛的研究兴趣.

记 $a = (a_1,\cdots,a_n), \frac{1}{a} = (\frac{1}{a_1},\cdots,\frac{1}{a_n}), a_k > 0,$

$$1-a = (1-a_1,\cdots,1-a_n), 1+a = (1+a_1,\cdots,1+a_n).$$

利用对称函数 $E_n(a,k)$ 的记号. (3.156) 可改写成

$$\frac{G_n(a)}{G_n(1-a)} = (\frac{E_n(a,n)}{E_n(1-a,n)})^{1/n} \leqslant \frac{E_n(a,1)}{E_n(1-a,1)} = \frac{A_n(a)}{A_n(1-a)}. \tag{3.157}$$

1993 年,Alzer,H. 给出了 Fan Ky 不等式的加细:

$$\frac{A_n(1-a)}{G_n(1-a)} \leqslant \frac{1-G_n(1-a)}{1-A_n(1-a)} \leqslant \frac{A_n(a)}{G_n(a)}; \quad \frac{A_n(1-a)}{G_n(1-a)} \leqslant \frac{1-G_n(a)}{1-A_n(a)} \leqslant \frac{A_n(a)}{G_n(a)};$$

仅当所有 a_k 相等时等号成立. 并进一步指出,仅当 $n = 2$ 时,有

$$\frac{1-G_2(1-a)}{1-A_2(1-a)} \leqslant \frac{1-G_2(a)}{1-A_2(a)},$$

仅当 $a_1 = a_2$ 时等号成立. 而当 $n > 2$ 时,上式两边不能比较. ([308]1993,117(1):159 ~ 165)

同一年,Sandor,J. 给出了 Fan Ky 不等式的一种推广:设 $x_k \geqslant 1$,则

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+x_k} \geqslant \frac{n}{1+G_n(x)}, \quad \text{式中 } G_n(x) = (\prod_{k=1}^{n} x_k)^{1/n}.$$

特别,当 $x_k = \frac{1}{a_k} - 1, 0 < a_k < \frac{1}{2}$ 时,又得到 Fan Ky 不等式(3.156). ([306] MR93e:26015)

1996 年,Kwon,Ern Gun 将 Fan Ky 不等式推广为:

$$(\frac{A_{n-1}(a)G_{n-1}(1-a)}{A_{n-1}(1-a)G_{n-1}(a)})^{n-1} \leqslant (\frac{A_n(a)G_n(1-a)}{A_n(1-a)G_n(a)})^n;$$

$$(n-1)(A_{n-1}(a) - \frac{G_{n-1}(a)}{G_{n-1}(a)+G_{n-1}(1-a)}) \leqslant n(A_n(a) - \frac{G_n(a)}{G_n(a)+G_n(1-a)}).$$

([395]1996,35(3):665 ~ 670)

1997 年,Alzer. H. 证明:

$$\min_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{a_k}{1-a_k}\leqslant\frac{A_n(1-a)-G_n(1-a)}{A_n(a)-G_n(a)}\leqslant\max_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{a_k}{1-a_k}.$$ (Indag. Math. 1997, 8(1):1 ~ 6)

2000 年,Mercer 证明:设 $p\geqslant 1, 0\leqslant a_1\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant 2^{-1/p}, b_k>0$,且 $a_k^p+b_k^p=1$,则 $A_n(b)G_n(a)\leqslant A_n(a)G_n(b)$. 仅当 $\forall a_k$ 相等时等号成立.([301]2000,243(1):163 ~ 173)

王 - 王不等式:1984 年,王挽澜、王鹏飞得到了(3.157) 的加细:

$$\left(\frac{E_n(a,n)}{E_n(1-a,n)}\right)^{1/n}\leqslant\left(\frac{E_n(a,n-1)}{E_n(1-a,n-1)}\right)^{\frac{1}{n-1}}\leqslant\cdots\leqslant\left(\frac{E_n(a,k)}{E_n(1-a,k)}\right)^{1/k}\leqslant\cdots$$
$$\leqslant\left(\frac{E_n(a,2)}{E_n(1-a,2)}\right)^{1/2}\leqslant\frac{E_n(a,1)}{E_n(1-a,1)};\tag{3.158}$$
$$\left(\frac{E_n(1-a,1)E_n(a,k)}{E_n(a,1)E_n(1-a,k)}\right)^{\frac{1}{k-1}}\leqslant\left(\frac{E_n(a,k)}{E_n(1-a,k)}\right)^{1/k}, k\geqslant 2;$$
$$\frac{H_n(a)}{H_n(1-a)}\leqslant\frac{G_n(a)}{G_n(1-a)},\tag{3.159}$$

式中 $H_n(a)$ 是 a 的调和平均,仅当所有 a_k 相等时等号成立.([334]1984,27:485 ~ 497)

联合(3.157) 与(3.159) 式,得到:若 $a=(a_1,\cdots,a_n), 0<a_k\leqslant 1/2, k=1,\cdots,n$,则 $\frac{H_n(a)}{H_n(1-a)}\leqslant\frac{G_n(a)}{G_n(1-a)}\leqslant\frac{A_n(a)}{A_n(1-a)}$;类似地,可得到

$$\frac{H_n(a)}{H_n(1+a)}\leqslant\frac{G_n(a)}{G_n(1+a)}\leqslant\frac{A_n(a)}{A_n(1+a)};$$
$$\frac{1}{H_n(1-a)}-\frac{1}{H_n(a)}\leqslant\frac{1}{G_n(1-a)}-\frac{1}{G_n(a)}\leqslant\frac{1}{A_n(1-a)}-\frac{1}{A_n(a)};$$

上式中将 $1-a$ 换成 $1+a$ 仍成立.(Govedarica, V. 等,[301]2002,270(2):709 ~ 712)

1982 年,朱尧辰将 Fan Ky 不等式推广到 $\forall a_k\geqslant 1$ 的情形,得到

$$\frac{G_n(a)}{G_n(a-1)}\geqslant\frac{A_n(a)}{A_n(a-1)}.$$ 即

$$\left(\frac{E_n(a,n)}{E_n(1+a,n)}\right)^{1/n}\leqslant\frac{E_n(a,1)}{E_n(1+a,1)}\tag{3.160}$$

([345]1982,11:30 ~ 32)

1986 年,陈计对(3.160) 式作了加细:

$$\left(\frac{E_n(a,n)}{E_n(1+a,n)}\right)^{1/n}\leqslant\left(\frac{E_n(a,n-1)}{E_n(1+a,n-1)}\right)^{\frac{1}{n-1}}\leqslant\cdots\leqslant\frac{E_n(a,1)}{E_n(1+a,1)}.\tag{3.161}$$

([347]1986.1)

1998 年,王挽澜用极值方法对 Fan Ky 不等式的下述加权形式(3.162) 给出两个证明:

$$\frac{G_n(a,q)}{G_n(1-a,q)}\leqslant\frac{A_n(a,q)}{A_n(1-a,q)},\tag{3.162}$$

式中 $a_k>0, Q=\sum_{k=1}^n q_k, 0<a_k\leqslant 1/2, 1\leqslant k\leqslant n$. 为此定义 $f_k:(0,1/2]\to R^1$ 为 $f_k(x)=q_k\left[\frac{a_k}{x}-\frac{1-a_k}{1-x}-\log\frac{1-x}{x}\right]$. 易证 f_k 在 $x_{k,0}=a_k$ 处达到最小值:

$f_k(a_k) = -q_k\log(\frac{1-a_k}{a_k})$. 从而 $f = \sum_{k=1}^{n} f_k$ 在 $x_0 = A_n(a,q)$ 处达到最小值：

$$f(x_0) = -Q\log\frac{A_n(1-a,q)}{A_n(a,q)}.$$

再利用 $-\sum_{k=1}^{n} q_k\log\frac{1-a_k}{a_k} \leqslant -Q\log\frac{A_n(1-a,q)}{A_n(a,q)}$，即得(3.162)式. 其次定义 $g_k:(0,\frac{1}{2}] \to R^1$ 为 $g_k(x) = q_k(\frac{x}{a_k} - \frac{1-x}{1-a_k} + \log\frac{1-x}{x})$.

用类似的极值方法，又证明了反向 Fan Ky 不等式：

$$\frac{G_n(a,q)}{G_n(1-a,q)} \geqslant \frac{x_0}{1-x_0}\exp[\frac{1}{1-m}(1-\frac{x_0}{m})]$$
$$\geqslant \frac{A_n(a,q)}{A_n(1-a,q)}\exp[\frac{1}{1-m}(1-\frac{M}{m})], \tag{3.163}$$

式中 $x_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\{1-4Q(\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k}{a_k(1-a_k)})^{-1}\}^{1/2}$，$m = \min\{a_1,\cdots,a_n\}$，$M = \max\{a_1,\cdots,a_n\}$. 仅当 $m = M$，即所有 a_k 相等时以上等号成立，作者还对以上结果作了进一步的推广. ([301]1999,238:567 ~ 579)

1990 年，Alzer. A 证明 $\frac{H_n(a,q)}{H_n(1-a,q)} \leqslant \frac{G_n(a,q)}{G_n(1-a,q)}$，仅当所有 a_k 相等时等号成立，式中 $0 < a_k \leqslant \frac{1}{2}$，$q_k > 0$，$\sum_{k=1}^{n} q_k = 1$. ([326]1990,13(2):295 ~ 298)

我们还可以考虑更一般的加权形式：设 $a_k \geqslant 1$，$a_k > 0$，$0 < \alpha < \beta$，则

$$\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} q_k(a_k-1)^{\alpha}}{\sum_{k=1}^{n} q_k a_k^{\alpha}}\right)^{1/\alpha} \leqslant \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} q_k(a_k-1)^{\beta}}{\sum_{k=1}^{n} q_k a_k^{\beta}}\right)^{1/\beta}. \tag{3.164}$$

提示：令 $b_k = a_k - 1$. 记

$$F(x) = \frac{1}{\alpha}\ln\sum_{k=1}^{n} q_k(b_k+x)^{\alpha} - \frac{1}{\beta}\ln\sum_{k=1}^{n} q_k(b_k+x)^{\beta}.$$

证 $x \geqslant 0$ 时 $F(x)$ 递增.

1999 年，Alzer, H. 证明：设 $0 < \alpha < \beta < 1$，$a_k \in [\alpha,\beta]$，令 $c_1 = (\frac{\alpha}{1-\alpha})^2$，$c_2 = (\frac{\beta}{1-\beta})^2$. 则

$$\left(\frac{A_n(a,q)}{G_n(a,q)}\right)^{c_1} \leqslant \frac{A_n(1-a,q)}{G_n(1-a,q)} \leqslant \left(\frac{A_n(a,q)}{G_n(a,q)}\right)^{c_2}.$$

([392]1999,129(2):221 ~ 228. 另见[301]2002,269(1):129 ~ 136)

若将(3.156)式改为

$$\frac{\prod_{k=1}^{n} a_k^{p}}{\sum_{k=1}^{n} a_k^{q}} \leqslant \frac{\prod_{k=1}^{n}(1-a_k)^{p}}{\sum_{k=1}^{n}(1-a_k)^{q}}, \tag{3.165}$$

式中 $0 < a_k \leqslant \frac{1}{2}$. 当 $p = 1, q = n$ 时,见第 3 章 No. 76(1). 我们可以进一步问:p,q 满足什么条件时,(3.165) 式成立?

利用幂平均 $M_n(a,r) = (\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^r)^{1/r}$ 和 $M_n(1-a,r) = (\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(1-a_k)^r)^{1/r}$,(3.156) 还可写成

$$\frac{M_n(a,0)}{M_n(1-a,0)} = \frac{G_n(a)}{G_n(1-a)} \leqslant \frac{M_n(a,1)}{M_n(1-a,1)}.$$

于是,Segaiman 提出猜想:当 $p < q$ 时成立

$$\frac{M_n(a,p)}{M_n(1-a,p)} < \frac{M_n(a,q)}{M_n(1-a,q)}. \tag{3.166}$$

1974 年,Chan,F 等对于 $0 < 2^p/p < 2^q/q$ 或 $p + q > 9$ 的情形给出了反例,而当 $p + q = 0 > p$ 或 $0 \leqslant p \leqslant 1 \leqslant q \leqslant 2$ 时证明了(3.166) 式成立.([308]1974,42:202 ~ 207)

当 $p = -1, q = 0$ 时,(3.166) 式归结为(3.159) 式.

1989 ~ 1990 年,王振和陈计又先后证明当 $-1 \leqslant p < q \leqslant 1$ 时(3.166) 式成立,而 $p = 0, q = 4$ 时,(3.166) 式不成立.(Mathematica Balcanica,1991.5)

1987 年,王挽澜等证明,若加上条件:$0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant 1/2$,则(3.166) 式对于包含原点的开区间$(\alpha,\beta)$ 内的任何 $p,q(p < q)$ 都成立,同时,进一步问:对于给定的$\{a_k\}$,如何确定 α,β?是否还有使(3.166) 式成立的其他区间?(成都科技大学学报,1988,6:83 ~ 84)

1988 年,Alzer,H 将(3.156) 式推广为

$$\left(\frac{G_n(a)}{G_n(1-a)}\right)^n \leqslant \left(\frac{M_n(a,1)}{M_n(1-a,1)}\right)^{n-1}\left(\frac{M_n(a,-1)}{M_n(1-a,-1)}\right), \tag{3.167}$$

式中 $0 < a_k \leqslant 1, n \geqslant 3$. 同时利用优化方法证明了反向 Fan Ky 不等式的另一形式:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{\sum_{k=1}^{n}(1-a_k)} \leqslant \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{1-a_k}\right)^{\beta_k}, 0 < a_k < 1. \tag{3.168}$$

式中 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \beta_k = \frac{a_k}{S_n}$.([367]1988,36(2 ~ 3):246 ~ 250.[301]1992,163:317 ~ 321)

1993 年,陈计提出由(3.153) 式定义的 Hamy 对称函数 $F_n(a,k)$,当 $0 < a_k \leqslant 1/2$ 时,是否也成立

$$\frac{F_n(a,n)}{F_n(1-a,n)} \leqslant \frac{F_n(a,n-1)}{F_n(1-a,n-1)} \leqslant \cdots \leqslant \frac{F_n(a,2)}{F_n(1-a,2)} \leqslant \frac{F_n(a,1)}{F_n(1-a,1)}. \tag{3.169}$$

([348]1993,7:39)

1995 年,陈计证明:$0 < r \leqslant 1, 0 \leqslant a_k \leqslant \frac{1}{2}$ 时,

$$(G_n(a))^r - (G_n(1-a))^r \leqslant (A_n(a))^r - (A_n(1-a))^r \leqslant (M_n(a,2))^r - (M_n(1-a,2))^r.$$

(3.170)

当 $r<0$ 时，不等号均反向，并提出猜想：当 $r\geqslant n$ 时，上述反向不等式也成立.([350]1995.5)

1993 年，Alzer，H. 证明：

$H_n(a)-H_n(1-a)\leqslant A_n(a)-A_n(1-a)$.

$(0<a_k\leqslant\frac{1}{2})$ 仅当所有 a_k 相等时等号成立.([367]1993，46(3)：257 ～ 263)

1964 年，Levinson，N. 利用 $f(x)-f(2a-x)$ 在 $(0,2a)$ 上的严格凹性，其中 $f^{(3)}(x)\geqslant 0$，证明对于 $0<x_k\leqslant a, q_k>0, Q_n=\sum_{k=1}^n q_k$，下式成立

$$\frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^n q_kf(x_k)-f(\frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^n q_kx_k)\leqslant\frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^n q_kf(2a-x_k)-f(\frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^n q_k(2a-x_k)).$$

(3.171)

若 $f^{(3)}(x)>0$，则仅当 $x_1=\cdots=x_n$ 时等号成立.([301]1969，8：133 ～ 134，1992，163：317 ～ 321)

当 f 是 $(0,2a)$ 上的 3 阶凸函数时，(3.171) 式仍成立.

1992 年，Dragomir，S. S. 将(3.169) 推广为：设 $f:[0,a]\to R^1$ 使得 $g(x)=f(x)-f(a-x)$ 为 $[0,b]$ 上的凹函数，$b\leqslant a, 0\leqslant x_k\leqslant b, q_k\geqslant 0, Q_n=\sum_{k=1}^n q_k>0$，则

$$\frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^n q_kf(x_k)-\frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^n q_kf(a-x_k)\leqslant f(\frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^n q_kx_k)-f(\frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^n q_k(a-x_k)).$$

([301]1992，163(2)：317 ～ 321)

11. **混合幂平均不等式**：设 $a_k, q_k>0, 1\leqslant k\leqslant n$. 令 $Q_n=\sum_{k=1}^n q_k$. 若 $Q_kq_n<Q_nq_k$，$2\leqslant k\leqslant n-1$，则

$$\left\{\frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^n q_k(\frac{1}{Q_k}\sum_{j=1}^k q_ja_j^r)^{s/r}\right\}^{1/s}\leqslant\left\{\frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^n q_k(\frac{1}{Q_k}\sum_{j=1}^k q_ja_j^s)^{r/s}\right\}^{1/r} \tag{3.172}$$

对 $s>r(rs\neq 0)$ 成立，且仅当所有 a_k 相等时等式成立.([303]1999，2(2)：175 ～ 181)

12. **加权 AGH 不等式的推广**：设 $a=(a_1,\cdots,a_n), q=(q_1,\cdots,q_n)$，式中 $a_k\geqslant 0$，$q_k>0, 1\leqslant k\leqslant n, \sum_{k=1}^n q_k=1$.

我们已知，加权算术平均 $A_n(a,q)$、加权调和平均 $H_n(a,q)$ 和加权几何平均 $G_n(a,q)$ 分别定义为

$$A_n(a,q)=\sum_{k=1}^n q_ka_k, H_n(a,q)=(\sum_{k=1}^n\frac{q_k}{a_k})^{-1}, G_n(a,q)=\prod_{k=1}^n a_k^{q_k}.$$

再令

$$\Delta_n(a,q)=A_n(a,q)-G_n(a,q); S_n(a,q)=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}q_iq_j(\sqrt{a_i}-\sqrt{a_j})^2.$$

(1) 1963 年，Diananda，P. H. 证明：

$$\frac{\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{\frac{q_k}{q'_k}\}}{1-\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{q'_k\}}\leqslant\frac{\Delta_n(a,q)}{S_n(a,q')}\leqslant\frac{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{\frac{q_k}{q'_k}\}}{\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{q'_k\}},\tag{3.173}$$

式中 $q'=(q'_1,\cdots,q'_n)$,$q'_k>0$,$1\leqslant k\leqslant n$,$\sum\limits_{k=1}^n q'_k=1$,上下界均可达到.([319]1963,59:837 ~ 839)

(2) 1993 年,Dragomir. S. S. 证明:设 $0<a_k\leqslant M$. 则

$$G_n(a,q)\leqslant M\exp(\frac{1}{M}A_n(a,q)-1)-M\sum_{k=1}^n q_k\exp(\frac{a_k}{M}-1)\leqslant A_n(a,q).$$

仅当 $\forall a_k=M$ 时等号成立.([404],IV,Ser. 11. 1993,11(1):9 ~ 12)

(3) **王中烈不等式**:设 $f(x)=(b_1x+\frac{b_2}{x})^\alpha$,式中 $b_1\geqslant 0$,b_2,$\alpha>0$,$a=(a_1,\cdots,a_n)$,$p=(p_1,\cdots,p_n)$,$a_k,p_k>0$,$1\leqslant k\leqslant n$. 令 $Q_k=\sum\limits_{j=1}^k p_j$,$A_k=A_k(a,p)$,$G_k=G_k(a,p)$,$H_k=H_k(a,p)$. 1979 ~ 1980 年,王中烈先后证明:

① $$Q_nf(A_n)\leqslant Q_nf(G_n)\leqslant\sum_{k=1}^n p_kf(a_k),\tag{3.174}$$

仅当所有 a_k 相等时等号成立. 特别,当 $b_1=0$,$b_2=\alpha=1$ 时,又得到加权 AGH 不等式:$H_n\leqslant G_n\leqslant A_n$.([357]1980,6:149 ~ 152)

② 若 $p_1\geqslant p_2\geqslant\cdots\geqslant p_n>0$,$a_1\geqslant a_2$,并令 $g(k)=\frac{A_k^{Q_{k-1}}H_k^{Q_k}}{G_k^{Q_k}}$,$\varphi(k)=\frac{A_k^{Q_k}H_k^{Q_{k-1}}}{G_k^{Q_k}}$. 则

$$\begin{aligned}&1\leqslant g(2)\leqslant g(3)\leqslant\cdots\leqslant g(n-1)\leqslant g(n);\\&1\geqslant\varphi(2)\geqslant\varphi(3)\geqslant\cdots\geqslant\varphi(n-1)\geqslant\varphi(n).\end{aligned}\tag{3.175}$$

仅当对某个适当的 k,$a_1=a_2=\cdots=a_k$ 时等号成立. 其中 $a_1\geqslant a_2$ 的假设只在证明 $g(2)\geqslant 1$ 时用到,但这不是必要条件.([331]1979,(639 ~ 677):94 ~ 96)

③ 若 $0<a_k<1$,不妨设 $0<a_k\leqslant\frac{1}{2}$,记 $A'_k=A_k(1-a,p)$;$G'_k=G_k(1-a,p)$;$F_n=Q_n\{A_n(G_n+G'_n)-G_n\}$. 则 $F_{n-1}\leqslant F_n$.([301]1980,73(2):501 ~ 505)

13. (1) 记 $g(n)=n[A_n(a)-M_n(a,r)]$. 若 $r<1$,则 $g(n)\geqslant g(n-1)$.

(2) 记 $g(n,\lambda)=n[A_n(a)-\lambda G_n(a)]$. 则当 $\lambda>0$ 时,$g(n,\lambda)\geqslant g(n-1,\lambda^{\frac{n}{n-1}})$.

((1)(2) 见[22]710 ~ 711)

(3) $$\prod_{k=1}^n\{nA_n(a)-a_k\}\geqslant\frac{(n-1)^n}{n^{n-2}}\{G_n(a)\}^2\{nA_n(a)\}^{n-2}.$$

(张小明,[351]2004(1):25 ~ 27)

(4) 设 $a_k>0$, $a=(a_1,\cdots,a_n)$, $1+a=(1+a_1,\cdots,1+a_n)$, $-1\leqslant r_1\leqslant 0\leqslant r_2\leqslant 1$,则

$$\frac{M_n(a,r_1)}{M_n(1+a,r_1)}\leqslant\frac{M_n(a,r_2)}{M_n(1+a,r_2)}$$

仅当 $r_1 = r_2 = 0$ 或 $a_1 = \cdots = a_n$ 时等号成立.(浙江师大学报,2005,28(2):140 ~ 143)

14.　设 $a = (a_1, \cdots, a_n)$, $a_n > 0$.

(1)　设 $r_1 < 0 < r_2$,

当 $r_1 + r_2 > 0$ 时,$0 \leqslant \lambda \leqslant \dfrac{-2r_1}{n(r_2 - r_1)}$, $1 - \dfrac{1}{n} \leqslant \theta \leqslant 1$,

当 $r_1 + r_2 \leqslant 0$ 时,$0 \leqslant \lambda \leqslant \dfrac{1}{n}$, $1 - \dfrac{2r_2}{n(r_2 - r_1)} \leqslant \theta \leqslant 1$,则

$$[M_n(a, r_1)]^{1-\lambda}[M_n(a, r_2)]^{\lambda} \leqslant G_n(a) \leqslant [M_n(a, r_1)]^{1-\theta}[M_n(a, r_2)]^{\theta}.$$

$\lambda = \dfrac{1}{n}$, $\theta = 1 - \dfrac{1}{n}$ 是最佳常数.

(2)　设 $0 < p < 1 < r$, $\lambda \leqslant \max\left\{\dfrac{(1-p)}{(r-1)n + (1-p)}, \dfrac{p(2r-1)}{r(nr - n + p)}\right\}$,则

$$(1-\lambda)[G_n(a)]^p + \lambda[M_n(a, r)]^p \leqslant [A_n(a)]^p.$$

(3)　设 $0 < p < r$, $\lambda \geqslant \dfrac{n(r+1) - p}{(r+1)(n+p)}$,则

$$[G_n(a)]^p \leqslant (1-\lambda)[H_n(a)]^p + \lambda[M_n(a, r)]^p.$$ ([351]2006,4:396 ~ 406)

15.　对于固定的 $a = (a_1, \cdots, a_n)$, $p = (p_1, \cdots, p_n)$, $a_k, p_k > 0$. 记

$$M_n(r) = \left(\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k} \sum_{k=1}^{n} p_k a_k^r\right)^{\frac{1}{r}},$$

$$G_n = \left(\sum_{k=1}^{n} p_k\right)^{\frac{t}{r_1}} \{[M_n(r_1)]^t - [M_n(r_2)]^t\}, \quad r_1, r_2 \neq 0.$$

若 $\dfrac{r_2}{r_1} \leqslant 1$ 和 $\dfrac{t}{r_1} \geqslant 1$ (即 $r_2 \leqslant r_1 \leqslant t$),则 $G_n \geqslant G_{n-1}$.

若 $r_2 \geqslant r_1$, $t \geqslant r_1$,则不等号反向.(吴善和,Taiwanese J. Math. 13(1)(2009),359 ~ 368)

16.　(1) 设 f, q 是 $[a, b]$ 上正值连续函数,$\int_a^b q(x)\mathrm{d}x = 1$, f 的加权算术平均和几何平均分别为

$$A(f, q) = \int_a^b f(x)q(x)\mathrm{d}x, \qquad G(f, q) = \exp\left\{\int_a^b q(x)\log f(x)\mathrm{d}x\right\}.$$

设 $0 < m \leqslant f(x) \leqslant M$, $x \in [a, b]$, $0 < m \leqslant a_k \leqslant M$. 若 $p > 0$, $p \neq 1$,则

$$C_1(p)[A(f, q) - G(f, q)] \leqslant A(f^p, q) - G(f^p, q) \leqslant C_2(p)[A(f, q) - G(f, q)];$$

(2)　$$C_1(p)[A_n(a, q) - G_n(a, q)] \leqslant A_n(a^p, q) - G_n(a^p, q) \leqslant C_2(p)[A_n(a, q) - G_n(a, q)].$$

式中 $q_k > 0$, $\sum\limits_{k=1}^{n} q_k = 1$, $q = (q_1, \cdots, q_n)$. 在(1)(2)中的常数 $C_1(p)$、$C_2(p)$ 均为:

$$C_1(p) = \begin{cases} p^2 M^{p-1}, & 0 < p < 1 \\ p^2 m^{p-1}, & p > 1 \end{cases}, \quad C_2(p) = \begin{cases} p^2 m^{p-1}, & 0 < p < 1 \\ p^2 M^{p-1}, & p > 1 \end{cases}.$$

([351]2004,3:296 ～ 301)

17.　设 f 是$[1,\infty)$ 上递增函数,记

$$G(f,m)=\Big(\prod_{j=k+1}^{n+k+m}f(j)\Big)^{\frac{1}{n+m}}.$$

2002 年,郭白妮和祁锋提出,是否成立

$$\frac{f(n+k+1)}{f(n+k+1+m)}\leqslant\frac{G(f,0)}{G(f,m)}\leqslant\Big(\frac{f(n+k)}{f(n+k+m)}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

已知 $f(x)=ax+b\ (a,b>0)$ 时上式成立.([330]34(3)(2003),261 ～ 270)

四、　保序线性泛函的平均

设 E 为非空集,X 是具有下述性质的实值线性泛函 $g:E\to R^1$ 的集合:

① $f,g\in X\Rightarrow c_1f+c_2g\in X,c_1,c_2\in R^1$;

② $1\in X$(即 $f(x)\equiv 1,x\in E\Rightarrow f\in X$).

若 $L:X\to R^1$ 满足:$L(1)=1$,而且

① 线性:$L(c_1f+c_2g)=c_1L(f)+c_2L(g),f,g\in X,c_1,c_2\in R^1$;

② 保序性:$f\in X,f(x)\geqslant 0,x\in E\Rightarrow L(f)\geqslant 0$,

则称 L 是保序线性泛函.

设 $f(x)>0,x\in E,p$ 为实数,$f^p\in X,\log f\in X$. 则 L 的平均定义为

$$M_p(f,L)=\begin{cases}L(f^p)^{1/p}, & p\neq 0,\\ \exp\{L(\log f)\}, & p=0,\end{cases}\tag{3.176}$$

若 $f^p\log f\in X$. p,q 为实数,还可以定义 L 的双参数平均:

$$B_{p,q}(f,L)=\begin{cases}\Big(\dfrac{L(f^p)}{L(f^q)}\Big)^{\frac{1}{p-q}}, & p\neq q,\\ \exp\Big\{\dfrac{L(f^p\log f)}{L(f^p)}\Big\}, & p=q,\end{cases}\tag{3.177}$$

$M_p(f,L),B_{p,q}(f,L)$ 包括了许多著名的平均. 例如,取 $E=\{1,2,\cdots,n\},f(k)=a_k>0$,$k\in E$. $L(f)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$,这时 $B_{p,q}(f,L)$ 就是下述 Dresher 平均:

$$D_{p,q}(a)=\begin{cases}\left(\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^p}{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^q}\right)^{\frac{1}{p-q}}, & p\neq q,\\ \exp\left\{\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^p\log a_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^p}\right\}, & p=q,\end{cases}\tag{3.178}$$

关于保序线性泛函不等式有以下基本结果:

1.　**Hölder 不等式**:设 $0<\alpha<1,f,g,f^\alpha,g^{1-\alpha}\in X$,则

$$L(f^\alpha g^{1-\alpha})\leqslant\{L(f)\}^\alpha\{L(g)\}^{1-\alpha};\tag{3.179}$$

2. **Minkowski 不等式**:设 $1 \leqslant p < \infty$,$L: X \to R^1$ 为保序线性泛函.
$|f-g|^p, |f-h|^p, |h-g|^p \in X$,则

$$L(|f-g|^p)^{1/p} \leqslant L(|f-h|^p)^{1/p} + L(|h-g|^p)^{1/p}; \tag{3.180}$$

3. **Lyapunov 不等式**:设 $0 < r < s < t$, $p = \frac{r}{s}(\frac{t-s}{t-r})$, $q = \frac{t}{s}(\frac{s-r}{t-r})$. 则

$$M_s(f,L) \leqslant M_r(f,L)^p M_t(f,L)^q,$$

再由 AG 不等式,得

$$M_s(f,L) \leqslant pM_r(f,L) + qM_t(f,L). \tag{3.181}$$

4. 设 $L: X \to R^1$ 为保序线性泛函,$1 \leqslant p < \infty$. $f, g \geqslant 0$, $f^p, g^p, |f-g|^p$, $|f-g| \in X$,并且 $|f(x)-g(x)| \leqslant L(|f-g|)$, $x \in E$. 则

$$|L(f^p)^{1/p} - L(g^p)^{1/p}| \leqslant L(|f-g|).$$

5. **Dresher 不等式**:设 $f_1, f_2: X \to R^1$ 为保序线性泛函,$g_k, \varphi_k: E \to [0,\infty)$ 满足:
$g_k^p, (\sum_{k=1}^n g_k)^p, \varphi_k^q, (\sum_{k=1}^n \varphi_k)^q \in X$, $0 < q < 1 \leqslant p$, $f_1(\varphi_k^q) > 0$, $1 \leqslant k \leqslant n$. 则

$$\left\{\frac{f_1(\sum_{k=1}^n g_k)^p}{f_2(\sum_{k=1}^n \varphi_k)^q}\right\}^\alpha \leqslant \sum_{k=1}^n \left(\frac{f_1(g_k^p)}{f_2(\varphi_k^q)}\right)^\alpha, \tag{3.182}$$

式中 $\alpha = \frac{1}{p-q}$. ([301]1986,118(1):125 ~ 144)

6. 对任意实数 p,q,r,s, $D_{p,q}(a) \leqslant D_{r,s}(a)$ 成立的充要条件是$\min\{p,q\} \leqslant \min\{r,s\}$;$\max\{p,q\} \leqslant \max\{r,s\}$. $D_{p,q}(a)$ 由(3.178)式定义.([301]1988,131:265 ~ 270)

第二章　数论与组合不等式

§1　含自然数 n 与阶乘 $n!$ 的不等式

一、　关于 n 求和或方幂的不等式

1.　$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.　$c = \lim_{n\to\infty}(S_n - \ln n)$ 为 Euler 常数.

我们已知，$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$，但 $\{S_n\}$ 发散的速度很慢. 例如 $n_0 = 10^6$ 时，$13 < S_{n_0} < 20$，而且当 $\{p_k\}$ 是素数集时，仍有 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k} = \infty$，事实上，对于给定的 n，取素数 $p_1, \cdots, p_m$，使它至少能整除一个不大于 n 的自然数，利用不等式 $(1-x)^{-1} \leqslant e^{2x}$　$(0 \leqslant x \leqslant 1/2)$ 推出

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \prod_{k=1}^{m} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p_k^j}\right) = \prod_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)^{-1} \leqslant \exp\left(\sum_{k=0}^{m} \frac{2}{p_k}\right). \tag{1.1}$$

（证明见[305]1971，78：272－273）

然而，若在 S_n 的表达式中去掉分母中含 9（或 5）的各项之后，剩下的 $S_n^* < 80$. 事实上，设 n 是一个 m 位数，即 $10^{m-1} \leqslant n \leqslant 10^m - 1$. 当 S_n^* 中的 k 为 1 位数时，相关的 S_n^* 中留下 8 项，当 k 为 2 位数，即 $k = k_1 \times 10 + k_2$ 时，由于 k_1 不取 0 和 9，k_2 不取 9，所以，S_n^* 中形如 $\frac{1}{k_1 \times 10 + k_2}$ 的项共有 8×9 个，…，同理，当 k 是 m 位数时，相应的 S_n^* 中留下的项至多还有 $8 \times 9^{m-1}$ 项. 于是，

$$S_n^* < 8 \times 1 + 8 \times 9 \times \frac{1}{10} + 8 \times 9^2 \times \frac{1}{10^2} + \cdots + 8 \times 9^{m-1} \times \frac{1}{10^{m-1}} < 8 \times \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^j = 80.$$

此外，设自然数 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 互不相同且都不能被大于 3 的素数整除，则

$$S_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{n_j} < 3. \tag{1.2}$$

事实上，S_k 中每项都可写成 $2^{-r} \times 3^{-s}$ 的形式. 其中，r, s 为非负整数，取 $t = \max\{r, s\}$，则

$$S_k \leqslant \left(\sum_{j=0}^{t} \frac{1}{2^j}\right)\left(\sum_{j=0}^{s} \frac{1}{3^j}\right) < 2 \times \frac{3}{2} = 3.$$

若 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k \leqslant m$，其中任意两个 n_j 的最小公倍数大于 m，则

$$\sigma_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{n_j} < \frac{7}{6} + \frac{1}{6m} < 2.$$

（[77]65，453 ～ 455）

我们进一步问：σ_k 的最优上界是什么？

由于 S_n 具有这些奇特的性质，这些性质常常用做各类数学竞赛的试题，例如见[99]5：62 ～ 63；[38]446 ～ 451；459 ～ 462. 另一方面，任何正有理数都可用调和序列 1，$\frac{1}{2}$，…，$\frac{1}{n}$，…，的不同项的有限和来表示，这是因为任何正有理数可以写成既约分数 q/p 的形式，它可表示为调和序列中某项 $1/p$ 的 q 项求和：

$$\frac{q}{p}=\frac{1}{p}+\cdots+\frac{1}{p}.$$

右边第一项不动，而将其余 $q-1$ 项作恒等变换：$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$，进一步可把这个恒等式应用于那些重复的加数，如此下去，直到和中所有的项都成为不同为止.

在许多问题中，常常涉及 S_n 的上下界估计，但是，不同的证明方法会得出不同的估计，而同一估计也有多种证法.

(1) $\ln(n+1)<S_n<1+\ln n.$ (1.3)

(Schlömilch－Lemonnier 不等式（简称为 **SL 不等式**），见[4]251).

事实上，利用积分

$$I_n=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)\mathrm{d}x=\ln n+1-S_n$$

易证 $0<I_n<\frac{1}{2}$，即

$$\frac{1}{2}+\ln n<S_n<1+\ln n. \tag{1.4}$$

1992 年，Alzer，H. 等对(1.3) 作了各种不同的加细：令 $x_n=\frac{S_n}{1+\ln n}$，$y_n=\frac{S_{n+1}-S_2}{1+\ln n}$，则 x_n 严格递减收敛于 1，y_n 严格递增收敛于 1，而且 $y_n<1<x_n$.

作者进一步证明：设 $a_k>0$，令 $\sigma_m=\sum_{k=1}^{m}a_k$，$1\leqslant m\leqslant n$，则

$$\ln\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sigma_n}{a_1}\right)\right\}<\sum_{k=2}^{n}\frac{a_k}{\sigma_k}<\ln\left(\frac{\sigma_n}{a_1}\right).$$

左边不等式需设 $a_1\geqslant a_k$，$1\leqslant k\leqslant n$. 当 $a_k=1\leqslant k\leqslant n$ 时，就是(1.3) 左边的改进.

([301]1992.168(2)：319 ～ 328)

(2) $\frac{n}{n-1}\ln n<S_n<\ln n+n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$， (Ivady).

(3) $\frac{2}{5}+\ln(n+1)<S_n<\frac{9}{11}+\ln n$(杨必成等，[347]1996，(3)：1 ～ 8).

(4) $n\{(n+1)^{\frac{1}{n}}-1\}<S_n<n-(n-1)\cdot n^{-\frac{1}{n-1}}$.

$(n>2)$ ([MCU]，[66]447，452)

证 利用 AG 不等式：

$$\frac{n+S_n}{n}=\frac{(1+1)\times\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n}$$

$$> \sqrt[n]{(1+1)\times(1+\frac{1}{2})\times\cdots\times(1+\frac{1}{n})} = (n+1)^{1/n};$$

$$\frac{n-S_n}{n-1} = \frac{\sum_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{k})}{n-1} > [(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})\cdots(1-\frac{1}{n})]^{1/(n-1)} = n^{-\frac{1}{n-1}}.$$

(5) $$\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2} < S_n - \ln n - c < \frac{1}{2n}. \tag{1.5}$$

Franel 不等式. ([56]Vol. 2. 251)

$$\frac{1}{2n+2/5} < S_n - \ln n - c < \frac{1}{2n+(1/3)}.$$

([305]1992,99(7):684 ~ 685)

左边 2/5 可改进为$\frac{2c-1}{1-c}$.

实际上利用 Euler-Maclaurin 求和公式,我们可以得到更一般的结果:

$$S_n = \ln n + c + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} - \frac{1}{252n^6} + \cdots - \frac{B_{2(m-1)}}{2(m-1)n^{2(m-1)}} + O(\frac{1}{n^{2m}}), \tag{1.6}$$

式中 B_n 是 Bernoulli 数(定义见第 6 章 §1).(匡继昌,河西学院学报,2002,18(2):1 ~ 8)

(6) $$\frac{1}{24(n+1)^2} < S_n - \ln(n+\frac{1}{2}) - c < \frac{1}{24n^2}. \tag{1.7}$$

(Young. R. M,[325]1991,75:187 ~ 190. 另见[305]1993,100(5):468)

提示:考虑 $x>0$ 时 $f(x) = -(x+1)^{-1} - \ln[x+(1/2)] + \ln[x+(3/2)]$ 的导数.

(7) 设 $a_1,\cdots,a_n$ 是互不相同的自然数,则

$$S_n \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}. \tag{1.8}$$

(IMO20,[38]459 ~ 460)(1.8) 式有多种证法,如

① 用 Cauchy 不等式:

$(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k})^2 = \left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{a_k}}{k}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right]^2 \leqslant (\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2})(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}) \leqslant (\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2})(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k})$. 由此得(1.8 式).

② 利用第三章排序不等式(No. 86),设 $b_1,\cdots,b_n$ 是 $a_1,\cdots,a_n$ 的重排,使得 $b_1<b_2<\cdots<b_n$. 从而有 $b_k\geqslant k$. 于是

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2} \geqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{k^2} \geqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

利用 Abel 变换,可将(1.8) 推广为:设 $a_1,\cdots,a_n$ 是 n 个互不相同的自然数,则当 $p>0$ 时,有

$$S_n \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^p}{k^{p+1}}, \tag{1.9}$$

而当 $p>0, q\leqslant 0$ 时,有

$$\sum_{k=1}^{n} k^{(p+q)} \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^p k^q. \tag{1.10}$$

仅当 $a_k = k$ 时等号成立,([99]1991,6 ～ 9:191 ～ 199)

(8) $\frac{n}{2} < S_{2^n-1} < n$; (1.11)

(9) $c < S_m + S_n - S_{mn} \leqslant 1$, (1.12)

下界 c 还可改进为 $\frac{2}{2n-1} - \frac{2}{3(2n-1)^2}$. ([77]54)

(10) $\frac{m}{m+n} \leqslant S_{n+m} - S_n < \frac{m}{n}$. (1.13)

特别,$m = n$ 时,得 $\frac{1}{2} \leqslant S_{2n} - S_n < 1$. 它可改进为 $\ln\left(2 - \frac{1}{n+1}\right) < S_{2n} - S_n < \ln 2$ 和

$n(2^{\frac{1}{n+1}} - 1) \leqslant S_{2n} - S_n \leqslant n(1 - 2^{-\frac{1}{n}})$; (1.14)

利用数学归纳法,可以证明

$$S_{2n} - S_n > \frac{13}{24}(n \geqslant 2).$$

$$S_{n^2} - S_{n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n^2-1} + \frac{1}{n^2} > 1.$$

([38]447,[MCM])

$$1 < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1} < 2. \tag{1.15}$$

提示:利用 AG 不等式 $\sqrt{(n+1)(3n+1)} \leqslant \frac{1}{2}[(n+1)+(3n+1)]$. 将(1.15)式中间式子首尾对应的两项相加,得到

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{3n+1} = \frac{2(2n+1)}{(n+1)(3n+1)} > \frac{2}{2n+1}.$$

(11) 令 $H_n(k) = S_{nk-1} - S_{n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \cdots + \frac{1}{nk-1}$.

设 $0 \leqslant a < 1, k > \frac{3+a}{1-a}$,则　$H_n(k) > 1 + a$. (**Kirov 不等式**) (1.16)

证　利用 $\frac{4}{a+b} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$　$(a,b > 0, a \neq b)$.

$$2H_n(k) = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{nk-1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{nk-2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{nk-1} + \frac{1}{n}\right)$$

$$> n(k-1)\frac{4}{n(k+1)-1} > \frac{4(k-1)}{k+1} > 2(1+a). \text{([4]251 ～ 252)}$$

注　我们可进一步证明

$$\ln\left(k + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{kn} < \ln\left(k + \frac{k}{n-1}\right). \tag{1.17}$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{kn}\right) = \ln k.$$

(12) 设 $\alpha > -1$，则

$$\ln\frac{\alpha+n}{\alpha+1}-\frac{1}{\alpha+1}<\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k+\alpha}<\ln\frac{\alpha+n}{\alpha+1}. \tag{1.18}$$

2006 年，周永国证明，当 $a,b>0$ 时，下式成立

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a+kb}<\frac{n}{\left[(a+\frac{b}{2})(a+\frac{2n+1}{2}b)\right]^{1/2}}.$$

取 $b=1, a\to 0^+$，得 $S_n<\frac{2n}{\sqrt{2n+1}}$.（[345]2006.1:61）

(13) 设 $p,q,n\in N, p<q$，令

$$S_n(p,q)=\sum_{k=pn+1}^{qn+1}\frac{1}{k},\quad \sigma_n(p,q)=\sum_{k=pn+1}^{qn}\frac{1}{k},$$

Lucic-Djokovic 证明

$$\ln\frac{5}{3}=\lim_{n\to\infty}S_n(3,5)<S_n(3,5)<S_1(3,5)=\frac{37}{60}. \tag{1.19}$$

1969 年，Adamovic-Taskovic 进一步证明：

① $\sigma_n(p,q)$ 关于 n 严格递增，从而对 $n>1$，下式成立

$$\sigma_1(p,q)<\sigma_n(p,q)<\ln\frac{q}{p}.$$

② 若 $p<q\leqslant\frac{5}{2}p$，$p\neq 2a+1$，或 $q\neq 5a+b, a\geqslant 2, b=1,2$，则 $S_n(p,q)$ 关于 n 递减，而且 $\ln\frac{q}{p}<S_n(p,q)\leqslant S_1(p,q)$；若 $q\geqslant 3p$，则 $S_n(p,q)$ 关于 n 递增，而且，$S_1(p,q)\leqslant S_n(p,q)<\ln\frac{q}{p}$；对于 p,q 的其他值，当 n 充分大时，$S_n(p,q)$ 关于 n 严格递减. 但是，对于 $\frac{5}{2}p<q<3p$，或 $p=2a+1$，或 $q=5a+b, a\geqslant 2, b=1,2$，猜想 $S_n(p,q)$ 关于 n 也是严格递减的.（[331]1969,247 ～ 273:41 ～ 50）1989 年，王志雄证明了上述猜想.（[345]1989,1:35 ～ 36）

叶军、杨林证明：当 $p<q\leqslant 3p-1$，时，$S_n(p,q)$ 关于 n 递减，且

$$\ln\frac{q}{p}<S_n(p,q)\leqslant S_1(p,q).$$

上述上、下界都是最佳的.（[36]183 ～ 190）

形如 $S_n(p,q;\alpha,\beta)=\sum_{k=p}^{q}\sum_{j=\alpha}^{\beta}\frac{1}{nk+j}$ 的上下界估计见[355]，1998，50(1 ～ 2)：5 ～ 10.

(14) 令 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}, \sigma_n=\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}-\ln(1+\frac{1}{k}))$. 则对 $1\leqslant k\leqslant n-1$，有

$$\frac{1}{2k}-\frac{5}{6k^2}+\frac{1}{3(n+1)^2}-\frac{1}{n+1}\leqslant\sigma_n-\sigma_k\leqslant\frac{1}{2k}.$$

提示：$\sigma_n=S_n-\ln(n+1)$ 递增，而 $b_n=S_n-\ln n$ 递减. 并注意到

$$\sigma_n - \sigma_k = S_n - S_k + \ln\left(\frac{k+1}{n+1}\right), \sum_{j=k+1}^{n}\left(\frac{1}{2j^2} - \frac{1}{3j^2}\right) \leqslant \sigma_n - \sigma_k \leqslant \sum_{j=k+1}^{n} \frac{1}{2j^2}.$$

([327]1978,22:223 ~ 232)

2. 设$\{a_k\}$是公差为$h>0$,首项为$a_1>0$的等差数列.由 Euler-Maclaurin 公式可推出

$$S_n(a_1,h) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = \frac{1}{h}\ln\frac{a_n}{a_1} + c_1 + \frac{1}{2a_n} - \frac{h}{12a_n^2} + \frac{h^3}{120a_n^4} - \frac{h^5}{252a_n^6} + \cdots$$
$$- \frac{B_{2(m-1)}h^{2m-3}}{2(m-1)a_n^{2(m-1)}} - R_m. \tag{1.20}$$

式中 $c_1 = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} - \frac{1}{h}\ln\frac{a_n}{a_1}\right), R_m = h^{2m}\int_n^{\infty}\frac{B_{2m} - B_{2m}(t-[t])}{(a_1+(t-1)h)^{2m+1}}\mathrm{d}t,$ (1.21)

$$|R_m| \leqslant \frac{|B_{2m}|h^{2m-1}}{2ma_n^{2m}}, R_m = O\left(\frac{1}{a_n^{2m}}\right), \tag{1.22}$$

B_n 为 Bernoulli 数,$B_n(t)$ 为 Bernoulli 多项式(定义见第 6 章 §1).

特别 $S_n(1,1) = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$,就是(1.6)式,

$$S_n(1,2) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1} = \frac{1}{2}\ln(2n-1) + c_2 + \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{6(2n-1)^2} + \frac{1}{15(2n-1)^4}$$
$$- \frac{8}{63(2n-1)^6} + \cdots - \frac{2^{2m-4}B_{2(m-1)}}{(m-1)(2n-1)^{2(m-1)}} + O\left(\frac{1}{n^{2m}}\right), \tag{1.23}$$

式中 $c_2 = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2}\ln(2n-1)\right].$

注 在 $\sigma_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}$ 中去掉含有数码 9 的所有项之后,剩下的和 $\sigma_n^* < 40$.

$$S_n(1,3) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3k-2} = \frac{1}{3}\ln(3n-2) + c_3 + \frac{1}{2(3n-2)} - \frac{1}{4(3n-2)^2} + \frac{9}{40(3n-2)^4}$$
$$- \frac{27}{28(3n-2)^6} + \cdots - \frac{3^{2m-3}B_{2(m-1)}}{2(m-1)(3n-2)^{2(m-1)}} + O\left(\frac{1}{n^{2m}}\right), \tag{1.24}$$

式中 $c_3 = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3}\ln(3n-2)\right)$.(匡继昌,河西学院学报,2002.18(2):1 ~ 8)

3. 设$\{a_k\}$是公差为$h>0$,首项为$a_1>0$的等差数列,$0<p<\infty, p\neq 1$,由 Euler-Maclaurin 公式可推出

$$S_n(a_1,h) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k^p} = \frac{1}{h(p-1)}\left(\frac{1}{a_1^{p-1}} - \frac{1}{a_n^{p-1}}\right) + c_p + \frac{1}{2a_n^p}$$
$$- \sum_{k=1}^{m-1}\left(\prod_{j=0}^{2k-2}(p+j)\frac{h^{2k-1}}{a_n^{p+2k-1}}\right)\frac{B_{2k}}{(2k)!} - R_m, \tag{1.25}$$

式中 $c_p = \lim\limits_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k^p} - \frac{1}{h(p-1)}\left(\frac{1}{a_1^{p-1}} - \frac{1}{a_n^{p-1}}\right)\right\},$

$$R_m = \frac{h^{2m}}{(2m)!}\int_n^{\infty}\prod_{j=0}^{2m-1}(p+j)\frac{B_{2m} - B_{2m}(t-[t])}{(a_1+(t-1)h)^{p+2m}}\mathrm{d}t = O\left(\frac{1}{a_n^{p+2m-1}}\right),$$

特别地：

$$S_n(1,1)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}=\frac{1}{p-1}(1-\frac{1}{n^{p-1}})+c_p+\frac{1}{2n^p}-\frac{p}{12n^{p+1}}+\frac{p(p+1)(p+2)}{720n^{p+3}}-\frac{p(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)}{30240n^{p+5}}+O(\frac{1}{n^{p+7}}),\tag{1.26}$$

式中 $c_p=\lim\limits_{n\to\infty}[\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}-\frac{1}{p-1}(1-\frac{1}{n^{p-1}})]$,

$$\frac{1}{n+\alpha}\leqslant\frac{\pi^2}{6}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<\frac{1}{n+(1/2)},\quad \text{式中 } \alpha=\frac{12-\pi^2}{\pi^2-6}.$$

(孙五一,[344]2008,(5):128 ～ 133)

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{6n^3}+\frac{1}{30n^5}-\frac{1}{42n^7}+O(\frac{1}{n^9}).\tag{1.27}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)^p}=\frac{1}{(p-1)2^p}(1-\frac{1}{n^{p-1}})+\frac{c_p}{2^p}+\frac{1}{2(2n)^p}-\frac{p}{6(2n)^{p+1}}+\frac{p(p+1)(p+2)}{90(2n)^{p+3}}+O(\frac{1}{n^{p+5}}).\tag{1.28}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^p}=\frac{1}{2(p-1)}[1-\frac{1}{(2n-1)^{p-1}}]+c_p^*+\frac{1}{2(2n-1)^p}-\frac{p}{6(2n-1)^{p+1}}+\frac{p(p+1)(p+2)}{90(2n-1)^{p+3}}+O(\frac{1}{n^{p+5}}).\tag{1.29}$$

式中 $c_p^*=\lim\limits_{n\to\infty}\{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^p}-\frac{1}{2(p-1)}[1-\frac{1}{(2n-1)^{p-1}}]\}$.

杨必成证明：

$$(n-\frac{1}{3})^{-1}<\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2}<(n-\frac{1}{2})^{-1};$$

$$\frac{1}{n}-(2n+\frac{5}{2})^{-1}<\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k^2}<(n-\frac{5}{8})^{-1}-\frac{1}{2n}.$$

(广东教育学院学报,1999,19(3):29 ～ 35.另见第 11 章 §1. No. 6)

利用 $\text{ctg}^2x<\frac{1}{x^2}<1+\text{ctg}^2x\quad(0<x<\frac{\pi}{2})$,令 $x_k=\frac{k\pi}{2n+1}$,$1\leqslant k\leqslant n$,对 k 求和,并利用 $\sum\limits_{k=1}^{n}(\text{ctg}x_k)^2=\frac{n(2n-1)}{3}$,易证：

$$\frac{n(2n-1)}{3}<(\frac{2n+1}{\pi})^2(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2})<\frac{2n(n+1)}{3},$$

它给出了 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$ 的一个初等证法.

利用 $\frac{1}{n+k}-\frac{1}{n+k+1}<\frac{1}{(n+k)^2}<\frac{1}{n+k-1}-\frac{1}{n+k}$,对 k 从 $1,2,\cdots,m$ 求和,得到

$$\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+m+1}<\sum_{k=1}^{n+m}\frac{1}{(n+k)^2}<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+m}.$$

4. 设 $p\geqslant 0$,则

$$\sum_{k=1}^{n}k^p=\frac{1}{p+1}(n^{p+1}-1)+\frac{1}{2}(n^p+1)$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{B_{2k}}{(2k)!}p(p-1)\cdots(p-2k+2)(n^{p-2k+1}-1)+R_m. \quad (1.30)$$

式中 $|R_m|\leqslant\frac{|B_{2m}|}{(2m)!}p(p-1)\cdots(p-2m+2)(n^{p-2m+1}-1)$.

当 p 为非负整数时，得到熟知的 Bernoulli 求和公式：

$$\sum_{k=1}^{n}k^p=\frac{1}{p+1}[B_{p+1}(n+1)-B_{p+1}]. \quad (1.31)$$

5. $$\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{k}=\frac{1}{2}(\ln n)^2+c_4+\frac{\ln n}{2n}-\sum_{k=1}^{m-1}\frac{B_{2k}}{(2k)n^{2k}}\{\ln n-\ln(2k-1)-c-\frac{1}{2(2k-1)}$$

$$+\frac{1}{12(2k-1)^2}-\frac{1}{120(2k-1)^4}+O(\frac{1}{k^6})\}, \quad (1.32)$$

式中 $c_4=\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{k}-\frac{1}{2}(\ln n)^2\right\}$，$c$ 为 Euler 常数.

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}=\ln\ln n+c_5+\frac{1}{2n\ln n}+\frac{1+\ln n}{12(\ln\ln n)^2}+O\left(\frac{1}{n^4\ln n}\right). \quad (1.33)$$

式中 $c_5=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}-\ln\ln n\right)$.

$$\sum_{k=1}^{n}k\ln k=\frac{1}{2}n^2\ln n-\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n\ln n+\frac{1}{2}\ln n+c_6$$

$$-\sum_{k=2}^{m-1}\frac{B_{2k}}{2k(2k-1)(2k-2)}\cdot\frac{1}{n^{2k-2}}+O(\frac{1}{n^{2m-2}}). \quad (1.34)$$

式中 $c_6=\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n}k\ln k-\frac{1}{2}n^2\ln n)$.

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\ln 2-\frac{1}{4n}+\frac{1}{16n^2}-\frac{1}{128n^4}+\frac{63}{16384n^6}+O(\frac{1}{n^8}). \quad (1.35)$$

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k^p}=\frac{1}{p-1}(1-\frac{1}{2^{p-1}})+(1-\frac{1}{2^{p-1}})c_p-\frac{1}{2(2n)^p}$$

$$+\frac{p}{4(2n)^{p+1}}-\frac{p(p+1)(p+2)}{48(2n)^{p+3}}+O(\frac{1}{n^{p+5}}), \quad (1.36)$$

式中 $p>0, p\neq 1$，c_p 与(1.26)式相同. 利用 Catalan 恒等式 $\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$ 和 (1.14)，可得出 $\ln(2-\frac{1}{n+1})<\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}<\ln 2$.

注 1 (1.25) ~ (1.36) 式都由 Euler-Maclaurin 公式推出.（匡继昌，河西学院学报，2002，18(2)：1 ~ 8）

杨必成等用类似的方法证明了以下结果：

(1) $$\frac{1}{(2n+1)\ln n}<\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}-\ln\ln n-c_5<\frac{1}{(2n+(1/3))\ln n}\ (n\geqslant 2). \quad (1.37)$$

(2) 当 $p\geqslant 0,p\neq 1,n\geqslant 3$ 时有

$$\frac{1}{2n(\ln n)^p}\left(1-\frac{1+p}{6n}\right)<\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(\ln k)^p}-\frac{(\ln n)^{1-p}}{1-p}-c_7\leqslant\frac{1}{2n(\ln n)^p},\tag{1.38}$$

式中 $c_7=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{k(\ln k)^p}-\frac{(\ln n)^{1-p}}{1-p}\right\}$.

(3) $$\frac{\ln n}{2n+(1/3)}<\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln k}{k}-\frac{1}{2}(\ln n)^2-c_4<\frac{\ln n}{2n}.\tag{1.39}$$

(4) $$\frac{79}{1920\sqrt{n}}<\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}-\frac{4n+3}{6}\sqrt{n}-c_8<\frac{90}{1920\sqrt{n}}.\tag{1.40}$$

式中 $c_8=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}-\frac{4n+3}{6}\sqrt{n}-\frac{1}{24\sqrt{n}}\right)=-0.2078862249^+$.

(中山大学学报(自),1998,37(4):33 ~ 37)

(5) 设 $p\neq -1,p<0$ 或 $p>0,[p]$ 为奇数,则

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}\leqslant\sum_{k=1}^{n}k^p-\frac{n^{p+1}}{p+1}-\frac{1}{2}n^p\leqslant\frac{p}{12}n^{p-1}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}-\frac{p}{12}\right).\tag{1.41}$$

特别地,

$$-\frac{1}{24}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n}-\frac{1}{2\sqrt{n}}+\frac{35}{24}<0;$$

$$-\frac{1}{384}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{2\sqrt{n}}\left(4n+1-\frac{1}{12n}\right)+\frac{560}{384}<0;$$

$$-\frac{1}{1920}<\sum_{k=1}^{n}k^{3/2}-\left(\frac{2}{5}n^2+\frac{n}{2}+\frac{1}{8}\right)\sqrt{n}+\frac{48}{1920}<0;$$

$$-\frac{1}{24}<\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}-\frac{4n+3}{6}\sqrt{n}+\frac{1}{6}<0;$$

$$-\frac{1}{1920}<\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}-\left(\frac{2n^2}{3}+\frac{n}{2}+\frac{1}{24}\right)\sqrt{\frac{1}{n}}+\frac{399}{1920}<0;$$

$$0\leqslant\sum_{k=1}^{n}k^{5/2}-\left(\frac{2}{7}n^2+\frac{n}{2}+\frac{5}{24}\right)n\sqrt{n}-\frac{16}{2688}<\frac{7}{2688}.$$

若 $p>0,[p]$ 为偶数,则

$$\frac{p}{12}(n^{p-1}-1)\leqslant\sum_{k=1}^{n}k^p-\frac{n^{p+1}}{p+1}-\frac{n^p}{2}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}\right)\leqslant 0.\tag{1.42}$$

(中山大学学报(自),1997,36(4):21 ~ 26)

1979 年,Matic,B 将

$$2(\sqrt{n+1}-1)<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{n}-1$$

改进为

① 若 $n\geqslant 2,\alpha\leqslant 7/16$,则

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}>2(\sqrt{n+1-\alpha}-\sqrt{1-\alpha});$$

② 若 $n \geqslant 1, 1/2 \leqslant \alpha \leqslant 1$，则

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2(\sqrt{n+1-\alpha} - \sqrt{1-\alpha}).$$

(Publ, Inst, Math, 1979, 26(40): 171 ～ 173)

1999 年杨必成又改进为

$$2\sqrt{n+1} - 1.76 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n} - 1.12. \quad (n > 1),$$

(广东教育学院学报，1999, 19(3): 29 ～ 35)

用数学归纳法或 AG 不等式，易证：

$$\frac{1}{2}n(n+1) < \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k(k+1)} < \frac{n(n+2)}{2} \qquad \text{[MCM]};$$

$$\sqrt{2n+3} - \sqrt{3} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k+1}} < \sqrt{2n+1} - 1.$$

利用其他方法，可以证明 $\sum_{k=1}^{n} k^p$ 的其他估计式，如：

(1) $f(x) = \frac{1}{p+1}x^{p+1}$ 在 $[k, k+1]$ 上用微分中值定理或 Bernoulli 不等式（第 3 章 No. 8），易证：

① 当 $p > 0$ 时，下式成立

$$\frac{n^{p+1}}{p+1} < \sum_{k=1}^{n} k^p < \frac{1}{p+1}[(n+1)^{p+1} - 1];$$

② 当 $-1 < p < 0, n > m$，下式成立.

$$\frac{1}{p+1}\{(n+1)^{p+1} - m^{p+1}\} < \sum_{k=m}^{n} k^p < \frac{1}{p+1}\{n^{p+1} - (m-1)^{p+1}\}.$$

③ 当 $p < -1$ 时，下式成立

$$\frac{(n+1)^{p+1} - 1}{p+1} < \sum_{k=1}^{n} k^p < \frac{n^{p+1} + p}{p+1}.$$

(2) $\frac{3n+1}{2n+2} < \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n < \frac{e}{e-1} < 2 - \frac{1}{n+1}$. [MCU]

提示：下界对 $\int_0^1 x^n \mathrm{d}x$ 用梯形法作近似计算，上界估计利用不等式 $1 - x \leqslant e^{-x}$，从而

$$\left(1 - \frac{k}{n}\right)^n \leqslant e^{-k}; \quad \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} e^{-k} \leqslant \frac{e}{e-1}. \quad ([66]326)$$

(3) 记 $S_n(p) = \sum_{k=1}^{n} k^p$.

2008 年褚小光提出三个猜想：当 $p = m$ 为自然数时，证明或否定：

① $[S_n(m)]^2 \geqslant \frac{m(m+2)}{(m+1)^2} S_n(m-1) S_n(m+1)$;

② $S_n(m+1) < \frac{(n+1)(m+1)}{m+2} S_n(m)$;

③　$S_n(m) < \dfrac{n(n+1)^m}{m+2}$.

([351]2008(1):26 ～ 29)

6.　(1)　令 $g_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$，则 $\dfrac{1}{2n+[(1-\log 2)^{-1}-2]} \leqslant g_n \leqslant \dfrac{1}{2n+1}$.

([301]2003,282(1):21 ～ 25)

(2)　$\dfrac{1}{4n+(2\sqrt{19}-8)} < \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \right| < \dfrac{1}{4n}$　(同上).

(3)　令 $S_p(n) = \left(\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^p\right)^{\frac{1}{p}}$，$f(p) = \dfrac{S_p(n)}{S_p(n+1)}$ $(p \neq 0)$，$f(0) = \dfrac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{[(n+1)!]^{\frac{1}{n+1}}}$，$(p \in R^1)$.　陈超平，祁锋证明

$$\frac{n}{n+1} < \frac{S_p(n)}{S_p(n+1)} < 1,$$

并问：对于给定的 n，$f(p)$ 是否在 $(-\infty,\infty)$ 上关于 p 严格递减？

([330]36(1)(2005),69 ～ 72)

(4)　令 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$，$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{2k}$. 则

$$\frac{1}{2(2n+1)} < \left| S_n - \frac{\pi}{4} \right| < \frac{1}{2(2n-1)}; \tag{1.43}$$

$$\frac{1}{4(n+1)} < \left| \sigma_n - \frac{1}{2}\ln 2 \right| < \frac{1}{4(n-1)}. \tag{1.44}$$

([305]1955,62:726 ～ 727)

杨必成等改进为：

$$\frac{1}{4n+1} < \left| S_n - \frac{\pi}{4} \right| < \frac{1}{4n};$$

$$\frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n-1)^2} - \frac{1}{15(2n-1)^4} < \left| S_n - \frac{\pi}{4} \right| < \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n-1)^2} + \frac{16}{15(2n-1)^4};$$

$$\frac{1}{4n+8/3} < \left| \sigma_n - \frac{1}{2}\ln 2 \right| < \frac{1}{4n+2};$$

$$\frac{1}{4(n+1)} + \frac{1}{8(n+1)^2} - \frac{1}{15(n+1)^4} < \left| \sigma_n - \frac{1}{2}\ln 2 \right| < \frac{1}{4n} - \frac{1}{8n^2} + \frac{1}{15n^4}.$$

([347]1996,(3):1 ～ 8 和广东教育学院学报,1999,19(3):29 ～ 35)

7.　**Agostini 不等式**：设 p,q 为非负整数，$p+q \leqslant 10$，令 $m = p+q+1$，则当 $n \geqslant 1$ 时，

$$(n-1)^m < \frac{m!}{p!q!}\sum_{k=1}^{n-1} k^p (n-k)^q < (n+1)^m. \tag{1.45}$$

([4]261)

8.　**Ryll-Nardzewski 不等式**：设

$$f_n(p) = \frac{p}{n(n+1)^{p-1}}\sum_{k=1}^{n} k^{p-1}.$$

则当 $1 < p < 2$ 时，$f_n(p) > 1$；而当 $0 < p < 1$ 或 $p > 2$ 时，$0 < f_n(p) < 1$.（见本书第二版第 87 页）

9. (1)　$$n + \ln\left(\frac{n+2}{3}\right) < \sum_{k=1}^{n} k^{1/k} < 2n - \ln(n+1),\ (n \geqslant 2). \tag{1.46}$$

证　$$n + \ln\left(\frac{n+2}{3}\right) = 1 + \sum_{k=2}^{n}\left\{1 + \ln\left(1 + \frac{1}{k+1}\right)\right\}$$

$$< 1 + \sum_{k=2}^{n}\left(1 + \frac{1}{k+1}\right) \leqslant 1 + \frac{4}{3} + \sum_{k=3}^{n}\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leqslant 1 + \left(\frac{16}{9}\right)^{1/2} + \sum_{k=3}^{n}\left(1 + \frac{\ln k}{k}\right)$$

$$< 1 + \sqrt{2} + \sum_{k=3}^{n}\exp\left(\frac{\ln k}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} k^{1/k} = \sum_{k=1}^{n}(1 + k - 1)^{1/k}$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n}\left\{\left(1 + \frac{k-1}{k}\right)^k\right\}^{1/k} = \sum_{k=1}^{n}\left(2 - \frac{1}{k}\right) < \sum_{k=1}^{n}\left\{2 - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right\} = 2n - \ln(n+1).$$

（当 $n = 2$ 时，从 3 到 n 求和应理解为 0）

(2)　利用 Euler-Maclaurin 求和公式，可得

$$n + \frac{1}{2}(\ln n)^2 < \sum_{k=1}^{n} k^{1/k} < n + \frac{1}{2}(\ln n)^2 + 1. \tag{1.47}$$

([305]1986，93(4)：302 ~ 303)

(3)　[MCM]　$\sum_{k=1}^{n} k^{-k} < 2 - \frac{1}{2^n}$；$\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-k} < \frac{1}{n(n+1)^n}$；$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^m} \leqslant \frac{2^{m+n} m!}{(n+1)^m}$.

(4)　令 $\sigma_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{n^2 + k}$，　则　$\sigma_{n+1} < \sigma_n$.

(5)　$\frac{3\pi^2}{32} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \leqslant \frac{3\pi^3}{64}$.

提示：利用积分表达式

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} = \frac{1}{8}\int_0^{\pi} \frac{x(\pi - x)}{\sin x}\mathrm{d}x,\ \int_0^{\pi} \frac{x(\pi - x)}{\sin x}\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2} \frac{x(\pi - x)}{\sin x}\mathrm{d}x.$$

再利用 $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{\pi}{2}$.

10.　[MCU]　$$(\sqrt{n})^{\sqrt{n+1}} > (\sqrt{n+1})^{\sqrt{n}},\ n \geqslant 8. \tag{1.48}$$

证 1　令 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$，则 $x > e$ 时，$f'(x) < 0$，从而 f 在 (e, ∞) 上严格递减，于是对于 $e < x_1 < x_2$，$f(x_1) > f(x_2)$，即 $x_2^{x_1} < x_1^{x_2}$，取 $x_1 = \sqrt{n}$，$x_2 = \sqrt{n+1}$，$n \geqslant 8$，即可得证.

证 2　利用积分的单调性，由 $e < a \leqslant x \leqslant b$，

$$f(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{\ln(e/x)}{x^2} < 0.$$

从而 $\frac{\ln b}{b} - \frac{\ln a}{a} = \int_a^b \mathrm{d}\left(\frac{\ln x}{x}\right) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x < 0$. 即

$$b^a < a^b. \tag{1.49}$$

取 $a = \sqrt{n}$，$b = \sqrt{n+1}$，$n \geqslant 8$，即可得证.

由(1.49)式可证明许多数学竞赛题，如从(1.49)式可得 $999^{992} < 992^{999}$；

又如要判别 31^{11} 与 17^{14} 哪个较大？则要作一些变形：$17^{14} > 16^{14} = 2^{56} > 2^{55} = 32^{11} > 31^{11}$.

11. (1) $\sqrt{k\sqrt{(k+1)\cdots\sqrt{n}}} < k+1, (2 \leqslant k \leqslant n-1).$ (1.50)

(2) $\sqrt{n+\sqrt{(n-1)+\sqrt{\cdots+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}} < \sqrt{n}+1.$ (1.51)

(3) 当 $n \geqslant 3$ 时 $a_n = \sqrt[n]{n}$ 和 $b_n = \sqrt[(n-1)]{n}$ 严格递减. 但 $a_2 < a_3$，从而 $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$；

$(n+1)^{1/(n+1)} < n^{1/n} < 1 + \sqrt{2/n}, (n \geqslant 3)$； (1.52)

$(n+1)^{(1/n)} < n^{1/(n-1)} < 2, (n > 2).$

(4) 设 $n > m \geqslant 1$，则

$m^{n^m} < n^{m^n}.$ (1.53)

提示：利用 $f(x) = x^{1/x}$ 在 $(0,e)$ 内严格递增，在 (e,∞) 内严格递减.

(5) $\min\{\sqrt[n]{m}, \sqrt[m]{n}\} \leqslant \sqrt[3]{3}.$

12. **Gruss 不等式**：令

$$f(m,n) = \frac{1}{m+n+1} - \frac{1}{(m+1)(n+1)}.$$

则 $f(m,n) \leqslant \frac{4}{45}.$ (1.54)

证 $f(1,1) = f(1,2) = f(2,1) = \frac{1}{12}$. 令 $k = m+n+2, g(k) = \frac{1}{k-1} - \frac{4}{k^2}$，则 $k \geqslant 6$ 时，$f(m,n) \leqslant g(k)$，且 $g(k)$ 严格递减. 于是，$f(m,n) \leqslant g(6) = 4/45$.

([354]1935,39:742 ~ 744)

13. **Guy 不等式**：设

$f(m,n) = n \cdot m^n\{n^m - (n-1)^m\}$，

则当 $m > n > 1$ 时， $f(n,m) < f(m,n).$ (1.55)

([305]1986,93(4):279 ~ 280)

将 m、n 分别换成实数 x, y，即 $f(x,y) = xy^x[x^y - (x-1)^y]$，则 $x > y > 1$ 时，有 $f(y,x) < f(x,y)$.

14. **Schur 不等式**：设 $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}, y_n = (1+\frac{1}{n})^n(1+\frac{\alpha}{n})$. 则 x_n, y_n 严格递减的充要条件是 $\alpha \geqslant 1/2$.

证 利用对数的级数展开式：

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k-1}}{2k-1}, \ |x| < 1,$$

取 $x = \frac{1}{2n+1}$，得到

$$\ln(1+\frac{1}{n}) = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)}(\frac{1}{2n+1})^{(2k-1)}.$$

从而

$$\ln x_n = (1+\frac{\alpha-(1/2)}{n+(1/2)})\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^{(2k-1)},$$

$$\ln x_{n+1}-\ln x_n = \frac{(1/2)-\alpha}{(n+(1/2))(n+(3/2))}+O(\frac{1}{n^3}).$$

于是，x_n 严格递减 $\Leftrightarrow \alpha \geqslant 1/2$. 若 $\alpha < 1/2$，则 n 充分大时，x_n 严格递增.

类似可得 $\ln y_n - \ln y_{n+1} = \dfrac{4\alpha-2}{4\alpha^2}+O(\dfrac{1}{n^3})$.

注　x_n 递增 $\Leftrightarrow \alpha \leqslant c_1 = \dfrac{-1+\ln 3-\ln 2}{2\ln 2-\ln 3} = 0.409\cdots$.

(Fischer, P. 等, [404], 1994, 12(3): 119 ~ 124)

15.　设 $x_n = \left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n$, $y_n = \left(1+\dfrac{b}{n}\right)^{n+1}$.

(1)　当 $a>0$ 和 $a=-1$ 时，x_n 严格递增，即 $x_{n-1}<x_n$；而当 $0<b\leqslant 2$ 时，y_n 严格递减，即 $y_{n-1}>y_n$.

除了可用上述类似方法外，还可用 AG 不等式证，如 $a>0$ 时，

$$x_n^{\frac{1}{n+1}} = \{1\cdot(1+\frac{a}{n})\cdots(1+\frac{a}{n})\}^{\frac{1}{n+1}} < \frac{1+n\times[1+(a/n)]}{n+1} = 1+\frac{a}{n+1},$$

从而 $x_n < (1+\dfrac{a}{n+1})^{n+1} = x_{n+1}$. 当 $a=-1$ 时，

$$x_n^{\frac{1}{n+1}} = \{1\cdot(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{1}{n})\}^{\frac{1}{n+1}} < \frac{1+n\times[1-(1/n)]}{n+1} = 1-\frac{1}{n+1}, \text{所以,}$$

$x_n < (1-\dfrac{1}{n+1})^{n+1} = x_{n+1}$.

(2)　当 $-n\leqslant a\leqslant -1$ 时，利用 $1-x<e^{-x}$，得到 $(1+\dfrac{a}{n})^n\leqslant e^a$；当 $a\geqslant -1$ 时，有

$$(1+\frac{a}{n})^n \geqslant 1+a+\frac{n-1}{2}(\frac{a}{n})^2(n+\frac{n-2}{3}a),$$

特别地，$\dfrac{1}{3}(1-\dfrac{1}{n^2})\leqslant\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n\leqslant\dfrac{1}{e}$.

16.　关于 $x_n = (1+\dfrac{1}{n})^n$ 和 e 的不等式.

我们已知，x_n 严格递增收敛于 e. 但常常需要 x_n 和 e 的不等式的改进.

(1)　$$\frac{e}{2n+2} < e-x_n < \frac{e}{2n+1} < \frac{3}{n}. \tag{1.56}$$

(2)　$x_n(1+\dfrac{1}{2n+1}) < e < x_n(1+\dfrac{1}{2n})$, (Schur), 它可改进为：

$$x_n(1+\frac{1}{n+(1/5)})^{1/2} < e < x_n(1+\frac{1}{n+1/6})^{1/2}, \tag{1.57}$$

([375]1987, 3(2): 94 或[301]1999, 240: 290 ~ 293)

(3)　[MCU]　记 $y_n = (1+\dfrac{1}{n})^{n+1}$, $z_n = \dfrac{2x_ny_n}{x_n+y_n}$，则

$$z_n < z_{n+1}. \tag{1.58}$$

提示：z_n 可化为

$$z_n = \frac{2(n+1)^{n+1}}{n^n(2n+1)}.$$

于是可考虑 $g(x) = \ln 2 + (x+1)\ln(x+1) - x\ln x - \ln(2x+1)$ 在 $(0,\infty)$ 上的单调性，([66]82,89)

(4) 1998 年徐晓泉、杨应谦证明：

$(1+\frac{1}{n})^n(1+\frac{1}{an}) < e < (1+\frac{1}{n})^n(1+\frac{1}{2n})$ 成立的充要条件是 $a > \frac{2}{e-2}$.

(江西师范大学学报，1998,22(1):10 ~ 11,38)

(5) [MCU] $(1+\frac{1}{n})^{n+\alpha} \leqslant e \leqslant (1+\frac{1}{n})^{n+\beta}$. (1.59)

式中 α 的最大值 $\alpha = \frac{1}{\ln 2} - 1$，$\beta$ 的最小值 $\beta = \frac{1}{2}$.([63]43,129 或[305]1974,81E2406)

证 令

$$f(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}, \quad 0 < x \leqslant 1.$$

则 f 在 $(0,1]$ 上严格递减，于是 α 的最大值为 $\alpha = f(1) = \frac{1}{\ln 2} - 1$，而 β 的最小值为

$$\beta = \lim_{x\to+0} f(x) = \frac{1}{2}.$$

注 (1.59) 式等价于

$$\frac{1}{n+(1/2)} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n+(1/\ln 2)-1}. \tag{1.60}$$

(6) $$\frac{1}{(n+1)!} < e - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} < \frac{1}{(n+1)!}(\frac{n+2}{n+1}) < \frac{1}{n\cdot n!}. \tag{1.61}$$

(7) $$\frac{n^n}{3n!} < \frac{e^n}{2} - \sum_{k=0}^{n-1}(\frac{n^k}{k!}) < \frac{n^n}{2n!}. \tag{1.62}$$

([307]1986,573 ~ 574)

(8) 利用连分式理论易求出

$$\frac{1}{1-n} < e^n < \frac{2+n}{2-n}; \frac{6+2n}{6-4n+n^2} < e^n < \frac{12+6n+n^2}{12-6n+n^2}, \tag{1.63}$$

(9) $$x_n < e(1 - \frac{1}{2(1+n)} - \frac{1}{24(1+n)^2} - \frac{1}{48(1+n)^3}). \tag{1.64}$$

([301]2001,253:691 ~ 694)

事实上，我们可以进一步证明.(第 5 章 §3No.14)

$$x_n = e(1 - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{(1+n)^k}). \tag{1.65}$$

式中 $\{b_k\}$ 由递推式确定：

$$b_1 = \frac{1}{2}, b_{n+1} = \frac{1}{n+1}(\frac{1}{n+2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{n+2-k}),\ n = 1,2,\cdots. \tag{1.66}$$

(10) $\frac{e}{2n+a} < e - x_n < \frac{e}{2n+b}$，式中 $a = \frac{11}{6}, b = \frac{4-e}{e-2}$ 是最佳常数.

([301]282(2003),21 ~ 25)

17. $$\frac{1}{2^{\alpha/2}}\sum_{k=1}^{m}\frac{2k-1}{k^\alpha} \leqslant \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{|k+ij|^\alpha} \leqslant \sum_{k=1}^{m}\frac{2k-1}{(k^2+1)^{\alpha/2}}, \tag{1.67}$$

式中 $i^2 = -1$. 由此推出 $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(k+ij)^\alpha}$ 绝对收敛的充要条件是 $\alpha > 2$.

18. 设 $A = \{a_1, \cdots, a_m\}$ 是集 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的不同的元素集，对每对 $a_i + a_j \leqslant n, 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant m$. 必存在 $k, 1 \leqslant k \leqslant m$，使得 $a_i + a_j = a_k$. 则

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}a_k \geqslant \frac{1}{2}(1+n). \tag{1.68}$$

证 不妨设 $a_1 > a_2 > \cdots > a_m$，先证明 $\forall i: 1 \leqslant i \leqslant m$，下式成立

$$a_i + a_{m-i+1} \geqslant n+1. \tag{1.69}$$

下面用反证法，若 $\exists i: 1 \leqslant i \leqslant m$，有

$$a_i + a_{m-i+1} \leqslant n.$$

则 $a_i < a_i + a_m < a_i + a_{m-1} < a_i + a_{m+1-i} \leqslant n$.

由题设，这 i 个数 $a_i + a_m, a_i + a_{m-1}, \cdots, a_i + a_{m+1-i}$ 都大于 a_i 而且都属于集 A，但集 A 中只有 $i-1$ 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_{i-1}$ 大于 a_i，得到矛盾，于是，从(1.69)式，有

$$2\sum_{k=1}^{m}a_k = (a_1 + a_m) + (a_2 + a_{m-1}) + \cdots + (a_m + a_1) \geqslant m(n+1).$$ 证毕.

(IMO,35,1994,7)

19. 设 $m_1, m_2, \cdots m_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的某一排列，则

(1) [MCM] $$\sum_{k=1}^{n}|m_k - k| \leqslant \left[\frac{n^2}{2}\right] = \begin{cases}\frac{n^2}{2}, & n \text{ 为偶数}, \\ \frac{n^2-1}{2}, & n \text{ 为奇数}.\end{cases}$$

(2) $\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k}{k} \geqslant n$; $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{m_k} \geqslant n$.

20. [MCU]. 设 $a_{m,n}$ 是 $(1+x+x^2)^m$ 的展开式中 x^n 的系数，则 $\forall k \in N$，下式成立

$$0 \leqslant \sum_{j=0}^{[2k/3]}(-1)^j a_{k-j,j} \leqslant 1.$$

(1997 年 58 届 Putnan 数学竞赛，[305]1998,105:744 ~ 755)

21. 设 $$f(n) = \frac{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^p}{\sum_{k=1}^{n}(2n+2k-1)^p}.$$

则当 $p > 1$ 或 $p < 0$ 时，$f(n)$ 严格递增，当 $0 < p < 1$ 时，$f(n)$ 严格递减.

([305]2006,111(8),764)

22. 设 $p > 1$，则

$$1+n(\zeta(p)-1)\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{n}{n+k}\right)^{p}\leqslant n\zeta(p).$$

式中 $\zeta(p)$ 为 Riemann zeta 函数.([305]2007,114(1):649)

23. 设 $S_n=\sum_{k=1}^{n}k=\binom{n+1}{2}$,则

$$1+\sum_{k=2}^{n}\frac{\left(\prod_{j=1}^{k}j^{j}\right)^{S_k^{-1}}}{\sum_{j=1}^{k}j^{2}}\leqslant\frac{2n}{2n+1}.$$ ([305]2005,112(8))

24. 令 $S_n(\alpha)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{[k\alpha]}$, $[k\alpha]$ 表示 $k\alpha$ 的整数部分,则

(1) $|S_n(\alpha)|\leqslant(\log n)^2\quad a.e.\ \alpha,\ \forall n.$

(2) $S_n(\sqrt{m^2+1}-m+1)\leqslant\dfrac{\log n}{2\log(\sqrt{m^2+1}+m)}+1.$

([305]2006,113(8):673 ~ 688)

二、 关于 n 的乘积不等式

1. 若 $m\leqslant n$,则

$$1-\frac{m(m+1)}{2n}\leqslant\prod_{k=1}^{m}(1-\frac{k}{n})\leqslant1-\frac{m(m+1)}{2n}(1-\frac{m^2-1}{4n}).\tag{1.70}$$

提示:左边不等式用数学归纳法,右边不等式用 A-G 不等式和二项展开式.

特别取 $m=25,n=365$,即为 MCU1975:

$$\prod_{k=1}^{25}(1-\frac{k}{365})<\frac{1}{2}.$$

2. (1) [MCM] 令 $a_n=n(n+1)/2$,则

$$\left(\frac{n+2}{2}\right)^{a_n}<\prod_{k=1}^{n}k^{k}<\left(\frac{2n+1}{3}\right)^{a_n}.\tag{1.71}$$

(2) $\dfrac{4}{\mathrm{e}}<\prod_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}<2.$(匡继昌,[325]1999,83(496):126)

(3) $\prod_{k=1}^{n}k^{-k^2}<\left(\dfrac{2}{n+1}\right)^{\frac{n(n+1)^2}{4}}.$(杨永平,[345]1998,6)

3. $$\prod_{k=2}^{n}(1+\frac{1}{2k-1})\geqslant\frac{4\sqrt{5}}{15}\sqrt{2n+1}>\frac{\sqrt{6n+3}}{3}.\tag{1.72}$$

4. (1) $\dfrac{1}{3\sqrt{n}}\leqslant\prod_{k=1}^{n}(\dfrac{4k-3}{4k-1})\leqslant\dfrac{5}{3(4n+1)}(\dfrac{2n+1}{3})^{1/2};$

(2) $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{11}{12n-1}\right)^{1/2}\leqslant\prod_{k=1}^{n}(\dfrac{6k-5}{6k-2})\leqslant\dfrac{7}{3(6n+1)}(\dfrac{12n+5}{17})^{1/2};$

((1)(2) 见杨克昌,[345]2000,7:30 ~ 31)

(3) $$(\frac{1}{3n+1})^{1/2}\leqslant\prod_{k=1}^{n}(\frac{3k-2}{3k-1})\leqslant(\frac{1}{3n+1})^{1/3};\tag{1.73}$$

5. $f(n)=\prod_{k=1}^{n}(\frac{4k-1}{4k+3})<\left(\frac{3}{4n+3}\right)^{1/2}$. (1.74)

证　令 $g(n)=\prod_{k=1}^{n}(\frac{4k+1}{4k+3})$.

则　$0<f(n)<g(n)\Rightarrow(f(n))^2\leqslant f(n)g(n)=\frac{3}{4n+3}$.

6. 令　$S_n=\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{\alpha}{k}),\sigma_n=\prod_{k=1}^{n}(1-\frac{\alpha}{k})$. $0<\alpha<1$, c 为 Euler 常数，则

(1)　$\left\{n\exp[c-\frac{\alpha\pi^2}{12}+\frac{\alpha}{2(n+1)}]\right\}^{\alpha}<S_n<\{(n+1)e^c\}^{\alpha}$. (1.75)

(2)　$\{n\exp(c+\frac{1}{1-\alpha})\}^{-\alpha}<\sigma_n<\{n\exp(c+\frac{\alpha}{2(1-\alpha)})\}^{-\alpha}$. (1.76)

([344]1983,1:52 ~ 55)

(3)　对任意 $\alpha>0$，有

$$S_n\leqslant\exp\{\alpha(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k})\}\leqslant cn^{\alpha}. \quad (1.77)$$

([74]Vol 1. Ch9 § 5)

7. **Minc 不等式**：对于任意 m 个自然数 $n_1,n_2,\cdots,n_m$，有

$$(\sum_{j=1}^{m}\frac{2}{n_j})(\prod_{k=1}^{m}\frac{n_k}{n_k+1})\leqslant 1, \quad (1.78)$$

仅当 $k\leqslant 2$ 且 n_1 或 n_2 等于 1 时等号成立. ([376]1963,69:789 ~ 791)

8. 设 $n\geqslant 2,\alpha>0$，则

$$[\prod_{k=0}^{n}(\alpha+k)](\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{\alpha+j})<(n+1)\prod_{k=1}^{n}(\alpha+k-\frac{1}{2}), \quad (1.79)$$

(证明见[305],1988,95(2):148)

9. [MCM]. 设 $n_1<n_2<\cdots<n_k<2n_1$，令

$f(k)=\prod_{j=1}^{k}n_j,k\geqslant 3$，若 r 为素数，且 r^m 能整除 $f(k)$，即 $r^m\mid f(k)$，则

$$f(k)\geqslant r^m\cdot n!. \quad (1.80)$$

10. [MCM]. 设 $f:N\to N$ 是严格递增的，且 $\forall n,f[f(n)]=kn$，则

$$\frac{2k}{k+1}n\leqslant f(n)\leqslant\frac{k+1}{2}n. \quad (1.81)$$

证　因为 $f:N\to N$ 严格递增，所以，$f(n)\geqslant n$，以及当 $m\geqslant n$ 时，$f(m)\geqslant f(n)+m-n$. 于是可令 $f(n)=n+m$（m 为非负整数），从而 $kn=f[f(n)]=f(n+m)\geqslant f(n)+m=f(n)+[f(n)-m]$，由此得出 $f(n)\leqslant\frac{1}{2}(k+1)n$. $kn=f(f(n))\leqslant\frac{1}{2}(k+1)f(n)$，即 $f(n)\geqslant\frac{2kn}{k+1}$.

三、　含 $n!$ 的不等式

我们先注意以下几个关系式：

$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdot n$;

$(2n)!! = 2\cdot 4\cdot\cdots(2n-2)(2n) = 2^n\cdot n!$;

$(2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot\cdots(2n-3)(2n-1)$;

$(2n)! = (2n)!!(2n-1)!!$;规定 $0!! = 1,(-1)!! = 1$.

1. $n!$的基本估计式是著名的 Stirling 公式:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\exp\left(\frac{\theta_n}{12n}\right),0<\theta_n<1. \tag{1.82}$$

令 $r_n = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$. 1997 年,徐利治证明:

$$n! = r_n\exp\left\{\sum_{k=n}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{(j-1)}{2j(j+1)}\left(-\frac{1}{k}\right)^j\right\}. \tag{1.83}$$

并由此推出

$$r_n<n!<r_n\left(1+\frac{1}{12n-1}\right),n>10. \tag{1.84}$$

([339]1997,17(1):5 ~ 7)

随后,徐利治等利用(1.83)式又给出 $n!$的双边不等式:

$$r_n\left(1+\frac{1}{12n}\right)<n!<r_n\left(1+\frac{1}{12n-0.5}\right). \tag{1.85}$$

它可写成渐近式:

$$n!\approx r_n\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2}\right).(n\to\infty).$$

并指出(1.83)式中的二重级数可用下式替代:

$$n! = r_n\exp\left\{\sum_{k=n}^{\infty}\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)-1\right]\right\}. \tag{1.86}$$

([339]1999,19(3):491 ~ 494)

关于 Stirling 公式,已有大量的文献,其中 20 世纪 70 年代以前的有关文献见[4]243 ~ 248. 常用的其他估计式有:

(1) $r_n<n!<r_n\left(1+\frac{1}{4n}\right)$;

(2) $\frac{e^{7/8}}{\sqrt{2\pi}}r_n<n!<e\cdot r_n$; (1.87)

(3) 2000 年谢庭藩证明:当 $n\geqslant 10$ 时,下式成立

$$r_n\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2+249.2n}\right)<n!<r_n\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2+222.4n}\right).$$

(中国计量学报,2000,11(2):110 ~ 114)

(4) 2007 年赵德钧证明,当 $n\geqslant 2$ 时,下式成立

$$r_n\left(1+\frac{1}{12n-0.5+\left(\frac{293}{720n}\right)}\right)<n!<r_n\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2+222.4n+190\,\frac{349}{450}}\right).$$

式中所有常数均为最佳,两边的误差阶至少为 $O\left(\frac{r_n}{n^5}\right)$. ([344]2007,37(8):170 ~ 174)

(5) $r_n\exp\left(\frac{1}{12n}-\frac{1}{360n^3}+\frac{1}{1260n^5}-\frac{1}{1690n^7}\right)< n! < r_n\exp\left(\frac{1}{12n}-\frac{1}{360n^3}+\frac{1}{1260n^5}\right)$.

(Knopp, K. Theory and Application of infinite series. 1928)

(6) $n!(\log n!) < n^n (n\geqslant 3)$. ([305]2006, 113(8): 689 ~ 704)

(7) 设 $E_0 = a$(为实数), $E_{n+1} = b^{E_n}$, $b > 0$, $F_0 = k$, $F_{n+1} = F_n!$.

以上两个序列的通项记为 $E_n(b,a)$, $F_n(k)$. $n = 0,1,2,\cdots$.

① 设 $E_n > F_n\frac{\log F_n}{\log b}$, 则对 $\forall m\geqslant n$. 有 $E_m > F_m\frac{\log F_m}{\log b}$.

② 设 $E_n < F_n\frac{\log F_n - 1}{\log b}$, $F_{n+1}\geqslant be$, 则 $E_m < F_m\leqslant F_m\frac{\log F_m - 1}{\log b}$, $\forall m > n$.

推论 $9^{9^{9^{9^9}}} > 9!!!!$. (注意: 9^{9^9} 是指 $9^{(9^9)}$ 而不是 $(9^9)^9$).

([305]2006, 113(8): 689 ~ 704)

(8) $r_n\exp(\frac{1}{12n}-\frac{1}{360n^3}) < n! < r_n\exp[\frac{1}{12n}-\frac{1}{(360+\alpha_n)n^3}]$. (1.88)

式中 $\alpha_n = 30\cdot\frac{7n(n+1)+1}{n^2(n+1)^2}$ (Beesack);

(9) $\exp[-\frac{n+(1/2)}{24}] < \frac{n!}{\sqrt{2\pi}[n+(1/2)]^{(n+\frac{1}{2})}\exp\{-[n+(1/2)]\}} < 1$; (1.89)

(10) $(\frac{n}{3})^n < n! < (\frac{n}{2})^n, (n\geqslant 6)$; (1.90)

$$(\frac{n+1}{e})^n < n! < e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}.$$

(11) $\ln(n-1)! < n\ln n - n + 1 < \ln n! < [n+(1/2)]\ln n - n + 1.$ $(n > 1)$ (1.91)

于是 $\ln n! \approx n(\ln n - 1)$.

这是在统计与力学等领域用得较多的估计式.

(12)
$$\sum_{k=1}^{n}(km+p-1)! > n+\frac{n}{2}\{(m+p-1)\}[\ln(m+p-1)] + (mn+p-1)[\ln(mn+p-1)-1]\},$$

式中, $m\geqslant 1, n\geqslant 2, p\geqslant 0$;

$$\sum_{k=1}^{n}(km+p-1)!\ \ln(km+p-1)! \geqslant n[\Gamma(\frac{m(n+1)}{2}+p)-1].$$

式中 $m,n\geqslant 1, p\geqslant 0$;

$$\ln n! + \sum_{k=1}^{n}\ln[n(n-1)-(n-k+1)] \leqslant \frac{n(n+1)}{2}\ln n.$$

(Starc, Z. F., Math. Morav, 1997, 1: 101 ~ 104)

(13) $\frac{n^n}{3^{n-1}} < \frac{n^n}{e^{n-1}} < n! < \frac{n^{n+1}}{4e^{n-2}} < (\frac{n+1}{2})^n, (n\geqslant 4)$; (1.92)

取 $n = 73$, 得 $73! < 37^{73}$ [MCM].

2. $n^{n/2} < n! < n^n < (n!)! < n^{n^n} < [(n!)!]!$. (1.93)

(右边不等式见[305]1967,74:862 ~ 863)

3. $(n!)! > \{(n-1)!\}^{n!} e(\frac{n}{e})^{n!}, (n > 1)$. (1.94)

证　从 $\sum_{k=2}^{m} \ln k > \int_1^m \ln x dx \quad (m > 2)$ 推出 $m! > m^m e^{1-m}$，从而 $n^m m! > m^m e(\frac{n}{e})^m$. 取 $m = n!$，即得(1.94)式.

4. $\sum_{k=1}^{n-1} k \cdot k! < n! < \{\prod_{k=1}^{n}(2 - \frac{2k-1}{n})\}^{-1}, (n > 1)$. (1.95)

证　左边不等式利用 $k \cdot k! = (k+1)! - k!$，而右边不等式等价于

$$(2n-1)!! > \frac{n^n}{n!}. \tag{1.96}$$

5. $\sum_{k=2}^{n} \frac{k^2+1}{k^2-1} \cdot \frac{1}{k!k} < \frac{1}{2} \quad (n \geqslant 2)$. (1.97)

6. $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!(k+1) - k!} < \frac{1}{2}$. (1.98)

7. $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k!} \leqslant \frac{2}{n!}$. (1.99)

证　$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k!} \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{(n+1)^{k-n}} \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{n!}(\frac{1}{2})^{k-n} = \frac{2}{n!}$.

8. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!} < 1$. [MCM]. (1.100)

提示：令 $f(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k-1}{k!} x^{k-2}$ 逐项积分求出 $f(x) = \frac{1}{x^2}[e^x(x-1)+1]$.

9. [MCM]. 令 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}$. 则当 $n > 3$ 时，下式成立

$$\frac{100}{120} < S_n < \frac{101}{120}. \tag{1.101}$$

提示：$(1 - \frac{1}{3!}) + (\frac{1}{5!} - \frac{1}{7!}) < S_n < 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!}$.

10. [MCU]. $\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} > \frac{1}{2}e^n$. 实际上，还可证明

$$\frac{1}{3} < \frac{n!}{n^n}(\frac{1}{2}e^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!}) < \frac{1}{2}. \tag{1.102}$$

11. $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!} \geqslant e^{n-1}$. (1.103)

提示：利用 Taylor 公式：

$$e^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!} = \frac{e^n}{(n-1)!} \int_0^n e^{-t} t^{n-1} dt.$$

然后用数学归纳法证明

$$\int_0^n e^{-t}t^{n-1}\mathrm{d}t \leqslant (n-1)!(1-\frac{1}{e}).$$

12. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k!)^2}(\frac{k}{e})^{2k} \leqslant n.$ (1.104)

提示：利用复变函数 $F(z)$ 在单位圆盘 $|z|<1$ 内单叶的性质.([375]1986,2(3):127 ~ 130)

13. 设 $f(n) = 1+\frac{n!}{2}(\frac{e}{n})^n - \frac{n!}{n^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}$，则

$1/3 < f(n) < 1/2.$ (1.105)

实际上，当 n 从 0 递增到 ∞ 时，f 从 1/2 严格递减到 1/3. Karamata, J..(Indian Math. Soc. 1960, 24:343 ~ 365)

14. [MCM]. 对任意实数 a_1,a_2,a_3，总可找一个自然数 n_0，使得 $\forall n > n_0$，有

$n! > a_1n^2 + a_2n + a_3.$ (1.106)

提示：利用 $n! \geqslant n(n-1)(n-2)$. 只要证明

$$f(n) = n(n-1)(n-2) - (a_1n^2 + a_2n + a_3) > 0.$$

它可变形为 $f(n) = n^3 - (b_1n^2 + b_2n + b_3)$. 所以，只要取 $n_0 > \max\{b_1, b_2, b_3\}$.

推论　对任意实数 $a_1,a_2,\cdots,a_m$, $m<n$. 总存在 n_0，使得 $\forall n > n_0$，有

$$n! > a_1n^{m-1} + a_2n^{m-2} + \cdots + a_{m-1}n + a_m.$$

15. [MCM]. 设 m 个自然数 n_k 满足 $\sum_{k=1}^{m} n_k < n$，　则　$n! > \prod_{k=1}^{m} n_k!$. (1.107)

证　从阶乘 $n! = 1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n$ 中分出前 n_1 个因子，可得 $n_1!$，若 $m>1$，则当 $1<k \leqslant m$ 时，在 $n!$ 的展开式中，前面 $n_1+n_2+\cdots+n_{k-1}$ 个因子后面的 n_k 个因子依次大于 $1,2,\cdots,n_k$，这 n_k 个因子之积大于 $n_k!$，于是

$$\prod_{k=1}^{n} n_k! \leqslant (n_1+n_2+\cdots+n_m)! < n!.$$

16. $\sqrt[n]{n!} \leqslant \prod_{p|n} p^{\frac{1}{p-1}}$, (1.108)

式中求积对象遍及所有可整除 n 的正素数 p.

提示：首先证明

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^k}\right] \leqslant \frac{n}{p-1}. \quad (1.109)$$

由此可以证明素数有无穷多个.

17. 设 $m>n>1$，则　$(n!)^{m-1} < (m!)^{n-1}$. (1.110)

证　令 $m = n+k$，则 $(n!)^{m-1} = (n!)^{n+k-1} = (n!)^{n-1}(n!)^k$，再利用 $(n!)^k \leqslant (n^{n-1})^k = (n^k)^{n-1} < \{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)\}^{n-1}$ 即可得证.

18. $\{(n+1)!\}^n < \prod_{k=1}^{n}(2k)!$, $(n>1)$. (1.111)

提示：用数学归纳法.

19. $\dfrac{(n!)^{n+1}}{1!2!\cdots n!} \leqslant \left(\dfrac{2n+1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$. (1.112)

20. **Khinchin 不等式**：设 n_k 为非负整数，且 $\sum_{j=1}^{k} n_j = n$，则

$$\prod_{j=1}^{k} n_j! \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \prod_{j=1}^{k} (2n_j)!. \tag{1.113}$$

([354]1923,18:109 ～ 116)

21. [MCU]. 设 $f_1(n) = n, f_2(n) = n^{f_1(n)}, \cdots, f_{k+1}(n) = n^{f_k(n)}, n > 2$，则

$$f_k(n) < n!!\cdots! < f_{k+1}(n), \tag{1.114}$$

中间的项表示 n 的 k 级阶乘.

提示：令 $g_1(n) = n!, g_{k+1}(n) = \{g_n(n)\}!$，则(1.114) 变成

$$f_k(n) < g_k(n) < f_{k+1}(n), n > 2. \tag{1.115}$$

上式可用数学归纳法证明，下面以证左边不等式为例.

当 $p \geqslant 2n^2$ 时，$p! > (n^2)^{p-n^2} = n^p \cdot n^{p-2n^2} \geqslant n^p$.

令 $n = 3$ 或 4 而 $k \geqslant 2$，则 $g_k(n) \geqslant g_2(3) = 6! = 720 > 32 \geqslant 2n^2$.

若 $n \geqslant 5, k \geqslant 1$，则 $g_k(n) \geqslant n! \geqslant n(n-1)(n-2) > 2n^2$. 于是，当 $n \geqslant 3$ 时，$f_1(n) < g_1(n), f_2(3) < f_2(4) = 256 < 720 = g_2(3) < g_4(4)$；

设 $n \geqslant 3$ 时，$f_k(n) < g_k(n)$. 则由 $g_k(n) > 2n^2$ 和 $p! \geqslant n^p$ 得到

$$f_{k+1}(n) = n^{f_k(n)} < n^{g_k(n)} < \{g_k(n)\}! = g_{k+1}(n).$$

类似可以证明右边不等式，这只要注意到 $g_{k+1}(n) = g_k(n!)$，并用归纳法证明

$$\varphi_k(n) < n^{\varphi_{k-1}(n)}, (k \geqslant 1, n > 2)，式中\ \varphi_k(n) = g_0(n)g_1(n)\cdots g_k(n).$$

([66]315,322 ～ 323)

22. (1) $(2n)!! < (n+1)^n$; $2^n \cdot n! < (2n)!$;

(2) $n^{n+1} \leqslant \prod_{k=n}^{2n} k \leqslant (2n)! \leqslant 2 \cdot n^{2n} < \left(n+\frac{1}{2}\right)^{2n} < \{n \cdot (n+1)\}^n \quad (n > 1)$.

([305]1986,93(7):561)

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{(2n+1)!!} < \dfrac{\pi}{2}$;

(4) $\prod_{k=1}^{n} (2k-1)! \geqslant (n!)^n$;

(5) $(2n-1)^{n/2} < (2n-1)!! < \left(\dfrac{3n+1}{4}\right)^n < n^n \quad (n > 1)$;

(6) [MCU]. $\left(\dfrac{2n-1}{e}\right)^{n-\frac{1}{2}} < (2n-1)!! < \left(\dfrac{2n+1}{e}\right)^{n+\frac{1}{2}}$.

提示：$\int_1^{2n-1} \ln x\,dx < 2\ln(2n-1)!! < \int_3^{2n+1} \ln x\,dx$.

(7) $\dfrac{4^n}{n+1} < \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} < 4^{n-1} \quad (n > 5)$.

23. 设 $f(n) = (n!)^{1/n}. n > 1$，则

(1) $f(n)$ 严格递增，即 $f(n) < f(n+1)$；

(2) $g(n) = \dfrac{f(n+1)}{f(n)}$ 严格递减，而且

$$1 < g(n) < 2^{-(\frac{1}{n+1})} < 1 + \frac{1}{n} \text{ (Minc-Sathre 不等式)}; \tag{1.116}$$

$$ng(n) - (n-1)g(n-1) > 1. \tag{1.117}$$

(3) 设 $n_1, \cdots, n_m$ 都是大于 1 的自然数，且 $m \leqslant n_k, (k = 1, \cdots, m)$，则

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{f(n_k - 1)} \leqslant \prod_{k=1}^{m} \frac{f(n_k)}{f(n_k - 1)}. \tag{1.118}$$

仅当 $n_1 = n_2 = \cdots = n_m = m$ 时等号成立. (Proc. Edinburgh Math. Soc. 1964/65, 14(2): 41 ~ 46)

令 $\varphi(n) = (\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^p)^{1/p}$，1993 年，Alzer, H 对(1.116) 作了加细：

$$g(n) \leqslant (1 + \frac{1}{n})\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)} \leqslant 1 + \frac{1}{n}. \tag{1.119}$$

([301]1993, 179(2): 396 ~ 402)

1994 年，Alzer, H. 又对(1.117) 作了加细：

$$ng(n) - (n-1)g(n-1) > 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} > 1 + g(n-1) - g(n) > 1, (n \geqslant 3), \tag{1.120}$$

(Period Math. Hungar, 1994, 28(3): 229 ~ 233)

Alzer, H. 还进一步证明：

$$(f(n))^2 - f(n-1)f(n+1) > e^{-2}, n \geqslant 2. \tag{1.121}$$

式中下界 e^{-2} 是最佳的. (MR96m: 26020 或 Acta Math. Univ. Comenian(N. S.), 1995, 64(2): 283 ~ 285)

(4) $f(n) < \frac{4}{9}(n+2)$. (陈计, [348]1994, 2: 12 ~ 34) (1.122)

(5) Alzer, H. 证明

$$1 + \frac{a}{n+1} \leqslant g(n) < 1 + \frac{b}{n+1} \tag{1.123}$$

$\forall n \geqslant 1$ 成立的充要条件是 $a \leqslant 2(\sqrt{2} - 1)$ 和 $b \geqslant 1$. (ZbI. Math, 826 ~ 26005)

(6) 1999 年匡继昌证明了(1.116) 式新的加细：

$$\left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{1}{n(n+1)}} < g(n) < \frac{h(n+1)}{h(n)} < 1 + \frac{1}{n}, \tag{1.124}$$

式中 $h(n) = (\frac{(2n)!}{n!})^{1/n}$. $n \geqslant 2$. ([325]1999, 83(496): 123 ~ 127)

(7) $\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{1-\alpha_n} < g(n) < \left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{1-\beta_n}$，式中 $\alpha_n = \dfrac{7\log n}{5n}$, $\beta_n = \dfrac{\log(n+1)}{5(n+1)}$.

或 $\alpha_n = \dfrac{1 + \log n}{2n}$, $\beta_n = \dfrac{\log n - 1.3}{2n}$.

([351]2006,1:33 ~ 37 和[409]2010(1):46 ~ 47,51)

24. 设 B_n 为 n 阶 Bernoulli 数,E_n 为 Euler 数(定义见第 6 章 §2),则

(1) $$\frac{(4n)!(4n-2)!}{\{(2n)!\}^4} \leqslant \left|\frac{B_{4n}B_{4n-2}}{B_{2n}^4}\right|, (n \geqslant 2). \qquad (1.125)$$

(**Bernoulli 不等式**,见[305]1988,95(8),E3160)

(2) $$\frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} < (-1)^{n-1}B_{2n} \leqslant \frac{\pi^2(2n)!}{3(2\pi)^{2n}}. \qquad (1.126)$$

注 (1.126)右边可换成 $\frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n+1}}\frac{1}{1-2^{1-2n}}$.([101]805)

(3) $$\frac{4^{n+1}(2n)!}{\pi^{2n+1}}\frac{1}{1+3^{-(1+2n)}} < (-1)^n E_{2n} < \frac{4^{n+1}(2n)!}{\pi^{2n+1}}.\ ([101]805) \qquad (1.127)$$

(4) $$|B_{2n}| \leqslant \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\cdot\frac{1}{1-2^{\lambda-2n}}, \quad \text{式中 } \lambda = 2 + \frac{\log\left(1-\frac{6}{\pi^2}\right)}{\log 2}.$$

(Alzer,[360]2000,74:207 ~ 211)

25. **Wallis 不等式**:设 $P_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$,则

(1) $$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{\pi(n+(4/\pi)-1)}} < P_n < \frac{1}{\sqrt{\pi(n+(1/4))}} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$
$$< \frac{1}{\sqrt{2n+1}} < \frac{1}{\sqrt{2n}}.(n > 1). \qquad (1.128)$$

注 上述 P_n 的不同上下界都是文献中经常引用的,P_n 的下界还可改进为 $\frac{1}{\sqrt{n\pi}}\exp\left(-\frac{1}{8n}\right)$. 而$(4/\pi)-1$与$1/4$是最佳常数.([330]36(4)(2005),303 ~ 307)式1.128也是各类数学竞赛试题的来源之一,例如$\frac{1}{15} < \frac{99!!}{100!!} < \frac{1}{10}$.

(2) $$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\frac{2}{\pi} < P_n < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}\frac{2}{\pi}; \qquad (1.129)$$

(3) $$\sqrt{\frac{8(n+1)}{(4n+3)(2n+1)\pi}} < P_n < \sqrt{\frac{4n+1}{2n(2n+1)\pi}}, \qquad (1.130)$$

提示:$(\sin x-1)^2 \geqslant 0 \Rightarrow 1 \geqslant 2\sin x-(\sin x)^2$,分别用$(\sin x)^{2n-1}$,$(\sin x)^{2n}$乘不等式两边,然后从 0 到$\frac{\pi}{2}$积分.

(4) 当 $-1 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{4}$ 时,$P_n < \frac{1}{\sqrt{\pi(n+\alpha)}}$,而当 $\alpha \geqslant \frac{n+1}{4n+3}$ 时,不等号反向.

(5) P_n 的渐近式:$$P_n = \frac{1}{\sqrt{n\pi}}\left(1-\frac{1}{8n}+\frac{1}{128n^2}+\frac{5}{1024n^3}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right),(n\to\infty). \qquad (1.131)$$

(6) Wallis 不等式可推广如下:当 $m \geqslant 2$ 时,下式成立

$$\frac{m-1}{m\cdot\sqrt[m]{n}} \leqslant \frac{(m-1)(2m-1)\cdots(nm-1)}{m(2m)\cdots(nm)} \leqslant \frac{m-1}{\sqrt[m]{n(m+1)}+m-1}; \qquad (1.132)$$

$$\frac{m}{(m+1)n^{1/m}} \leqslant \frac{m(2m)\cdots(nm)}{(m+1)(2m+1)\cdots(nm+1)} \leqslant \frac{m}{(n(m+1)+m+4)^{1/m}}. \quad (1.133)$$

这两个不等式常用于研究二项式级数和超几何级数在收敛区间端点的收敛性，其证明见[345]1981，3：26 ～ 27.

(7) $\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\left(\frac{10}{1024n^2(2n+1)}\right) < P_n - \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\left(1-\frac{1}{8n}+\frac{1}{128n^2}\right) < \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\left(\frac{5}{1024n^3}\right)$.

由此推出 $\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\left(1-\frac{1}{8n}\right) < P_n < \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\left(1-\frac{1}{8n+1}\right)$.

([344]39(8)(2009)，224 ～ 227)

(8) $\frac{1}{\sqrt{\pi n(1+\alpha_n)}} < P_n < \frac{1}{\sqrt{\pi n(1+\beta_n)}}$. 式中

$$\alpha_n = \frac{1}{4n(1-\frac{1}{8n+3})}, \qquad \beta_n = \frac{1}{4n(1-\frac{1}{8n+4})}.$$

([301]2009，349：68 ～ 73)

26. 设 $1 \leqslant m < n$，则用数学归纳法可以证明：

$$\sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{k(k!)^{\frac{1}{k}}} < e\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right).$$

(张小明，褚玉明，[351]2008，3：245 ～ 250)

27. 设 x 是正实数，$[x]$ 是高斯函数(见第 2 章 §3No. 9). $\{x\} = x-[x-1]$(注意此处的{ }与后面 §3No. 9 中的不同).

记 $x! = x(x-1)\cdots\{x\}$，2003 年郭白妮、祁锋提出，当 $x>0$，$y \geqslant 0$ 时，证明或否定

$$\frac{x+1}{x+y+1} \leqslant \frac{(x!)^{\frac{1}{x}}}{((x+y)!)^{\frac{1}{x+y}}} \leqslant \left(\frac{x}{x+y}\right)^{\frac{1}{2}}.$$ ([330]34(2003)，261 ～ 270)

§2 组合不等式

一、 二项式系数不等式

组合数 $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ 是二项展开式

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k \quad (2.1)$$

各项的系数，所以也称为二项式系数，其中规定当 $k>n \geqslant 0$ 时 $\binom{n}{k}=0$，和 $\binom{n}{0}=1$.

1. **二项式系数的基本性质：**

(1) 对偶性：$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$； (2.2)

(2) 递归性：$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$； (2.3)

(3) 正交性：

$$\sum_{k=m}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{m}=\sum_{k=m}^{n}(-1)^{k-m}\binom{n}{k}\binom{k}{m}=\delta_{nm}; \tag{2.4}$$

式中 $\delta_{nm}=\begin{cases}1, n=m,\\ 0, n\neq m.\end{cases}$

(4) $\sum_{k=0}^{m-1}\binom{n+k}{n}=\binom{n+m}{n+1}$； $\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$； $\binom{n}{k}\binom{k}{m}=\binom{n}{m}\binom{n-m}{n-k}$.

(5) **单峰不等式：**

① 若 n 为偶数，则

$$\binom{n}{0}<\binom{n}{1}<\binom{n}{2}<\cdots<\binom{n}{n/2}>\binom{n}{\frac{n}{2}+1}>\binom{n}{\frac{n}{2}+2}>\cdots>\binom{n}{n-1}>\binom{n}{n}; \tag{2.5}$$

② 若 n 为奇数，则

$$\binom{n}{0}<\binom{n}{1}<\cdots<\binom{n}{\frac{n-1}{2}}=\binom{n}{\frac{n+1}{2}}>\cdots>\binom{n}{n-1}>\binom{n}{n}. \tag{2.6}$$

2. 若 $k<n$，则

$$n^{-2k}\binom{n+k}{n-k}\leqslant\frac{1}{k!}. \tag{2.7}$$

3. (1) 若 $k\leqslant n-2$，则 $\binom{n-1}{k-1}\leqslant\frac{n-1}{2}\binom{n-1}{k}$； (2.8)

(2) 若 $k\leqslant n-4$，则 $\binom{n}{k}<(n-3)\binom{n-1}{k}$. (2.9)

(3) 若 $k=2,\cdots,n-2$，$n\geqslant 13$，令 $p=1-n+nk-k^2$，则 $n\binom{n}{k}<2^p$.

(4) 设 $1\leqslant m\leqslant k\leqslant n$，则

$$(n+1)\binom{n+1}{k-m}\leqslant\binom{n+1}{k-1}\binom{n+1}{m}.$$

4. 若 $m<n$，则

$$\binom{2n+m}{n}\binom{2n-m}{n}\leqslant\binom{2n}{n}^2. \tag{2.10}$$

5. 设 $m\geqslant n>2$，则

$$\frac{1}{n!}-\frac{1}{2m(n-2)!}<\binom{m}{n}m^{-n}<\frac{1}{n!}. \tag{2.11}$$

([345]1940,47:157～159)

6. $\binom{2n}{n}$的上下界有许多研究，例如：

(1) 利用$\binom{2n}{n}=\frac{4^n(2n-1)!!}{(2n)!!}=4^nP_n$和(1.128)式(Wallis 不等式和 P_n，见本章

§1 三、No. 25)，可得

$$\frac{1}{\sqrt{\pi(n+(1/2))}}<4^{-n}\binom{2n}{n}<\frac{1}{\sqrt{\pi(n+(1/4))}}. \tag{2.12}$$

(2)　$2^n<\binom{2n}{n}<4^n\quad(n\geqslant 2)$.

7. (1)　$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}>n\cdot 2^{(n-1)/2},(n>1). \tag{2.13}$$

提示：利用 AG 不等式和二项式定理：

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n.\quad (注意：\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0) \tag{2.14}$$

(2)　$\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}<\frac{n^m}{m!}$　在以下情形之一成立：①$n\geqslant 7,m=4$；②$n\geqslant 8;m=5$；③$6\leqslant m\leqslant n$. ([305]104(1997)，E10400)

8.　$$\left\{\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\right\}^2\leqslant n\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}^2. \tag{2.15}$$

9.　$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}^{1/2}\leqslant\sqrt{n(2^n-1)}. \tag{2.16}$$

提示：利用(2.14)式和 Cauchy 不等式.

10.　$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}^{-1}\geqslant\frac{n^2}{2^n-1}. \tag{2.17}$$

11.　[MCU]　$$2+\frac{2}{n}<\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^{-1}<2+\frac{2}{n}+(n-3)\binom{n}{2}^{-1},n\geqslant 1. \tag{2.18}$$

([66]276 ～ 277)

12.　$$\left[\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}^2\right]\left[\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}^{-1}\right]^2\leqslant n^3. \tag{2.19}$$

13.　$$\frac{4^n}{\sqrt{\pi(n+(1/2))}}<\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2<\frac{4^n}{\sqrt{\pi(n+(1/4))}}. \tag{2.20}$$

提示：利用 Vandermonde 恒等式

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{m}{j}\binom{n}{k-j}=\binom{m+n}{k},k=0,1,2,\cdots,m+n. \tag{2.21}$$

特别地　$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$. 再利用(2.12)式即可得证.

14.　[MCM]

$$\binom{n}{0}\binom{n}{1}+\binom{n}{1}\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n-1}\binom{n}{n}+\binom{n}{n}\binom{n}{0}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}^2. \tag{2.22}$$

冷岗松用微微对偶不等式(见第 3 章 §1No. 87)给出了一个简捷的证明. ([350]1983，1：27 ～ 29)

15.　令 $f(n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{2k+1}\binom{n}{k}$，则

$$\frac{\sqrt{\pi(4n+5)}}{4(n+1)} < f(n) < \frac{\sqrt{\pi(2n+3)}}{2\sqrt{2}(n+1)}. \tag{2.23}$$

证 利用恒等式

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{1}{2k+1}\binom{n}{k} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \tag{2.24}$$

和(1.128)式即可得证.

16. 令 $g(n) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}\binom{n}{k}$,则

$$1/2 + \ln n < g(n) < 1 + \ln n. \tag{2.25}$$

提示:利用恒等式

$$g(n) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}. \tag{2.26}$$

和(1.4)式即可得证.实际上,利用 $S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ 的其他估计式,可得到 $g(n)$ 更为精确的估计.

17. 设 $S(n,m) = \sum_{k=0}^{n-1}2^k\binom{m+k}{k}$. 则

(1) **Turan 不等式**: $S(n,m) \leqslant \left(\frac{2e(m+n)}{n}\right)^n$; (2.27)

(2) **Makai 不等式**:

$$2^{n-1}\binom{m+n-1}{n-1} < S(n,m) < 2^n\binom{m+n-1}{n-1}. \tag{2.28}$$

([391]1959,10:405 ~ 411)

18. **Grüss 不等式**:设 $n \geqslant 1, 1 \leqslant i,j,m \leqslant n$,则

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{k}{i}\binom{k}{j}\binom{k}{m} - \frac{1}{n^3}\binom{n+1}{i+1}\binom{n+1}{j+1}\binom{n+1}{m+1} \leqslant \frac{1}{8}\binom{n}{i}\binom{n}{j}\binom{n}{m}. \tag{2.29}$$

([355]1983,35(1):59 ~ 64)

19. $\prod_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \leqslant \left(\frac{2^n-2}{n-1}\right)^{n-1}$, $(n > 2)$ (2.30)

证 利用 AG 不等式,有

$$\left\{\prod_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\right\}^{\frac{1}{n-1}} \leqslant \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k} = \frac{2^n-2}{n-1}.$$

20. 设自然数 $m_j < n_j, j = 1,2,\cdots,k$,令 $a_k = \sum_{j=1}^{k}n_j, b_k = \sum_{j=1}^{k}m_j$,则

$$0 < \prod_{j=1}^{k}\binom{n_j}{m_j} < \binom{a_k}{b_k}. \tag{2.31}$$

提示:比较展开式

$$(1+x)^{a_k} = \prod_{j=1}^{k}(1+x)^{n_j} = \prod_{j=1}^{k}\left[1 + \binom{n_j}{1}x + \cdots + \binom{n_j}{m_j}x^{m_j} + \cdots + x^{n_j}\right]$$

中 x^{b_k} 的系数. Moor 对(2.31) 式的推广见[4]266.

21.　设 $f(m,n)$ 满足 $f(1,n)=f(m,1)=1$,而且当 $m,n\geqslant 2$ 时,$f(m,n)\leqslant f(m,n-1)+f(m-1,n)$,则

$$f(m,n)\leqslant\binom{m+n-2}{m-1}. \tag{2.32}$$

提示:利用二重归纳法,易证命题 $P(m,1)$,$P(1,n)$ 对任意自然数 m,n 成立,设 $P(k+1,j)$,$P(k,j+1)$ 成立,即

$$f(k+1,j)\leqslant\binom{k+j-1}{k};f(k,j+1)\leqslant\binom{k+j-1}{k-1}.\text{ 则}$$

$$f(k+1,j+1)\leqslant f(k+1,j)+f(k,j+1)\leqslant\binom{k+j-1}{k}+\binom{k+j-1}{k-1}=\binom{k+j}{k}.$$

即命题 $P(k+1,j+1)$ 也成立,从而对任意 m,n,(2.32) 式成立.

22.　设 $f(n)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k+1}}{2^k-1}\binom{n}{k}$,则存在常数 C_1,C_2,使得 $C_1\leqslant\dfrac{f(n)}{\log n}\leqslant C_2$,即 $f(n)=O(\log n)$.([305]2004,111(7):625)

我们问:C_1,C_2 的最佳值是多少?

23.　$G_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{16^k}\binom{2k}{k}^2$ 称为 Landau 常数.

$$0<G_n-\left[\frac{1}{\pi}\log(n+1)+C_0-\frac{1}{4\pi(n+1)}+\frac{C_1}{\pi(n+1)^2}\right]<\frac{C_2}{\pi(n+1)^3},$$

式中 $C_0=\dfrac{1}{\pi}(\gamma+4\log 2)=1.06627\cdots$,$\gamma$ 为 Euler 常数,$C_1=\dfrac{5}{192}$,$C_2=\dfrac{3}{128}$.

([301]2009,349:68～73)

二、　广义二项式系数不等式

若在(2.1) 式中的指数 n 换成实数 α,得到

$$(x+y)^\alpha=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k y^{\alpha-k},\qquad \left|\frac{x}{y}\right|<1, \tag{2.33}$$

$$(1+x)^\alpha=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k,\qquad |x|<1, \tag{2.34}$$

式中

$$\binom{\alpha}{k}=\begin{cases}\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}, & k>0,\\ 1, & k=0,\\ 0, & k<0,\end{cases} \tag{2.35}$$

(k 为整数) 称为**广义二项式系数**,在证明有关不等式时,应注意以下恒等式:

(1)　$$\binom{\alpha}{k}=\binom{\alpha-1}{k}+\binom{\alpha-1}{k-1}; \tag{2.36}$$

(2)　$$\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha+k}{k}=\binom{\alpha+n+1}{n}; \tag{2.37}$$

(3) $\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{m}=\binom{n+1}{m+1}$； $\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{\alpha}\binom{n-k}{\beta}=\binom{n+1}{\alpha+\beta+1}$； (2.38)

(4) $\binom{-\alpha}{k}=(-1)^k\binom{\alpha+k-1}{k}$，$\alpha\in R^1,k\in Z$. (2.39)

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{\alpha}{k}=\binom{n-\alpha}{n}. \qquad (2.40)$$

1. 从(2.35)式，当 $\alpha\neq-1,-2,\cdots$ 时，

$$\binom{n+\alpha}{n}=\frac{(\alpha+n)(\alpha+n-1)\cdots(\alpha+2)(\alpha+1)}{n!},$$ 则

(1) $\alpha>-1$ 时，$\binom{n+\alpha}{n}>0$；

(2) $\alpha>0$ 时，$\binom{n+\alpha}{n}$ 是 n 的递增函数；

(3) $-1<\alpha<0$ 时，$\binom{n+\alpha}{n}$ 是 n 的递减函数；

(4) $\binom{n+\alpha}{n}=\frac{n^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\{1+O(\frac{1}{n})\}\approx\frac{n^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$.

式中 $\Gamma(\alpha+1)$ 是 Gamma 函数(定义见第 8 章 §3).

提示：考虑关系式

$$(1-x)^{-\alpha-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+\alpha}{n}x^n.$$ ([57]Vol. 1. 77)

(5) 设 $\alpha\geqslant1$，则

$$\frac{1}{4\alpha m}\left(\frac{(\alpha+1)^{\alpha+1}}{\alpha^\alpha}\right)^m<\binom{(\alpha+1)m}{m}<\left(\frac{(\alpha+1)^{\alpha+1}}{\alpha^\alpha}\right)^m.$$

([305]2005. 112(2)，问题 11132)

2. (1) 若 $\alpha<0,k\in N$，则

$$(-1)^k\binom{\alpha}{n}>-\frac{\alpha}{k}>0; \qquad (2.41)$$

(2) 若 $\alpha<-1$，则

$$\left|\binom{\alpha}{n}\right|\geqslant1-(\alpha+1)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right); \qquad (2.42)$$

(3) 若 $-1<\alpha<0$，则

$$\left|\binom{\alpha}{n}\right|<\frac{1}{1+(\alpha+1)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)}. \qquad (2.43)$$

(4) 若 $0<\alpha<1$，则

$$\left|\binom{\alpha}{n}\right|<\frac{\alpha}{n}. \qquad (2.44)$$

(5) 若 $\alpha>1,\alpha\neq m$(即 α 不是整数)，则

$$\left|\binom{\alpha}{n}\right| \leqslant \left|\binom{\alpha}{[\alpha]+1}\right| \left(\frac{[\alpha]+1}{n}\right). \tag{2.45}$$

(6) $\alpha > -1$ 时，存在非负整数 k_α 使得 $k_\alpha < \alpha + 1 \leqslant k_\alpha + 1$，而且当 $n > k_\alpha$ 时

$$\left|\binom{\alpha}{n}\right| \leqslant \binom{\alpha}{n}\left(\frac{k_\alpha}{n}\right)^{\alpha+1}. \tag{2.46}$$

(7) 若 $\alpha \leqslant -1$，则 $\left|\binom{\alpha}{n}\right|$ 关于 n 递增；若 $\alpha > -1$，则 $\left|\binom{\alpha}{n}\right|$ 关于 n 递减并趋于 0.

3. 设 $S(\alpha,n) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{\alpha k+1}\binom{n}{k}, \alpha > 0$，则

(1) $$\frac{2^{n+1}-1}{n+1} < S(\alpha,n) < \frac{2^{n+1}-1}{\alpha(n+1)}, (0 < \alpha < 1, n \geqslant 1); \tag{2.47}$$

(2) $$\frac{2^n}{n} < S(\alpha,n) < \frac{2^{n+1}-1}{n+1}, 1 < \alpha \leqslant 2, n \geqslant 3; \tag{2.48}$$

(3) $$\frac{2^{n+1}}{\alpha(n+1)} < S(\alpha,n) < \frac{2^n}{n-1}, \alpha \geqslant 2, n \geqslant 2. \tag{2.49}$$

注 (2.48) 式右边不等式与(2.49) 式左边不等式对所有自然数 n 均成立.

(4) $$\alpha > 0 \text{ 时}, S(\alpha,n) \geqslant S(\alpha,1) = \frac{\alpha+2}{\alpha+1}. \tag{2.50}$$

其中下界是最好的.(证明见[355]1969,6(21):89 ~ 90)

4. 设 x,y,b 为实数，且 $y > n-1, b > n-1, x > n-2$，并设 $\binom{y}{n} = \binom{b}{n} + \binom{x}{n-1}$. 则当 $b > x$ 时，下式成立

$$\binom{y}{n+1} > \binom{b}{n+1} + \binom{x}{n};$$

若 $b < x$，则上述不等式反向.([305]1996,103(1):62 ~ 64)

5. **Leko 不等式**：设实数 x,y,z 满足 $x^n + y^n = z^n$，则

$$0 < \binom{z}{n} - \binom{x}{n} - \binom{y}{n} < \binom{z-1}{n-1}. \text{ ([4]264)} \tag{2.51}$$

6. **Lorentz-Zeller 不等式**：设 m,n 为非负整数，$a \geqslant 0$，令 $p = \min\{m,n\}$，则

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{m-k+\alpha}{m-k}\binom{n-k+\alpha}{n-k}\binom{k-\alpha-2}{k} \geqslant 0. \tag{2.52}$$

([360]1964,15:208 ~ 213)

7. 设 m,n,p 为非负整数，$m > n, 0 < \alpha < 1, 0 \leqslant x \leqslant 1$，则

$$(-1)^{m-n-1}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\binom{\alpha+n}{k+m}x^k > 0. \tag{2.53}$$

([305]1990,97(7),E3309)

8. 设 $\alpha > 0, n \geqslant 2$，令 $\beta = \frac{n(n+1)}{2\alpha} + n$，则

$$\left(1+\frac{n}{\alpha}\right)^n < \binom{\beta}{n} < \frac{1}{n!}\left\{\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(1+\frac{n}{\alpha}\right)\right\}^n. \text{ ([4]262)} \tag{2.54}$$

9.　设实数 $a > k, k \in N, b = (1+\frac{1}{k})^k$，则

$$\binom{a}{k} \leqslant \frac{a^a}{bk^k(a-k)^{a-k}}. \tag{2.55}$$

提示：用数学归纳法和 $b = \left(1+\frac{1}{k}\right)^k$ 的单调性(Kalajdzic).(2.55) 式在信息论中有重要应用，它是下述 **Aslund** 不等式的推广：

$$\binom{n}{k} \leqslant \frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}}. \tag{2.56}$$

(Nord. Mat. Tidskr 1961, 9:105)

三、　多项式系数不等式

多项展开式为

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{n_1+\cdots+n_m=n} \binom{n}{n_1 n_2 \cdots n_m} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_m^{n_m}, \tag{2.57}$$

式中 $n_1, \cdots, n_m$ 为非负整数.

$$\binom{n}{n_1 n_2 \cdots n_m} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_m!} \tag{2.58}$$

称为多项式系数.

在(2.57) 式中取 $\forall x_k = 1, 1 \leqslant k \leqslant m$，得到恒等式：

$$\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_m=n} \binom{n}{n_1 n_2 \cdots n_m} = m^n. \tag{2.59}$$

特别取 $m = 2, n_1 = k$，则 $n_2 = n-k$，于是

$$\binom{n}{k(n-k)} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

所以，可从有关 $\binom{n}{k}$ 的不等式用归纳法推出(2.58) 式的相应不等式，但有关结果比较少.

四、　高斯系数不等式

设 X 是有限域 $GF(q)$ 上的 n 维向量空间，X 的全部 k 维子空间的个数称为高斯系数，记为 $\binom{n}{k}_q (0 \leqslant k \leqslant n)$，它是以下乘积展开式的系数：

$$\prod_{k=0}^{n-1}(1+q^k x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q q^{\binom{k}{2}} x^k, \tag{2.60}$$

式中

$$\binom{n}{k}_q = \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{n-k+1}-1)}{(q^k-1)(q^{k-1}-1)\cdots(q-1)}, 0 < k \leqslant n, \binom{n}{0}_q = 1. \tag{2.61}$$

易证 $\lim\limits_{q\to1}\binom{n}{k}_q = \binom{n}{k}$，所以 $\binom{n}{k}_q$ 与 $\binom{n}{k}$ 有许多相似的性质，如：

(1) **对偶性**：$\binom{n}{k}_q = \binom{n}{n-k}_q$； (2.62)

(2) **递归性**：$\binom{n}{k}_q = \binom{n-1}{k-1}_q + q^k\binom{n-1}{k}_q$； (2.63)

(3) **正交性**：$\sum_{k=m}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}_q\binom{k}{m}_q q^{\binom{n-k}{2}} = \sum_{k=m}^{n}(-1)^{k-m}\binom{n}{k}_q\binom{k}{m}_q q^{\binom{k-m}{2}} = \delta_{n,m}$；

(2.64)

(4) **单峰不等式**：

① 若 n 为偶数，则

$$\binom{n}{0}_q < \binom{n}{1}_q < \cdots < \binom{n}{n/2}_q > \binom{n}{\frac{n}{2}+1}_q > \cdots > \binom{n}{n}_q; \tag{2.65}$$

② 若 n 为奇数，则

$$\binom{n}{0}_q < \binom{n}{1}_q < \cdots < \binom{n}{\frac{n-1}{2}}_q = \binom{n}{\frac{n+1}{2}}_q > \cdots > \binom{n}{n}_q. \tag{2.66}$$

利用以上性质，可以得到与 $\binom{n}{k}$ 类似的不等式.

注 组合数 $\binom{n}{k}$ 可以用 Gamma 函数 $\Gamma(a)$ 表示为 $\binom{n}{k} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)}$. 由此启发我们将自然数 n,k 推广到实数 a,b. 当 $a \geqslant b-1$ 时，可以定义 $\binom{a}{b} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(b+1)\Gamma(a-b+1)}$，那么，对于 $\binom{a}{b}$，有没有相应于 $\binom{n}{k}$ 的类似不等式？

五、 拉丁长方不等式

设 A 是 $m \times n$ 长方形矩阵，$m \leqslant n$，$S = \{a_1, \cdots, a_n\}$ 是 n 个元素构成的集合，若 A 中的每一行都是 S 中元素的一个无重复排列，而在 A 的每一列中，每个元素至多出现一次，则称 A 是在集合 S 上构造的一个拉丁长方，特别当 $m = n$ 时，A 称为 n 阶拉丁方，通常取 $S = \{1, 2, \cdots, n\}$.

$m \times n$ 拉丁长方的个数 $L(m,n)$ 不等式：

$$L(m,n) \geqslant n!(n-1)!\cdots(n-m+1)!. \tag{2.67}$$

特别 $m = n$ 时，$L(n,n)$ 记为 L_n，这时 $L_n \geqslant n!(n-1)!\cdots 1!$

若 n 阶拉丁方 A 的第一行和第一列的元素都是按自然顺序排列的，则称 A 是标准形式或约化的(reduced) 拉丁方，相应的个数记为 l_n.

$$l_n \geqslant (n-2)!(n-3)!\cdots 1!.$$

拉丁方在实验设计中有重要应用，还可考虑无穷拉丁方和多维情形的推广，见 Riordan, J, An introduction to combinatorial analysis, Wiley, 1967.

六、 分拆函数不等式

将自然数 n 分成为不计次序的若干自然数之和的一种表示法，即

$$n=\sum_{k=1}^{m}n_k,\quad n_1\geqslant n_2\geqslant\cdots\geqslant n_m>0,$$

称为 n 的一种分拆(Partition)，对被加项和项数加上一些限制条件，就得到某种特殊类型的分拆，n 的某类型所有不同分拆个数，称为该类型的分拆函数，记为 $r(n)$，通常约定 $r(0)=0$ 或 1，不加限制条件的分拆函数记为 $p(n)$；将 n 分解成大于 1 的因子之积(不计因子的顺序)的不同分解式的个数，称为乘法分拆函数，记为 $f(n)$，约定 $f(1)=1$.

1. **无限制分拆函数 $p(n)$ 不等式：**

(1) 1918 年，Hardy 等证明存在两个正常数 c_1,c_2，使得

$$\frac{c_1}{n}\exp(2\sqrt{n})<p(n)<\frac{c_2}{n}\exp(2\sqrt{2n}).\tag{2.68}$$

华罗庚用代数方法证明：

$$2^{[\sqrt{n}]}<p(n)<n^{3[\sqrt{n}]},(n>2).\tag{2.69}$$

([76]215)

1982 年李文汉用排列组合方法，将(2.69)式右边不等式中的指数 $3[\sqrt{n}]$ 改进为 $2[\sqrt{n}]-(1/2)$.([345]1982,4:31～32)用 Tauber 型方法、模函数论方法及解析数论方法等，可以得到 $p(n)$ 更好的估计，见[76]等.

(2) [MCM] $p(n+1)-2p(n)+p(n-1)\geqslant 0\quad(n>1)$. (2.70)

(3) **Andrew 不等式：**设 $p_k(n)$ 表示将 n 分成至多 k 个部分的分拆数，则

$$p_k(n)\leqslant(n+1)^k;$$

$$p(n)\leqslant p(n-1)+p_k(n)+p(n-k).\tag{2.71}$$

2. **乘法分拆函数 $f(n)$ 不等式：**1983 年 Hughes 等证明 $f(n)\leqslant 2n^{\sqrt{2}}$.
并提出两个猜想：(1) $f(n)\leqslant n$；(2) $n\neq 144$ 时，$f(n)\leqslant n/\ln n$. (2.72)

([305]1983,90:468～471)

陈小夏于 1987～1988 年先后证明了以上两个猜想.([334]1987,30:268～271.[333]1988,35(9).杭州师院学报,1991,3:5～15)1990 年汤正学改进了陈小夏的结论.

1992 年，许康华对于 $n>1$ 的标准分解：$n=p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_k^{m_k}$，$m_1\geqslant m_2\geqslant\cdots\geqslant m_k>0$，证明

$$f(n)\leqslant\alpha^{m_1}\beta^{m_2}(\beta+1)^{m_3}\cdots(\beta+k-2)^{m_k}.\tag{2.73}$$

式中 $p_1,\cdots,p_k$ 是不同的素数，$\beta=\dfrac{2\alpha-1}{\alpha-1}$，$\alpha$ 是满足条件 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\leqslant\alpha$ 的实数.([344]1992.2)1989 年，曹惠中给出了 $f(n)$ 的均值下界：当 x 充分大时

$$\sum_{n\leqslant x}f(n)\geqslant\frac{1}{384}x(\ln x)^3+0(x(\ln x)^2).$$ ([340]1991,11(2):183～187)

3. [MCM]. n 的分拆中不同的加数的个数，称为该分拆的离散度. 用 $q(n)$ 表示离散度之和，则

$$q(n)=1+\sum_{k=1}^{n-1}p(k)\leqslant\sqrt{2n}p(n). \tag{2.74}$$

证　设 n 的所有分拆中，离散度最大的为 m，即 n 可化为 m 个不同自然数之和，于是

$$n\geqslant\sum_{k=1}^{m}k=\frac{1}{2}m(m+1).\text{从而 } m^2\leqslant 2n, q(n)\leqslant mp(n)<\sqrt{2n}p(n).$$

此外，可见专著：Andrew G. E. , The theory of partitions, Addison-Wesley, 1976.

4.　**Bell 数不等式**：设 B_n 表示集合 $X=\{x_1,\cdots,x_n\}$ 划分为不相交子集的并的不同方法的个数，则 B_n 称为第 n 个 Bell 数. 它的指数型母函数是 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n=\exp(e^x-1)$，它的递推式为 $B_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k$，它还有表达式 $B_n=\frac{1}{e}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^n}{k!}$. 1991 年田正平、杨炳良研究了 B_n 的性质和许多不等式，例如：

(1)　$B_n\leqslant n!$；

(2)　$2B_n\leqslant B_{n+1}<en!$，左边仅当 $n=1$ 时等号成立；

(3)　$n\geqslant 3$ 时，$B_{n+1}\geqslant 3B_n$，仅当 $n=3$ 时等号成立；

(4)　$n>5$ 时，$B_{n+1}>3B_n+2(n-2)B_{n-2}$；

(5)　$n\geqslant 7$ 时，$B_n<e^2(n-2)!$；

(6)　$n\geqslant 8$ 时，$B_{n+1}<(n-2)B_n$；由此推出 $B_n<e^3(n-3)!$.

(7)　$B_n\leqslant e(n-1)!\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!(n-1-k)}$.

(杭州师院学报，1991，3：5 ～ 15)

5.　在集 $\{1,2,\cdots,n\}$ 上的置换 π 称为以 j 作为一个强固定点，若 $k<j$ 时 $\pi(k)<j$，而 $k>j$ 时 $\pi(k)>j$，设 $h(n)$ 是在 $\{1,2,\cdots,n\}$ 上至少有一个强固定点的置换的数目，则对于 $n>1$，有

$$2(n-1)!-(n-2)!\leqslant h(n)\leqslant 2(n-1)!.\quad([305]1991,98:853)$$

七、　计数不等式

1.　**Heilbron 不等式**：设平面上任给 n 个点 $P_1,\cdots,P_n$，每两点间的最大距离与最小距离之比记为 λ_n. $z_n=\inf\lambda_n$. 由于这类问题有一定的难度，而且 n 越大，z_n 就会越复杂，因而多次出现在各类数学竞赛试题中，例如：

(1)　$\lambda_4\geqslant\sqrt{2}$ (1961，匈牙利[MCM])；

(2)　$\lambda_5\geqslant 2\sin 54^\circ$　(1985，中国 MCM)；

(3)　$\lambda_6\geqslant\sqrt{3}$　(1964 美国 Putnan；1985 ～ 1986 波兰)；　$\lambda_6\geqslant 2\sin 72^\circ$(1986，中国).

(4)　Heilbron 猜想：$\lambda_n\geqslant 2\sin(\frac{1}{2}-\frac{1}{n})\pi=2\cos\frac{\pi}{n}$.　　(2.75)

1989 年吴报强利用凸包理论证明了上述猜想，而且得到了一个更好的结果：
若 n 个点中有三点共线，则 $\lambda_n\geqslant 2$；若任意三点均不共线，它们的凸包为 k 边形($3\leqslant k$

$\leqslant n$)，则

$$\lambda_n \geqslant 2\sin\frac{kn-4k+4}{2k(n-2)}\pi. \tag{2.76}$$

易证 $\sin\frac{kn-4k+4}{2k(n-2)}\pi \geqslant \sin(\frac{1}{2}-\frac{1}{n})\pi$，且仅当 $k=n$ 时等号成立，所以(2.76)式要优于(2.75)式，由此推出 $z_4=\inf\lambda_4=\sqrt{2}$；$z_5=\inf\lambda_5=2\cos\frac{\pi}{5}$，当 $n\geqslant 6$ 时，$z_n=\inf\lambda_n > 2\cos\frac{\pi}{n}$. 吴报强还进一步提出猜想：$z_6=2\cos\frac{\pi}{10}$，$z_7=2$，$z_8=\left(\sin\frac{3\pi}{7}\right)/\sin\frac{\pi}{7}$，

([345]1989.5)

这些猜想于1996年被熊斌等证明.([348]1996,8:23)

1991年，黄鲤颖证明：$n>6$ 时，$\lambda_n>\frac{\sqrt{n\pi}}{2}-1$. 同年王建宇进一步证明：

$$\sqrt{n}-1<z_n=\inf\lambda_n<\left(\frac{2\sqrt{3}n}{\pi}\right)^{1/2}+\frac{2\sqrt{3}}{3}. \tag{2.77}$$

([347]1991,2)

马茂年(1991)证明：$z_n\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}[\sqrt{n}]$；1995年朱玉杨证明：

$$z_9=\inf\lambda_9\leqslant\frac{2+\sqrt{24\sqrt{2}-30}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}<\csc\frac{\pi}{8}.$$

我们自然要问：λ_n，z_n 最好的上、下界是什么？

1996年，熊斌等证明：

$$\left(\frac{n\sqrt{12}}{\pi}\right)^{1/2}-1<z_n<\left(\frac{n\sqrt{12}}{\pi}\right)^{1/2}, \tag{2.78}$$

并进一步问：使

$$\left(\frac{n\sqrt{12}}{\pi}\right)^{1/2}+c_1\leqslant z_n\leqslant\left(\frac{n\sqrt{12}}{\pi}\right)^{1/2}+c_2$$

成立的 c_1 的最大值和 c_2 的最小值是什么？

作者猜想 c_1 的最大值为 $1-\left(\frac{6\sqrt{3}}{\pi}\right)^{1/2}=-0.81878\cdots$，$c_2$ 的最小值为0.([348]1996，8:23)

(5) 若平面上 n 个点都在同一直线上，则

$$\lambda_n\geqslant\frac{\sqrt{n(n+1)}}{6}. \tag{2.79}$$

(6) 若平面上任给 n 个点中，任三点都能构成一个三角形，每个三角形都有一个面积，其中最大面积与最小面积之比记为 μ_n，李文志证明 $\mu_4\geqslant 1$，$\mu_5\geqslant\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$，$\mu_6\geqslant 3$，并提出猜想：若 n 个点中任三点都不共线，则

$$\mu_n \geqslant \frac{n^2}{16\log_4 n}. \tag{2.80}$$

而黄鲤颖证明

$$\mu_n > \frac{n}{4} - \frac{1}{2},\ (n > 6). \tag{2.81}$$

([99]15:45 ~ 62 和[348]1994,11:40)

我们还可以进一步问:若给定的 n 个点,不是共面,而是分布在 3 维空间中,相应的 λ_n, z_n 的最优上下界是什么?

(7) 三维空间 R^3 中任给 n 个不同点,其中每 4 点不共面,以这些点为顶点的四面体的最大与最小体积之比记为 α_n,已知 $n \geqslant 4$ 时,

$$\alpha_n \geqslant \frac{n-3}{16}.\text{(黄鲤颖)}. \tag{2.82}$$

问:α_n 的下确界的估计式是什么?

2. **三角形计数不等式**:设平面上的 n 条直线($n \geqslant 4$)两两相交,三三不共点;它们把平面分为不重迭的区域,将其中的三角形区域数记为 $P_n(3)$,则

$$P_n(3) \geqslant \frac{2}{3}(n-1). \tag{2.83}$$

若将上述"三三不共点"改为"没有任何 $n-1$ 条直线共点",则

$$P_n(3) \leqslant \frac{2}{5}n(n-1). \tag{2.84}$$

([34]33 ~ 34)

1972 年,Grünbaum,B. 猜想:当 $n \geqslant 16$ 时(2.84)式可改进为

$$P_n(3) \leqslant \frac{1}{3}n(n-1). \tag{2.85}$$

1980 年,Purdy,G. 证明:

$$P_n(3) \leqslant \frac{7}{18}n(n-1) + \frac{1}{3}. \tag{2.86}$$

([308]1980,79(1):77 ~ 81)

我们进一步问:$P_n(3)$ 的最优上下界是什么?对于 $P_n(4)$ 等类似问题,有什么结果?

3. [MCM] 给定平面上 n 个点 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ ($n \geqslant 3$),线段 p_jp_k ($j \neq k$) 中最小值为 r_0,值 r 出现的次数为 $g(r)$,则

(1) $g(r_0) \leqslant 3n-6$; (2.87)

(2) $g(r) < n^{3/2}$. (2.88)

提示:用数学归纳法:$n=3$ 时,$g(r_0) \leqslant 3$,若(1)对 $n \geqslant 3$ 成立,则对 $n+1$ 个点,其中设 P_{n+1} 是凸包的顶点,P_{n+1} 至多引出 3 条长为 r_0 的线段,去掉 P_{n+1} 后,由归纳假设,至多有 $3n-6$ 条长为 r_0 的线段,于是,这 $n+1$ 个点所成线段中,

$g(r_0) \leqslant (3n-6)+3 = 3(n+1)-6$.

(3) 对每点 P_k 作以 r 为半径,P_k 为圆心的圆,设在该圆周上有 m_k 个已知点,则

$g(r)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}m_k$. 再考虑以已知点为两个端点的线段，总数为$\binom{n}{2}$条，其中为所作圆的半径及弦的至少有 $f(n)$ 条，此处

$$f(n)=\sum_{k=1}^{m}m_k+\sum_{k=1}^{n}\binom{m_k}{2}-\binom{n}{2}.$$

于是 $f(n)\leqslant\binom{n}{2}$，由此可得(2.88)式.

4. [MCM]，设平面上有 n 条不同直线和 n 个不同的点，使得每条直线上恰有 k 个点，则

$$k<\frac{1}{2}+\sqrt{n}. \tag{2.89}$$

(数学教学，1991，4)

5. [IMO. 30]设 S 是平面上 n 个点的集合，若对 S 中每点 P，S 中至少存在 k 个点与 P 距离相等，则 $k<\frac{1}{2}+\sqrt{2n}$.

(注 原题中还加上“S 中任何三点不共线”的条件，我们去掉了这个多余的条件)

证 以 S 中的两个点为端点的线段称为“好线段”. 好线段的条数为$\binom{n}{2}$，另一方面，以 S 中任一点 P 为圆心，可作一圆，圆上至少有 k 个 S 中的点，从而该圆至少有$\binom{n}{2}$条弦是好线段，这样的圆可作 n 个，由于每两个圆至多有一条公共弦，所以，n 个圆至多有$\binom{n}{2}$条公共弦(重数计算在内)，从而至少有 $g(n)=n\binom{k}{2}-\binom{n}{2}$条弦是好线段. 因此 $g(n)\leqslant\binom{n}{2}$，由此推出 $k\leqslant\frac{1}{2}+\sqrt{2n-(7/4)}$. ([38]1527)

6. [MCM]. 平面上 n 条直线($n\geqslant 2$)将平面分成若干个区域，将其中某些区域涂上颜色，并使任何两个着色区域没有公共边(若两个区域只有一个公共点，则不算有公共边)，则着色区域数目不超过$\frac{1}{3}n(n+1)$.

7. 平面上有 n 条直线 $L_1,\cdots,L_n$($n\geqslant 4$)，其中任意两条都相交，任意三条不共点，它们将平面分成不相重叠的区域，其中三角形区域的全体记为 B_n，则 B_n 的个数为 $g(n)\geqslant\frac{2}{3}(n-1)$. (提示：利用最小数原理).

8. 平面上有 n 个点($n\geqslant 5$)，任意三点不共线，从中取 4 点，使得以它们为顶点可作凸四边形，这种取法全体记为 A_n，则 A_n 的个数为

$$h(n)\geqslant\frac{1}{n-4}\binom{n}{5}. \tag{2.90}$$

提示：先证 $h(5)\geqslant 1$，当 $n\geqslant 6$ 时，每 5 点为一组，共有$\binom{n}{5}$组，每组有一个凸四边形，

但每个凸四边形至多被重复计算 $n-4$ 次，由此推出(2.90).

9. [MCM]. 设 $f(j,k)$ 是平面上格点的集合($1\leqslant j\leqslant m, 1\leqslant k\leqslant n$)，它不含相邻元素的子集的个数记为 $g(m,n)$. 即这种子集不含同时含有两个满足
$|j_1-k_1|+|j_2-k_2|=1$ 的有序对 $(j_1,k_1),(j_2,k_2)$，则

$$\{g(m,2k)\}^2\leqslant g(m,2k-1)g(m,2k+1).$$

证明见[348]1989,5:38.

10. 设 $N(m)$ 表示自然数 m 作为二项式系数 $\binom{n}{k}$ 形式出现的次数. 例如 $N(1)=\infty, N(2)=1, N(3)=N(4)=N(5)=2, n(6)=3$，等等. 则当 $m>1$，有

$$N(m)\leqslant 2+2\log_2 m..$$

§3 数论不等式

1. **素数不等式**：设 $\{p_n\}$ 是由小到大排列的素数序列，p 表示素数，则

(1) $p_n<2^{2^n}$. (3.1)

提示：用数学归纳法.

(2) $p_{n+2}\leqslant 2^{2^n}+1$, (3.2)

(3) 存在两个正常数 c_1,c_2，使得

$$c_1 n\ln n<p_n<c_2 n\ln n. \text{([76]107)} \tag{3.3}$$

(4) $x>1$ 时，$\sum\limits_{p\leqslant x}\frac{\ln p}{p}\leqslant 2\ln x$ 和 $\sum\limits_{p\leqslant x}\frac{\ln p}{p-1}\geqslant \ln x-1-\frac{\ln x}{x}$; (3.4)

而当 $1<y\leqslant x$ 时，$\sum\limits_{y<p\leqslant x}\frac{1}{p}\leqslant 2\frac{\ln x}{\ln y}$. ([89]19) (3.5)

(5) 若 $x\geqslant 1$，则存在正常数 c，使得

$$\left|\sum_{p\leqslant x}\frac{\ln p}{p}-\ln x\right|<c. \text{([76]103} \sim \text{105)} \tag{3.6}$$

(6) 设复数 z 的实部 $\operatorname{Re}z=a>0$，则

$$\left|\frac{1}{(p-1)^z}-\frac{1}{p^z}\right|\leqslant\frac{|z|}{(p-1)^{a+1}}. \tag{3.7}$$

([89]40)

(7) 设 $a>1$，则

$$\left|\sum_{p<N}\ln\left(1-\frac{1}{p^a}\right)+\sum_{p<N}\frac{1}{p^a}\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}; \tag{3.8}$$

$$\left|\ln\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}-\sum_{p}\frac{1}{p^a}\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}. \tag{3.9}$$

(Korner T. W., Fourier analysis, Cambridge, 1988, 526)

2. 设 $\pi(x)$ 表示不超过 x 的素数 p 的个数，即 $\pi(x)=\sum\limits_{p\leqslant x}1$. $\pi(x)-\frac{x}{\ln x}$ 的上界估计仍是当代数论的难题之一. 现在只知，若 Riemann 猜想成立，则

$$\pi(x) = \mathrm{li}x + o(x^{1/2}\ln x).$$

式中 $\mathrm{li}x = \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} = \frac{x}{\ln x} + \cdots + \frac{(n-1)!x}{(\ln x)^n} + O\Big(\frac{x}{(\ln x)^{n+1}}\Big).$

(1) $$\pi(n) > \begin{cases} n^{1/\sqrt{2}}, & n \geqslant 149, \\ \dfrac{n}{\ln n - (1/2)}, & n \geqslant 67, \\ \dfrac{2n}{3\ln n}, & n \geqslant 200; \end{cases} \tag{3.10}$$

(2) $$\frac{n\ln 2}{\ln(2n)} < \pi(2n) \leqslant \frac{n\ln 64}{\ln n}; \tag{3.11}$$

(3) $$\pi(2n) - \pi(n) < (\ln 4)\Big(\frac{n}{\ln n}\Big); \tag{3.12}$$

(4) 令 $q(n) = \pi(2n) - \pi(n)$，则

$$n^{q(n)} < \binom{2n}{n} < 2n^{\pi(2n)}. \tag{3.13}$$

(5) $n \geqslant 859$ 时，$\pi(\pi(n)) > \sqrt{n}$. ([305]1990,97E3385) (3.14)

(6) [MCM]. 设 $a > 1$，则 $\log_a n \geqslant (\log_a 2)\pi(n)$. (3.15)

特别，取 $a = 10$，得到 $\lg n \geqslant (\lg 2)\pi(n)$.

证 记 $k = \pi(n)$，对于给定的 n，它的 k 个不同的素因数记为 $p_1, p_2, \cdots, p_k$，且 $n = \prod_{j=1}^k p_j^{\alpha_j}$. 令 $q = \sum_{j=1}^k \alpha_j$. 因为 $\forall p_j \geqslant 2$，所以 $n \geqslant 2^q \geqslant 2^k$，由此得出(3.15)式.

(7) **Chebyshev 不等式**：存在两个正常数 c_1, c_2，使得 $c_1 \leqslant 1 \leqslant c_2$，且

$$c_1 \frac{x}{\ln x} < \pi(x) < c_2 \frac{x}{\ln x}. \tag{3.16}$$

实际上 $c_1 \geqslant \frac{1}{2}\ln 2, c_2 \leqslant 2\ln 2$. Chebyshev 还证明，存在 x_0，使得 $x \geqslant x_0$ 时，$c_1 = 0.92129\cdots, c_2 = 1.10555\cdots$，更确切地说，设

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{(x/\ln x)} = a_1, \limsup_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{(x/\ln x)} = a_2,$$ 则

$$c_1 \leqslant a_1 \leqslant 1 \leqslant a_2 \leqslant \frac{6}{5}c_1 = c_2. \tag{3.17}$$

用积分方法，易证

$$\frac{1}{8}\Big(\frac{n}{\ln n}\Big) \leqslant \pi(n) \leqslant 12\Big(\frac{n}{\ln n}\Big). \tag{3.18}$$

(8) **Rosser 不等式**：当 $17 \leqslant x \leqslant e^{100}, x \geqslant e^{200}$ 时，有

$$\frac{x}{\ln x} < \pi(x) < \frac{x}{\ln x - 2}. \tag{3.19}$$

而当 $x \geqslant 55$ 时，有

$$\frac{x}{\ln x + 2} < \pi(x) < \frac{x}{\ln x - 4}. \tag{3.20}$$

([318]1939,45(2):21 ~ 44)

(9) $\pi(x) = \mathrm{li}x + O(x\exp(-c\sqrt{\ln x}))$.

对任意小的 $a>0$ 和任意大的 m,成立 **Chebyshev 不等式**:

$$\mathrm{li}x - ax(\ln x)^{-m} < \pi(x) < \mathrm{li}x + ax(\ln x)^{m}. \tag{3.21}$$

(Ivic,A. ,The Riemann-zeta function. Wiley,1985)

(10) $x>9$ 时,$\pi(x) \leqslant x/2$. 由此推出 $\pi(2^{k+1}) \leqslant 2^k$.

(11) 记 $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$,则当 $n \geqslant 2$ 时,$\frac{1}{8} \leqslant \pi(n)\frac{S_n}{n} < 6$. (3.22)

以上不等式见[76]94 ~ 99.

(12) 由遍历全部素数幂 p^m 的和式

$$\psi(x) = \sum_{p^m \leqslant x} \ln p, \tag{3.23}$$

称为Chebyshev函数,由于 $\psi(x)$ 的最佳逼近就是 x 本身,所以,在研究素数分布时用 $\psi(x)$ 比 $\pi(x)$ 更方便. 若 $a = \ln(2^{1/2}3^{1/3}5^{1/5}30^{1/30})$,则当 $x>1$ 时,

$$ax - \frac{5}{2}\ln x - 1 < \psi(x) < \frac{6}{5}ax + \frac{5}{4\ln 6}(\ln x)^2 + \frac{5}{4}\ln x + 1. \tag{3.24}$$

(Ivic,A. ,Zhe Riemann zeta function,Wiley,1985)

利用 $\psi(x) \leqslant \pi(x)\ln x$ 和 $\psi(x) \geqslant \alpha\{\pi(x) - x^{\alpha}\}\ln x \quad (0<\alpha<1, x>1)$,得到 $\psi(x) \sim x (x \to \infty)$.

3. **Euler 函数不等式**:小于 n 且与 n 互素的正整数的个数,称为 Euler 函数,记为 $\varphi(n)$,在推导 $\varphi(n)$ 不等式时,要注意利用它的基本性质,例如 $\varphi(n)$ 是积性的,即 $\varphi(1) = 1$,若 m,n 互素,则 $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$;$\sum_{d|n}\varphi(d) = n$;若 $n = \prod_{k=1}^{m} p_k^{n_k}$,式中,$p_1,p_2,\cdots,p_m$ 为互异素数(称为 n 的标准分解),则

$$\varphi(n) = n\prod_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = \prod_{k=1}^{m}(p_k^{n_k} - p_k^{n_k-1}), \tag{3.25}$$

特别地,p 为素数时 $\varphi(p) = p-1$, $\varphi(p^n) = p^n - p^{n-1}$.

(1) $n \geqslant 3$ 时,存在正常数 a,使得

$$a \cdot \frac{n}{\ln\ln n} \leqslant \varphi(n) \leqslant n. \tag{3.26}$$

(2) $\liminf_{n\to\infty} \varphi(n)\frac{\ln\ln n}{n} = e^{-c}$.(式中 c 为 Euler 常数) (3.27)

(3) $\sum_{n\leqslant x}\varphi(n) = \frac{3}{\pi^2}x^2 + O(x\ln x)$.(参看[76]、[89] 与[102]) (3.28)

4. **除数函数不等式**:n 的各因子之 α 次幂的和,即

$$\sigma_\alpha(n) = \sum_{d|n} d^\alpha, \tag{3.29}$$

称为除数函数,其中 α 为实数(复数). 特别 $\alpha = 0$ 时,$\sigma_0(n)$ 常记为 $d(n)$ 或 $\tau(n)$,即 $d(n) = \sum_{d|n} 1$,它表示 n 的正因子个数;而 $\alpha = 1$ 时,$\sigma_1(n)$ 常记为 $\sigma(n)$,它表示 n 的正因子之和. 若

p 为素数，则

$$\sigma_\alpha(p^n) = \begin{cases} \dfrac{p^{\alpha(n+1)}-1}{p^\alpha - 1}, & \alpha \neq 0, \\ n+1, & \alpha = 0. \end{cases} \tag{3.30}$$

对于 n 的标准分解：设 $p_1, \cdots, p_m$ 为互异素数，有

$$n = \prod_{k=1}^{m} p_k^{n_k} \quad (\text{当 } p_1 < p_2 < \cdots < p_m \text{ 时}, m \leqslant \frac{\ln n}{\ln 2}. \tag{3.31}$$

$$d(n) = \prod_{k=1}^{m} (n_k + 1), \tag{3.32}$$

$$\sigma(n) = \prod_{k=1}^{m} \frac{p_k^{n_k+1} - 1}{p_k - 1}. \tag{3.33}$$

(1) $\forall \varepsilon > 0, n > n_0(\varepsilon)$，下式成立

$$d(n) < \exp\{(1+\varepsilon)\ln 2 \frac{\ln n}{\ln\ln n}\}; \tag{3.34}$$

另一方面，$\forall \varepsilon > 0, \exists n > 0$，使得

$$d(n) > \exp\{(1-\varepsilon)\ln 2 \frac{\ln n}{\ln\ln n}\}; \tag{3.35}$$

(2) **Dirichlet 渐近式**：$D(x) = \sum\limits_{n \leqslant x} d(n) = x\ln x + (2c-1)x + \Delta(x)$， (3.36)

式中 $\Delta(x) = O(\sqrt{x})$. 但 $\Delta(x)$ 真正的阶还不知道.

(3) $\sum\limits_{k=1}^{n} d(k) = n(\ln n + 2c - 1) + O(\sqrt{n})$，式中 c 为 Euler 常数. (3.37)

(4) $\dfrac{1}{n}\sigma(n) \geqslant \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{1}{k}$，式中 $n = m!$.

提示：将 n 的因子按递增次序 $d_1 = 1, d_2, \cdots, d_m = n$，于是 $\dfrac{n}{d_1}, \dfrac{n}{d_2}, \cdots, \dfrac{n}{d_m}$ 是同样的因子序列，但次序相反，它们的和相同，所以，

$$\sigma(n) = \sum_{d_k | n} \frac{n}{d_k}, \qquad \text{即} \qquad \frac{\sigma(n)}{n} = \sum_{d_k | n} \frac{1}{d_k}.$$

猜想：$\dfrac{1}{n}\sigma[\varphi(n)] \geqslant \dfrac{1}{2}$. (3.38)

(5) **存在无穷多个 n，使得 $1 \leqslant k < n$ 时，下式成立**

$$\frac{\sigma(n)}{n} > \frac{\sigma(k)}{k}. \tag{3.39}$$

若 $\forall k < n$，(3.39) 式成立，则称 n 为过剩数.

(6) **[MCU]**. $\dfrac{n^2}{2} < \varphi(n)\sigma(n) < n^2$. (3.40)

证 由 n 的标准分解(3.31)和(3.33)式，有

$$\sigma(n) = \prod_{k=1}^{m} (1 + p_k + \cdots + p_k^{n_k}) = n\prod_{k=1}^{m} (1 + \frac{1}{p_k} + \cdots + \frac{1}{p_k^{n_k}}), \tag{3.41}$$

于是从(3.41)和(3.25)式，有

$$\varphi(n)\sigma(n) = n^2 \prod_{k=1}^{m}[1 - p_k^{-(n_k+1)}] < n^2.$$

另一方面，

$$\prod_{k=1}^{m}(1-\frac{1}{p_k^2}) > (1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})[1-\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{(k+2)^2}] > \frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}\cdot(1-\int_4^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}) = \frac{1}{2}.$$

于是，$\varphi(n)\sigma(n) \geqslant n^2\prod_{k=1}^{m}(1-\frac{1}{p_k^2}) > \frac{1}{2}n^2.$

注 $\varphi(n)\sigma(n)$ 的下界可改进为 $6(\frac{n}{\pi})^2$.([102])

(7) $d(mn) \leqslant d(m)d(n).$ (3.42)

(8) **Polya 不等式**：令 $f_\alpha(n) = \sum_{k=1}^{n}\sigma_\alpha(k) = \sum_{k=1}^{n}[\frac{n}{k}]k^\alpha.$ (3.43)

$\zeta(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^z}$ 为 Riemann zeta 函数. 则当 $\alpha > 1$ 时，有

$$\left|\frac{f_\alpha(n)}{n^{\alpha+1}} - \frac{\zeta(\alpha+1)}{\alpha+1}\right| \leqslant \frac{2\zeta(\alpha)-1}{n}. \tag{3.44}$$

提示：因为 $\alpha > 1$ 时，$g(x) = [\frac{1}{x}]x^\alpha$ 为[0,1]上有界变差函数，而且

$(\alpha+1)\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty}k\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}}(\alpha+1)x^\alpha\mathrm{d}x = \zeta(\alpha+1)$，而 g 的全变差 $V_0^1(g) = \{g(1) - g(\frac{1}{2}+0)\} + \{g(\frac{1}{2}-0) - g(\frac{1}{2}+0)\} + \{g(\frac{1}{2}-0) - g(\frac{1}{3}+0)\} + \cdots = (1^{-\alpha} - 2^{-\alpha}) + 2^{-\alpha} + 2(2^{-\alpha} - 3^{-\alpha}) + 3^{-\alpha} + \cdots = 2\zeta(\alpha) - 1.$ 再利用

$$\left|\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}g(\frac{k}{n})\right| \leqslant \frac{1}{n}V_0^1(g).$$（第 13 章 No. 41(2) 和[56]Vol. 1:58,258)

(9) Riemann 假设（猜想）是指 Riemann zeta 函数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}$$

的非实零点都在直线 $R(s) = \frac{1}{2}$ 上.

Riemann 假设成立与以下三个不等式成立均等价：

① $\sigma(n) \leqslant H_n + \exp(H_n)\log H_n$，式中 $H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$

② $\sigma(n) < e^\gamma n\log\log n, \forall n \geqslant 5041$，$\gamma$ 为 Euler 常数，

③ $|\pi(x) - \mathrm{li}x| \leqslant Cx^{(\frac{1}{2})+\varepsilon}, (\varepsilon > 0, x \geqslant 0).$

([305]109(6)(2002),534 ~ 543)

5. **Möbius 函数不等式**：

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & 若 n = 1, \\ (-1)^k, & k 为 n 的素因子个数, \\ 0, & n 有素数的平方因子. \end{cases} \tag{3.45}$$

称为 Möbius 函数，$\mu(n)$ 在数论、代数、组合数学等领域中都有重要应用.

$$\sum_{d|n}\mu(d)=\begin{cases}1, & 若\ n=1,\\ 0, & 若\ n>1.\end{cases} \tag{3.46}$$

若$(m,k)=n$，由于$\sum_{d|n}\mu(d)=1$ 或 0 可判别 m,k 是否互素. 当 $\mathrm{Re}\alpha>1$ 时，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^{\alpha}}=\frac{1}{\zeta(\alpha)}.$$

(1) 设 $x\geqslant 1$，则

$$\left|\sum_{1\leqslant k\leqslant x}\frac{\mu(k)}{k}\right|\leqslant 1. \tag{3.47}$$

(证明见[76]120)

(2) $$\frac{1}{x}\left|\sum_{k\leqslant x}\mu(k)\right|\leqslant \exp\{-a(\ln x)^{3/5}(\ln\ln x)^{-1/5}\}, \tag{3.48}$$

式中 a 为常数，由它可推出自然数列中素数分布的渐近规律.

(3) 猜想：存在常数 c 与正常数 ε，使得

$$\sum_{k=1}^{n}\mu(k)\leqslant cn^{\frac{1}{2}+\varepsilon}. \tag{3.49}$$

猜想(3.49)式与著名的 Riemann 猜想等价.([305]1981,88:311 ~ 320)

6. [MCU]. 设 $\sigma(n)$ 是 n 的最大奇因子，则对于所有 n，有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sigma(k)}{k}-\frac{2n}{3}\right|<1. \tag{3.50}$$

提示：令 $S(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sigma(k)}{k}$，$F(n)=S(n)-2n/3$. 用数学归纳法证明：

$$0<F(n)<2/3. \tag{3.51}$$

事实上，$F(1)=S(1)-2/3=1/3$，(3.51)式成立，设 $n\leqslant k$ 时，(3.51)式成立：$0<F(k)<2/3$. 利用关系式：$\sigma(2m+1)=2m+1$，$\sigma(2m)=\sigma(m)$，将 $S(n)$ 的和式按项的奇偶性分部相加得

$$S(2n)=\sum_{m=1}^{n}\frac{\sigma(2m)}{2m}+\sum_{m=1}^{n}\frac{\sigma(2m-1)}{2m-1}=\frac{1}{2}S(n)+n.$$

从而 $F(2n)=\frac{1}{2}F(n)$，$F(2n+1)=F(2n)+\frac{1}{3}$. 于是

$$F(k+1)=\begin{cases}F(k)+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}F(\frac{k}{2})+\frac{1}{3}, & 若\ k\ 为偶数,\\ \frac{1}{2}F(\frac{k+1}{2}), & 若\ k\ 为奇数.\end{cases}$$

由归纳假定即知 $0<F(k+1)<2/3$. 因此(3.51)式对所有 n 均成立.

注 (3.51)式比(3.50)式更为精确.

7. **大筛法不等式**：设 $n_1,\cdots n_m$ 是不大于 N 的正整数列，素数 $p\leqslant\sqrt{N}$，l 为余数，$0\leqslant l\leqslant p-1$. 设

$$Q(p,l)=\sum_{\substack{n_k\equiv l(\bmod p)\\ n_k\leqslant N}}1. \tag{3.52}$$

则存在正常数 c，使得

$$\sum_{p\leqslant\sqrt{N}}\left\{p\sum_{l=1}^{p-1}\left(Q(p,l)-\frac{m}{p}\right)^2\right\}\leqslant cNm. \tag{3.53}$$

(Bombieri. E. ,1965)

8. **数列密度不等式**：数列的密度 $d(A)$ 是全体自然数组成的数列中属于给定的由整数 $a_0=0<1<a_1<a_2<\cdots<a_k$ 组成的数列 $A=\{a_k\}$ 的那一部分的测度，即

$$d(A)=\inf_n\frac{A(n)}{n}\quad\left(\text{其中}\quad A(n)=\sum_{1\leqslant a_k\leqslant n}1\right). \tag{3.54}$$

(1) Shnirel'man 不等式：

$$d(A+B)\geqslant d(A)+d(B)-d(A)d(B). \tag{3.55}$$

(2) Mann-Dyson 不等式：

$$d(A+B)\geqslant\min\{d(A)+d(B),1\}. \tag{3.56}$$

(Ostmann, H. H. , Additive Zahlentheorie, Springer, 1956)

9. **高斯函数 $[x]$ 不等式**：设 x 为任一实数，Z 为整数集，$[x]=\max\{n: n\leqslant x, n\in Z\}$ 表示不大于 x 的最大整数，称为高斯函数，即 x 的整数部分. $\{x\}=x-[x]$ 称为 x 的小数部分.

在推导 $[x]$ 的不等式时，要注意有关等式，例如 $n\in Z$ 时，

$$[-x]=\begin{cases}-[x]-1, & \text{若 } x \text{ 不是整数},\\ -[x], & \text{若 } x \text{ 为整数};\end{cases}\qquad \{-x\}=1-\{x\};$$

$$\left[\frac{[x]}{n}\right]=\left[\frac{x}{n}\right];[n+x]=n+[x]; \tag{3.57}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left[x+\frac{k}{n}\right]=[nx]. \tag{3.58}$$

(1) $[x]$ 是 x 的递增函数，即 $x_1<x_2$ 时 $[x_1]\leqslant[x_2]$.

(2) $x-1<[x]\leqslant x<[x]+1;\ 0\leqslant\{x\}<1.$ (3.59)

(3) $[x]=0\Leftrightarrow 0\leqslant x<1$；若 $[x]=[y]$，则 $|x-y|<1$.

(4) $[x]+[y]\leqslant[x+y]\leqslant[x]+[y]+1;$ (3.60)

$$\sum_{k=1}^{n}[x_k]\leqslant\left[\sum_{k=1}^{n}x_k\right]. \tag{3.61}$$

特别： $n[x]\leqslant[nx].$ (3.62)

(5) $[x]-[y]-1\leqslant[x-y]\leqslant[x]-[y].$ (3.63)

(6) $\{x+y\}\leqslant\{x\}+\{y\}.$ (3.64)

(7) $\sum_{k=1}^{m}[nx_k]\geqslant(n-1)\left[\sum_{k=1}^{m}x_k\right]+\sum_{k=1}^{m}[x_k].$ (3.65)

特别： $[nx]+[ny]\geqslant(n-1)[x+y]+[x]+[y].$

$$\sum_{k=1}^{m}[nx_k] \geqslant \left[\sum_{k=1}^{m} x_k\right] + (n-1)\sum_{k=1}^{m}[x_k]. \tag{3.66}$$

(8)　当 $1 \leqslant n \leqslant 5$ 时，

$$[nx]+[ny] \geqslant [x]+[y]+[(n-2)x+y]+[x+(n-2)y]. \tag{3.67}$$

当 $n \geqslant 6$ 时，上式不成立. 特别 $n=5$ 时得到：

$$[5x]+[5y] \geqslant [3x+y]+[3y+x]+[x]+[y]. \tag{3.68}$$

(3.68) 式是下述[MCM] 的改进：

$$[5x]+[5y] \geqslant [3x+y]+[3y+x].$$

(张宁生等，北京师院学报，1992，3：82 ～ 87 和[38]579 ～ 580)

(9)　若 $x, y \geqslant 0$，则 $[x][y] \leqslant [xy]$. (3.69)

(10)　若 $x \geqslant 1, y > 0$，则

$$\left[\frac{y}{x}\right] \leqslant \frac{[y]}{[x]}. \tag{3.70}$$

证　令 $z=\dfrac{y}{x}$，则

$$[y]=[zx]=[([z]+\{z\})([x]+\{x\})]=[[z][x]+[z]\{x\}+\{z\}[x]+\{z\}\{x\}].$$

由于 $x \geqslant 1, y > 0, z > 0$，所以，$[z]\{x\}+\{z\}[x]+\{z\}\{x\} \geqslant 0$，从而 $[y]=[zx] \geqslant [[z][x]]=[z][x]$. 由此得出(3.69).

(11)　设 $x > 0$，则

$$\frac{[nx]}{n} \leqslant \frac{[n!x]}{n!}; \tag{3.71}$$

$$0 \leqslant [nx]-n[x] \leqslant n-1. \tag{3.72}$$

证　因为 $0 \leqslant \{x\} < 1$，对给定的 n，总存在自然数 $k, 1 \leqslant k \leqslant n$，使得 $\dfrac{k-1}{n} \leqslant \{x\} < \dfrac{k}{n}$. 从而 $[n\{x\}]=k-1$，于是，

$[nx]=[n[x]+n\{x\}]=n[x]+[n\{x\}]=n[x]+k-1 \leqslant n[x]+n-1$，此即(3.72)式右边不等式，由(3.62) 式知，(3.72) 式左边不等式对所有实数 x 成立.

(12)　[MCM]. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{[kx]}{k} \leqslant [nx]$. (3.73)

证　用数学归纳法，当 $n=1,2$ 时，(3.73) 式显然成立，设(3.73) 式对 $m \leqslant n-1$ 均成立，令

$f(n)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{[kx]}{k}$，则 $f(n)=f(n-1)+\dfrac{[nx]}{n}$，即

$$nf(n)-nf(n-1)=[nx]. \tag{3.74}$$

从而

$$(n-1)f(n-1)-(n-1)f(n-2)=[(n-1)x],$$

……

$$2f(2)-2f(1)=[2x], f(1)=[x].$$

将以上各式相加得

$$nf(n)-\sum_{k=1}^{n-1}f(k)=\sum_{k=1}^{n}[kx]. \tag{3.75}$$

由归纳假设，$f(m)\leqslant[mx],1\leqslant m\leqslant n-1.$ (3.76)

于是 $nf(n)\leqslant\sum_{m=1}^{n-1}[mx]+\sum_{k=1}^{n}[kx]\leqslant n[nx]$. 即 $f(n)\leqslant[nx]$. 证毕.

(13) $x>0$ 时，$n[x]\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{[kx]}{k}$. (3.77)

(14) 设 $x>0,1\leqslant m\leqslant n,k\leqslant x<k+1$，若 $k+\frac{m-1}{n}\leqslant x<k+\frac{m}{n+1}$，则

$$[nx]\geqslant\frac{n}{n+1}[(n+1)x]; \tag{3.78}$$

若 $k+\frac{m}{n+1}\leqslant x<k+\frac{m}{n}$，则

$$[nx]<\frac{n}{n+1}[(n+1)x]. \tag{3.79}$$

(董义宏，数学教学研究，1998，2:42 ~ 43)

(15) 设 m,n 为整数，且 $n>0$，则

$$0\leqslant n\{\frac{m}{n}\}\leqslant n-1. \tag{3.80}$$

(16) 设 $f(n)=\sqrt{2}n-[\sqrt{2}n],m>n>1$，则

$$|f(m)-f(n)|>\frac{1}{4(m-n)}. \tag{3.81}$$

(17) **Vinogradov 不等式**：设 f 在 $[a,b]$ 上有二阶连续导数，且满足 $\frac{1}{p}\leqslant|f''(x)|\leqslant\frac{k}{p}$，$(p>2,k\in N)$. 则

$$\left|\sum_{a<x\leqslant b}\{f(x)\}-\frac{1}{2}(b-a)\right|<\frac{2k^2(b-a)\ln p+8kp}{p^{1/3}}. \tag{3.82}$$

(证明见[76]147)

10. 设 $f(n)$ 是定义于自然数集 N 上的复值函数，对于固定的 k，当 $n_1\equiv n_2 \pmod k$ 时，$f(n_1)=f(n_2)$，$|f(n)|\leqslant1$，而当 $(n,k)>1$ 时，$f(n)=0$，$\sum_{n=1}^{k}f(n)=0$，则

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}f(n)/n\right|<\log k-\frac{1}{k}. \tag{3.83}$$

(证明见[77]47)

11. 设 $n_1<n_2<\cdots<n_k\leqslant2k$，其中任意两个自然数的最小公倍数大于 $2k$，则

$$n_1>[2k/3]$$

证明：用反证法. 设 $n_1\leqslant[2k/3]$，则 $3n_1\leqslant2k$. 考虑 $2n_1,3n_1,n_2,\cdots,n_k$ 这 $k+1$ 个整数的集合，没有一个能被另一个整除，这是不可能的. 证毕.

12. 设 $n_0<n_1<n_2<\cdots<n_m$，$[n_k,n_j]$ 表示自然数 n_k,n_j 的最小公倍数，则

$$S_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{[n_{k-1}, n_k]} \leqslant 1 - 2^{-m}. \tag{3.84}$$

提示:用数学归纳法直接证 $S_m \leqslant 1 - 2^{-m}$ 是很困难的.用“加强命题”技巧,再用数学归纳法易证 $S_m \leqslant n_0^{-1}(1 - 2^{-m})$.事实上,当 $m = 1$ 时,由 $n_0 < n_1$ 得$[n_0, n_1] \geqslant 2n_0$,即 $\frac{1}{[n_0, n_1]} \leqslant \frac{1}{2n_0} = \frac{1}{n_0}\left(1 - \frac{1}{2}\right)$.若 $S_m \leqslant (1 - 2^{-m})n_0^{-1}$ 成立,则

$$S_{m+1} \leqslant \frac{1}{[n_0, n_1]} + \frac{1}{n_1}(1 - 2^{-m});$$

当 $n_1 \geqslant 2n_0$ 时,从$[n_0, n_1] \geqslant n_1 \geqslant 2n_0$ 知

$$S_{m+1} \leqslant \frac{1}{2n_0} + \frac{1}{2n_0}(1 - \frac{1}{2^m}) = \frac{1}{n_0}(1 - 2^{-(m+1)}).$$

当 $n_1 < 2n_0$ 时,设 n_0, n_1 的最大公约数为 d,即 $n_0 = pd, n_1 = qd$,其中 p, q 为互素的自然数,且$[n_0, n_1] = pqd$.又由于 $n_0 < n_1 < 2n_0$,故 $p + 1 \leqslant q < 2p$.从而

$$\frac{1}{[n_0, n_1]} + \frac{1}{n_1}(1 - 2^{-m}) - \frac{1}{n_0}[1 - 2^{-(m+1)}] = \frac{1}{pqd} + \frac{1}{qd}(1 - 2^{-m}) - \frac{1}{pd}[1 - 2^{-(m+1)}]$$

$$= \frac{1}{d}[\frac{1 + p - q}{pq} + \frac{q - 2p}{pq}2^{-(m+1)}] < 0,$$

于是 $S_{m+1} \leqslant (1/n_0)[1 - 2^{-(m+1)}]$,证毕.

13. [MCM].设 m 个自然数 $n_k(1 \leqslant k \leqslant m, m \geqslant 3)$ 排成一圈时,间隔相邻的两数之和与中间数之比 $f(k) = (n_k + n_{k+2})/n_{k+1}$ 都是自然数,则

$$2m \leqslant \sum_{k=1}^{m} f(k) \leqslant 3m, \tag{3.85}$$

式中 $n_{m+j} = n_j, j = 1, 2$.提示:用数学归纳法.

14. **Fibonacci 数列不等式**:若数列$\{F_n\}$满足 $F_1 = F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}(n \geqslant 3)$ 时称为 **Fibonacci 数列**,它的基本性质有:

(1) $$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\{(\frac{1 + \sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1 - \sqrt{5}}{2})^n\}. \tag{3.86}$$

(2) $$\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1; \quad \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} F_k = 1 - F_{2n-1}. \tag{3.87}$$

(3) $$\sum_{k=1}^{n} F_{2k-1} = F_{2n}; \sum_{k=1}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1. \tag{3.88}$$

(4) $$\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}. \tag{3.89}$$

(5) $\{F_n\}$ 的母函数是 $$G(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n. \tag{3.90}$$

(6) $$F_{n+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} F_k \leqslant F_{n+2}. \tag{3.91}$$

(7) $$\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} < F_n < \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}. \tag{3.92}$$

证 利用(3.86)式.

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，所以$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$是$\frac{F_n}{F_{n+1}}$的最佳逼近分数.

(8) **Shapiro 不等式：**

$$F_nF_m < F_{n+m};\ F_n^m < F_{nm}. \tag{3.93}$$

提示：先证明 $F_{n+m}=F_mF_{n+1}+F_{m-1}F_n$.

(9) 若在十进制记数下，F_n 的位数为 $N(n)$，则当 $n\geqslant 17$ 时，$\frac{n}{5}\leqslant N(n)\leqslant\frac{n}{4}$.

(10) $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{F_k}{2^k}<2$.

注 为整数序列$\{L_n\}$满足：$L_1=1, L_2=2, L_n=L_{n-1}+L_{n-2}, (n\geqslant 3)$，则称$\{L_n\}$为 **Lucas 数列**，它满足：

(11) $$1+\frac{1}{L_n^{1/n}}\leqslant L_{n+1}^{1/n}. \tag{3.94}$$

(12) 当 n 为奇数时，下式成立

$\operatorname{arccot}L_{n-1}<\operatorname{arccot}L_n+\operatorname{arccot}L_{n+1}$. ([345]2003,5:47 ~ 48)

$\{F_n\}$、$\{L_n\}$都可看成二阶循环级数$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$的特例，详见周持中的专著："斐波那契 — 卢卡斯序列及其应用"，湖南科学技术出版社，1993.

(13) 若$\{F_n\}$中取$F_0=0, F_1=1$，$\{L_n\}$中取$L_0=2, L_1=1$，它们都满足循环关系：$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$，则：

① $\frac{1}{2}(F_n^{\frac{1}{F_n}}+L_n^{\frac{1}{L_n}})\leqslant 2-\frac{F_{n+1}}{F_{2n}}$，② $1+\frac{2nc}{L_{2n}}\leqslant\frac{1}{2}(L_{2n}^{\frac{1}{L_{2n}}}+F_{2n}^{\frac{1}{F_{2n}}})\leqslant 1+\frac{2nc}{F_{2n}}$，式中 $c=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$. ([305]116(10)(2009)E11339)

15. **连分数不等式**：设 a_k 为实数，则

$$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{}{\ddots+\cfrac{1}{a_n}}} \tag{3.95}$$

称为有限连分数，记为$[a_1, a_2, \cdots, a_n]$，特别当 a_1 为整数，$a_2, \cdots, a_n$ 为正整数时，(3.95) 式称为简单连分数，(3.95) 式中的 a_k 也可推广到复数或一般的函数.

$[a_1, a_2, \cdots, a_k]=\frac{p_k}{q_k}$ $(1\leqslant k\leqslant n)$ 称为(3.95) 的第 k 个渐近分数. 于是

$$\frac{p_1}{q_1}=\frac{a_1}{1}, \frac{p_2}{q_2}=a_1+\frac{1}{a_2}, \frac{p_3}{q_3}=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3}},$$

一般地，p_n, q_n 满足递推关系：

$$p_1=a_1, q_1=1, p_2=a_2a_1+1, q_2=a_2, \cdots,$$
$$p_k=a_kp_{k-1}+p_{k-2},\ q_k=a_kq_{k-1}+q_{k-2}. \tag{3.96}$$

每个有限简单连分数都表示一个有理数，而每个无限简单连分数表示一个实数.

(1) 简单连分数的渐近分数的分母 q_n 是递增的，即 $1=q_1\leqslant q_2<\cdots$，而且当 $n>2$ 时.

$$q_n \geqslant \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}. \tag{3.97}$$

(2) 任意连分数的渐近分数必满足：

$$\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_5}{q_5} < \cdots < \frac{p_6}{q_6} < \frac{p_4}{q_4} < \frac{p_2}{q_2}. \tag{3.98}$$

即 $\frac{p_{2k-3}}{q_{2k-3}} < \frac{p_{2k-1}}{q_{2k-1}} < \frac{p_{2k}}{q_{2k}} < \frac{p_{2k-2}}{q_{2k-2}}$；而且

$$0 < \frac{p_{2k}}{q_{2k}} - \frac{p_{2k-1}}{q_{2k-1}} = \frac{1}{q_{2k}q_{2k-1}} \leqslant \frac{1}{(2k-1)(2k-2)}. \tag{3.99}$$

(3) 设 α 为无理数，则

$$\frac{1}{2q_{n+1}q_{n+2}} < \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_{n+1}^2}, \tag{3.100}$$

事实上，$\frac{p_n}{q_n}$ 是 α 的最佳逼近，即若 $0 < q \leqslant q_k$，$\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$，则

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|.$$

例如圆周率 π 的前几个渐近分数为 $\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \cdots$，

$$\left|\pi - \frac{355}{113}\right| < \frac{1}{113 \times 33102} < \frac{1}{10^6}.$$

设 $\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ 分别是实数 α 的连分数展开式中第 n 个和 $n+1$ 个渐近分数，则

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| > \left|\frac{p_n + p_{n+1}}{q_n + q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{q_n(q_n + q_{n+1})}.$$

注 连分数的一般形式是

$$f = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cdots}} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2 +} \frac{a_3}{b_3 +} \cdots,$$

有限连分数 $f_n = \frac{A_n}{B_n} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2 +} \cdots \frac{a_n}{b_n}$.

若 $\forall a_k, b_k > 0$，则 $f_{2n} < f_{2n+2} < f_{2n+1} < f_{2n-1}$.（[101]19）

(4) **Dirichlet 不等式**：对任意实数 α 和 $\beta > 1$，必存在有理数 p/q，使得

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q\beta},\ q \leqslant \beta. \tag{3.101}$$

(5) **Hurwitz 不等式**：对任意实数 α，必存在无限多个有理数 p/q，使得

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}. \tag{3.102}$$

式中 $\sqrt{5}$ 是最佳常数.

(3.101) 式和 (3.102) 式均可用连分数理论证明，华罗庚在[76]143 ~ 145 中用 n 级 Farey 序列的性质证明；还可用抽屉原理证明：考虑 $q+1$ 个实数 $\beta_k = k\alpha - [k\alpha]$，$0 \leqslant k$

$\leqslant q$，它们分布在半开区间$[\frac{k}{q},\frac{k+1}{q})$内，$0\leqslant k\leqslant q-1$，这$q$个区间的并集是半开区间$[0,1)$，它包含上述$q+1$个实数$\{\beta_k\}$，于是有一个半开区间至少包含两个不同的$\beta_k$，记为$\beta_k$，$\beta_m$. 于是$|\beta_k-\beta_m|\leqslant\frac{1}{\beta}$. 记$k-m=q$，$[k\alpha]-[m\alpha]=p$，则$1\leqslant q<\beta$，且(3.101)式成立.

设$\sqrt{a}$为无理数，r为有理数且满足$r<\sqrt{a}<r+1$，则

$$r+\frac{a-r^2}{2r+1}<\sqrt{a}<r+\frac{a-r^2}{2r+1}+\frac{1}{4(2r+1)}.$$

注 从 Hurwitz 不等式(3.102)可看出，任何无理数α，都存在无限多个有理数p/q作为它的近似值，并且可以达到$1/q^2$的精确度，反之，若存在$\delta>0$及有理数列$r_n=\frac{p_n}{q_n}$，使得$\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{q_n^{(1+\delta)}}$，则$\alpha$必为无理数. 1978年，法国阿贝瑞由此证明了$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$为无理数，但$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k+1}}(k\geqslant 2)$是否为无理数仍未解决.

(6) 设α是实n次代数数，则只存在有限个有理数p/q，使得

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\leqslant\frac{1}{q^{n+1}},q>0. \tag{3.103}$$

Thue 不等式：设α是次数$n\geqslant 3$的代数数，则

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\leqslant\frac{1}{q^s} \tag{3.104}$$

当$s>\frac{n}{2}+1$时只有有限多组整数解p和$q>0$，(p和q互素)，Siegel 证明(3.104)式对$s>2\sqrt{n}$时成立.（[354]1921，10：173 ~ 213）

(7) **Thue-Siegel-Roth 不等式(TSR 不等式)**：设α是无理代数数，$\delta>0$任意小，则

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\leqslant\frac{1}{q^{2+\delta}} \tag{3.105}$$

只有有限多组整数解p和$q>0$ (p和q互素).

(8) **Roth 不等式**：设α为无理代数数，则$\forall\delta>0$，$\exists c=c(\delta)>0$，使得$|\alpha-(p/q)|>cq^{-(2+\delta)}$.（[107]3：181）

16. **Diophantus 不等式**：Diophantus 问题的原始含义是求方程的整数解，或有理数解，并给出这些解的界限，我们可将方程的系数和解的范围扩大，如代数整数、代数数、多项式、有理函数或代数函数，在多项式的情形，则要求控制多项式解的次数，关于 Diophantus 问题的解的大小的不等式通称为 Diophantus 不等式.

(1) **Khinchin 不等式**：设$\varphi(k)>0$是对整数$k>0$定义的一个单调递减函数，若级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varphi(k) \tag{3.106}$$

发散，则对几乎所有的实数α，

$$\|\alpha k\|<\varphi(k) \tag{3.107}$$

在整数$k>0$中有无穷多个解，其中$\|x\|$是x到最近整数的距离，“几乎所有”是指在相

应空间的 Lebesgue 意义下. 更一般地,若

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\varphi(k))^m$$

发散,则对几乎所有$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in R^n$,

$$\max\{\|\alpha_1 k\|,\|\alpha_2 k\|,\cdots,\|\alpha_n k\|\}<\varphi(k) \tag{3.108}$$

有无穷多个解.

由此可推出:对几乎所有实数 α,存在无穷多个有理逼近 p/q,使得

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2\ln q}; \tag{3.109}$$

反之,任给 $\varepsilon>0$.

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2(\ln q)^{1+\varepsilon}}. \tag{3.110}$$

只能对测度为零的数 α 的集合有无穷多个解. (Cassels,J. W. S. ,An introduction to diophantine approximation,Cambridge Univ. Press,1957)

1976 年,Montgomery,H. L. 提出,是否对每个无理数 α 及每个 $\varepsilon>0$,都存在无穷多个素数 p,q,满足

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^{2-\varepsilon}}. \tag{3.111}$$

(Proc. of Symposia in Pure Math. 1976,28:307 ~ 310)

(2) **Mahler 不等式**:1932 年,Mahler 提出猜想:对几乎所有(在 Lebesgue 测度意义下)的数 $\omega\in R^1$,

$$|P_n(\omega)|\leqslant|H(P_n)|^{-n-\varepsilon} \tag{3.112}$$

只有有限多个次数不超过 n 的多项式 $P_n(x)$ 成立,其中 $\varepsilon>0$,$H(P_n)$ 是 P_n 的系数绝对值的最大值. 与之等价的叙述是:对于几乎所有的 $\omega\in R^1$.

$$\max\{\|\omega q\|,\cdots,\|\omega^n q\|\}<q^{-\frac{1}{n}-\varepsilon} \tag{3.113}$$

只有有限多个整数解 q,其中 $\|\alpha\|$ 是 α 到最近整数的距离:1964 年 Sprindzhuk,V. G,证明了上述猜想. ([321]1932,106:131 ~ 139,和 Amer. Math. Soc. 1969)

(3) 1990 年,Lang S. 在一篇综合报告中谈到了 Diophantus 不等式的新旧猜想. (Bulletin(New Series) of AMS,1990,23(1):37 ~ 75)

17. 对于任意实数 α 和任意自然数 n,成立

$$\prod_{k=0}^{n}|\alpha-k|\geqslant\|\alpha\|\frac{n!}{2^n}. \tag{3.114}$$

其中 $\|\alpha\|$ 表示 α 最接近于整数的距离.

证 设 $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 表示集合$\{0,1,\cdots,n\}$中的数,且满足 $|\alpha-\alpha_0|\leqslant|\alpha-\alpha_1|\leqslant\cdots\leqslant|\alpha-\alpha_n|$,对于每个自然数 k,位于区间$(\alpha-k/2,\alpha+k/2)$内属于上述集合的数不多于 k 个,因此,$|\alpha-\alpha_k|\geqslant k/2$,$(1\leqslant k\leqslant n)$. 又因为 $|\alpha-\alpha_0|\geqslant\|\alpha\|$,所以

$$\prod_{k=0}^{n}|\alpha-k|\geqslant\|\alpha\|\frac{n!}{2^n}.$$

注 这种证明方法称为**逻辑推理法**. 这类方法在国内外数学竞赛中是经常出现的，而学校教学中又往往缺乏这方面的内容，因此，应该引起重视.

18. [MCU].(1) 任给 $\varepsilon > 0$，可找自然数 n，使得

$$\left|\sin n - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon. \tag{3.115}$$

证明：记 $n(\bmod 2\pi)$ 为这样的数 x：$-\pi \leqslant x < \pi$，使得对于整数 $k \geqslant 0$，有 $n = 2k\pi + x$. 又记 $\Delta(\varepsilon) = (\arcsin(\frac{1}{2} - \varepsilon), \arcsin(\frac{1}{2} + \varepsilon)$. 不难看出，存在这样的自然数 n，使得 $n(\bmod 2\pi) \in \Delta(\varepsilon)$. 设 σ 为区间 $\Delta(\varepsilon)$ 的长度，自然数 $m > \frac{2\pi}{\sigma} + 1$，点 $1(\bmod 2\pi), \cdots, m(\bmod 2\pi)$ 位于区间 $(-\pi, \pi)$ 上，因此有这样的 $i, j, (1 \leqslant i < j \leqslant m)$，使得

$$|j(\bmod 2\pi) - i(\bmod 2\pi)| < \frac{2\pi}{m-1} < \sigma.$$

记 $r = j - i$，得到 $|r(\bmod 2\pi)| < \sigma$，所求的 n 使得 $n(\bmod 2\pi) \in \Delta(\varepsilon)$. 现在不难得出 n 为 r 的倍数.

(2) 设 m 不是平方数，则 $|\sin(\pi n\sqrt{m})| \geqslant (n \cdot \sqrt{m} + 1)^{-1}$.

证 设 k 满足 $k < n \cdot \sqrt{m} < k + 1$，因为 $k^2, n^2 m$ 为自然数，于是 $k^2 + 1 \leqslant n^2 m \leqslant k^2 + 2k$.

① 若 $k < n\sqrt{m} < k + (1/2)$，则

$$|\sin(\pi n\sqrt{m})| \geqslant |\sin\pi\sqrt{k^2+1})| = \sin\pi(\sqrt{k^2+1} - k)$$

$$= \sin\frac{\pi}{\sqrt{k^2+1}+k} > \sin\frac{\pi}{2(k+1)} > \frac{1}{k+1} > \frac{1}{1+n\sqrt{m}};$$

② 若 $k + \frac{1}{2} < n\sqrt{m} < k + 1$，则

$$|\sin(\pi n\sqrt{m})| > \left|\sin(\pi\sqrt{k^2+2k})\right| = \sin\pi(k+1-\sqrt{k^2+2k})$$

$$= \sin\frac{\pi}{k+1+\sqrt{k^2+2k}} > \sin\frac{\pi}{2(k+1)} > \frac{1}{k+1} > \frac{1}{1+n\sqrt{m}}.$$

19. **联立渐近不等式**：对于任意 n 个实数 $a_1, \cdots, a_n$，都存在不同时为零的整数 $k_1, \cdots, k_n$，及自然数 m，使得

$$\left|a_j - \frac{k_j}{m}\right| \leqslant \frac{n}{n+1} \cdot m^{-(1+1/n)}, 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{3.116}$$

提示：用重积分计算以原点为对称中心的 $n+1$ 维凸体的体积，然后用几何算术平均不等式. 类似可证明：

若 $a_k = \beta_k + i\gamma_k$ 是 n 个复数，则存在 $n+1$ 个复数 $z_k (1 \leqslant k \leqslant n)$ 和 ω，使得

$$\left|a_k - \frac{z_k}{\omega}\right| \leqslant \frac{n}{n+1}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2n+1}{n+1} \cdot \frac{4}{\pi}\right)^{\frac{1}{2n}} |\omega|^{-(1+1/n)}. \tag{3.117}$$

([76]619 ~ 620)

20. **Mahlc 不等式**：存在 $1 < m < n$，使得

$$\frac{1}{m^{42}} < \left|\pi - \frac{n}{m}\right| < \frac{\pi}{2m}. \tag{3.118}$$

(Indag Math. 1953, 15:30 ~ 42). 由此推出

$$\frac{2}{\pi n^{41}} < \frac{2}{\pi} \mid n - m\pi \mid < \mid \sin(n - m\pi) \mid = \mid \sin n \mid < 1.$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} \mid \sin n \mid^{1/n} = 1$.

21. **Dirichlet 特征标不等式**：设 $\varphi(n) = \varphi(n,k)$ 满足：(1) $\varphi(n) \neq 0$；(2) $\varphi(n)\varphi(m) = \varphi(nm)$；(3) $\varphi(n) = \varphi(n+k)$，则称 $\varphi(n)$ 是模 k 的 Dirichlet 特征标，特征标的和函数为

$$S(n,m) = \sum_{j=m+1}^{n} \varphi(j). \tag{3.119}$$

若 $\varphi_0(n) = \begin{cases} 1, & 若(n,k) = 1, \\ 0, & 若(n,k) \neq 1, \end{cases}$ 则称 $\varphi_0(n)$ 为主特征标.

若(3.119)式中的 $\varphi(j)$ 是模 k 的非主特征标，则成立 **Vinogradov 不等式**：

$S(n,m) \ll \sqrt{k}\ln k$. 当 k 为素数时，

$$S(n,m) \ll k^{\beta}(n-m)^{1-\frac{1}{r}}\ln k, 式中\ \beta = \frac{r+1}{4r^2}.\ r = 1,2,\cdots.$$

Vinogradov 猜想：对任给 $\varepsilon > 0, 1 \leqslant m < n$，有

$$\mid S(n,m) \mid \ll k^{\varepsilon}(n-m)^{1/2}. \tag{3.120}$$

(Vinogradov, I. M., Selected works, Springer, 1985)

22. **陈景润不等式**：设 $P_x(1,2)$ 表示将 x 表为一个素数与两个素数乘积之和的表示法，则

$$P_x(1,2) \geqslant \frac{0.8xc_x}{(\ln x)^2}.\ ([364]1978,5)$$

23. 设 p, q 为整数，$q \neq 0$，则 $\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{3q^2}$. ([345]1979, 1:33)

24. $\left|e - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{(s(q)+1)!}$. 式中 $s(q)$ 是使得 $s(q)!$ 是 q 之倍数的最小正整数.

例如，若 $1 \leqslant q \leqslant 5$，则 $s(q) = q$，$s(6) = 3$.

25. $\forall \varepsilon > 0$，存在一个正常数 $q(\varepsilon)$，使得 $\forall p$ 和 $\forall q \geqslant q(\varepsilon)$，下式成立

$$\left|e - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}.$$

(No. 24, 25 见[305]113(7)(2006), 638 ~ 641)

26. **最大公约数的均值不等式**

设 $\gcd(m,n)$ 表示 m,n 的最大公约数，n 的标准素因子分解为 $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$，式中 $s = \omega(n)$ 表示 n 的不重复的素因子个数. $\sum\limits_{m\leqslant x}$ 表示对不大于 x 的正整数 m 求和. 则

$$x\prod_{k=1}^{s}\left[1+\alpha_k\left(1-\frac{1}{p_k}\right)\right] - n < \sum_{m\leqslant x}\gcd(m,n) < x\prod_{k=1}^{s}\left[1+\alpha_k\left(1-\frac{1}{p_k}\right)\right].$$

(胡中传，[351]2007, 1:21 ~ 25)

第三章　代数不等式

本章重点是讨论有限和与有限积的不等式.无穷和与无穷乘积的问题放在第 11 章讨论.

1.　[MCM]. $P_{2n}(x)=\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\frac{x^k}{k!}>0.(x\in R^1)$.

证 1　(1)　若 $x\leqslant 0$,则 $P_{2n}(x)$ 的任一项 $a_k=(-1)^k\frac{x^k}{k!}\geqslant 0$.

而 $a_0=1$,从而 $P_{2n}(x)\geqslant 1$.

(2)　若 $x\geqslant 2n$,则 $P_{2n}(x)$ 的项可以组合成每项均非负:

$$P_{2n}(x)=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{2k-1}}{(2k)!}(x-2k)\geqslant 1.$$

(3)　若 $0\leqslant x\leqslant 2n$.则 $P_{2n}(x)$ 是$[0,2n]$上连续函数.从而在该区间上必有最小值,记为m.若 $P_{2n}(0)$ 或 $P_{2n}(2n)=m$.则从(1)(2)知 $m=1$.从而 $0<x<2n$ 时,$P_{2n}(x)>0$;若 $P_{2n}(x)$ 在$[0,2n]$的某一内点 x_0 达到最小值,即 $P_{2n}(x_0)=m$.则 $\exists\delta>0$,使 $\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap(0,2n)$,$x\neq x_0$,有 $P_{2n}(x)>P_{2n}(x_0)$.从而 $P'_{2n}(x_0)=0$,即

$$P'_{2n}(x_0)=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\frac{x_0^{k-1}}{(k-1)!}=\frac{x_0^{2n}}{(2n)!}-P_{2n}(x_0)=0.$$

从而 $P_{2n}(x_0)=\frac{x_0^{2n}}{(2n)!}>0$,所以,$P_{2n}(x)>P_{2n}(x_0)>0$.证毕.

证 2　不用微分方法,也可利用组合恒等式

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{k}=(-1)^m\binom{n-1}{m},$$

并考察

$$P_{2n}(x)P_{2n}(-x)=1+\frac{x^{2n+2}}{(2n)!(n+1)}+\frac{x^{2n+4}}{(2n)!3!(n+2)}+\frac{x^{2n+6}}{(2n)!5!(n+3)}+\cdots+\frac{x^{4n}}{((2n)!)^2}.$$

注　从(1)可直接推出 $Q_{2n}(x)=\sum_{k=0}^{2n}\frac{x^k}{k!}>0$ 对所有实数 x 也成立.设 $x>0$,则

$$\sum_{k=0}^{[x]}\frac{(-1)^k(x-k)^ke^{x-k}}{k!}<2x+1.$$

([305]1996,103(6),E10531)

2.　设 $x\geqslant 0,m>n,P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}x^k$,记 $f(x)=\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$,$g(x)=x^{n-m}f(x)$.
则:(1)　f 在$[0,\infty)$上严格递增;　(2)　g 在$[0,\infty)$上严格递减;

(3) 当 $0 < x < 1$ 时，从 $f(0) < f(x) < f(1)$ 和 $g(x) > g(1)$ 得出

$$\max\{1, x^{m-n}\frac{m+1}{n+1}\} < f(x) < \frac{m+1}{n+1} < g(x);$$

当 $1 < x < \infty$ 时，从 $f(x) > f(1)$ 和 $g(\infty) < g(x) < g(1)$ 得出

$$1 < g(x) < \frac{m+1}{n+1} < f(x) < \frac{m+1}{n+1}x^{m-n}.$$

3. 设 $f_n(x) = \dfrac{1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n}}{x+x^3+\cdots+x^{2n-1}}$,

(1) 若 $x > 0, x \neq 1, n \geqslant 2$，则

$$f_n(x) > 1 + \frac{1}{n} + (\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^2 > \frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})(x+\frac{1}{x}) > (1+\frac{1}{n}).$$

注 $f_n(x)$ 的右边头两个下界是 Taylor, C. 1868 年给出的，但没有比较两个下界的大小(转引[4]276 ~ 277). 事实上，利用 $g(x) = x + (1/x)$ 在 $(0, \infty)$ 上的最小值为 $g(1) = 2$，容易推出上述三个下界的大小关系.

(2) 若 $x > 0$，则 $f_n(x)$ 关于 n 递减，即

$$f_{n+1}(x) < f_n(x).$$

4. [MCM]. 设 $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k, n \geqslant 2$. 则当 $x > 0$ 时，

(1) $\dfrac{P_n(x)}{P_n(x) - 1 - x^n} \geqslant \dfrac{n+1}{n-1}$， 仅当 $x = 1$ 时等号成立.

提示：不等式等价于

$$P_n(x) \leqslant \frac{n+1}{2}(1+x^n).$$

将其变形为

$$\sum_{k=1}^{n-1}(1-x^k)(1-x^{n-k}) \geqslant 0.$$

(2) $P_{2n}(x) \geqslant (2n+1)x^n$.

5. **Ross-Mahajan 不等式**：设 $|g_1(t)| \leqslant a_1 < 2$， $|g_2(t)| \leqslant a_2 < 2$， $x, t \in R^1$，

$$u(x,t) = \frac{x^2 + xg_1(t) + 1}{x^2 + xg_2(t) + 1}.$$

则

$$\frac{(4+a_1a_2) - 2(a_1+a_2)}{4-a_2^2} \leqslant u(x,t) \leqslant \frac{(4+a_1a_2) + 2(a_1+a_2)}{4-a_2^2}.$$

([331]1979, 634 ~ 677: 72 ~ 73)

(1) 当 $g_1(t) = \sin t, g_2(t) = \cos t$ 时，上式可改进为

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{3}(4-\sqrt{7}) \leqslant \frac{x^2 + x\sin t + 1}{x^2 + x\cos t + 1} \leqslant \frac{1}{3}(4+\sqrt{7}) < 3.$$

证 不妨设 $\sin t \neq \cos t$，记

$$y = \frac{x^2 + x\sin t + 1}{x^2 + x\cos t + 1}.$$

即$(y-1)x^2+(y\cos t-\sin t)x+(y-1)=0$.该二次方程的判别式$\Delta=(y\cos t-\sin t)^2-4(y-1)^2\geqslant 0$.易知$(y\cos t-\sin t)^2-4(y-1)^2=0$的两个实根为$y_1=\dfrac{2-\sin t}{2-\cos t}$,$y_2=\dfrac{2+\sin t}{2+\cos t}$.因为判别式$\Delta\geqslant 0\Leftrightarrow\min\{y_1,y_2\}\leqslant y\leqslant\max\{y_1,y_2\}$,于是,证二元函数$u(x,t)$不等式归结为证一元函数$y_1(t)$,$y_2(t)$的不等式:

$$\frac{1}{3}(4-\sqrt{7})\leqslant y_1,y_2\leqslant\frac{1}{3}(4+\sqrt{7}).$$

([4]328 ~ 329)

(2) 取$g_2(t)=-1$,$g_2(t)=1$,得到

$$\frac{1}{3}\leqslant\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\leqslant 3.$$

6. 设$y=f(x)=\dfrac{x^2-2x\cos\alpha+1}{x^2-2x\cos\beta+1}$,$\alpha+\beta\neq 2k\pi(k\in Z)$.

(1) 若$\sin\beta=0$,则

$$\frac{1}{2}[1+(-1)^k\cos\alpha]\leqslant y<\infty;$$

(2) 若$\sin\beta\neq 0$,则 $\min\{y_1,y_2\}\leqslant y\leqslant\max\{y_1,y_2\}$,

式中 $$y_1=\frac{1-\cos\alpha}{1-\cos\beta},y_2=\frac{1+\cos\alpha}{1+\cos\beta}.$$

提示:用与 No. 5(1) 类似的判别式法.

7. 设$f(x)=\dfrac{x^2-2ax+b^2}{x^2+2ax+b^2}$,$p=\dfrac{b-a}{b+a}$.

(1) 若$0<|a|<|b|$,则

$$\min\{p,1/p\}\leqslant f(x)\leqslant\max\{p,1/p\}$$

(2) 若$0<|b|<|a|$,则

$$f(x)\geqslant\max\{p,1/p\}\text{ 或 }f(x)\leqslant\min\{p,1/p\}.$$

提示:用判别式法.([4]267 ~ 268)

8. **Bernoulli 不等式:**设$x\geqslant -1$,则当$0<\alpha<1$时

$$(1+x)^\alpha\leqslant 1+\alpha x.\tag{8.1}$$

而当$\alpha<0$或$\alpha>1$时,不等号反向,仅当$x=0$时等号成立.

证 利用 Taylor 公式:

$$(1+x)^\alpha-1-\alpha x=\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2(1+\theta x)^{\alpha-2},0<\theta<1.\tag{8.2}$$

并注意到$1+\theta x>0$即可得证.

Bernoulli 不等式有许多变形、改进和推广.例如:

(1) 设$x>0$,$y>0$,$x\neq y$,则当$0<\alpha<1$时,

$$\alpha x^{\alpha-1}(x-y)<x^\alpha-y^\alpha<\alpha y^{\alpha-1}(x-y);$$

而当$\alpha>1$或$\alpha<0$时,两个不等号均反向.

(2)　若 $\alpha = n$ 为自然数，则

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx$$

对 $x \geqslant -2$ 也成立. 事实上，当 $-2 \leqslant x \leqslant -1$ 时，

$(1+x)^n \geqslant -|1+x|^n \geqslant -|1+x| = 1+x \geqslant 1+nx$.

(3)　设 $x > -1, 0 < \alpha < 1$，则

$$(1+x)^\alpha \geqslant 1+\frac{\alpha x}{1+(1-\alpha)x},$$

([305]1992,99(6):533). 若 $\alpha > 1$，且 $-1 < x < \dfrac{1}{\alpha-1}$ 时，上述不等号反向.

(4)　设 $\alpha_k \geqslant 0, x_k > -1$，且 $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k \leqslant 1$，则

$$\left\{1-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k(1+x_k)^{-1}\right\}^{-1} \leqslant \prod_{k=1}^{n}(1+x_k)^{\alpha_k} \leqslant 1+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k \tag{8.3}$$

若 $\alpha_k \geqslant 1, x_k > 0$ 或 $\alpha_k \leqslant 0, -1 < x_k < 0$，则右边不等号反向；若 $\alpha_k \geqslant 1, -1 < x_k < 0$ 或 $\alpha_k \leqslant 0, x_k > 0$ 而且 $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\alpha_k x_k}{1+x_k} < 1$，则左边不等号反向.

若令 $S_n = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k$，$y_k = 1+x_k$，则 $y_k \geqslant 0$，$S_n \leqslant 1$，于是上述不等式可写成

$$\left(1-S_n+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k y_k^{-1}\right)^{-1} \leqslant \prod_{k=1}^{n}y_k^{\alpha_k} \leqslant 1-S_n+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k y_k.$$

(5)　设 $0 < \alpha_k < 1$，令 $H_n = \prod_{k=1}^{n}(1-\alpha_k)+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k - 1$，则

$$H_n \geqslant H_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant H_2 > H_1 = 0.$$

(6)　设 $0 \leqslant x_k \leqslant 1$，或 $x_k \geqslant 1$，则当 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ 时，下式成立

$$\prod_{k=1}^{n}(1-\alpha+\alpha x_k) \leqslant 1-\alpha+\alpha\prod_{k=1}^{n}x_k.$$

(Elementa (Uppsala) 50(1967),156)

(7)　设 α 为实数，$-1 < M < \infty$. 令

$$f(x) = (1+x)^\alpha - 1 - \alpha x - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2(1+M)^{\alpha-2}. \tag{8.4}$$

当 $f(x)=0$ 时，由(8.2)知 $M = \theta x$，$0 < \theta < 1$.

①　设 $\alpha \in (-\infty,0) \cup (1,2)$，则

当 $-1 < x < M$，$M \geqslant 0$ 时，$f(x) \geqslant 0$；

当 $M < x < \infty$，$-1 < M \leqslant 0$ 时，$f(x) \leqslant 0$.

②　设 $\alpha \in (0,1) \cup (2,\infty)$，则

当 $-1 < x < M$，$M \geqslant 0$ 时，$f(x) \leqslant 0$；

当 $M < x < \infty$，$-1 < M \leqslant 0$ 时，$f(x) \geqslant 0$.

③　设 $-1 < x < M$，$M \geqslant 0$，则当 $0 < \alpha < 1$ 时，

$$(1+x)^{\alpha} \leqslant 1+\alpha x-\frac{\alpha(1-\alpha)}{2(1+M)^{2}} x^{2}. \tag{8.5}$$

当 $1<\alpha<2$ 时,不等号反向.

④ 设 $M<x<\infty$, $-1<M \leqslant 0$,则当 $1<\alpha<2$ 时,(8.5) 式成立.

当 $0<\alpha<1$ 时,(8.5) 中不等号反向.

([22]75 ~ 76)

(8) 设 $x_k>-1$, $\alpha_k>0$, $S_n=\sum_{k=1}^{n} \alpha_k=1$,

$$\bar{x}=\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k, \quad \sigma^{2}(x)=\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x_k-\bar{x})^{2}.$$

若 $x_1=\min\{x_1, \cdots, x_n\}$, $x_n=\max\{x_1, \cdots, x_n\}$,则

$$1+\bar{x}-\frac{\sigma^{2}(x)}{2(1+x_1)} \leqslant \prod_{k=1}^{n}(1+x_k)^{\alpha_k} \leqslant 1+\bar{x}-\frac{\sigma^{2}(x)}{2(1+x_n)},$$

仅当所有 x_k 相等时等号成立.([357]5(1979),101 ~ 105)

(9) 设 $|x| \leqslant 1$, $0<\alpha<1$,则 $(1+x)^{\alpha} \leqslant 1+\alpha x-\frac{\alpha(\alpha-1)}{8} x^{2}$. ([22]75)

(10) 设 $m \geqslant n$, $x>-1$,则

$$\binom{m}{k}\left(1+\frac{n}{m} x\right)^{k} \geqslant \sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}\binom{m-n}{k-j}(1+x)^{j}, \quad k=1, \cdots, m;$$

若 $m<n$, $x>-\frac{m}{n}$,则

$$\binom{n}{k}(1+x)^{k} \geqslant \sum_{j=0}^{k}\binom{m}{j}\binom{n-m}{k-j}\left(1+\frac{n}{m} x\right)^{j}, \quad k=1, \cdots, n.$$

仅当 $x=0$ 时等号成立.式中规定 $\binom{n}{k}=0\ (k>n)$, $\binom{n}{0}=1$.

(石焕南,[351]2007,3:274 ~ 279)

(11) 设 $x_k>-1$ 且 x_k 同号,$n \geqslant 2$,则

$$\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)>1+\sum_{k=1}^{n} x_k.$$

(12) 利用 $(1+x)^{\alpha}$ 的 Taylor 展开式:$\alpha \in R^{1}$, $\alpha \notin N$,

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k} x^{k}+r_n(x), \quad |x|<1.$$

式中

$$\binom{\alpha}{0}=1, \binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha(\alpha-1) \cdots(\alpha-k+1)}{k!}, \quad (k \in N).$$

利用余项的积分形式:

$$|r_n(x)|=\left|\frac{\alpha(\alpha-1) \cdots(\alpha-n)}{n!} \int_{0}^{x}(1+t)^{\alpha-n-1}(x-t)^{n} \mathrm{d} t\right|$$

$$\leqslant\left\{\frac{(\alpha-1)(\alpha-2) \cdots(\alpha-n)}{n!} x^{n}\right\}\left\{\alpha\left|\int_{0}^{x}(1+t)^{\alpha-1} \mathrm{d} t\right|\right\}.$$

令 $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k, u_n(x)=\binom{\alpha}{n}x^n$. 1968 年，Gerber 证明：当 $u_{n+1}(x)>0$ 时.

$$(1+x)^\alpha > S_n(x);$$

当 $u_{n+1}(x)<0$ 时，不等号反向.（[305]1968,75:875 ~ 876）

(13)　当 $\alpha>1, x>0$ 时，下式成立

$$(1+x)^\alpha > 1+\alpha x-\frac{1}{2}\alpha(1-\alpha)\left(\frac{x}{1+x}\right)^2.$$

(14)　1999 年，薛昌兴给出了 Bernoulli 不等式的隔离和推广：

①　设 $a>0, f(k)=\frac{k}{n}(a^{1/k}-1), g(k)=\frac{n}{k}(a^k-1)+1, k=1,2,\cdots,n-1$，则

$$a^{1/n}-1\leqslant f(n-1)\leqslant f(n-2)\leqslant\cdots\leqslant f(2)\leqslant f(1)=\frac{1}{n}(a-1);$$

$$a^n\geqslant g(n-1)\geqslant g(n-2)\geqslant\cdots\geqslant g(2)\geqslant g(1)=1+n(a-1).$$

仅当 $a=1$ 或 $n=1$ 时等号成立.

②　设 $-1<x<\infty$，令 $f(m)=1+nx+\frac{n}{m}\sum_{k=2}^{m}\binom{m}{k}x^k$，则

$$(1+x)^n\geqslant f(n-1)\geqslant f(n-2)\geqslant\cdots\geqslant f(2)=1+nx+\frac{n}{2}x^2\geqslant 1+nx,$$

仅当 $x=0$ 或 $n=1$ 时等号成立.

③　设 $-1<x<\infty$，若 $0\leqslant\alpha\leqslant m$，则

$$(1+x)^\alpha\leqslant 1+\alpha x+\frac{\alpha}{m}\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}x^k,$$

当 $\alpha\leqslant 0$ 或 $\alpha\geqslant m$ 时，不等号反向.

④　设 $1<x<\infty$，则当 $-1\leqslant\alpha\leqslant 0$ 时，

$$(1+x)^\alpha\geqslant 1+\frac{\alpha x}{1-\alpha x};$$

而当 $m\leqslant\alpha\leqslant m+1, m=1,2,\cdots,$ 时

$$1+\alpha x+\frac{\alpha}{m}\sum_{k=2}^{m}\binom{m}{k}x^k\leqslant(1+x)^\alpha\leqslant 1+\alpha x+\frac{\alpha}{m+1}\sum_{k=2}^{m+1}\binom{m+1}{k}x^k.$$

（甘肃教育学院学报，1999,3:5 ~ 7）

(15)　2001 年，文家金、罗钊证明：设 $\alpha>1$，且 $c_0=2.591121476\cdots$ 是方程 $\ln(1+c)=1+\frac{1}{1+c}$ 的唯一正实根，若 $x\leqslant -2-c_0$，则

$$(1+x)\,|1+x|^{\alpha-1}<1+\alpha x,$$

若 $x\geqslant -2-\frac{c_0}{\alpha}$，则

$$(1+x)\,|1+x|^{\alpha-1}\geqslant 1+\alpha x.$$

仅当 $x=0$ 时等号成立.（成都大学学报，2001,20(4):1 ~ 8）

(16)　Alzer. H. 给出了 Bernoulli 不等式的另一种加细：设 f 是[0,1]上正的凹函数，$x>-1, \alpha<0$ 或 $\alpha>1$，则

$$\frac{1+\alpha x}{(1+x)^\alpha}\leqslant\frac{\left(\int_0^1(f(t))^x\mathrm{d}t\right)^\alpha}{\int_0^1(f(t))^{\alpha x}\mathrm{d}t}\leqslant 1.$$

当 $0<\alpha<1$ 时反向不等式成立.([307]755 ~ 26009)

9.(1) 设 $1<\alpha\leqslant 2$,则存在正的常数 c,使得 $\forall x\in R^1$,下式成立

$$|1+x|^\alpha\geqslant 1+\alpha x+c\,\theta(x),\tag{9.1}$$

式中 $\theta(x)=\begin{cases}|x|^2, & |x|<1,\\ |x|^\alpha, & |x|\geqslant 1.\end{cases}$

证 令 $f(x)=|1+x|^\alpha-(1+\alpha x)$, $g(x)=f(x)/\theta(x)$.
于是,问题变成要证对所有实数 x,下式都成立

$$g(x)\geqslant c.\tag{9.2}$$

首先,从下述两个极限

$$\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1-\alpha x}{x^2}=\frac{\alpha(\alpha-1)}{2},$$

$$\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(1+x)^\alpha-1-\alpha x}{|x|^\alpha}=1.$$

可知,存在 $\sigma>0,\Delta>0,c>0$,使得 $|x|\leqslant\sigma$ 或 $|x|\geqslant\Delta$ 时

$$g(x)\geqslant c.\tag{9.3}$$

另一方面,$f'(x)=a\,|1+x|^{a-1}\mathrm{sgn}(1+x)-a$,

$$f''(x)=\alpha(\alpha-1)\,|1+x|^{\alpha-2}\quad(x\neq -1).$$

因为 $f''(x)>0,f'(0)=0$,所以,当 $x=0$ 时 $f(x)$ 有唯一的极小值.但 $f(0)=0$,从而当 $\sigma\leqslant|x|\leqslant\Delta$ 时,$f(x)>0$,于是 $g(x)>0$.若有必要,可减少(9.3)式中找到的 c,便可认为

$\sigma\leqslant|x|\leqslant\Delta$ 时,$g(x)\geqslant c$.从而(9.2)式得证.

(2) 设 $x>0,f(x)=(1+\frac{1}{x})^{x+p},g(x)=(1+\frac{1}{x})^x(1+\frac{p}{x}),h(x)=\left(1+\frac{p}{x}\right)^{x+1}$,

则 f,g 严格递减的充要条件是 $p\geqslant\frac{1}{2}$;而存在 $x_0>0$,使得 $x>x_0$ 时,f,g 严格递增的充要条件是 $p<\frac{1}{2}$;h 严格递减的充要条件是 $0<p\leqslant 2$,而存在 $x_0>0$,使得 h 严格递增的充要条件是 $p<0$ 或 $p>2$.这是 $x=n\in N$ 时 Schur 不等式(第 2 章 §1No.14)的推广(徐晓泉,[344]1993,4:78 ~ 79,91).

(3) 设 $2<\alpha<\infty$,则存在常数 c_1,c_2,使得 $\forall x\in R^1$,下式成立

$$1+\alpha x+c_1|x|^\alpha\leqslant|1+x|^\alpha\leqslant 1+\alpha x+\sum_{k=2}^{[\alpha]}\binom{\alpha}{k}x^k+c_2|x|^\alpha.$$

由此可推出:设 $2<p<\infty$, $f,g\in L^p[a,b]$,则存在常数 c_3,c_4,使得

$$\int_a^b|f+g|^p\leqslant\int_a^b|f|^p+p\int_a^b|f|^{p-2}fg+c_3\int_a^b|g|^p+c_4\sum_{k=2}^{[p]}\int_a^b|f|^{p-k}|g|^k.$$

([22]66).我们问:上述 $c_1 \sim c_4$ 的最佳值是多少?

10.　设 $0 \leqslant x \leqslant 1, p > 1$,则

(1)　[MCU]. $\frac{1}{2^{p-1}} \leqslant x^p + (1-x)^p \leqslant 1$;

(2)　$x^p(1-x^p) \leqslant \frac{1}{4}$;

(3)　$\sum_{k=1}^{n} x^k(1-x)^{2k} \leqslant \frac{4}{23}$;

(4)　设 $p,q \geqslant 1, (1/p)+(1/q) = (\ln 3/\ln 2)$,则

$$(1+x^p)^{1/p}(1+x^q)^{1/q} \leqslant 1+x+x^2$$

成立的充要条件是 $3(p+q) \leqslant 8$. (**Brown 不等式**,[306]93:26031)

11.　设 $0 \leqslant x \leqslant 1, 1 < p \leqslant 2, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,则

$$\left(\frac{1+x}{2}\right)^q + \left(\frac{1-x}{2}\right)^q \leqslant \left(\frac{1+x^p}{2}\right)^{\frac{1}{p-1}};$$

提示:$p=2$ 或 $x=0$ 或 1 时,不等式显然成立.当 $1<p<2, 0<x<1$ 时,作变换 $x=\frac{1-t}{1+t}$.不等式变为　$(1+t)^p+(1-t)^p-2(1+t^q)^{p-1} \geqslant 0$.

然后将上式左边的每项都作 Taylor 级数展开.

注　因为 $\frac{1}{p-1}=q-1$,所以,所证不等式等价于:$1<p\leqslant 2, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 时成立:

$$|x+y|^q + |x-y|^q \leqslant 2(|x|^p+|y|^p)^{q-1}.$$

式中 x,y 可为实数或复数.

12.　令 $f(x)=(1+x)^p+(1-x)^p-2^p, 0\leqslant x\leqslant 1$,则当 $p\geqslant 1$ 时,$f(x)\leqslant 0$,当 $0\leqslant p\leqslant 1$ 时,$f(x)\geqslant 0$.

提示:研究 f 在[0,1]上的单调性.

13.　设 $0\leqslant x\leqslant 1$,则当 $p\geqslant 2$ 时,下式成立

$$\left(\frac{1+x}{2}\right)^p + \left(\frac{1-x}{2}\right)^p \leqslant \frac{1}{2}(1+x^p).$$

推论　设 x,y 为实数或复数,则当 $2\leqslant p<\infty$ 时,

$$2(|x|^p+|y|^p) \leqslant |x+y|^p+|x-y|^p \leqslant 2^{p-1}(|x|^p+|y|^p).$$

14.　设 $0<x<1$,则 $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}x^{j-1}\right)^2 < (4\ln 2)(\sum_{k=0}^{n-1}x^{2k})$.式中 $4\ln 2$ 是最佳常数.

15.　设 $f(x)=x^n(1-x)$,则当 $0<x<1$ 时,$f(x)<\frac{1}{n\cdot e}$.

证　$f(x)$ 在 $x_0=\frac{n}{n+1}$ 处取得最大值,于是,$f(x)\leqslant f(x_0)=(\frac{n}{n+1})^n(\frac{1}{n+1}) < \frac{1}{ne}$.

16.　设 $0\leqslant x\leqslant n$,则 $\forall m,n\in N$,下式成立

$$\left|x^{m-1}\prod_{k=1}^{n}(x-k)^m\right| \leqslant (n!)^m.$$

17.　设 $f(x)=\binom{n+k-1}{k}x^k(1-x)^n$，则对于 $0<x<1$，

(1)　$f(x)\leqslant \dfrac{33}{\sqrt{nx}^{3/2}}$.

提示：用概率方法，设独立随机变量列 $\{\xi_j\}$ 有相同的几何分布 $P(\xi_j)=x^k(1-x)$，$j=1,2,\cdots$. 则 $\eta_n=\sum\limits_{j=1}^{n}\xi_j$ 具有分布

$$P(\eta_n=k)=\binom{n+k-1}{k}x^k(1-x)^n. \text{令 } g(t)=\frac{t-\frac{nx}{1-x}}{\sqrt{nx}/(1-x)}, \text{则}$$

$$P(\eta_n=k)=P(k-1\leqslant \eta_n\leqslant k)=P(g(k-1)\leqslant g(\eta_n)\leqslant g(k)),$$

$$\left|P(\eta_n=k)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{g(k-1)}^{g(k)}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t\right|\leqslant \frac{32}{\sqrt{nx}^{3/2}}.$$

而上式左端第二项不超过 $\dfrac{1-x}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{nx}}$. 所以，$p(\eta_n=k)\leqslant \dfrac{33}{\sqrt{nx}^{3/2}}$.

([336](A)，1988，9(2)：237 ～ 238)

(2)　1994 年，Love 改进为 $f(x)\leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2e}\sqrt{nx}^{3/2}}$. 并证明：

$$\left|\sum_{x<\frac{k}{n+k}}f(x)-\frac{1}{2}\right|\leqslant \frac{4}{3\sqrt{nx}^{3/2}}.$$

(Love, E. R.，[301]1994，187(1)：1 ～ 16)

18.　**C_p 不等式**：设 a,b 为实数，$p>0$，则

$$(|a|+|b|)^p\leqslant C_p(|a|^p+|b|^p). \tag{18.1}$$

式中　$C_p=\begin{cases}1, & 0<p\leqslant 1,\\ 2^{p-1}, & p>1.\end{cases}$

提示：　当 $0<p\leqslant 1$ 时，考虑函数 $f(t)=(1+t)^p-t^p-1$ 的单调性，再令 $t=b/a$ $(a\neq 0)$. 当 $p>1$ 时，利用 $g(x)=|x|^p$ 的凸性，得到

$$\left(\frac{|a|+|b|}{2}\right)^p\leqslant \frac{1}{2}(|a|^p+|b|^p).$$

C_p 不等式对 a,b 为复数时仍成立，它在分析与概率论中都有重要应用，该不等式已有许多推广和改进，例如

(1)　$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|\right)^p\leqslant C_p\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p. \tag{18.2}$$

式中　$C_p=\begin{cases}1, & 0<p\leqslant 1,\\ n^{p-1}, & p>1.\end{cases}$

其中等号成立的充要条件：当 $p>1$ 时是 $|a_1|=\cdots=|a_n|$；当 $p=1$ 时是 $a_1,\cdots,a_n$ 同号；当 $0<p<1$ 时是 $a_1,\cdots,a_n$ 中至多有一个不为零.

严士健等在[78]223 用概率论方法给出了一个简单的证明.

C_p 不等式可写成下述使用方便的形式：当 $p \geqslant 1$ 时，

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k|\Big)^p \leqslant n^{p-1}\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p,$$

当 $0 < p < 1$ 时，不等号全部反向.

(2)　设 $0 < p < 1, \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p < \infty$，则

$$\Big(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|\Big)^p \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p.$$

(3)　设 $0 \leqslant t \leqslant 1$，则当 $p \geqslant 1$ 时，成立

$$|ta + (1-t)b|^p \leqslant t|a|^p + (1-t)|b|^p.$$

更一般地，设 $t_k \geqslant 0$，且 $\sum_{k=1}^{n} t_k = 1$，则当 $p \geqslant 1$ 时成立 $\Big(\sum_{k=1}^{n} t_k|a_k|\Big)^p \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} t_k|a_k|^p\Big)$，当 $0 < p < 1$ 时不等号反向. 特别，取 $t_k = \dfrac{1}{n}$ $(\forall k)$ 又得到(18.2)式.

(4)　设 $1 \leqslant p < \infty, 0 < t < 1$，则

$$(|a| + |b|)^p \leqslant t^{1-p}|a|^p + (1-t)^{1-p}|b|^p.$$

提示：不妨设 $a, b > 0$，令 $f(t) = t^{1-p}a^p + (1-t)^{1-p}b^p$. 只要证 f 在 $t_0 = \dfrac{a}{a+b}$ 取最小值.

(5)　设 $p \geqslant \dfrac{n}{n-1}, n \geqslant 2$，则

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k|\Big)^p - n(n^{p-1} - 1)\Big(\prod_{k=1}^{n} |a_k|\Big)^{\frac{p}{n}}.$$

(宁波大学学报，1989，2：12 ～ 14)

(6)　**Orlicz 不等式**：设 $1 < p \leqslant 2$，则存在常数 $c > 0$，使得

$$|a+b|^p \leqslant |a|^p + c|b|^p + p|a|^{p-1}b\,\mathrm{sgn}\,a;$$

当 $p > 2$ 时，不等号反向.

([104]109，117)

(7)　设 $p > 0$，a, b 为实数或复数，则

$$(|a| + |b|)^p \leqslant 2^p(\max\{|a|, |b|\})^p \leqslant 2^p(|a|^p + |b|^p).$$

(8)　**Banach-Saks 不等式**：设 $2 < p < \infty$. $[p]$ 表示 p 的整数部分，则存在两个正常数 c_1, c_2，使得

$$|a+b|^p \leqslant |a|^p + c_1|b|^p + p|a|^{p-1}b\,\mathrm{sgn}\,a + c_2\sum_{k=2}^{[p]} |a|^{p-k}|b|^k.$$

([104]117)

(9)　**Hardy-Littlewood 不等式**：设 $p \geqslant 1$. $\forall a_k \geqslant 0$，则

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big)^p \leqslant p\sum_{m=1}^{n} a_m\Big(\sum_{k=1}^{m} a_k\Big)^{p-1}.$$

([320]1964,15:25 ~ 40 和[369]1971,32:295 ~ 299)

(10) 设 $1 < p < \infty, \varepsilon > 0$,实数 x, y 满足:$|y| \leqslant 1 = |x|, |x-y| \geqslant \varepsilon$. 则存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$,使得

$$|x+y|^p \leqslant 2^{p-1}(1-\delta)(|x|^p + |y|^p). \tag{18.3}$$

证 因为 $\varphi(t) = |t|^p$ 严格凸,且 $|x-y| \geqslant \varepsilon > 0$,所以,$x \neq y$,从而

$$\left|\frac{x+y}{2}\right|^p = \varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{1}{2}(\varphi(x) + \varphi(y)) = \frac{1}{2}(1 + |y|^p). \tag{18.4}$$

若(18.3)式不成立,则存在数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$, $|y_n| \leqslant |x_n| = 1$,

$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{1}{2}(x_n + y_n)\right|^p}{\frac{1}{2}(|x_n|^p + |y_n|^p)} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{\{\frac{1}{2}(1 + |y_n|)\}^p}{\frac{1}{2}(1 + |y_n|^p)} \leqslant 1, \tag{18.5}$$

因为 $|y_n| \leqslant 1$,从而 $|y_n|$ 有收敛子列,即 $|y_{n_k}| \to a, 0 \leqslant a \leqslant 1$,将(18.5)式中 y_n 换成 y_{n_k},得到

$$1 \leqslant \lim_{k\to\infty} \frac{[\frac{1}{2}(1 + |y_{n_k}|)]^p}{\frac{1}{2}(1 + |y_{n_k}|^p)} = \frac{[\frac{1}{2}(1+a)]^p}{\frac{1}{2}(1+a^p)} \leqslant 1.$$

由上式和(18.4)式,仅当 $a = 1$ 时上式中等号才成立. 于是 $|y_n|$ 的每个收敛子列的极限均为 1,从而 $|y_n| \to 1$. 令 $u_n = \dfrac{y_n}{|y_n|}$,则

$$|u_n - y_n| = |y_n| \left(\frac{1}{|y_n|} - 1\right) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

从而由 $\varepsilon \leqslant |x_n - y_n| \leqslant |x_n - u_n| + |u_n - y_n|$,推出 $\varepsilon \leqslant \liminf\limits_{n\to\infty} |x_n - u_n|$.

下面证明 $|x_n + u_n| \to 2. (n \to \infty)$,用反证法,若存在 $\delta_0 > 0$,使得当 n 充分大时 $|x_n + u_n| < 2(1-\delta_0)$. 于是从 $\dfrac{|y_n + x_n|y_n||}{2|y_n|} < 1 - \delta_0$ 推出

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{2}(|y_n + x_n|y_n||) \leqslant 1 - \delta_0. \tag{18.6}$$

另一方面,$|y_n| \to 1$. 于是,

$$|y_n + x_n|y_n|| = |(y_n + x_n) - x_n(1 - |y_n|)| \geqslant |(y_n + x_n) - (1 - |y_n|)|. \tag{18.7}$$

但从(18.5)式,$|y_n + x_n| \to 2$. 所以从(18.6)和(18.7)式,有

$$2 \leqslant \limsup_{n\to\infty} |y_n + x_n|y_n|| \leqslant 2(1-\delta_0).$$

这个矛盾表明 $|u_n + x_n| \to 2$. 于是,

$$4 = \lim_{n\to\infty}(u_n + x_n)^2 = \lim_{n\to\infty}(u_n^2 + x_n^2 + 2u_n x_n) = 2 + 2\lim_{n\to\infty}(u_n x_n).$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n x_n) = 1$,所以,$0 < \varepsilon^2 \leqslant \liminf\limits_{n\to\infty}(x_n - u_n)^2 = \liminf\limits_{n\to\infty}(1 + 1 - 2u_n x_n) = 0$. 这个矛盾表明(18.3)式成立. 证毕.

在(18.3)式中用 $\dfrac{x}{\max\{|x|, |y|\}}, \dfrac{y}{\max\{|x|, |y|\}}$ 分别代替 x, y,(x, y 不同时

为零),得到:若 $1<p<\infty$, $|x-y|\geqslant\max\{|x|,|y|\}$, x,y 不同时为零,则

$$|x+y|^p\leqslant 2^{p-1}(1-\delta)(|x|^p+|y|^p).$$

式中 $\delta=\delta\left(\dfrac{|x-y|}{\max\{|x|,|y|\}}\right)\to 0$ (当 $|x-y|\to 0$ 时).

([103]281 ~ 282)

19. **Bohr 不等式**:设 $c>0$, a,b 为实数或复数,则

$$|a+b|^2\leqslant(1+c)|a|^2+\left(1+\frac{1}{c}\right)|b|^2. \tag{19.1}$$

仅当 $a=cb$ 时等号成立.

证　因为 $c>0$,所以, $|a|\cdot|b|=\sqrt{c|a|^2\cdot\dfrac{1}{c}|b|^2}\leqslant\dfrac{1}{2}\left(c|a|^2+\dfrac{1}{c}|b|^2\right)$,即 $2|a|\cdot|b|\leqslant c|a|^2+\dfrac{1}{c}|b|^2$. 从而 $|a+b|^2\leqslant(|a|+|b|)^2=|a|^2+|b|^2+2|a|\cdot|b|\leqslant(1+c)|a|^2+\left(1+\dfrac{1}{c}\right)|b|^2$.

推广:

(1)　设 $c_k>0$,且 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{c_k}=1$,则

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}c_k|a_k|^2. \tag{19.2}$$

(2)　设 $p,q>1$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$,则 $|a-b|^2\leqslant p|a|^2+q|b|^2$,仅当 $(1-p)a=b$ 时等号成立.

([301]282(2)(2003),578 ~ 583)

(3)　设 a,b,θ 为实数, $c>0$,则

$$\begin{aligned}(a-b)^2\sin\theta+(a+b)^2\cos\theta&\leqslant(1+c|\cos2\theta|)a^2+\left(1+\frac{1}{c}|\cos2\theta|\right)b^2\\&\leqslant(1+c)a^2+\left(1+\frac{1}{c}\right)b^2.\end{aligned}$$

(Makowski, A., Boletin Mat, 1961, 34:11)

20. **Lyons 猜想**:设 $0<\alpha<1$, $x,y>0$,猜想

$$(x+y)^{\alpha n}\geqslant\alpha\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha n}{\alpha k}x^{\alpha k}y^{\alpha(n-k)}, \tag{20.1}$$

式中 $\dbinom{a}{b}=\dfrac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(b+1)\Gamma(a-b+1)}$, $a\geqslant b-1$.

1998 年,Love, E. R. 证明当 $\alpha=\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{8},\cdots$ 时(20.1)式成立严格不等式.

([302]1998,2(3):229 ~ 233)

我们问:当 $\alpha\neq\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{8},\cdots$ 时,(20.1)式是否仍成立?

21. 设 x,y,p,q 为实数，$1 < p < 2, 1/p + 1/q = 1$，
令 $f(x,y) = |x|^{q/p}\operatorname{sgn} x - |y|^{q/p}\operatorname{sgn} y$，$g(x,y) = |x|^{p/q}\operatorname{sgn} x - |y|^{p/q}\operatorname{sgn} y$，
则

(1) $|f(x,y)|^p \leqslant \max\{2^p;(q/p)^p\}|x-y|^p(|x|^{q-p}+|y|^{q-p})$；

(2) $|g(x,y)|^q \leqslant 2^q|x-y|(|x|^{p-q}+|y|^{p-q})$.

(Citlanadze, E. S., Doklady Akad, Nauk SSSR, 1950, 71:441 ~ 444).

22. 设 a,b 为非零实数或复数，则

$$|a-b| \geqslant \frac{1}{2}(|a|+|b|)\left|\frac{a}{|a|}-\frac{b}{|b|}\right|.$$ 仅当 $|a|=|b|$ 时等号成立.

23. (1) 设 $x,y \geqslant 0, p \geqslant 1$，则 $|x-y|^p \leqslant |x^p - y^p|$；若 $0 < p \leqslant 1$，则不等号反向.

(2) 设 a,b 为实数，$n \in N$，则 $|a-b|^{2n+1} \leqslant 2^{2n}|a^{2n+1}-b^{2n+1}|$，

([301]2002, 268(1):70)

(3) 设 x,y 为非负实数，则

$$|x^p - y^p| \leqslant p|x-y|(x^{p-1}+y^{p-1}). \qquad 1 \leqslant p < \infty;$$

(4) 若 $x \geqslant y > 0, 2 \leqslant p < \infty$，则

$$x^p - y^p \leqslant (p/2)x^{p-2}(x^2-y^2).$$

(5) 设 $a \neq b, a \neq 0$，则当 $1 < p \leqslant 2$ 时，成立

$$|a+b|^p \leqslant |a|^p + p|a|^{p-1}b(\operatorname{sgn}a) + c(p)|b||a|^{p-1}. \tag{23.1}$$

若 $|b| < |a|$，则

$$|a+b|^p \leqslant |a|^p + p|a|^{p-1}b(\operatorname{sgn}a).$$

([22]518)

(6) 记 $f(a,b) = |a+b|^p - (|a|^p + p|a|^{p-1}b(\operatorname{sgn}a))$.

若 $p > 2$，则

$$c_1(p)|b|^p \leqslant f(a,b) \leqslant c_2(p)(|b|^p + |a|^{p-2}|b|^2) \tag{23.2}$$

左边不等式对 $p = 2$ 也成立；

若 $1 < p < 2$，则

$$c_1(p)\frac{|b|^2}{|a|^{2-p}+|b|^{2-p}} \leqslant f(a,b) \leqslant c_2(p)|b|^p. \tag{23.3}$$

右边不等式对 $p = 2$ 也成立. 式中 $c_1(p) > 0, c_2(p) > 1$. ([22]518)

我们问：$c_1(p), c_2(p)$ 的最佳值是多少？

(7) 设 a,b 是非零的实数或复数，$r,s > 0$，$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1$，$\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$. 则

$$2^{c_1}(|a|^s+|b|^s)^{\frac{1}{s}} \leqslant (|a+b|^r+|a-b|^r)^{\frac{1}{r}} \leqslant 2^{c_2}(|a|^s+|b|^s)^{\frac{1}{s}}. \tag{23.4}$$

式中 $c_1 = \frac{1}{r}-\frac{1}{s}+\frac{1}{q'}$，$\quad q = \begin{cases}\min\{2,r\}, & s \leqslant 2\\ \min\{s',r\}, & s > 2\end{cases}$；

$c_2 = \frac{1}{r}-\frac{1}{s}+\frac{1}{q}$，$\quad q = \begin{cases}\min\{2,s\}, & r \leqslant 2\\ \min\{r',s\}, & r > 2\end{cases}$.

([417]155(1992),187 ~ 197)

(8) **Clarkson 不等式**:设 a,b 为实数, $0<p,q<\infty$. 则

$$(|a+b|^q+|a-b|^q)^{\frac{1}{q}} \leqslant C(p,q)(|a|^p+|b|^p)^{\frac{1}{p}}, \tag{23.5}$$

式中最佳常数为 $c(p,q)=\max\{2^{1-(\frac{1}{p})},2^{\frac{1}{q}},B(p,q)\}$.

$$B(p,q)=\sup_{x\in[0,1]}\frac{[(1+x)^q+(1-x)^q]^{\frac{1}{q}}}{(1+x^p)^{\frac{1}{p}}};$$

若 $p\leqslant 2$,或 $q\geqslant 2$,或 $p=\infty$,或 $0<q\leqslant 1$,则

$$c(p,q)=\max\{2^{1-\frac{1}{p}},2^{\frac{1}{q}}\};$$

若 $1<q<2<p<\infty$,则 $C(p,q)=B(p,q)$,此处

$$\max\{2^{1-(\frac{1}{p})},2^{\frac{1}{q}}\}<B(p,q)<2^{(\frac{1}{q})-(\frac{1}{p})+(\frac{1}{2})}.$$

([417]280(12)(2007),1363 ~ 1375)

(9) 设 $1<p\leqslant q$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,则

$$|a-b|^4+|(p-1)a+b|^4\leqslant(p|a|^2+q|b|^2)^2.$$

([301]282(2)(2003),578 ~ 583)

(10) 设 $0<b<a$, $1\leqslant p\leqslant 2$,则

$$(a+b)^p+(a-b)^p\geqslant 2a^p+p(p-1)a^{p-2}b^2.$$

24.(1) **Mazur 不等式**:设 $p\geqslant 1$,则

$$2^{1-p}|x-y|^p\leqslant\big|x|x|^{p-1}-y|y|^{p-1}\big|\leqslant p|x-y|(|x|^{p-1}+|y|^{p-1}).$$

证 为证左边不等式,令 $x=(1/2)+u,y=-(1/2)+u$. 则偶函数

$$f(u)=(\frac{1}{2}+u)\left|\frac{1}{2}+u\right|^{p-1}+(\frac{1}{2}-u)\left|\frac{1}{2}-u\right|^{p-1}$$

当 $u>0$ 时递增,从而 f 在 $u=0$ 时取得最小值 2^{1-p}. 为证右边不等式,由对称性,只要考虑 $u\geqslant 0$ 的情形. 若 $0\leqslant u\leqslant(1/2)$,所证不等式可写成:

$$(\frac{1}{2}+u)^p+(\frac{1}{2}-u)^p\leqslant p\{(\frac{1}{2}+u)^{p-1}+(\frac{1}{2}-u)^{p-1}\}.$$

而这对于 $u\leqslant p-\frac{1}{2}$,上式显然成立,当 $u>\frac{1}{2}$ 时,再令 $t=\frac{u-(1/2)}{u+(1/2)}$,考虑函数 $g(t)=\frac{(1+t)(1-t^{p-1})}{(1-t)(1+t^{p-1})}$ 在[0,1]上的单调性,得到 $g(t)\leqslant 2p-1$. 此即所要证的不等式.

(2) 设 $x=(x_1,\cdots,x_n),y=(y_1,\cdots,y_n)\in R^n$, $|x|=(\sum_{k=1}^n|x_k|^2)^{1/2},n\geqslant 1$, $2\leqslant p<\infty$,则

$$\big|x|x|^{p-2}-y|y|^{p-2}\big|\leqslant c_p(|x|^{p-2}+|y|^{p-2})|x-y|.$$

若 $x\neq y,x,y\neq 0$,则 c_p 的最佳值为

$$c_p=\begin{cases}1, & 若\ 2\leqslant p\leqslant 3;\\ (1/2)(p-1), & 若\ p>3.\end{cases}$$

([394]1980,6(3):301 ~ 304)

25. **Smarzewski 不等式**:设 $1 \leqslant p < 2$. $t_0 = t_0(p)$ 是函数 $g(t) = -t^{p-1} + (p-1)t + p - 2$ 在 $(1,\infty)$ 上的唯一零点,$t_0(2) = 1$. 则

$$p|x|^{p-2}x(y-x) \geqslant |y|^p - |x|^p - c_p|y-x|^p.$$

式中 $p = 1$ 时,$x \neq 0$,而 c_p 定义为 $c_1 = 2, c_p = (p-1)(1+t_0)^{2-p}, (1 < p < 2)$.

(证明见[327]1987,49:93 ~ 98)

26. 设 a,b 为实数或复数,则

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

推广: (1) 设 a_k 为复数,则

$$\frac{\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right|}{1+\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right|} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{1+|a_k|}.$$

(2) 设 a,b,c 为实数或复数,则

$$\frac{|a-b|}{1+|a-b|} \leqslant \frac{|a-c|}{1+|a-c|} + \frac{|b-c|}{1+|b-c|}.$$

27. **Young 不等式($p-q$ 不等式)**:设 $p,q > 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 则当 $1 < p < \infty$ 时,下式成立

$$|ab| \leqslant \frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{q}|b|^q; \tag{27.1}$$

当 $0 < p < 1$ 时,不等号反向,仅当 $|b| = |a|^{p-1}$ 时等号成立.

证 这个不等式有多种证明方法,例如:

① 积分法:设 $y = \varphi(x)$ 是 $[0,a]$ 上严格递增的连续函数,比较面积得

$$ab \leqslant \int_0^a \varphi(x)\mathrm{d}x + \int_0^b \varphi^{-1}(y)\mathrm{d}y, a,b \geqslant 0,$$

式中 $x = \varphi^{-1}(y)$ 是 $y = \varphi(x)$ 的反函数,然后取 $\varphi(x) = x^{p-1}$.

② 考虑二元函数

$$f(x,y) = x/p + y/q - x^{1/p}y^{1/q}$$

在凸域 $D = \{(x,y): x,y \geqslant 0\}$ 上的凸性.

③ 微分法:固定 $x > 0$,求一元函数

$$\varphi(y) = \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q - xy$$

在 $[0,\infty)$ 上的极值,φ 在 $y_0 = x_0^{\alpha}$(式中 $\alpha = 1/(q-1)$)时取最小值. 即 $\varphi(y) \geqslant \varphi(y_0) = 0$.

④ 代数法:利用 Bernoulli 不等式:$x > 0, 0 < \alpha < 1$. $x^{\alpha} - 1 \leqslant \alpha(x-1)$. 再取 $\alpha = 1/q, x = b^q/a^p$.

Young 不等式有许多变形,改进和推广,例如:

(1) 设 $x,y > 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, 1 < p < \infty$,则

$$x^{1/p}y^{1/q} \leqslant \frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y; \tag{27.2}$$

$$x^{1/p}y^{1/q} \leqslant \frac{1}{p}xt^{-1/q} + \frac{1}{q}yt^{1/p}, (t > 0); \tag{27.3}$$

$$x^{\lambda}y^{1-\lambda} \leqslant \lambda x + (1-\lambda)y. (0 < \lambda < 1) \tag{27.4}$$

它们的证明见第 1 章 §2(2.25).

(2)　(27.4) 式的改进是 **Gerber 不等式**:设 $0 < x < cy, c \geqslant 1, M = \frac{c^{\lambda+1}}{2y}\lambda(1-\lambda)(x-y)^2$. 若 $0 < \lambda < 1$,或 $\lambda > 2$,则

$$\frac{M}{c^3} < \lambda x + (1-\lambda)y - x^{\lambda}y^{1-\lambda} < M. \tag{27.5}$$

当 $\lambda < 0$ 或 $1 < \lambda < 2$ 时,不等号反向.(Alic,M,等[303]1998,1(4):507 ~ 516)

(3)　设 $r, x > 0, y > -1/r$,则

$$xy \leqslant x\left(\frac{x^r - 1}{r}\right) + \left(\frac{1+ry}{1+r}\right)^{1+\frac{1}{r}}. \tag{27.6}$$

(4)　设 $1 < p_k < \infty, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k} = 1$,则

$$\prod_{k=1}^{n} |a_k|^{\frac{1}{p_k}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k}|a_k|. \tag{27.7}$$

(5)

$$\frac{1}{p \vee q}(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \leqslant \frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y - x^{\frac{1}{p}}y^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{1}{p \wedge q}(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2, \tag{27.8}$$

式中 $x, y > 0, 1 < p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p \vee q = \max\{p, q\}, p \wedge q = \min\{p, q\}$,([345]1990,4. 此外见第 1 章 §2(2.75) 和第 5 章 §3No. 38)

注 1　(27.7) 式可改写成:设 $0 < p_k < \infty, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k} = 1$,则

$$\prod_{k=1}^{n} | a_k | \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k} | a_k |^{p_k}.$$

(27.8) 式可改写成:设 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $m = \min\{\lambda, 1-\lambda\}$, $M = \max\{\lambda, 1-\lambda\}$. 则

$$m(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \leqslant \lambda x + (1-\lambda)y - x^{\lambda}y^{1-\lambda} \leqslant M(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2.$$

(6)　利用(27.2) 可推出:设 $0 \leqslant x, y \leqslant 1$, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则

$$x^{\frac{1}{p}}y^{\frac{1}{q}} + (1-x)^{\frac{1}{p}}(1-y)^{\frac{1}{q}} \leqslant 1, \tag{27.9}$$

仅当 $x = y$ 时等号成立.

(7)　设 $1 < p \leqslant 2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $x, y \geqslant 0$, 则

$$\frac{1}{q}(x^{\frac{p}{2}} - y^{\frac{q}{2}})^2 \leqslant \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q - xy \leqslant \frac{1}{p}(x^{\frac{p}{2}} - y^{\frac{q}{2}})^2.$$

([301]343(2)(2008),842 ~ 852)

(8)　在(27.3) 式中取 $a = x^{\frac{1}{p}}$, $b = y^{\frac{1}{q}}$, $t = \varepsilon^{-(pq)}$,得到

$$|ab| \leqslant \frac{1}{p}|\varepsilon a|^p + \frac{1}{q}\left|\frac{b}{\varepsilon}\right|^q.$$

28.　设 $a,b>0, 0\leqslant p\leqslant m, m\in N$，则

$$0\leqslant \frac{(a+b)^p}{(a^m+b^m)^{p/m}} - 1 \leqslant \frac{p}{m}\left(\frac{(a+b)^m}{a^m+b^m}-1\right).$$

([305]1992,99(9),E10257)

29.　设 $x>y>0, p\geqslant q>0$，则当 $(p-q)^2\leqslant pq(p+q)$ 时，成立

$$\left[\frac{1}{2}(x^p y^q + x^q y^p)\right]^{\frac{1}{p+q}} < \left[\frac{1}{2}(x^{pq}+y^{pq})\right]^{\frac{1}{pq}}.$$ ([305]1984,94(4):261 ～ 262)

30.　**Dresden 不等式**：设 $0\leqslant a\leqslant x_1\leqslant x_2$，则

$$\sqrt[n]{x_2} - \sqrt[n]{x_1} \leqslant \sqrt[n]{x_2-a} - \sqrt[n]{x_1-a} \leqslant \sqrt[n]{x_2-x_1}.$$

提示：令 $f(x)=x^{1/n}$，则

$$f(x_2)-f(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f'(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{x_1-a}^{x_2-a} f'(t)\,\mathrm{d}t = f(x_2-a)-f(x_1-a).$$

推广：　设 $0\leqslant a\leqslant x_1\leqslant x_2$，$\varphi$ 是 $[x_1-a, x_2]$ 上的连续凸函数，则

$$\varphi(x_2)-\varphi(x_1)\leqslant \varphi(x_2-a)-\varphi(x_1-a).$$

由此推出，$0<p<1$ 时，

$$x_2^p - x_1^p \leqslant (x_2-a)^p-(x_1-a)^p.$$ ([77]26,239 ～ 240)

31.　**Turner-Conway 不等式**：设 $a,b>0, p,q>1$，则

$$(a+b)^{pq} < [(a+b)^p-a^p]^q + [(a+b)^q-b^q]^p. \tag{31.1}$$

当 $0<p,q<1$ 时，不等号反向.

特别，当 $b=1-a$，　$0<a<1, p,q>1$ 时，$(1-a^p)^q+(1-b^q)^p>1$.

推广：　设 $a_{jk}+b_{jk}=1, 0<a_{jk}<1, j=1,\cdots,m, k=1,\cdots,n, (m,n>1)$，则

$$\prod_{j=1}^{m}\left(1-\prod_{k=1}^{n}a_{jk}\right)+\prod_{k=1}^{n}\left(1-\prod_{j=1}^{m}b_{jk}\right)>1. \tag{31.2}$$

(SIAN Review,1968,10:107 ～ 108;1969,1:402 ～ 406)(31.2) 式可用数学归纳法证明. 2000 年，石焕南用概率方法给出了一个新的简洁的证明.([351]2000,5 ～ 6;14)

32.(1)　**对称函数不等式**：设 $0<x,y\leqslant 1/2$，p 为实数，则

$$\frac{(1-x)^p+(1-y)^p}{x^p+y^p}\leqslant\left(\frac{(1-x)(1-y)}{xy}\right)^{p/2}.$$

仅当 $p=0$ 或 $x=y$ 时等号成立.

(王鹏飞，王挽澜，成都科技大学学报 1985,2:87 ～ 91)1987 年，黄践将上述不等式推广到锥上双正齐性泛函上去.([356]1987,2:10 ～ 15)

(2)　**祁锋不等式**：设 $p,q\geqslant 0, 0<x<y$，则

$$\frac{y^{p+q}-x^{p+q}}{y^p-x^p}\geqslant \frac{p+q}{p}(xy)^{q/2}.$$

而当 $p,q\geqslant 1, 0<x<y$ 时，上式可改进为

$$\frac{y^{p+q}-x^{p+q}}{y^p-x^p}\geqslant\frac{p+q}{p}\left(\frac{x+y}{2}\right)^q.$$

([301]1997,211(2):616 ~ 620)

2005 年,江永明证明:设 $x,y>0,x\neq y,p,q$ 为实数. 当 $c\leqslant\frac{p}{q}$ 且满足如下 4 个条件之一时:① $p\geqslant q>0$;② $p\leqslant q<0$;③ $q\geqslant -p>0$;④ $-q\geqslant p>0$,则

$$\frac{x^p-y^p}{x^q-y^q}\geqslant c(xy)^{\frac{p-q}{2}} \tag{32.1}$$

若 $c\geqslant\frac{p}{q}$ 且 ① ~ ④ 中 p 与 q 互换,则式(32.1) 中不等号反向.([351]2005,4:396 ~ 398)

我们要问:(32.1) 式中 c 的最佳值是多少?

(3)　设 $0<x<y<1$ 或 $1<x<y$,则

$$\frac{y^y}{x^x}<\left(\frac{y}{x}\right)^{xy};\frac{y^x}{x^y}<\frac{y}{x}<\frac{y^{x^y}}{x^{y^x}}.$$

([304]2000,1(2) 和[305]1995,102(8):746)

(4)　设 $0<x,y<1$,则

$1+xy<x^y+y^x$.

提示:固定 y,令 $f(x)=x^y+y^x-1-xy$,问题变成要证 $f(x)>0$. 可用反证法.([345]1988,11:32)

(5)　设 $x,y>0$,则

$x^y+y^x>1$.

证　因为 $x\geqslant 1$ 或 $y\geqslant 1$ 时,不等式显然成立,所以,不妨设 $0<x,y<1$,令 $y=tx$. 由对称性,只考虑 $0<t\leqslant 1$,由于 x^x 在 $x=1/e$ 时取得最小值 $x_0=e^{-\frac{1}{e}}$,且 $t^x\geqslant t$,所以,

$$f(x)=x^y+y^x=x^{tx}+(tx)^x=(x^x)^t+t^x\cdot x^x\geqslant x_0^t+t\cdot x_0\stackrel{\triangle}{=}g(t).$$

而 $g(t)$ 在 $t_0=1-e<0$ 时有唯一的极小值. 从而 g 在 $t>t_0$ 时递增,又 $f(0)=1,f(1)=2t_0>1$,于是 $g(t)>1$,所以 $f(x)>1$. 证毕.(其他证法见[4]384)

(6)　设 $0<a<b$,若 $a+b>1$,或 $e^{-1}<a<b$,则

$$a^a<b^b.$$

提示:利用 $f(x)=x^x$ 在 $x>e^{-1}$ 时的严格递增性.

(7)　[MCU]. 设 $0<a<b$,则 $a^{b^a}<b^{a^b}$. (32.2)

证　先设 $b>a>1$,对所证不等式两边两次取对数后变成

$\ln\ln a+a\ln b<\ln\ln b+b\ln a$.

令 $x=\frac{\ln b}{\ln a},y=\ln a$,则 $x>1,y>0$. 再令 $f(x,y)=xe^y-e^{xy}$. 于是只要证

$$\ln x>yf(x,y). \tag{32.3}$$

因为 $f'_y(x,y)=xe^y-xe^{xy}<0$. 所以,$f(x,y)<f(x,0)=x-1$.

①　若 $f(x,y)\leqslant 0$,则(32.3) 式显然成立;

②　若 $f(x,y)>0$,即 $x-e^{(x-1)y}>0$. 从而 $\ln x>(x-1)y>yf(x,y)$.

若将条件放宽为 $b > a > 0$,结论仍成立,但证明方法不同.([305]1990,97(4):346)

(8) **a^b 与 b^a 大小的比较**:设 a,b 为正数,若 $1 < a < e$,λ 是函数方程 $a^x = x^a$ 的实根,且 $\lambda > e$,则

① 若 $0 < a < b < e$,或 $0 < a \leqslant 1 < b$,或 $1 < a < e < b < \lambda$,则 $a^b < b^a$;

② 若 $e < a < b$ 或 $1 < a < e < \lambda < b$,则 $a^b > b^a$.

由此推出,设 $0 < x < \infty, x \neq e$,则 $x^e < e^x$,特别 $\pi^e < e^\pi$.

1997 年,文家金等对于幂平均 $M_p(a,b) = [\frac{1}{2}(a^p + b^p)]^{1/p}$ $(p \neq 0)$

(第 1 章 §3(3.43))证明:

设 $1 < a < e < b$,若 $M_0(a,b) \leqslant e$,则 $a^b < b^a$.

若 $M_{-1}(a,b) \geqslant e$,则 $a^b > b^a$.(大学生数学通讯,重庆师范学院,1997.2)

2000 年,罗钊、文家金改进为:若 $M_{-\frac{2}{3}}(a,b) \leqslant e$,则 $a^b < b^a$;若 $M_{-\ln 2}(a,b) \geqslant e$,则 $a^b > b^a$.([100]83 ~ 88)

2003 年,张勇等利用优势理论和数学软件证明:

设 $\alpha = 0.017791\cdots$ 是方程 $x - e^{-1}\ln x - 1.5 = 0$ 在 $(0,e^{-1})$ 上的唯一实根.

$\beta = 4.01429\cdots$ 是方程 $x(1 - \ln x) + (\ln x - 1)^{-1} - 1 = 0$ 在 (e,e^2) 上的唯一实根.

则当 $x,y \in [\alpha,e^{-1}]$ 或 $x,y \in [e^{-1},\beta]$ 时,

$$x^y + y^x \leqslant 2(\sqrt{xy})^{\sqrt{xy}}.$$

若 $x,y \in [\beta,\infty)$,则不等号反向.

若 $x_k \geqslant \beta$, $x = (x_1,\cdots,x_n)$, $G_n(a) = (\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}}$,则

$$\sum_{1 \leqslant k \neq j \leqslant n} x_k^{x_j} \geqslant n(n-1)[G_n(a)]^{G_n(a)}.$$ ([351]2003,6:1 ~ 6)

33. [MCM] 设 $x,y,z \geqslant 0$,且 $x + y + z = 1$,则

$$0 \leqslant xy + yz + zx - 2xyz \leqslant 7/27.$$

证 记 $f(x,y,z) = xy + yz + zx - 2xyz$,不妨设 $x \geqslant y \geqslant z \geqslant 0$,由 $x + y + z = 1$ 得,$z \leqslant 1/3$,$x + y \geqslant 2/3$,从而 $2xyz \leqslant (2/3)xy \leqslant xy$,于是 $f(x,y,z) \geqslant 0$. 为证 $f(x,y,z) \leqslant 7/27$,可令 $x+y = 2/3+r$,则 $z = 1/3-r$,$0 \leqslant r \leqslant 1/3$,再利用 $xy \leqslant [(x+y)/2]^2 = (1/3 + r/2)^2$ 即可得证.

推广: (1) 设 x,y,z,α,β 均为非负实数,且 $x + y + z = \alpha$,$0 \leqslant \alpha\beta \leqslant 9/4$,则

$$xy + yz + zx - \beta xyz \leqslant (9 - \alpha\beta)\alpha^2/27,$$

仅当 $x = y = z = \alpha/3$ 时等号成立.

(2) 设 n 个非负数 x_k 之和为 α,则

$$0 \leqslant \sum_{j=1}^n (\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^n x_k) - [(n-1)/\alpha]\prod_{k=1}^n x_k \leqslant (n^2 - n + 1)\alpha^{n-1}/n^n.$$

(3) 设 $x,y,z \geqslant 0$,$x + y + z = 1$,令 $S = xy + yz + zx - \beta xyz$,

当 $0 \leqslant \beta \leqslant \frac{9}{4}$ 时,$0 \leqslant S \leqslant \frac{9-\beta}{27}$; 当 $\frac{9}{4} \leqslant \beta \leqslant 9$ 时,$0 \leqslant S \leqslant \frac{1}{4}$;

当 $\beta > 9$ 时，$\frac{9-\beta}{27} \leqslant S \leqslant \frac{1}{4}$.

提示：用拉格朗日乘子法，令 $f(x) = \sum xy - \beta\prod x + \lambda(\sum x - 1)$.

34.　设 a,b,c 是不全等的正数. 下面利用“符号说明”中的循环和、积的缩写记号，如 $\sum a$ 表示 $a+b+c$. $\sum ab$ 表示 $ab+bc+ca$，$\prod a$ 表示 abc，$\prod(ab)$ 表示 $(ab)(bc)(ca)$ 等.

(1)　1990 年，宋庆证明了下述不等式链：

$$\frac{9}{\sum a^{-2}} < \frac{27}{(\sum \frac{1}{a})^2} < \frac{9\prod a}{\sum a} < \frac{3\sqrt{3}\prod a}{(\sum ab)^{1/2}} < \frac{9\prod a}{\sum \sqrt{ab}} < 3(\prod a)^{2/3} < \sum a\sqrt{bc}$$

$$< \sqrt{3(\prod a)(\sum a)} < \sum ab < \frac{1}{2}\sum(a+b)\sqrt{ab} < \frac{1}{3}(\sum a)^2 < \frac{1}{3}(\sum\sqrt{a})(\sum a\sqrt{a})$$

$$< (\sum a)\frac{\sum a\sqrt{a}}{\sum\sqrt{a}} < \sum a^2.$$ ([348]1990,12:17～19)

(2)　$\sum ab < \sum(a+b-c)^2$.

(3)　$\left(\frac{\sum a}{\prod a}\right)^{1/2} < \sum ab < \sqrt{3}\sum\frac{bc}{a}$.

(4)　[MCM]. $\sum a^2 < \sqrt{(\sum a)(\sum a^3)}$；若 $\sum a = 1$，则 $\sum a^2 + 2\sqrt{3\prod a} \leqslant 1$.

(5)　[MCM]. $\sum a^3 > 3\prod a + \sum(a+t)(b-c)^2$. 式中 $2t = \min\{a,b,c\}$.

(6)　$3\prod a < \frac{1}{3}(\sum a)(\sum ab) < \frac{3}{8}\prod(a+b) < \frac{1}{9}(\sum a)^3$

$$< \frac{1}{3}(\sum a)(\sum a^2) < \sum a^3.$$

(7)　$2\sum a^3 > \sum a^3 + 3abc > \sum ab(a+b)$.

(8)　$27\prod a < (\sum a)^3 < 9\sum a^3$.

(9)　$(\prod a)(\sum a) < \sum(ab)^2 < 1/2\sum a^3(b+c) < \sum a^4$.

(10)　$\sum a^5 > (\prod a)(\sum a^2)$.

(11)　$(\sum a)^5 - \sum(b+c-a)^5 > 80(\prod a)(\sum ab)$.

(12)　[MCU]. $abc^3 < 27(1/5\sum a)^5$.

提示：考虑 $f(x,y,z) = \ln(xyz^3)$ 在区域 $D = \{(x,y,z): \sum x^2 = 5r^2\}$ 上的极大值，式中 x,y,z 均为正数.

(13)　[MCU]. 设 $1 \leqslant a \leqslant b \leqslant c \leqslant 4$，令

$$f(a,b,c) = (a-1)^2 + (\frac{b}{a}-1)^2 + (\frac{c}{b}-1)^2 + (\frac{4}{c}-1)^2,$$

则　$f(a,b,c) \geqslant 4(\sqrt{2}-1)^2$. 仅当 $a=\sqrt{2}, b=2, c=2\sqrt{2}$ 时等号成立.

提示：设 $0 < p < q, p \leqslant x \leqslant q$，求 $f(x) = (\frac{x}{p} - 1)^2 + (\frac{q}{x} - 1)^2$ 在 $[p,q]$ 上的极值.

(14)　$3\min\{a,b,c\} < (\sum a) - (\sum a^2 - \sum ab)^{1/2}$

$$< \sum a + (\sum a^2 - \sum ab)^{1/2} < 3\max\{a,b,c\};$$

若加上条件：$b^2 - 4ac \geqslant 0$，则

$$\frac{9}{4}\min\{a,b,c\} \leqslant \sum a \leqslant \frac{9}{4}\max\{a,b,c\}.$$

([38]430 B3－059)

(15)　[MCM]. $\sqrt{\prod(a+b)} < \sum \sqrt{ab(a+b)} \leqslant \frac{3}{2}\{\prod(a+b)\}^{\frac{1}{2}}$.

(16)　设 $a \neq b$，则

$$(\frac{a}{b})^b < \left(\frac{a+c}{b+c}\right)^{b+c}.$$

提示：证明 $f(x) = \left(\frac{a+x}{b+x}\right)^{b+x}$ 在 $[0,\infty)$ 上严格递增.

(17)　设 $\sum a = 1$，则 $n \geqslant 2$ 时，

$$2 + \sqrt[n]{5} < \sum \sqrt[n]{4a+1} < 3^{1-\frac{1}{n}} \times 7^{\frac{1}{n}}.$$

其中上界估计由石焕南给出.([351]2001,2,7)

(18)　[MCM].设 $\sum a = 1$，则 $\prod(1+a) \geqslant 8\prod(1-a)$.([38]445 B3－085)

(19)　设 $1/4 \leqslant t \leqslant 1$，则

$$\sum \frac{a}{a+tb+c} \leqslant \frac{3}{2+t};$$

若 $0 \leqslant t \leqslant 9/8$，则

$$\sum \frac{a}{a+tb+(c/2)} \leqslant \frac{3}{t+3/2};$$

(刘保乾提出，陈胜利证明，[351]2001,2,7～8)

若 $0 \leqslant t \leqslant 1$，则

$$\sum \frac{a}{ta+b+c} \geqslant \frac{3}{t+2}.$$

当 $t > 1$ 时，不等式反向.(褚小光，吴云辉，[351]2001,2:9)

但又已知 $\sum \frac{a}{2a+b+c} \leqslant \frac{3}{4}$(宿晓明).因此，我们可以进一步问：在 t_1,t_2,t_3 满足什么条件下，$\sum \frac{a}{t_1a+t_2b+t_3c}$ 的上下界是什么?更进一步，其最优上下界是什么?2003 年，肖振纲、张志华证明：设 t_k 不全为零，且 $t_2 + t_3 > 2t_1$，则

$$\sum \frac{a}{t_1a+t_2b+t_3c} \geqslant \frac{3}{t_1+t_2+t_3},$$

仅当 $t_1 = t_2 = t_3$ 或 $a = b = c$ 时等号成立.(福建中学数学，2003,5:18～19,21)

(20) $\sum \frac{a^p}{b+c} \geqslant \frac{1}{2} \times 3^{2-p}(\sum a)^{p-1}, p \geqslant 1,$

仅当 $a=b=c$ 时等号成立.

证 可用切比雪夫不等式和凸函数不等式,也可用等比级数求和公式和 C_p 不等式. 不妨设 $\sum a=1$ 则

$$\sum \frac{a^p}{b+c} = \sum \frac{a^p}{1-a} = \sum a^p(\sum_{k=1}^{\infty} a^{k-1}) = \sum_{k=1}^{\infty}(\sum a^{p+k-1})$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{3})^{p+k-2} = \frac{1}{2}(\frac{1}{3})^{p-2}.$$

若 $p=1$,则

$$\frac{3}{2} < \sum \frac{a}{b+c} \leqslant \sum \frac{b+c}{a} - \frac{9}{2}.$$

若 $p=2$,且 $0<m\leqslant a,b,c\leqslant M$,则

$$\frac{1}{2}\sum a < \sum \frac{a^2}{b+c} < \frac{1}{2}\left(\frac{2m}{m+M}+\frac{m+M}{2m}-1\right)(\sum a).$$

2001 年,刘会成进一步证明,若 $\prod a=1$,则 $\sum \frac{a^p}{b+c} \geqslant \frac{3}{2}$ 的充要条件是 $p^2+p-2 \leqslant 0$ 即 $p\geqslant 1$ 或 $p\leqslant -2$ ($p=-3$ 时为 36 届 IMO). 用级数展开式时,就不能再设 $\sum a = 1$,我们记 $S=\sum a$,则 $S\geqslant 3\sqrt[3]{abc}=3$.

若 $p\geqslant 1$,则

$$\frac{a^p}{b+c} = \frac{a^p}{S-a} = \frac{a^p}{S}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{a}{S}\right)^k.$$

于是

$$\sum \frac{a^p}{b+c} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{p+k}+b^{p+k}+c^{p+k}}{S^{k+1}} \geqslant \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{S}\right)^{k+1}3\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{p+k} \geqslant \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{3}{2},$$

仅当 $a=b=c$ 时等号成立.

若 $p\leqslant -2$,则令 $a_1=1/a, b_1=1/b, c_1=1/c$ 转化为 $p\geqslant 1$ 的情形.

进一步的推广是:设 $\prod a=1$, p,q 为实数,则

$\sum \frac{1}{a^p(b^q+c^q)} \geqslant \frac{3}{2}$ 的充要条件是 $p^2-pq-2q^2\geqslant 0$. ([345]2001,12:18 ~ 19)

(21) $\sum \frac{a+b}{c} > 4\sum \frac{a}{b+c} > 6;\quad \sum \sqrt{\frac{a}{b+c}} > 2.$

(22) $\sqrt{(\sum a^2)+2} < \sum a < \sum \frac{ab}{c}.$

(23) $(\sum \frac{a}{b})(\sum \frac{b}{a}) > 9; (\sum a)(\sum \frac{1}{a}) > 9.$

(24) **Carlson 不等式:**

$$\left(\frac{1}{3}\sum ab\right)^{1/2} \leqslant \left(\frac{1}{8}\prod(a+b)\right)^{1/3}.$$ ([10]310 ~ 311)

(25) **Janous 不等式：** $\sum \frac{a^\lambda - c^\lambda}{b+c} > 0 \quad (\lambda > 0)$.

黄启林证明：

$$\sum \frac{a^2 - bc}{b+c} > 0;\ \sum \frac{a^m - c^m}{b^n + c^n} > 0 \quad (m, n \in N);$$

当 $pq > 0$ 时 $\sum \frac{a^p - c^p}{(b+c)^q} > 0$，而当 $pq < 0$ 时不等号反向.([348]2000,3:44 ~ 46)

(26) [MCM]. $\prod (a+b-c) < \prod a$.

令 $2x = b+c-a, 2y = c+a-b, 2z = a+b-c$. 得到

$$8\prod x < \prod (x+y) < \frac{8}{3}(\sum x^3).$$

(27) $\sum (\frac{a}{b}) < \sum \left(\frac{b}{a}\right)^3$; $\prod \left(\frac{a}{b}\right)^{b/a} < 1 < \prod \left(\frac{a}{b}\right)^{a/b}$;

提示：利用 $x > 0$ 时，$x^{(1/x)-1} \leqslant 1 \leqslant x^{x-1}$.

(28) 若 $a > b > c > 0$，则 $\sum \frac{a}{b} > 3$;

$$\prod a^b < \prod b^a < \prod a^a;\ \prod a^{b+c} < (\prod a^a)^2;$$

$$\left(\frac{a+c}{a-c}\right)^a < \left(\frac{b+c}{b-c}\right)^b;\quad \frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} > \frac{4}{a-c}.$$

(29) [MCM]. $\prod a^b < (\prod a)^{\frac{1}{3}\sum a} < \left(\frac{1}{3}\sum a\right)^{\sum a} < \prod a^a < \left(\frac{\sum a^2}{\sum a}\right)^{\sum a}$.

(30) $(\sum a)^{\sum a} (\prod a^a) < \prod (a+b)^{a+b}$.

(31) [MCM]. 设非负实数 a, b, c 满足 $a+b+c \leqslant 3$，则

$$\sum \frac{a}{1+a^2} \leqslant \frac{3}{2} \leqslant \sum \frac{1}{1+a}.\ ([38]473.\ B3-133)$$

(32) [MCM]. $\sum \frac{1}{a^3+b^3+abc} \leqslant \frac{1}{\prod a}$.

2000 年，王林全等用变形技巧给出了一个简捷的证明：

因为 $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \geqslant (a+b)ab$，所以，

$$\frac{abc}{a^3+b^3+abc} \leqslant \frac{abc}{(a+b)ab+abc} = \frac{c}{a+b+c},$$

于是 $$\sum \frac{abc}{a^3+b^3+abc} \leqslant \sum \frac{c}{a+b+c} = 1.$$

(中学数学思想方法概论，广州：暨南大学出版社，2000，328)

(33) $\sum \left(\frac{2}{a+b}\right)^n \leqslant \sum \frac{1}{a^n}, (n \in N)$.

(34) 设 $pq \geqslant 0$，则

$$\sum a^p (a^q - b^q) > 0,$$

当 $pq \leqslant 0$ 时不等号反向.(罗南星,[348]2000,9:29)

(35)　设 $n \geqslant 2m$,或 $n = m$,则

$$\sum \frac{1}{a^n(1+b^m)} \geqslant \frac{3}{1+(\prod a)^{\frac{2n+m}{3}}}.$$

(侯典峰,[351]2007,3:361 ~ 365)$n = m = 1$ 时是 2006 [MC].

(36)　设 $\prod a = 1$,则

$$\sum \frac{a}{(a+1)(b+1)} \geqslant \frac{3}{4};\qquad \sum \frac{a^3}{(1+b)(1+c)} \geqslant \frac{3}{4}.\qquad \text{[MC]}$$

(37)　设 $\sum ab = 1$,则

$$6\sqrt{3} \leqslant \left(\sum \sqrt{a+b}\right)^2 \leqslant \frac{27}{4}\prod(a+b).\qquad \text{[MC]}$$

(38)　设 $p,q \geqslant 1$,则

$$\sum \frac{a^{p+q}}{b^p+c^p} \geqslant \frac{1}{2}\sum a^q.$$ ([351]2007,4:414 ~ 419)

若令 $f(p,q,r) = \sum \frac{a^p}{b^q+c^r}$, 我们问:$f(p,q,r)$ 的最佳上、下界是什么?

已知 $\sum a = 1$ 时,$f(2,2,1) \geqslant \frac{3}{4}$.([351]2008,1:108)

(39)　记 $f(p_k,\lambda_k,r) = \left(\sum \frac{a^{p_1}}{\lambda_1 a^{p_2}+\lambda_2 b^{p_3}+\lambda_3 c^{p_4}}\right)^r$.

当 $r = 1$ 时,记 $g(p_k,\lambda_k) = f(p_k,\lambda_k,1)$.

对于参数 p_k,λ_k,r 的不同选择,可以得到一系列有用的不等式.目前,已知的结果有:

①　若 $abc \geqslant 1$, $\lambda_k = 1$, $p_3 = p_4 = 1$, $p = p_1 = p_2 \geqslant 1$ 或 $p \leqslant -2$ 时,成立

$$g(p,1) = \sum \frac{a^p}{a^p+b+c} \geqslant 1.$$

当 $-2 < p < 1$ 时,不等号反向.

②　当 $p_1 = 2$, $p_2 = p_3 = p_4 = 1$,

$$g(p_k,\lambda_k) = \sum \frac{a^2}{\lambda_1 a+\lambda_2 b+\lambda_3 c} \geqslant \frac{\sum a}{\sum \lambda_1}.$$

③　$p_k = 4$, $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 时,成立

$$\sum \frac{a^4}{4a^4+b^4+c^4} \leqslant \frac{1}{2}.$$

④　设 $p = p_1 = p_2$, $q = p_3 = p_4$,则当 $2\lambda_1 \leqslant \lambda_2+\lambda_3$ 时,

$$\sum \frac{a^p}{\lambda_1 a^p+\lambda_2 b^q+\lambda_3 c^q} \geqslant \frac{3}{\sum \lambda_1}.$$

当 $2\lambda_2 \leqslant \lambda_1+\lambda_3$ 和 $2\lambda_3 \leqslant \lambda_1+\lambda_2$ 时,不等号反向.

⑤　当 $p_k = 1$, $\lambda_1 \geqslant 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $0 < r \leqslant \frac{(2+\lambda_1)}{3}$ 时,$f(1,\lambda_k,r) \leqslant \frac{3}{4^r}$.

⑥ 当 $p_k=1$，$0\leqslant\lambda_1\leqslant 1+\sqrt{3}$，$\lambda_2=\lambda_3=1$，$r<0$ 或 $r\geqslant 2$ 时，

$f(1,\lambda_k,r)\geqslant\frac{3}{(\lambda_1+2)^r}$.

([351]2007(4),2008(1～2))

邹守文还进一步提出了若干猜想.我们可以进一步问：在一般情形下，f 的上、下界是多少？

(40) 令 $f(\lambda_k)=\sum\frac{a}{\sqrt{\lambda_1 a^2+\lambda_2 b^2+\lambda_3 bc+\lambda_4 c^2}}$，

我们问：对于一般的参数 λ_k，f 的最佳上、下界是什么？目前已知的结果有：

① 当 $\lambda_1=1$，$\lambda_3=8$，$\lambda_2=\lambda_4=0$ 时，$\sum\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\geqslant 1$(42 届 IMO)；

② $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=\lambda_4=0$ 时，$1<\sum\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\leqslant\frac{3\sqrt{2}}{2}$；

③ $\lambda_1=1$，$\lambda_2=\lambda_4=\lambda$，$\lambda_3=2\lambda$，则当 $\lambda\geqslant 2$ 时，成立

$$f(1,\lambda,2\lambda,\lambda)=\sum\frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda(b+c)^2}}\geqslant\frac{3}{\sqrt{4\lambda+1}}.$$

当 $\lambda\in[0,\frac{5}{16}]$ 时，不等号反向.

我们问：$\frac{5}{16}<\lambda<2$ 时，$f(1,\lambda,2\lambda,\lambda)$ 的上、下界是多少？

为此，蒋明斌猜想：$\lambda>\frac{5}{7}$ 时，$f(1,\lambda,2\lambda,\lambda)<\frac{2}{\sqrt{2\lambda+1}}$.

([351]2009,3:290～292,2009,4:423～425)

④ $\lambda_1=0$，$\lambda_2=\lambda_4=1$，$\lambda_3=\frac{1}{4}$. 则 $f(0,1,\frac{1}{4},1)\geqslant 2$.

(41) 设 $0\leqslant a,b,c<1$，且 $\sum a=1$，$p>0$. 则

$$\sum(a^2+ab+b^2)^{-p}\geqslant\min\{4^p(2+3^{-p}),3^{p+1}\}.\quad\text{(Janous [22]458)}$$

(42) 设 $\lambda,\mu>0$. 则当 $p\leqslant 0$ 或 $p\geqslant 1$ 时，蒋明斌证明

$$\sum\left(\frac{a}{\lambda b+\mu c}\right)^p\geqslant\frac{3}{(\lambda+\mu)^p}.$$

并对 $0<p<1$ 的情形，提出了若干新的猜想.([351]2003,6:10～12)

(43) 记 $f(p)=\sum\frac{a^p}{b^p+c^p+a^{p-1}b}$，已知 $f(2)\leqslant 1$，$f(3)\leqslant 1$.(杨志明[351]2006,1:431)

我们问：对于一般的 p，$f(p)$ 的最佳上、下界是什么？

(44) $\sum\frac{(\lambda a+b+c)^2}{\lambda a^2+(b+c)^2}\leqslant\frac{3(\lambda+2)^2}{\lambda+4}$ ($\lambda=2$ 时为 32 届美国 IMO).

([351]2006,1:71～73)

(45) $\sum \frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+\lambda c^2} \geqslant \frac{3}{4+\lambda}$ ($\lambda = 1$ 为 1997 年日本 IMO).

([351]2006,3:326 ~ 328)

(46) 设$\sum a = 1$, 则$\sum \frac{1}{a} \geqslant \frac{25}{1+48\prod a}$. ([305]2007,114(1):649)

(47) 设$\sum a^2 = 1$, 则$\sum \frac{a}{1-a^{2n}} \geqslant \frac{(2n+1)^{1+\frac{1}{2n}}}{2n}$. ([305]2006,113(1):79)

(48) 设$0<a,b,c<1$, $\sum a = 2$,则$\sum a^{1-a}b^{1-b}c^{1-c} \leqslant 2$. ([371]2003,76(2):152)

(49) 设$\lambda \in R^1$, $p \geqslant 0$, 则$\sum \frac{[a+\lambda(b-c)]^2}{a^2+b^2+c^2+pab} \geqslant \frac{3}{p+3}$. ([351]2006,4:431)

(50) 设 x,y,z 是实数,且不同时为零,则

$$\frac{1-\sqrt{19}}{6} \leqslant \frac{xy+2xz+3yz}{x^2+y^2+9z^2} \leqslant \frac{1+\sqrt{19}}{6}.$$

([351]2006,4:432 ~ 434)

35. 2001 年,马统一证明:设 $0<a,b,c<1/2$, $\sum a = 1$,则

$$\sum \frac{ab}{(1-2a)(1-2b)} \geqslant \sum \frac{a}{1-2a} \geqslant \sum \frac{1-2a}{a} \geqslant \sum \frac{(1-2a)(1-2b)}{ab} \geqslant 3.$$

仅当 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 时等号成立. 并提出猜想:设 $0<x_k<\frac{1}{2}$, $\sum_{k=1}^{n} x_k = 1, n \geqslant 3$,则

$$\sum \frac{x_2x_3\cdots x_n}{(1-2x_2)(1-2x_3)\cdots(1-2x_n)} \geqslant (n-2)^{2-n}\sum \frac{x_1}{1-2x_1} \geqslant (n-2)^{-n}\sum \frac{1-2x_1}{x_1}$$

$$\geqslant (n-2)^{2(1-n)}\sum \frac{(1-2x_2)(1-2x_3)\cdots(1-2x_n)}{x_2x_3\cdots x_n} \geqslant \frac{n}{(n-2)^{n-1}}.$$

仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1/n$ 时等号成立.

36. 设 $0<a,b,c<1$,则

$$\sqrt{\sum a^2} + \sum \sqrt{a^2+b^2+(1-c)^2} + \sum \sqrt{a^2+(1-b)^2+(1-c)^2} + \sqrt{\sum (1-a)^2} \geqslant 4\sqrt{3}.$$

提示:构造边长为 1 的立方体,使得各棱的长度分为 $a,1-a,b,1-b,c,1-c$,于是分成 8 个小长方体,再考虑每个小长方体对角线的长,然后相加.

37. [MCM]. 设 $0 \leqslant a,b,c \leqslant 1$,则

$$\sum \frac{a}{b+c+1} + \prod (1-a) \leqslant 1.$$

证 若直接通分,就会把问题弄得很复杂. 不妨设 $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant c \leqslant 1$. 于是,不等式左边 $\leqslant \frac{a+b+c}{a+b+1} + \prod(1-a) = 1 - \frac{1-c}{a+b+1}[1-(1+a+b)(1-a)(1-b)]$. 再注意 $(1+a+b)(1-a)(1-b) \leqslant (1+a+b+ab)(1-a)(1-b) = (1-a^2)(1-b^2) \leqslant 1$,不等式即可得证. 特别地,若$\sum a = 1$,则

$$\frac{41}{135} \leqslant \sum \frac{a}{b+c+1} - \prod (1-a) \leqslant 1.$$

推广： 设 $0 \leqslant a_k \leqslant 1, S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, n \geqslant 2$，则

$$\frac{1}{2} < \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1+S_n-a_k} + \prod_{k=1}^{n} (1-a_k) \leqslant 1.$$

证 $1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1+S_n-a_k} - \prod_{k=1}^{n} (1-a_k)$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{S_n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1+S_n-a_k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{S_n}(1-a_k) \prod_{j \neq k} (1-a_j)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k(1-a_k)}{S_n(1+S_n-a_k)} [1-(1+S_n-a_k) \prod_{j \neq k} (1-a_j)]$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k(1-a_k)}{S_n(1+S_n-a_k)} [1-\frac{1}{n}(1+S_n-a_k+1-a_1+\cdots+1-a_n)] = 0.$$

(左边不等式的证明见[350]1993,5:40)

38. 设 $\sum a > 0$，则

$$\sum \sqrt{a^2+b^2} \geqslant \sqrt{2}(\sum a).$$

提示：可用复数不等式：$|z_1+z_2+z_3| \leqslant |z_1|+|z_2|+|z_3|$. 式中 $z_1 = a+ib, z_2 = b+ic, z_3 = c+ia$. 还可构造直角三角形，用勾股定理证明.

推广： 设 $\sum_{k=1}^{n} a_k > 0$，记 $a_{n+1} = a_1$，则

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + a_{k+1}^2)^{1/2} \geqslant \sqrt{2}(\sum_{k=1}^{n} a_k).$$

39. 设 a,b,c 为实数，$a \neq b$，则

$$\sqrt{(a-c)^2+b^2} + \sqrt{a^2+(b-c)^2} > \sqrt{2}|a-b|.$$

提示：可用解析几何方法证明，在平面直角坐标系中，取点 $P_1(a,b), P_2(b,a), P_3(c,0)$. 利用不等式 $|P_1P_2| < |P_1P_3| + |P_2P_3|$ 即可得证.

40. [MCU]. 设 a,b,c 是不全为零的整数，且每一个的绝对值均小于 10^6，则

$$|a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}| > 10^{-21}.$$

证 令 $f_1 = a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}$. 令 f_2, f_3, f_4 为形如 $a \pm b\sqrt{2} \pm c\sqrt{3}$ 的另外三数. 利用 $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{3}$ 的无理性以及 a,b,c 不全为零的条件，易证所有 f_k 都不为零，且 $f = \prod_{k-1}^{4} f_k$ 为整数，从而 $|f| \geqslant 1$. 再由 $|f_k| < 10^7$，即可得出 $|f_1| \geqslant |f_2f_3f_4|^{-1} > 10^{-21}$.

([66]484,487)

杨克昌通过构造新的无理数，即当 b,c 不同时为零时，记 $g_1 = f_1^2, g_2 = f_3f_4, g_3 = f_4f_2, g_4 = f_2f_3, g = g_1g_2g_3g_4$，仍有 $|g| \geqslant 1$，得到一个改进结果.

$$|f_1| > 10^{-18}[(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})]^{-1} > 10^{-20}.$$ ([99]5,26 ~ 36)

注　若 a,b,c 是不全为零的整数，且其绝对值均小于 10^{-6}，则 $|f_1|<10^{-11}$.

我们进一步问：在所给条件下，$|f_1|$ 和 $|\sum_k \sqrt{k}a_k|$ 的最优下界是什么？

41.　**Oppenheim 不等式**：设 a,b,c 为正数，且

(1)　$\min\{a,b,c\}<x,y,z<\max\{a,b,c\}$.　(41.1)

(2)　$\sum a\leqslant\sum x$.　(41.2)

则　(3)　$\prod a\leqslant\prod x$　(41.3)

和　(4)　$\sum ab\leqslant\sum xy$.　(41.4)

反之，若(41.3)中不等号反向，则(41.2)式中不等号也反向，而且还成立：

(5)　$\sum a^p\geqslant\sum x^p$. $(p>0)$.

若(41.4)中不等号反向，则(41.2)中不等号也反向. 以上均仅当 a,b,c 按某一顺序分别等于 x,y,z 时等号成立. 证明及其推广见[325]1965,49:160 ~ 162，和[331]1968,210 ~ 228:21 ~ 24 等)

42.　设 a,b,c 为任意实数，则

$$\sum(1+a^2)^2(1+b^2)^2(a-c)^2(b-c)^2\geqslant 2[\prod(1+a^2)][\prod(a-b)^2].$$

([305]1988,95(2),E3074)

43.　[MCM]. 设实数 a,b,c 满足 $\sum a^2=1$，则

$$-1/2\leqslant\sum ab\leqslant 1.$$

提示：利用不等式：$-\sum a^2\leqslant 2\sum ab\leqslant 2\sum a^2$.

推论　设 $S_n=\sum_{k=1}^n a_k^2$，则 $-\frac{1}{2}S_n\leqslant\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^n a_ja_k\leqslant S_n$.

44.　[MCU]. 设实数 a,b,c 中任意两数之和大于 3，则

$$(\sum a^3)+(\prod a)<\frac{2}{3}(\sum a)(\sum a^2).$$

提示：作代换：$2x=b+c-a$, $2y=c+a-b$, $2z=a+b-c$.

45.　[MCM]. 设 a,b,c 满足 $\sum a>0$，$\prod a>0$. 则 $\sum a^n>0$.

46.　**Schur 不等式**：设 x,y,z 是正数，α 为实数，则

$$\sum x^\alpha(x-y)(x-z)\geqslant 0, \tag{46.1}$$

仅当 $x=y=z$ 时等号成立.

Schur 不等式已有许多推广，例如：

(1)　设 $a_k,b_k(1\leqslant k\leqslant 3)$ 均为正数，并且

$$a_1^{1/p}+a_3^{1/p}\leqslant a_2^{1/p}; \tag{46.2}$$

$$b_1^{\frac{1}{p+1}}+b_3^{\frac{1}{p+1}}\geqslant b_2^{\frac{1}{p+1}}. \tag{46.3}$$

则当 $p>0$ 时，成立

$$b_1a_2a_3 - b_2a_3a_1 + b_3a_1a_2 \geqslant 0. \tag{46.4}$$

若 $-1 < p < 0$ 则(46.3) 与(46.4) 式反向；若 $p < -1$，则(46.2) 与(46.3) 式反向. 在所有情形下，仅当(46.2) 与(46.3) 式中等号成立且 $\frac{a_1^{p+1}}{b_1^p} = \frac{a_2^{p+1}}{b_2^p} = \frac{a_3^{p+1}}{b_3^p}$ 时，(46.4) 式中等号成立.

(2)　设 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k(\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n}(x_k - x_j))$，对递减实数列 $\{x_k\}_{k=1}^n$，$S_n \geqslant 0$ 的充要条件是：

①　$n = 3$ 时是 $a_1 \geqslant 0, a_2 \leqslant (a_1^{1/2} + a_3^{1/2})^2, a_3 \geqslant 0$；　②　$n \geqslant 4$ 时是 $a_2 \leqslant a_1$，$(-1)^n(a_{n-1} - a_n) \geqslant 0, (-1)^{k+1}a_k \geqslant 0, 1 \leqslant k \leqslant n, k \neq 2, k \neq n-1$.

(证明及参考文献见[4]157 ～ 161)

(3)　设 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3$，且 $a_1 \geqslant 0, a_3 \geqslant 0, a_2 \leqslant (\sqrt{a_1} + \sqrt{a_3})^2$，则

$$\sum b_1(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) > 0. \text{(陈胜利)}$$

47.　[MCM]. $\sum a(x-y)(x-z) \geqslant 0$，对任意实数 x, y, z 均成立的充要条件是 a, b, c 均非负且满足 $\sum a^2 \leqslant 2\sum ab$.

48.　设 x, y, z 为实数，则

$$xy + 2yz \leqslant (\sqrt{5}/2)(x^2 + y^2 + z^2).$$

证　引入待定参数 $\lambda_1, \lambda_2 > 0$，使得

$$xy + 2yz \leqslant \frac{1}{2}(\lambda_1 x^2 + \frac{1}{\lambda_1}y^2) + \lambda_2 y^2 + \frac{1}{\lambda_2}z^2 = \frac{1}{2}\lambda_1 x^2 + (\frac{1}{2\lambda_1} + \lambda_2)y^2 + \frac{1}{\lambda_2}z^2.$$

令 $\frac{1}{2}\lambda_1 = \frac{1}{2\lambda_1} + \lambda_2 = \frac{1}{\lambda_2}$，得 $\lambda_1 = \sqrt{5}, \lambda_2 = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. 于是　$xy + 2yz \leqslant \frac{\sqrt{5}}{2}\sum x^2$. 证毕.

([345]1991,4:48)

49.　设实数 a, b, c, d 不同时为零，则

$$\frac{ab + 2bc + dc}{\sum a^2} \leqslant \frac{1+\sqrt{2}}{2} < \frac{5}{4}.$$

提示：引入正的参数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 作为待定系数：$(\lambda_1 a)^2 + b^2 \geqslant 2\lambda_1 ab$，$(\lambda_2 b)^2 + c^2 \geqslant 2\lambda_2 bc$，$(\lambda_3 c)^2 + d^2 \geqslant 2\lambda_3 cd$. 变形相加得到

$$\frac{\lambda_1}{2}a^2 + (\frac{1}{2\lambda_1} + \lambda_2)b^2 + (\frac{1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_3}{2})c^2 + \frac{1}{2\lambda_3}d^2 \geqslant ab + 2bc + cd.$$

令 $\frac{\lambda_1}{2} = \frac{1}{2\lambda_1} + \lambda_2 = \frac{1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_3}{2} = \frac{1}{2\lambda_3}$，解得 $\lambda_1 = \sqrt{2} + 1$. 而上界 $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ 在 $a = d = 1, b = c = 1 + \sqrt{2}$ 时取得.

50.　设 $a, d \geqslant 0, b, c > 0$ 满足 $b + c \geqslant a + d$，则

$$\frac{b}{c+d} + \frac{c}{a+b} \geqslant \sqrt{2} - \frac{1}{2}.$$

仅当 $a = \sqrt{2} + 1, b = \sqrt{2} - 1, c = 2, d = 0$ 时等号成立.

提示:注意变形技巧:不妨设 $a+b\geqslant c+d$,则 $b+c\geqslant\frac{1}{2}\sum a$. 从而

$$\frac{b}{c+d}+\frac{c}{a+b}=\frac{b+c}{c+d}-c\left(\frac{1}{c+d}-\frac{1}{a+b}\right)\geqslant\frac{\sum a}{2(c+d)}-(c+d)\left(\frac{1}{c+d}-\frac{1}{a+b}\right)$$
$$=\frac{a+b}{2(c+d)}+\frac{c+d}{a+b}-\frac{1}{2}\geqslant\sqrt{2}-\frac{1}{2}.$$

51. [MCM]. (1) 设 $a,b,c,d>0$,并记 $S=\sum\frac{a}{a+b+d}$,则 $1<S<2$.

证 $S<\sum\frac{a}{a+b}=2$. 另一方面,$S>\sum\frac{a}{a+b+c+d}=1$.

注意:若引入新的变量作变形,$S>1$ 可改进为 $S>\frac{4}{3}$,即令 $x=b+c+d$,$y=c+d+a$,$z=d+a+b$,$u=a+b+c$,则

$$a=\frac{1}{3}(y+z+u-2x),\ b=\frac{1}{3}(z+u+x-2y),$$
$$c=\frac{1}{3}(u+x+y-2z),\ d=(x+y+z-2u).$$

然后利用 $x+1/x>2$,得到

$$S=\frac{1}{3}\left[\sum\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)-8\right]>\frac{1}{3}(6\times2-8)=\frac{4}{3}.$$

(2) 设 a,b,c,d 均为非零实数,记

$$\sigma=\sum\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2},\qquad 则\quad 1<\sigma<2.$$

(3) 设 a,b,c,d 为非负实数且 $\sum ab=1$,则

$$\sum\frac{a^3}{b+c+d}\geqslant\frac{1}{3}.$$ ([38]478 B3－141)

(4) 设正数 a,b,c,d 满足 $\sum a=1$,则 $6\sum a^3\geqslant\sum a^2+\frac{1}{8}$. (2005 年中国香港 MC)

52. [MCM]. 给定五个实数 a_k,总可找到五个实数 x_k,使得 a_k-x_k 恒为自然数,且

$$\sum_{1\leqslant j<k\leqslant5}(x_j-x_k)^2<4.$$

(施咸亮用抛物线技巧和抽屉原理给出了两种证法,详见娄志渊等,高中数学竞赛十八讲,浙江教育出版社,1989)

53. [MCM]. 设 $x_k>0$,$k=1,2,\cdots,5$,则

$$\left(\sum_{k=1}^{5}x_k\right)^2\geqslant4\sum_{\substack{j,k=1\\j\neq k}}^{5}x_jx_k.$$

推广: $\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^2\geqslant c_n\sum_{\substack{j,k=1\\j\neq k}}^{n}x_jx_k$. 式中 $c_2=2$,$c_3=3$,$n\geqslant4$ 时,$c_n=4$.

提示:用数学归纳法证明:若 x_n 是 $\{x_k\}_{k=1}^n$ 的最小值. 令 $S_n=\sum_{k=1}^n x_k$. 则

$$S_n^2-S_{n-1}^2\geqslant 4(-x_1x_{n-1}+x_1x_n+x_{n-1}x_n).$$

54. 设 $x_k(1\leqslant k\leqslant 6)$ 为实数,则

$$\sum_{k=1}^6 x_k^2-\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^6 x_jx_k\geqslant\sqrt{3}\begin{vmatrix}x_1 & x_4 & 1\\ x_2 & x_5 & 1\\ x_3 & x_6 & 1\end{vmatrix}.$$

提示:用解析几何方法,设 $(x_1,x_4),(x_2,x_5),(x_3,x_6)$ 是以 a,b,c 为边,面积为 S 的三角形的三顶点,则上述不等式等价于三角形不等式中的 Weitzenböck 不等式:

$\sum a^2\geqslant 4\sqrt{3}S$. (第四章 § 1. 一. No. 1)

55. 设 a,b,c,x,y,z 为任意正数,则

$$\left(\frac{x}{a}\right)^a\left(\frac{y}{b}\right)^b\left(\frac{z}{c}\right)^c\leqslant\left(\frac{x+y+z}{a+b+c}\right)^{a+b+c}.$$

提示:求 $f(x,y,z)=x^ay^bz^c$ 在条件 $x^p+y^p+z^p=1$ 下的最大值,其中 $p>0$.

56. [MCU]. 设 $a_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 为实数. $S_n=\sum_{k=1}^n a_k$. 令 $e_0=0,e_n=\exp e_{n-1}$,则

$$\sum_{k=1}^n(1-a_k)\exp S_k\leqslant e_n.$$

仅当 $a_n=e_0,a_{n-1}=e_1,\cdots,a_1=e_{n-1}$ 时等号成立.

$n=5$ 时即为 21 届普特南数学竞赛试题.

提示:利用不等式:$(1-x+a)e^x\leqslant e^a$.

([66]297,301 ~ 302,和[305]1982,89:453 ~ 454)

57. [MCU]. 设实数 $a_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 满足:

$$M+\sum_{k=1}^n a_k^2<\frac{1}{n-1}\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^2.\ (n>1).$$

则 $M<2a_ja_k(1\leqslant j<k\leqslant n)$.

提示:用 Cauchy 不等式:

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^2\leqslant(n-1)\left(\sum_{k=1}^n a_k^2+2a_ja_k\right).$$

于是

$$\frac{1}{n-1}\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^2\leqslant\sum_{k=1}^n a_k^2+2a_ja_k.$$

由假设

$$M<-\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)+\frac{1}{n-1}\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^2\leqslant 2a_ja_k.$$

58. [MCM]. **Chebyshev 不等式**:设 $a_1<a_2<\cdots<a_n,b_1<b_2<\cdots<b_n,(n\geqslant 2)$,则

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k\right)<n\left(\sum_{k=1}^n a_kb_k\right).$$

提示：$(\sum_{k=1}^{n}a_k)(\sum_{k=1}^{n}b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+\sum_{j\neq k}a_jb_k$. 注意到

$$a_jb_k+a_kb_j=(a_jb_j+a_kb_k)-(a_j-a_k)(b_j-b_k)<a_jb_j+a_kb_k.$$

而 $\sum_{j\neq k}a_jb_k$ 中有 $n(n-1)$ 项，于是 $\sum_{j\neq k}a_jb_k<(n-1)\sum_{k=1}^{n}a_kb_k$. ([38]409)

59.　[MCM]. 设 x_k 为 n 个实数. $A_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k$，则

$$\prod_{k=1}^{n}(1+e^{x_k})\geqslant[1+\exp A_n(x)]^n.$$

仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时等号成立.

60.　[MCM]. 设 $b_k=\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}a_j$，$1\leqslant k\leqslant n$，$f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}(a_k-x)^2$，$g_n=\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)$，则 $g_n\leqslant f_n(b_n)\leqslant 2g_n$.

提示：注意到关系式 $f_n(x)=n(x-b_n)^2+f_n(b_n)$，并利用数学归纳法.（详见[38]419. B3－038）

61.　(1)　[MCM]. 设 $0\leqslant a_k\leqslant 1$，$1\leqslant k\leqslant n$，则

$$(1+\sum_{k=1}^{n}a_k)^2\geqslant 4\sum_{k=1}^{n}a_k^2.$$

(2)　**华罗庚不等式**：设 a_k 为实数，$p,q>0$，则

$$(p-\sum_{k=1}^{n}a_k)^2+q(\sum_{k=1}^{n}a_k^2)\geqslant\frac{qp^2}{n+q},$$

仅当 $a_1=\cdots=a_n=\frac{qp}{n+q}$ 时等号成立.

（转引[301]1995，196(3)：1135 ～ 1138；原文见华罗庚“堆垒数论”.）

1992 年，王中烈借助动态规划法将华罗庚不等式中的指数 2 换成 r，即

设 $r>1$，$a_k\geqslant 0$，$\sum_{k=1}^{n}a_k\leqslant p$，则

$$(p-\sum_{k=1}^{n}a_k)^r+q^{r-1}(\sum_{k=1}^{n}a_k^r)\geqslant(\frac{q}{n+q})^{r-1}p^r.$$

而当 $0<r<1$ 时不等号反向，仅当 $a_1=\cdots=a_n=\frac{qp}{n+q}$ 时等号成立.（[301]1992，166：345 ～ 350）当 $r<0$，$a_k>0$，$\sum_{k=1}^{n}a_k\leqslant p$ 时，Pearce，C. E. M. Pecaric，J. E. 和王挽澜等各自用不同的方法证明了相应的不等式，以后，又有许多作者将其推广到复数域和抽象空间中，详见罗钊与王挽澜的综合报告：“关于华罗庚的一个不等式”(2000 年 12 月在“纪念华罗庚九十诞辰国际数学会议”上的报告).

62.　设 n 个实数 x_j 满足 $\sum_{j=1}^{n}x_j^2=1$，则对任一自然数 $k>1$，存在不全为零的整数 a_j，$|a_j|\leqslant k-1$，$(1\leqslant j\leqslant n)$，使得

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_j x_j\right| \leqslant \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}. \tag{62.1}$$

证 由条件和柯西不等式,有 $\sum |x_j| \leqslant n^{1/2}(\sum |x_j|^2)^{1/2} = \sqrt{n}$. 又由 $|a_j| \leqslant k-1$ 可知,整数 $|a_j|$ 只可能是 $0,1,\cdots,k-1$,在这 k 个数中任取 n 个(可重复选取),记为 b_1, $b_2,\cdots,b_n$,从而 $0 \leqslant b_j \leqslant k-1$,于是,

$$\sum b_j |x_j| \leqslant (k-1)\sum |x_j| \leqslant (k-1)\sqrt{n}. \tag{62.2}$$

将区间 $[0,(k-1)\sqrt{n}]$ 等分成 k^n-1 个小区间,每个小区间的长度为 $(k-1)\sqrt{n}/(k^n-1)$. 而从不大于 $k-1$ 的 k 个非负整数中任取 n 个的重复排列数是 k^n,所以满足(62.2)式的 $\sum b_j |x_j|$ 至多有 k^n 个值,由抽屉原理,当 $\sum b_j |x_j|$ 的 k^n 个值都不相同时,必有两个(不同的) $\sum b_j |x_j|$ 和 $\sum b'_j |x_j|$ 落在同一小区间上(包括区间端点),从而

$$\left|\sum b_j |x_j| - \sum b'_j |x_j|\right| \leqslant (k-1)\sqrt{n}/(k^n-1). \tag{62.3}$$

若 $\sum b_j |x_j|$ 有取值相等的,则(62.3)式左边为零,即(62.3)式仍成立. 所以,令 $a_j = b_j - b'_j (1 \leqslant j \leqslant n)$,便得(62.1)式.

63. **Abel 不等式**:(1) 设 $b_1 \geqslant \cdots \geqslant b_n \geqslant 0$,记

$S_k = \sum_{j=1}^{k} a_j, m = \min\{S_1,\cdots,S_n\}, M = \max\{S_1,\cdots,S_n\}$,则

$$mb_1 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant Mb_1.$$

证 利用分部求和公式:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = S_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1}),$$

将 $m(b_k - b_{k+1}) \leqslant S_k(b_k - b_{k+1}) \leqslant M(b_k - b_{k+1})$. $k = 1,\cdots,n-1$ 以及 $mb_n \leqslant S_n b_n \leqslant Mb_n$ 相加即可得证.

(2) 若 a_k, b_k 均为复数时,则

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k b_k\right| \leqslant (\max_{n\leqslant k\leqslant m} |S_k|)\left(\sum_{k=n}^{m-1} |b_k - b_{k+1}| + |b_m|\right).$$

特别,若 $\{b_k\}$ 是正的递减数列,则

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k b_k\right| \leqslant (\max_{n\leqslant k\leqslant m} |S_k|) \cdot b_n;$$

而当 $\{b_k\}$ 是正的递增数列时,有

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k b_k\right| \leqslant 2b_m(\max_{n\leqslant k\leqslant m} |S_k|).$$

([76]135 和[57]Vol. 1:3 ~ 4)

(3) 设 $0 \leqslant a_k \leqslant 1, p \geqslant 1, A_n(a) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$,则

$$\sum_{k=1}^{n} k^p a_k \geqslant (A_n(a))^{p+1}\left(\sum_{k=1}^{n} k^p\right),$$

仅当 $\forall a_k = 1$ 时成立(Dragomir,S. S. 等)([301]1998,225(2):542 ~ 556)

(4)　设 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$，$\sum_{k=i}^{n} q_k \geqslant 0, i = 2, \cdots, n. Q_n = \sum_{k=1}^{n} q_k$，则

$$\sum_{k=1}^{n} q_k a_k \geqslant a_1 Q_n + \left| \sum_{k=1}^{n} q_k \mid a_k \mid - \mid a_1 \mid Q_n \right|.$$

(Dragomir,S. S. 等,见 Math,Commun,1998,3(1):95 ~ 101)

64.　**Meir 不等式:** 设 $r \geqslant 1, s+1 \geqslant 2(r+1). 0 \leqslant p_0 \leqslant \cdots \leqslant p_n, 0 = a_0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n$，且 $a_k - a_{k-1} \leqslant (1/2)(p_k + p_{k-1}), k = 1, \cdots, n$，令

$\sigma_r(p,a) = \left[(r+1)\sum_{k=1}^{n} p_k a_k^r\right]^{\frac{1}{r+1}}$，则 $\sigma_r(p,a) \geqslant \sigma_s(p,a)$.

特别地,当所有 $p_k = 1(k = 1, \cdots, n)$ 时,即得 Klamkin,M. S. 和 Mewman,D. J. 不等式.

([305]1976,83(1):26 ~ 30)

65.　[MCM]. 设 a_k 是 n 个正数,则

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{\sum_{j=1}^{k} a_j} \right) < 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}. \tag{65.1}$$

系数 2 是最佳常数.

证　令 $B_m = \dfrac{m}{\sum_{k=1}^{m} a_k^{-1}}$，$\sigma_n = \sum_{m=1}^{n} B_m$，利用 Cauchy 不等式,

$$\frac{m(m+1)}{2} = \sum_{k=1}^{m} k = \sum_{k=1}^{m} (k a_k^{\frac{1}{2}})(a_k^{-1})^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{m} k^2 a_k\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{-1}\right)^{\frac{1}{2}},$$

从而

$$B_m = \frac{m}{\sum_{k=1}^{m} a_k^{-1}} \leqslant \frac{4}{m(m+1)^2} \sum_{k=1}^{m} k^2 a_k \tag{65.2}$$

上式对 m 求和并利用双重求和的恒等变换式

$$\sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_k b_m = \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=k}^{n} a_k b_m \tag{65.3}$$

得到

$$\begin{aligned}\sigma_n &\leqslant \sum_{m=1}^{n} \frac{4}{m(m+1)^2} \sum_{k=1}^{m} k^2 a_k = \sum_{k=1}^{n} (k^2 a_k) \sum_{m=k}^{n} \frac{4}{m(m+1)^2} \\ &< 2 \sum_{k=1}^{n} k^2 a_k \sum_{m=k}^{n} \frac{2m+1}{m^2(m+1)^2} = 2 \sum_{k=1}^{n} k^2 a_k \sum_{m=k}^{n} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{(m+1)^2}\right) \\ &= 2 \sum_{k=1}^{n} k^2 a_k \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) < 2 \sum_{k=1}^{n} a_k.\end{aligned}$$

即

$$\sigma_n < 2 \sum_{k=1}^{n} a_k \tag{65.4}$$

上式与(65.1)等价. 为证系数 2 是最佳常数,可以用反证法.

若存在常数 c,使得 $0<c<2$ 且(65.4)仍成立,即

$$\sigma_n < c\sum_{k=1}^{n} a_k \tag{65.5}$$

取 $a_k=\frac{1}{k}$,并令 $A_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$,则由(65.5)式得到

$$\sigma_n=\sum_{m=1}^{n}\frac{2}{m+1}=2A_n-2+\frac{2}{n+1}<cA_n,$$

从而 $c>2\left(1-\frac{n}{(n+1)A_n}\right)$. 令 $n\to\infty$,得到 $c\geqslant 2$,但这与假设 $0<c<2$ 相矛盾. 因此,2 是使(65.1)成立的最佳常数.

我们由此进一步猜想:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{\sum_{j=1}^{n}a_j^{-1}}\right)^p<\left(1+\frac{1}{p}\right)^p\sum_{k=1}^{n}a_k^p,\quad 0<p<\infty \tag{65.6}$$

式中 $\left(1+\frac{1}{p}\right)^p$ 是最佳常数.(匡继昌[351]2008(2):146 ~ 147)

我们还可以换个角度去改进(65.1)式. 即求权系数 $\omega_k>0$,使得

$$\sum_{k=1}^{n}A_k^{-1}<2\sum_{k=1}^{n}(1-\omega_k)\frac{1}{a_k} \tag{65.7}$$

式中 $A_k=\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}a_j$ 是算数平均. 2008 年,文家金等求出上述 $\omega_k=\frac{\pi^2-9}{3k}$.

([344]2008,28(2))

同一年,张小明、褚玉明利用最佳单调定理,将(65.7)改进为

$$\sum_{k=1}^{n}A_k^{-1}\leqslant 2\sum_{k=1}^{n}(1-\omega_k)a_k^{-1}-\frac{2}{M_n}\left(1-\frac{1}{n+1}-\omega_1\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right); \tag{65.8}$$

$$\sum_{k=1}^{n}A_k^{-1}\leqslant 2\sum_{k=1}^{n}a_k^{-1}-\frac{2}{M_n}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\leqslant 2\sum_{k=1}^{n}a_k^{-1}-\frac{1}{M_n}; \tag{65.9}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k+\frac{1}{2}}{\sum_{j=1}^{k}a_j}\right)\leqslant 2\sum_{k=1}^{n}a_k^{-1}-\frac{1}{M_n}\left(1-\frac{1}{n+1}\right). \tag{65.10}$$

式中 $M_n=\max\left\{\frac{a_k}{k}:1\leqslant k\leqslant n\right\}$. 仅当 $a_1=2a_2=\cdots=na_n$ 时等号成立.([351]2008(2):157 ~ 161)

66.　设 $a_k,p>0,\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{p+a_k}=S_n,0<S_n<n,(n\geqslant 2)$,则

(1)　$\sum_{k=1}^{n}a_k\geqslant\frac{npS_n}{n-S_n}$;

(2)　$\sum_{k=1}^{n}a_k^2\geqslant\frac{np^2S_n^2}{(n-S_n)^2}$.

67.　[MCM]. 设 $a_k > 0, 1 \leqslant k \leqslant n$，且 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = 1$，则 $\forall m \in N$，成立

$$(\sum_{k=1}^{n} a_k)^m - (\sum_{k=1}^{n} a_k^m) \geqslant n^{2m} - n^{m+1}.$$

（提示：用数学归纳法，$n = 2$ 时见[38]432 B3 − 061）

68.　设 $a_1, \cdots, a_n$ 是不全相等的正数，记 $A_n(a) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$，则当 $x > a_k (1 \leqslant k \leqslant n)$ 时，有

$$(x - A_n(a))^n > \prod_{k=1}^{n} (x - a_k).$$

提示：利用 $f(x) = \ln x$ 在 $(0, \infty)$ 上的严格凹性.

推论　当 $2 < k < n$ 时，有

$$n^{k-2}(n-k)^2 < (n-2)^k.$$

（[305]1986，93(1)：12 ～ 13）

69.　(1)　设 a_k, b_k 均为正数，且 $\sum_{k=1}^{n} b_k = 1$，则

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{a_k}\right)^{-1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^{b_k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

提示：利用 $f(x) = \ln x$ 在 $(0, \infty)$ 上的严格凹性.

(2)　设 $a_k, b_k \geqslant 0, a_k + b_k = 1, n \geqslant 3$. $S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k a_{k+1}$，式中规定 $k > n$ 时，$a_k = a_{k-n}$. $k < 1$ 时，$a_k = a_{k+n}$. 则

$$S_n \leqslant \frac{n}{4\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^2}\left[1 - \left(\frac{\cos\frac{2\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)^2\right] \text{（吴跃生）;} \qquad S_n \leqslant \left[\frac{n}{2}\right] \text{（续铁权）}$$

（[305]2002. 3：30）

70.　设 $a_k, b_k (1 \leqslant k \leqslant n)$ 均为正数，并满足条件：

(1)　$\prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{k=1}^{n} b_k$；

(2)　$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |a_i - a_j| \leqslant \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |b_i - b_j|$，则　$\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant (n-1)\sum_{k=1}^{n} b_k$.

式中系数 $(n-1)$ 是最佳的.（[305]1995，102(10)：935）

71.　**Keogh 猜想**：设 $a_k = \mp 1, k = 0, 1, \cdots, n, b_k = a_n a_{n-k} + a_{n-1} a_{n-k-1} + \cdots + a_k a_0$，Keogh, F. R. 提出，下式是否成立？

$$\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2 > An^2, \tag{71.1}$$

其中 A 为绝对常数.

设 $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$，$|P_n(z)|^2 = n + 2\sum_{k=1}^{n} b_k \cos k\theta$. 若能证明(71.1)式成立，则成立

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |P_n(e^{i\theta})|^4 \mathrm{d}\theta \geqslant n^2(1+A). \tag{71.2}$$

([106]27)

72. **Weierstrass 不等式：** (1) 设 $0 < a_k < 1, k = 1,2,\cdots,n$，则

$$1-\sum_{k=1}^n a_k < \prod_{k=1}^n (1-a_k) < \frac{1}{\prod_{k=1}^n (1+a_k)} < \frac{1}{1+\sum_{k=1}^n a_k}; \tag{72.1}$$

(2) 设 $0 < a_k < 1$，且 $\sum_{k=1}^n a_k < 1$，则

$$\prod_{k=1}^n (1+a_k) < \frac{1}{1-\sum_{k=1}^n a_k};$$

注 (72.1) 式中右边不等式用到

$$1+\sum_{k=1}^n a_k < \prod_{k=1}^n (1+a_k).$$

上式实际上对 $a_k > -1$ 且 a_k 同号时也成立.(此即 Bernoulli 不等式，见本章 No. 8(11))

Weierstrass 不等式已有许多推广，例如，1983 年，Pecaric 证明：

(3) 设 $0 < a_k < 1, p_k \geqslant 1$，则

$$1+\sum_{k=1}^n p_k a_k < \prod_{k=1}^n (1+a_k)^{p_k}, \quad 1-\sum_{k=1}^n p_k a_k < \prod_{k=1}^n (1-a_k)^{p_k}.$$

2002 年，石焕南利用控制不等式理论(见[9])，将上述不等式推广到一般初等对称函数上，即下述(4) ~ (8)：

(4) 设 $a_k > 0, 1 < m \leqslant n, n \geqslant 2, t > 0, 0 \leqslant p \leqslant 1$，则

$$\binom{n-1}{m} t^{mp} + \binom{n-1}{(m-1)p}\left(t+\sum_{k=1}^n a_k\right)^p \leqslant \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_m\leqslant n}\prod_{j=1}^m (t+a_{i_j})^p$$

$$\leqslant \binom{n}{m}\left(t+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k\right)^{mp}.$$

当 $p = 1$ 时，左边不等式为严格不等式“<”.

(5) 设 $a_k > 0, p_k \geqslant 1, 1 \leqslant m \leqslant n$，则

$$\binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}\left(1+\sum_{k=1}^n p_k a_k\right) < \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_m\leqslant n}\prod_{j=1}^m (1+a_{i_j})^{p_{i_j}}$$

$$\leqslant \binom{n}{m}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (1+a_k)^{p_k}\right)^m; \tag{72.2}$$

(6) 设 $a_k > 0, 1 < m \leqslant n, n \geqslant 2, 0 \leqslant p \leqslant 1, t > 0$，且 $\sum_{k=1}^n a_k \leqslant t$，则

$$\binom{n-1}{m} t^{mp} + \binom{n-1}{(m-1)p}\left(t-\sum_{k=1}^n a_k\right)^p \leqslant \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_m\leqslant n}\prod_{j=1}^m (t-a_{i_j})^p$$

$$\leqslant \binom{n}{m}\left(t-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k\right)^{mp}.$$

当 $p=1$ 时，左边不等式为严格不等式“$<$”.

注　当 $m=2$ 或 $m=n$ 时，左边不等式的条件 $\sum_{k=1}^{n}a_k\leqslant t$ 可放宽为 $0<a_k<t, 1\leqslant k\leqslant n$.

(7)　设 $a_k>0, p_k\geqslant 1, \sum_{k=1}^{n}p_ka_k\leqslant 1, n\geqslant 2, 1\leqslant m\leqslant n$，则

$$\binom{n-1}{m}+\binom{n-1}{m-1}\left(1-\sum_{k=1}^{n}p_ka_k\right)<\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_m\leqslant n}\prod_{j=1}^{m}(1-a_{i_j})^{p_{i_j}}$$
$$\leqslant\binom{n}{m}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(1-a_k)^{p_k}\right)^m.$$

注　当 $m=2$ 或 $m=n$ 时，左边不等式的条件 $\sum_{k=1}^{n}p_ka_k\leqslant 1$ 可放宽为 $0<a_k<1$，$1\leqslant k\leqslant n$. 利用(72.2)式，还推出下式：

(8)　设 $a_k\geqslant 1, p_k\geqslant 1, n\geqslant 2, 1<m\leqslant n$，记 $Q_m=\min\limits_{1\leqslant i_1<\cdots<i_m\leqslant n}\sum_{j=1}^{m}p_{i_j}$. 则

$$\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_m\leqslant n}\prod_{j=1}^{m}(1+a_{i_j})^{p_{i_j}}\geqslant\frac{2^{Q_m}}{1+Q_m}\binom{n-1}{m-1}\left[\frac{n}{m}(1+Q_m)-Q_n+\sum_{k=1}^{n}p_ka_k\right].$$

特别地，当 $m=n$ 时，上式变成

$$\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)^{p_k}\geqslant\frac{2^{Q_n}}{1+Q_n}\left(1+\sum_{k=1}^{n}p_ka_k\right).\tag{72.3}$$

式中 $Q_n=\sum_{k=1}^{n}p_k$. ([344]2002,32(1):132～135)(若 $a_k\geqslant 1, p_k\geqslant 0$ 和 $Q_n\leqslant 1$，则(72.3)式中不等号反向. [22] 69～70)

推论 1　设 $0<a_k<1, 1\leqslant k\leqslant n$，则

$$\sum_{k=1}^{n}a_k-\prod_{k=1}^{n}a_k<n-1.$$

推论 2　[MCM]. 设 $a_k\geqslant 0$，且 $\sum_{k=1}^{n}a_k\leqslant\frac{1}{2}$，则 $\prod_{k=1}^{n}(1-a_k)\geqslant\frac{1}{2}$.

提示：可用数学归纳法，也可用概率论方法，考虑概率为 $a_1,\cdots,a_n$ 的相互独立的事件，它们中至少一个发生的概率最大为 $\sum_{k=1}^{n}a_k\leqslant\frac{1}{2}$，而 $\prod_{k=1}^{n}(1-a_k)$ 是它们中没有一个发生的概率，它不小于 1/2.

(9)　设 $0<a_k<1$，$p_n\geqslant 1$，$\sum_{k=1}^{n}p_ka_k<1$，则

$$\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)^{p_k}<\left(1-\sum_{k=1}^{n}p_ka_k\right)^{-1},\qquad\prod_{k=1}^{n}(1-a_k)^{p_k}<\left(1+\sum_{k=1}^{n}p_ka_k\right)^{-1}.$$

([22]71)

(10)　设 $a_k\geqslant 0$，$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k\leqslant 1$，则

$$\left(\frac{n}{S_n}-1\right)^n \prod_{k=1}^n a_k \leqslant \prod_{k=1}^n (1-a_k) \leqslant \left(\frac{n-S_n}{n+S_n}\right)^n \prod_{k=1}^n (1+a_k) \tag{72.4}$$

仅当 $a_k = \frac{S_n}{n}$ 时等号成立. 当 $0 \leqslant a_k \leqslant 1$，$S_n \leqslant 2$ 时(72.4)式的右边不等式仍成立.

([22]72)

73.　设 $a_k > 0, G_n(a) = \left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n}, S_n = \sum_{k=1}^n a_k$，则

(1)　$\prod_{k=1}^n (1+a_k) \geqslant (1+G_n(a))^n$. (**Chrystal**)，

仅当　$a_1 = \cdots = a_n = G_n(a)$ 时，等号成立.

证　利用 $f(x) = \ln(1+e^x)$ 在$(-\infty,\infty)$上的凸性，得到

$\sum_{k=1}^n \ln(1+e^{x_k}) \geqslant n\ln[(1+\exp(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k)]$. 再令 $x_k = \ln a_k$ 即可得证.

(2)　$\prod_{k=1}^n (1+a_k) \leqslant \sum_{k=0}^n \frac{S_n^k}{k!}$.

特别，当 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k = 1$ 时，$\prod_{k=1}^n (1+a_k) \leqslant \sum_{n=0}^n \frac{1}{k!} < e$.

(3)　$\prod_{k=1}^n (1+a_k) \leqslant [(1+A_n(a)]^n$. 仅当所有 a_k 相等时等号成立. ([348]1993.4)

(4)　反向 Chrystal 不等式：

$$[1+G_n(a)]^{n+1} \geqslant \{1+G_n(a)-n[A_n(a)-G_n(a)]\} \prod_{k=1}^n (1+a_k).$$

(顾春，石焕南，[344]2008，38(3)：163 ～ 167)

(5)　设 $P_m(x) = \sum_{k=1}^m \alpha_k x^{\beta_k}$，式中 $\alpha_k, \beta_k \geqslant 0$，$a_k > 0$. $G_n = \left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{\frac{1}{n}}$. 则

$$\prod_{k=1}^n [1+P_m(a_k)] \geqslant [1+P_m(G_n)]^n.$$

(Bull Allahabad Math. Soc. 20(2005)，47 ～ 49)

74.　设 $a_k > 0, \sum_{k=1}^n a_k = 1$，则

(1)　$\prod_{k=1}^n (1+\frac{1}{a_k}) \geqslant (n+1)^n$，(Klamkin)；$\prod_{k=1}^n (a_k+\frac{1}{a_k}) \geqslant (n+\frac{1}{n})^n$；

(2)　$\prod_{k=1}^n (\frac{1}{a_k}-1) \geqslant (n-1)^n$，(Newman)；

(3)　$\prod_{k=1}^n \left(\frac{1+a_k}{1-a_k}\right) \geqslant \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$，(Klamkin)；

推广：　令 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k, a_k > 0$，则：

①　$\prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{a_k}-t\right) \geqslant \left(\frac{n}{S_n}-t\right)^n, \forall t \leqslant \frac{1}{S_n}$，　②　$\prod_{k=1}^n \left(\frac{S_n}{a_k}-\frac{1}{m}\right) \geqslant \left(n-\frac{1}{m}\right)^n$.

③　设 $S_n \leqslant 1$，$p \geqslant q \geqslant 0$，蒋明斌猜想：

$$\prod_{j=1}^{n}(a_j^{-p}-a_j^{q}) \geqslant \left\{\left(\frac{n}{S_n}\right)^p-\left(\frac{S_n}{n}\right)^q\right\}^n \tag{74.1}$$

已知的结果：当 $p=\frac{k}{2}$，$q=\frac{m}{2}$，$k \geqslant m$ 时，(74.1) 式成立；设 c 是方程 $\sqrt{4x^2+1}+2x=4^x$ 的唯一的根，则当 $q=p$，$n \geqslant 3$，$0<p \leqslant c$ 和 $n \geqslant 2, c<p<\infty$ 时，(74.1) 式成立.

([351]2006(2):152～157,164～168)

④　设 $0<a_k<1$，$S_n \leqslant n$，则

$$\prod_{k=1}^{n}(a_k^{-1}+a_k-1) \geqslant \left(\frac{n}{S_n}+\frac{S_n}{n}-1\right)^n. \tag{74.2}$$

([351]2007(2):198～199)

⑤　$$\prod_{k=1}^{n}(1+a_k^{-p}) \geqslant \left[1+\left(\frac{n}{S_n}\right)^p\right]^n,\quad (p>0). \tag{74.3}$$

⑥　若 $S_n \leqslant n$，$p>0$，则

$$\prod_{k=1}^{n}(a_k^p+a_k^{-p}) \geqslant \left[\left(\frac{n}{S_n}\right)^p+\left(\frac{S_n}{n}\right)^p\right]^n. \tag{74.4}$$

仅当所有 a_k 相等时，(74.3) 与(74.4) 中等号成立.

注　类似结果见本章后面 No. 158～160.

75.　设 $a_k>0, k=1,\cdots,n$，而 $i_1,\cdots,i_n$ 是 $1,\cdots,n$ 的一个置换，且$(i_1,\cdots,i_n) \neq (1,\cdots,n)$，记 $s=a_{i_k}$，$t=a_k$，则

$$\prod_{k=1}^{n}a_k^s < \prod_{k=1}^{n}a_k^t. \tag{75.1}$$

提示：因为每个置换是不相交循环的乘积，因此不妨设 $i_1,\cdots,i_n$ 是 $1,\cdots,n$ 的循环置换，将数 a_k 重新排列后，我们可以假设 $a_1>a_k(k>1)$，$i_1=2,\cdots,i_{n-1}=n, i_n=1$. 于是，(75.1) 式变成

$$a_1^{a_2}a_2^{a_3}\cdots a_n^{a_1} < a_1^{a_1}a_2^{a_2}\cdots a_n^{a_n}. \tag{75.2}$$

下面用数学归纳法证明(75.2) 式. 当 $n=2$ 时，由 $a_1>a_2$ 得到

$$a_1^{a_1-a_2} > a_2^{a_1-a_2} \Rightarrow a_1^{a_2}a_2^{a_1} < a_1^{a_1}a_2^{a_2}.$$

即(75.2) 式成立. 设 $n=k-1$ 时，(75.2) 式成立，我们不妨设

$$a_2^{a_3}\cdots a_{k-1}^{a_k}a_k^{a_2} < a_2^{a_2}\cdots a_k^{a_k}.$$

两边乘以 $a_1^{a_1}>0$，并利用 $a_1>a_2, a_1>a_k \Rightarrow a_1^{a_2}\cdot a_k^{a_1} < a_1^{a_1}a_k^{a_2}$ 就得到

$$a_1^{a_2}a_2^{a_3}\cdots a_{k-1}^{a_k}a_k^{a_1} < a_1^{a_1}a_2^{a_3}\cdots a_k^{a_2} < a_1^{a_1}\cdots a_k^{a_k}.$$

即 $n=k$ 时(75.2) 式也成立.

推论　设 $a>b>0$，则 $a^b b^a < a^a b^b$.

76.　(1)　1993 年，Alzer, H. 提出：设 $0<a_k \leqslant 1/2, 1 \leqslant k \leqslant n$，则对 $n \leqslant 3$ 成立

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{1-a_k}\right) \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n}a_k^n}{\sum_{k=1}^{n}(1-a_k)^n}.$$

当 $n \geqslant 6$ 时上式不成立，并问 $n=4$ 和 5 时上式是否成立?([305]1993,100(8):798)

(2) 设 $0 \leqslant a_k \leqslant 1/2$ 或 $1/2 \leqslant a_k \leqslant 1, 1 \leqslant k \leqslant n$，则

$$\prod_{k=1}^{n} a_k + \prod_{k=1}^{n}(1-a_k) \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}.$$

提示：用数学归纳法.

77. [MCM]. 设 $\forall a_k \geqslant 0, S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, x_k = a_k + \frac{n-3}{n-1}(S_n - a_k)$. 则

$$\prod_{k=1}^{n} x_k \geqslant \prod_{k=1}^{n}(S_n - 2a_k).$$

78. **Schur 不等式**：设 $a_{jk} \geqslant 0, x_k \geqslant 0, \sum_{j=1}^{n} a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} = 1$，则

$$\prod_{k=1}^{n} x_k \leqslant \prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k\right).$$

提示：令 $y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k$，利用 $\ln t$ 的凸性，有 $\ln y_j \geqslant \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \ln x_k$，从而

$$\sum_{j=1}^{n} \ln y_j \geqslant \sum_{k=1}^{n} \ln x_k, \text{即} \quad \prod_{j=1}^{n} y_i \geqslant \prod_{k=1}^{n} x_k.$$

注 由 Schur 不等式可推出关于行列式的 Hadamard 不等式.（见第 10 章 §1. No. 1）

79. 设 $a_k > 0, a_{n+k} = a_k, b_k = \sum_{j=1}^{m} a_{k+j}, k = 1, 2, \cdots, n$，，则

$$m^n\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) \leqslant \prod_{k=1}^{n} b_k, \tag{79.1}$$

仅当 $a_1 = \cdots = a_n$ 时等号成立.

证 不等式(79.1)等价于

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{b_k}{m}\right) \geqslant \prod_{k=1}^{n} a_k.$$

利用几何－算术平均不等式，有

$$\frac{b_k}{m} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} a_{k+j} \geqslant \left(\prod_{j=1}^{m} a_{k+j}\right)^{1/m}.$$

从而

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{b_k}{m}\right) \geqslant \prod_{k=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{m} a_{k+j}\right)^{1/m} = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k^m\right)^{1/m} = \prod_{k=1}^{n} a_k.$$

80. 设 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \sigma_n \geqslant 0$ 且满足 $(n-1)\sigma_n^2 = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n}(a_i - a_j)^2$，则

$$\min\{a_1, \cdots, a_n\} \leqslant \frac{1}{n}(S_n - \sigma_n) \leqslant \frac{1}{n}(S_n + \sigma_n) \leqslant \max\{a_1, \cdots, a_n\},$$

仅当 $a_1 = \cdots = a_n$ 时等号成立.

提示：不妨设 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$，则

$$\sigma_n^2 \leqslant \frac{1}{n-1}\sum_{k=2}^{n}(k-1)(a_k - a_1)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_1)^2 \leqslant \left\{\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_1)\right\}^2.$$

同理，有

$$\sigma_n^2 \leqslant \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)(a_n-a_j)^2 \leqslant \left\{\sum_{j=1}^{n}(a_n-a_j)\right\}^2,$$

分别开平方，得 $na_1 \leqslant S_n-\sigma_n,\ S_n+\sigma_n \leqslant na_n$.

81.　设 $a_k \geqslant 0$，且 $A_k = \sum_{k=1}^{n} a_k-(n-1)a_k \geqslant 0, k=1,\cdots,n$，则

$$\prod_{k=1}^{n} A_k \leqslant \prod_{k=1}^{n} a_k. \tag{81.1}$$

证　利用几何—算术平均不等式，有

$$a_k=\frac{1}{n-1}(A_1+\cdots+A_{k-1}+A_{k+1}+\cdots A_n) \geqslant (A_1\cdots A_{k-1}\cdot A_{k+1}\cdots A_n)^{1/(n-1)}. \tag{81.2}$$

分别令 $k=1,\cdots,n$，然后相乘即得(81.1)式.

(81.1)式中等式成立，当且仅当(81.2)式中等号成立，即 $a_1=\cdots=a_n\geqslant 0$ 或 $a_1,\cdots,a_n$ 中除有一个为0外其他都相等.

注　$n=3$ 时，可去掉 $A_k\geqslant 0$ 的条件，但当 $n>3$ 时，条件 $A_k\geqslant 0$ 是必要的.

82.　设 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant 0$，则

(1)　**钟开莱不等式**：若 $\sum_{j=1}^{k} a_j \leqslant \sum_{j=1}^{k} b_j, k=1,\cdots,n$，则

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^2 \leqslant \sum_{j=1}^{n} b_j^2. \tag{82.1}$$

仅当 $a_k=b_k(k=1,\cdots,n)$ 时等号成立.

提示：由条件

$$(a_k-a_{k+1})\sum_{j=1}^{k} a_j \leqslant (a_k-a_{k+1})\sum_{j=1}^{k} b_j, k=1,\cdots,n,$$

其中 $a_{n+1}=0$. 对上式 k 分别令它等于 $1,\cdots,n$，然后相加，即得 $\sum_{j=1}^{n} a_j^2 \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_jb_j$，两边平方后再利用柯西不等式，即可得证. 石焕南利用控制不等式将(82.1)改进为：当 $p>1$ 时，$\sum_{j=1}^{n} a_j^p \leqslant \sum_{j=1}^{n} b_j^p - n^{1-p}\left\{\sum_{j=1}^{n}(b_j-a_j)\right\}^p$，当 $0<p\leqslant 1$ 时，不等号反向. ([351]2006,(4):413～416)

(2)　若 $\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant 3n,\ \sum_{k=1}^{n} a_k^2 > n^2,\ (n\geqslant 3)$，　则　$a_1+a_2+a_3>n$.

证　由假设 $(\sum a_k)^2 \geqslant \sum a_k^2 \geqslant n^2$，所以 $\sum a_k > n$，从而存在 $k\leqslant n-1$，使得 $\sum_{j=1}^{n} a_j \leqslant n, \sum_{j=1}^{k+1} a_j > n$，不妨设 $k>2$，令 $\beta=n-\sum_{j=1}^{n} a_j$，则 $0\leqslant\beta<a_{k+1}$，从而 $n^2\leqslant\sum_{j=1}^{n} a_j^2 = a_1^2+\cdots+a_k^2+a_{k+1}\beta+a_{k+1}(a_{k+1}-\beta)+a_{k+2}^2+\cdots+a_n^2 \leqslant a_1(\sum_{j=1}^{k} a_j+\beta)+a_{k+1}(a_{k+1}-\beta+a_{k+2}+\cdots+a_n) \leqslant na_1+2na_{k+1} \leqslant na_1+n(a_2+a_3)=n(a_1+a_2+a_3)$.

(3)　1989 年，陈计证明：设$\{a_k\}$，$\{b_k\}$均非负递减，且满足 $\sum_{j=1}^{k}a_j\leqslant\sum_{j=1}^{k}b_j$ $(1\leqslant k\leqslant n)$，则当 $p>1$ 时，$\sum_{k=1}^{n}a_k^p\leqslant\sum_{k=1}^{n}b_k^p$，仅当 $a_k=b_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 时等号成立．特别，当 $p=2$ 时，就是钟开莱不等式．([348]1989,12,3)

(4)　[MCM]．设 $a_k,b_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 为实数，则使得对任何满足 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$ 的实数，不等式$\sum a_kx_k\leqslant\sum b_kx_k$ 都成立的充要条件是 $\sum_{j=1}^{k}a_j\geqslant\sum_{j=1}^{k}b_j(1\leqslant k\leqslant n-1)$，且$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}b_k$．(提示：用 Abel 变换)

83.　[MCM]．实数 $a_1,\cdots,a_n$ 中任意两数之和为非负的充要条件是对于满足

$$\sum_{k=1}^{n}x_k=1 \tag{83.1}$$

的任意非负实数 $x_1,\cdots,x_n$，都有

$$\sum a_kx_k\geqslant\sum a_kx_k^2. \tag{83.2}$$

证　充分性：取一组特殊的$\{x_k\}$：$x_i=x_j=1/2(i\neq j)$，$x_k=0(k\neq i,j)$，则从(83.2)式，有

$$1/2(a_i+a_j)\geqslant1/4(a_i+a_j)，即\quad a_i+a_j\geqslant0.$$

必要性：从(83.1)式：$1-x_k=\sum_{j\neq k}x_j$，所以，$\sum a_kx_k(1-x_k)=\sum a_kx_k\sum_{j\neq k}x_j$ $=\sum_{j\neq k}a_kx_kx_j=\frac{1}{2}(\sum_{k\neq j}a_kx_kx_j+\sum_{j\neq k}a_jx_jx_k)=\frac{1}{2}\sum_{j\neq k}(a_k+a_j)x_kx_j\geqslant0$．证毕．

84.　设 $a_1\geqslant\cdots\geqslant a_n>0$，$\prod_{j=1}^{k}b_j\geqslant\prod_{j=1}^{k}a_j(k=1,\cdots,n)$，则

(1)　$\sum_{k=1}^{n}a_k\leqslant\sum_{k=1}^{n}b_k$

(2)　$\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k-a_k}{a_k}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k-a_k}{a_n}$.

(3)　令 $A_k=\ln a_k,B_k=\ln b_k$，若$\sum_{j=1}^{n}A_j\leqslant\sum_{j=1}^{n}B_j$，$k=1,\cdots,n$，且 f 为递增的连续凸函数，则

$$\sum_{j=1}^{k}f(A_j)\leqslant\sum_{j=1}^{k}f(B_j),k=1,\cdots,n.$$

85.　设 $a_1>a_2>\cdots>a_n>0$，$0=b_0<b_1<\cdots<b_n$，$0<p\leqslant1$，则

$$\sum_{k=1}^{n}a_k(b_k-b_{k-1})\leqslant\left\{\sum_{k=1}^{n}a_k^p(b_k^p-b_{k-1}^p)\right\}^{1/p}.$$

(提示：用数学归纳法，详见[65]193～194)

86.　[MCM]．**排序不等式**：设 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，$b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$，$k_1,\cdots,k_n$ 是$\{1,\cdots,n\}$的任一排列，则

(1)　$\sum_{j=1}^{n} a_j b_{n+1-j} \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_j b_{k_j} \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_j b_j$；

(2)　$\prod_{j=1}^{n} a_j^{b_{n-j+1}} \leqslant \prod_{j=1}^{n} a_j^{b_{k_j}} \leqslant \prod_{j=1}^{n} a_j^{b_j}$，

仅当 $a_1 = \cdots = a_n$ 或 $b_1 = \cdots = b_n$ 时取等号.

证　令 $S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j b_{k_j}$，下面以证(1)式右边的不等式为例，要证 $k_j = j\ (j = 1,\cdots,n)$ 时，S_n 达到最大值 $\sum a_j b_j$. 若 $k_n \neq n$，则存在某个 $j_0 \neq n$，使得 b_n 与 a_{j0} 搭配，于是，

$a_n b_n + a_{j0} b_{k_n} - a_{j0} b_n - a_n b_{k_n} = b_n(a_n - a_{j0}) - b_{k_n}(a_n - a_{j0}) = (b_n - b_{k_n})(a_n - a_{j0}) \geqslant 0$，

即　$a_{j0} b_n + a_n b_{k_n} \leqslant a_{j0} b_{k_n} + a_n b_n$，

上式表明，当 $k_n \neq n$ 时，调换 S_n 中 b_n 和 b_{k_n} 的位置(其余 $n-2$ 项不变)，会使 S_n 增加. 同理可证其他 a_k 必须和 b_k 搭配($k = 1,\cdots,n-1$).

注　排序不等式可简记为：反序和 ≤ 乱序和 ≤ 同序和，可由此证明几何 — 算术平均不等式，Cauchy 不等式，Chebyshev 不等式等许多著名的不等式和几何不等式.

推论 1　设 $a_j > 0$，$j = 1,\cdots,n$，而 $k_1,\cdots,k_n$ 是 $1,\cdots,n$ 的任一排列，则

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{a_{k_j}} \geqslant n，\text{特别地，}\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n-k+1}}{a_k} \geqslant n，$$

仅当 $a_{k_j} = a_j$ 时等号成立.

证　不妨设 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n > 0$，则

$\frac{1}{a_1} \leqslant \frac{1}{a_2} \leqslant \cdots \leqslant \frac{1}{a_n}$. 故由排序不等式，有 $n = \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot \frac{1}{a_j} \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{1}{a_{k_j}}$.

推论 2　设 $x_1 \geqslant \cdots \geqslant x_n$，$y_1 \geqslant \cdots \geqslant y_n$，$z_1,\cdots,z_n$ 为 $y_1,\cdots,y_n$ 的任一排列，则

$$\sum (x_k - y_k)^2 \leqslant \sum (x_k - z_k)^2.$$

提示：注意到 $\sum y_k^2 = \sum z_k^2$，所以，只要证 $\sum x_k z_k \leqslant \sum x_k y_k$，这个不等式恰好就是排序不等式.

推论 3　设 $k_1,\cdots,k_n$ 是 $1,\cdots,n$ 的任一重排，则

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j \cdot k_j} \geqslant \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(n-j+1)}.$$

(3)　1991 年，韦韬证明了**积排序不等式**：设 $\{a_k\}$，$\{b_k\}$ 均为递增数列，$k_1,\cdots,k_n$ 是 $1,\cdots,n$ 的任一排列，则

$$\prod_{j=1}^{n}(a_j + b_j) \leqslant \prod_{j=1}^{n}(a_j + b_{k_j}) \leqslant \prod_{j=1}^{n}(a_j + b_{n+1-j})，$$

即：同序积 ≤ 乱序积 ≤ 反序积.(中学数学(江苏)1991，5:42)

(4)　1980 年，Minc，H. 证明更一般的**重排不等式**：设 $(a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{t_j j})\ (1 \leqslant j \leqslant k)$ 是长为 t_j 的序列，$a_{ij} \geqslant 0$，$n = \sum_{j=1}^{k} t_j$，a_{ij} 的递增重排记为 $a'_1 \leqslant a'_2 \leqslant \cdots \leqslant a'_n$，递减重排记为 $a_1^* \geqslant a_2^* \geqslant \cdots \geqslant a_n^*$，记

$(a'_1, a'_2, \cdots, a'_n) = (a'_{11}, a'_{21}, \cdots, a'_{t_1 1}, \cdots, a'_{1k}, a'_{2k}, \cdots, a'_{t_k k})$,

$(a_1^*, a_2^*, \cdots, a_n^*) = (a_{11}^*, a_{21}^*, \cdots, a_{t_1 1}^*, \cdots, a_{1k}^*, a_{2k}^*, \cdots, a_{t_k k}^*)$,则

$$\prod_{j=1}^{k}(1+\prod_{i=1}^{t_j} a_{ij}) \leqslant \begin{cases} \prod_{i=1}^{n/2}(1+a_{2i-1}^* a_{2i}^*), & \text{若 } 2 \mid n \\ \prod_{i=1}^{\frac{n-3}{2}}(1+a_{2i-1}^* a_{2i}^*)(1+a_{n-2}^* a_{n-1}^* a_n^*), & \text{若 } 2 \nmid n. \end{cases}$$

同年,他推广了这个结果,证明

① 设 $t_1 \geqslant t_2 \geqslant \cdots \geqslant t_k \geqslant 1$,

若 $a_{ij} \leqslant 1$,则 $\sum_{j=1}^{k}\prod_{i=1}^{t_j} a_{ij} \leqslant \sum_{j=1}^{k}\prod_{i=1}^{t_j} a'_{ij}$;

若 $a_{ij} \geqslant 1$,则 $\sum_{j=1}^{k}\prod_{i=1}^{t_j} a_{ij} \leqslant \sum_{j=1}^{k}\prod_{i=1}^{t_j} a_{ij}^*$.

若 $t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_k$,则以上两式中 a'_{ij} 与 a_{ij}^* 对调.

② 设 $t_1 \geqslant t_2 \geqslant \cdots \geqslant t_k \geqslant 1$,则 $\prod_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{t_j} a_{ij} \geqslant \prod_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{t_j} a_{ij}^*$,而且

若 $a_{ij} \leqslant 1$,则 $\prod_{j=1}^{k}(1+\prod_{i=1}^{t_j} a_{ij}) \leqslant \prod_{j=1}^{k}(1+\prod_{i=1}^{t_j} a'_{ij})$;

若 $a_{ij} \geqslant 1$,则 $\prod_{j=1}^{k}(1+\prod_{i=1}^{t_j} a_{ij}) \leqslant \prod_{j=1}^{k}(1+\prod_{i=1}^{t_j} a_{ij}^*)$.

1987 年,魏万迪将 Minc 的上述重排不等式作了统一处理,证明:设 $t_1 \geqslant t_2 \geqslant \cdots \geqslant t_k \geqslant 1$,若 $a_{ij} \leqslant 1$,则 $\prod_{j=1}^{k}(1-\prod_{i=1}^{t_j} a_{ij}) \geqslant \prod_{j=1}^{k}(1-\prod_{i=1}^{t_j} a'_{ij})$;若 $a_{ij} \geqslant 1$,则

$$\prod_{j=1}^{k}\left|(1-\prod_{i=1}^{t_j} a_{ij})\right| \geqslant \prod_{j=1}^{k}\left|(1-\prod_{i=1}^{t_j} a_{ij}^*)\right|.$$

([339]1987,7(3):505 ~ 510)

(5) 2001 年,倪仁兴、张森国证明了**幂指和的排序不等式**:设 $1/e \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$,则

① $\sum_{k=1}^{n} a_k^{a_{k+1}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^{a_k}$,$(a_{n+1} = a_1)$;

② $\sum_{j=1}^{n} a_j^{a_{k_j}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^{a_k}$.

③ 若 $\{k_1, \cdots, k_n\}$ 与 $\{m_1, \cdots, m_n\}$ 是 $\{1, \cdots, n\}$ 的任意两个排列,则

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{a_{n-k+1}} \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{k_j}^{a_{m_j}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^{a_k}.$$

作者们提出猜想:③ 对满足 $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ 的 $\{a_k\}$ 也成立. 证明上述不等式的基本工具是利用下述结论:若 $a \geqslant b > 0, a \geqslant 1$,则 $f(x) = a^x - b^x$ 是 $(0, \infty)$ 上的递增函数;而当 $e^{-1} < b \leqslant a \leqslant 1$ 时,$f(x) = a^x - b^x$ 是 $(1/e, 1]$ 上的递增函数.(细节见"常德师范学院学报"(自)2002,14(1):7 ~ 8,18)

87. **微微对偶不等式**：设 $0 \leqslant a_{j1} \leqslant a_{j2} \leqslant \cdots \leqslant a_{jn}$，$j = 1, \cdots, m$，而 $b_{j1}, \cdots, b_{jn}$ 是 $a_{j1}, \cdots, a_{jn}$ 的一个排列，则

(1) $\sum_{k=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} b_{jk} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} a_{jk}$，

(2) $\prod_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b_{jk} \geqslant \prod_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{jk}$，

由 $\{a_{jk}\}$，$\{b_{jk}\}$ 可构造两个矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots\cdots & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$S(A) = \sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{m} a_{jk}\right)$ 是 A 的各列的数相乘然后相加，称为 A 的列积和；$T(A) = \prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{jk}\right)$ 是 A 的各列的数相加然后相乘，称为 A 的列和积. 于是(1)与(2)式可分别表示为

$$S(B) \leqslant S(A), T(B) \geqslant T(A).$$

张运筹在[348]1980.4.证明了这些不等式，又在[99]4(1989)48～63详细讨论了它们在证明不等式中的许多应用，证明的关键在于把要证的不等式归结为构造一个矩阵 A，再设计出一个适当的乱序阵 B.

88. [MCM]. $a_k \geqslant 0, 0 \leqslant b_k \leqslant p, 1 \leqslant k \leqslant n, \frac{1}{2} \leqslant p \leqslant 1, \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} b_k = 1$，则

$$\sum_{k=1}^{n}\left(b_k \prod_{j \neq k} a_j\right) \leqslant p(n-1)^{1-p}.$$

(32 届 IMO 预选试题，见"中等数学"(天津)，1992，1:32.)

89. **Landau 不等式**：设 $a_k \geqslant 0. k = 0, 1, \cdots, n, S_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a_k$，则

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k^2 - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=0}^{n} S_k\right)^2 \leqslant \frac{4}{45}(S_n - S_0)^2.$$ ([354]1935，39:742～744)

90. [MCM]. 设自然数 p, q, n 均大于 1，A_{n-1}, A_n 是 p 进制数系中的数，B_{n-1}, B_n 是 q 进制数系中的数，它们的 p, q 进制的位置表示分别为

$A_{n-1} = a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_0, A_n = a_n a_{n-1}\cdots a_0$，

$B_{n-1} = b_{n-1}b_{n-2}\cdots b_0, B_n = b_n b_{n-1}\cdots b_0$.

其中 $a_n, a_{n-1}, b_n, b_{n-1}$ 均不为 0，则当 $p > q$ 时，

$$\frac{A_{n-1}}{A_n} < \frac{B_{n-1}}{B_n}.$$

提示：令 $g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k, h(x) = g(x) + a_n x^n$，证明 $f(x) = g(x)/h(x)$ 严格递减.

(证 2 见[38]453)

91. 设$\sum_{k=1}^{n}x_k=a$，$\sum_{k=1}^{n}x_k^2=b$，$\sum_{k=1}^{n}x_k^3=\frac{3abn-2a^3}{n^2}$，则$\sum_{k=1}^{n}x_k^4>\frac{a^4}{n^3}$ 且$b\geqslant\frac{a^2}{n}$.

92. [MC]. 设$0<p\leqslant a_k\leqslant q,1\leqslant k\leqslant n$，则

$$n^2\leqslant(\sum_{k=1}^{n}a_k)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)\leqslant n^2+\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2.$$

（证明见[345]1985，1：47 ～ 48）应注意将多元函数极值转化为一元函数极值的证明技巧.

推广： 设$a_{jk}>0,1\leqslant k\leqslant n,1\leqslant j\leqslant r$或$s$，$r,s$为自然数，则

$$\left[\sum_{k=1}^{n}(a_{1k}\cdots a_{sk})^r\right]\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(a_{1k}\cdots a_{rk})^s}\right]\geqslant\binom{n}{r}\binom{n}{s}.$$

仅当$\forall a_{jk}$相等时等号成立.

2000 年，宋庆、宋光提出猜想：设$a_k>0,1\leqslant k\leqslant n$，则

$$(\sum_{k=1}^{n}a_k)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)\geqslant n^2+2n\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}\left[\left(\frac{a_k}{a_j}\right)^{\frac{1}{2n}}-\left(\frac{a_j}{a_k}\right)^{\frac{1}{2n}}\right]^2.$$

并且对于$1\leqslant k\leqslant 5$证明成立.（[100]119 ～ 120）

林亚庆、程敏先后证明了上述猜想，并分别作出如下推广和改进：

(1) 设$a_k>0$，若$p\geqslant 1$，则

$$(\sum_{k=1}^{n}a_k)(\sum_{k=1}^{n}a_k^{-1})\geqslant n^2(1-p^2)+p^2(\sum_{k=1}^{n}a_k^{\frac{1}{p}})(\sum_{k=1}^{n}a_k^{-\frac{1}{p}});$$

若$0<p\leqslant 1$，则不等号反向.

(2)
$$n^2+m^2\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}\left[\left(\frac{a_k}{a_j}\right)^{\frac{1}{2m}}-\left(\frac{a_j}{a_k}\right)^{\frac{1}{2m}}\right]^2\leqslant(\sum_{k=1}^{n}a_k)(\sum_{k=1}^{n}a_k^{-1})$$
$$\leqslant(n^2-n)+(\prod_{k=1}^{n}a_k^{-1})(\sum_{k=1}^{n}a_k^{n}).$$

（[351]2006(2)：159 ～ 162；2007(2)：172 ～ 175）

93. 设$0<p\leqslant a_k\leqslant q,1\leqslant k\leqslant n$，则

(1) $$(\sum_{k=1}^{n}a_k)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)\leqslant n^2\frac{(p+q)^2}{4pq}.$$

（Schweitzer，P.，Math. Phys. Lapok 1914，23：257 ～ 261）

(2) **Kantorovich 不等式：**

$$(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k^2)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k^2}{a_k}\right)\leqslant\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{q}{p}}+\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^2(\sum_{k=1}^{n}b_k^2)^2.$$

（该不等式的一般形式见下面 No. 95）

(3) [MCM]. 若$\{b_k\}$是$\{a_k\}$的任一重排，则

$$n\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k}\leqslant n+\left[\frac{n}{2}\right]\left(\sqrt{\frac{q}{p}}-\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^2.$$

(4) 设$0<a_k\leqslant 1,n\geqslant 2$则

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k-n+1\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}-n+1\right)\leqslant 1.$$

仅当 $a_1,\cdots,a_n$ 中至少有 $n-1$ 个数取 1 时等号成立.([345]2002.2:47)

94.　以下两个不等式等价:

(1)　设 $0<p\leqslant a_k\leqslant q,\sum_{k=1}^{n}q_k=1,q_k>0$,则

$$\sum_{k=1}^{n}q_ka_k+pq\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k}{a_k}\leqslant p+q.$$

(Rennie,B. C. ,[373]1963,3;442 ~ 448)

(2)　设 $p\leqslant\frac{b_k}{a_k}\leqslant q,a_k\neq 0,1\leqslant k\leqslant n$,则

$$\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2+pq\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\leqslant(p+q)\sum_{k=1}^{n}a_kb_k.$$

仅当 $b_k=pa_k$ 或 $b_k=qa_k$ 时等号成立.(Diaz-Metcalf,[376]1963,69:415 ~ 418)

95.　**Kantorovich 不等式**:设 $a_k>0,\sum_{k=1}^{n}a_k=1,\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n>0$,则

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_ka_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\lambda_k}\right)\leqslant\frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}.$$

该不等式可用数学归纳法,极值方法和凸函数不等式等多种方法证明.例如,[344]1986,1:54 ~ 57,王松桂等在[30]145 ~ 147 中用变形技巧给出一个巧妙的证明:为此,先用下式定义 u_k 和 v_k:

$$\begin{cases}\lambda_k=\lambda_1u_k+\lambda_nv_k\\ \dfrac{1}{\lambda_k}=\dfrac{u_k}{\lambda_1}+\dfrac{v_k}{\lambda_n}.\end{cases}$$

再记　$u=\sum_{k=1}^{n}u_ka_k,\ v=\sum_{k=1}^{n}v_ka_k$.易证 $u_k,v_k\geqslant 0$,并且从

$$1=\frac{1}{\lambda_k}\lambda_k=\left(\frac{u_k}{\lambda_1}+\frac{v_k}{\lambda_n}\right)(\lambda_1u_k+\lambda_nv_k)=(u_k+v_k)^2+u_kv_k\frac{(\lambda_1-\lambda_n)^2}{\lambda_1\lambda_n}$$

可知　$u_k+v_k\leqslant 1,1\leqslant k\leqslant n$,从而 $u+v=\sum_{k=1}^{n}a_k(u_k+v_k)\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k=1$,

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_ka_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\lambda_k}\right)=(\lambda_1u+\lambda_nv)\left(\frac{u}{\lambda_1}+\frac{v}{\lambda_n}\right)=(u+v)^2+uv\frac{(\lambda_1-\lambda_n)^2}{\lambda_1\lambda_n}$$

$$=(u+v)^2\left[1+\frac{4uv}{(u+v)^2}\frac{(\lambda_1-\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}\right]\leqslant 1+\frac{(\lambda_1-\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}=\frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}.$$ 证毕.

由于 Kantorovich 不等式在矩阵计算和最优化理论中有重要应用,所以,该不等式有多种推广形式,例如:

(1)　设 $0<m_1\leqslant a_k\leqslant M_1,0<m_2\leqslant b_k\leqslant M_2,p_k>0,1\leqslant k\leqslant n,t>0$,则

$$1\leqslant\frac{\left(\sum_{k=1}^{n}p_ka_k^t\right)\left(\sum_{k=1}^{n}p_kb_k^t\right)}{\left[\sum_{k=1}^{n}p_k(a_kb_k)^{t/2}\right]^2}\leqslant\frac{1}{4}\left[\left(\frac{M_1M_2}{m_1m_2}\right)^{t/4}+\left(\frac{m_1m_2}{M_1M_2}\right)^{t/4}\right]^2.$$

特别，取 $a_1 = m_1 = \lambda_1^{1/2}, m_2 = \lambda_n^{-\frac{1}{2}}, \lambda_1 \leqslant \lambda_k \leqslant \lambda_n, a_k = b_k^{-1} = \lambda_k^{1/2}, t = 2, m_1M_2 = m_2M_1 = 1$. 得到

$$\frac{\left(\sum_{k=1}^{n} p_k\lambda_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{\lambda_k}\right)}{\left(\sum_{k=1}^{n} p_k\right)^2} \leqslant \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}.$$

（施恩伟，陈永林，[344]1985，4；1987，4：78 ～ 79）

(2)　设 $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n > 0$，$f$ 是$[\lambda_n, \lambda_1]$ 上的凸函数. $t \in [\lambda_n, \lambda_1]$，$tf(t) \geqslant 1$，$c > 0$，令 $F(a) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\lambda_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k f(\lambda_k)\right)$；$g_k = c\lambda_k + \frac{1}{c}f(\lambda_k)$. 则

$$1 \leqslant F(a) \leqslant \max\{g_1, g_n\}.$$

特别地，若 $f(t) = \frac{1}{t}, c = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1\lambda_n}}$，则

$$1 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\lambda_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\lambda_k}\right) \leqslant \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^{1/2} + \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{1/2}\right]^2,$$

仅当 $a_1 = a_n = 1/2, a_k = 0 (k \neq 1, n)$ 时，右边不等式中的等号成立.（[12]144）

96.　设 $a_1 > \cdots > a_n > 0$，则

(1)　$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} (3k^2 + k)a_k\right) - 4\left(\sum_{k=1}^{n} ka_k\right)^2 > 0.$

(2)　$5\left(\sum_{k=1}^{n} ka_k\right)^2 - 2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} ka_k\right) - 3\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} k^2a_k\right) > 0.$（[4]272）

97.　[MCM]. 设$\{a_k\}$，$\{b_k\}$ 均为递增数列，$\lambda_k > 0$，且 $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$，则

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k b_k;$$

若$\{b_k\}$ 改为递减数列，则不等号反向.

98.　若 $\sum_{j \neq k} a_j a_k > 0$，则 $\left(\sum_{j \neq k} a_j b_k\right)^2 \geqslant \left(\sum_{j \neq k} a_j a_k\right)\left(\sum_{j \neq k} b_j b_k\right)$，$j, k = 1, \cdots, n$.（[305]1987，94(7)）

99.　(1)　**Beesack 不等式**：设 $p \geqslant 1, p + q \geqslant 1, a_k > 0, 1 \leqslant k \leqslant n$，则

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^p\left(\sum_{j=1}^{k} a_j\right)^q \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^{p+q}.$$（[323]1969(21)：222 ～ 234）

(2)　设 $0 < p \leqslant 1$，$a_0 = b_0 = 0$，则

$$\sum_{k=1}^{n} |a_kb_k - a_{k-1}b_{k-1}|^p \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k - a_{k-1}|^p\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |b_k - b_{k-1}|^p\right).$$

用数学归纳法证明.（Mh. Math. 1987(104)：53 ～ 65）

(3)　设 $p_k > 0$，$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$，$x_k \in [a, b]$，则

$$\sum_{k=1}^{n} p_k x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} p_k x_k\right) \leqslant \frac{1}{4}(b - a)^2.$$

式中$\frac{1}{4}$是最佳常数.([301]343(1)(2008),414 ～ 419)

(4)　**Kullback－Leibler 不等式**:设 $x_k, y_k > 0$, $\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} y_k = 1$,则

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|\right)^2 \leqslant 2\sum_{k=1}^{n} x_k \log\left(\frac{x_k}{y_k}\right).$$

证　利用函数 $f(t) = 2(2+t)\{1+t\log t - t\} - 3(t-1)^2$ 的凸性并在 $t=1$ 处达到极小.令 $t_k = \frac{x_k}{y_k}$,齐次化并求和.然后用 Cauchy 不等式即可得证.([305]115(2008),125 ～ 137)

(5)　设 $x_k > 0$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k^n$, $\sigma_n = \prod_{k=1}^{n} x_k$,则

$$\sum_{k=1}^{n} (S_n + \sigma_n - a_k^n)^{-1} \leqslant \sigma_n^{-1}.$$ ([371]80(5)(2007),392)

100.　(1)　设 $a_{jk} \geqslant 0, 0 < p < q < \infty$,则

$$\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{jk}^q\right)^{p/q}\right]^{1/p} \leqslant c(p,q)\left[\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk}^p\right)^{q/p}\right]^{1/q}.$$

式中系数 $c(p,q) = (\min\{m,n\})^{\alpha}$ 是最佳的,式中 $\alpha = 1/p - 1/q$.

(Toyama,H.[380]1948,24(9):10 ～ 12)

(2)　**Mikolas 不等式**:设 $a_{jk} > 0$,若 $q \leqslant 1$ 且 $pq \leqslant 1$,则

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk}^q\right)^p \leqslant m^{1-pq}\left[\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk}^q\right)^{1/q}\right]^{pq} \leqslant m^{1-pq}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{jk}\right)^q\right]^p.$$

若 $q \geqslant 1$ 且 $pq \geqslant 1$,则不等号均反向.(Alzer,[372]1991:34;1992:137 ～ 138)

101.　**Jensen 不等式**:设 $a_k > 0, 1 \leqslant k \leqslant n, 0 < p_1 < p_2$,或 $p_1 < p_2 < 0$, $f(p) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{1/p}$,则 $f(p_1) \geqslant f(p_2)$.

证　因为所证不等式两端均为 a_k 的一次齐次式,所以,两端乘以适当的 λ 并将 λa_k 换写成新的 a_k 时,总可使 $\sum_{k=1}^{n} a_k^{p_1} = 1$.(称为标准化过程)于是从 $a_k^{p_1} \leqslant 1$,得到

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{p_2}\right) = \sum_{k=1}^{n} (a_k^{p_1})^{p_2/p_1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^{p_1} = 1.$$ 从而

$$f(p_2) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{p_2}\right)^{1/p_2} \leqslant 1 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{p_1}\right)^{1/p_1} = f(p_1).$$

推论 1　设 $0 < p < q$,正数列 $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ 满足 $a_k^{1/q} \leqslant b_k^{1/p}$, $1 \leqslant k \leqslant n$,则

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/q} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)^{1/p}.$$

推论 2　设 $a_k > 0, 0 < p_1 < p_2, \omega_k \geqslant 1$,则

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \omega_k a_k^{p_2}\right)^{1/(p_2)} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \omega_k a_k^{p_1}\right)^{1/(p_1)}.$$

102. **Aczel 不等式**:设实数列$\{a_k\}$,$\{b_k\}$满足

$a_1^2-(\sum_{k=2}^n a_k^2)>0$, 或$b_1^2-(\sum_{k=2}^n b_k^2)>0$,则

$$(a_1^2-\sum_{k=2}^n a_k^2)(b_1^2-\sum_{k=2}^n b_k^2)\leqslant\left[a_1b_1-\left(\sum_{k=2}^n a_k^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=2}^n b_k^2\right)^{1/2}\right]^2\leqslant(a_1b_1-\sum_{k=2}^n a_kb_k)^2,$$

仅当$\{a_k\}$与$\{b_k\}$成比例时等号成立.

证 在[4]75 证上述不等式的两端时,若$b_1^2-\sum_{k=2}^n b_k^2>0$,且$a_k$与$b_k$不成比例.令$f(x)=(b_1x-a_1)^2-\sum_{k=2}^n(b_kx-a_k)^2$.由于$f$中$x^2$的系数为正,且$f(\frac{a_1}{b_1})<0$.而$x\to-\infty$或$\infty$时,$f(x)\to\infty$,所以$f(x)=0$有实根,由$f$的判别式非负就可得证.

Aczel 不等式已有许多推广,例如,设$a_k,b_k\geqslant0$,$a_1^p-(\sum_{k=2}^n a_k^p)>0$或$b_1^p-(\sum_{k=2}^n b_k^p)>0$.则

(1) **Popoviciu 不等式**:当$0<p\leqslant2$时,成立

$$(a_1^p-\sum_{k=2}^n a_k^p)(b_1^p-\sum_{k=2}^n b_k^p)\leqslant(a_1b_1-\sum_{k=2}^n a_kb_k)^p,$$

仅当$p=2$且$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$时等号成立.

2005 年,吴善和等证明:当$p\geqslant1$时,成立

$$(a_1^p-\sum_{k=2}^n a_k^p)(b_1^p-\sum_{k=2}^n b_k^p)\leqslant\left(n^qa_1b_1-\sum_{k=2}^n a_kb_k\right)^p,$$

式中$q=1-\min\left\{\frac{2}{p},1\right\}$.([388]36(2)(2005),49～62)

(2) **Bellman 不等式**:对于$p>1$,有

$$(a_1^p-\sum_{k=2}^n a_k^p)^{1/p}+(b_1^p-\sum_{k=2}^n b_k^p)^{1/p}\leqslant\left[(a_1+b_1)^p-\sum_{k=2}^n(a_k+b_k)^p\right]^{1/p}.$$

(3) 设a,b,a_k,b_k,p_k均为非负实数,$p>1$,且$\sum_{k=1}^n p_ka_k^p\leqslant a^p$,$\sum_{k=1}^n p_kb_k^p\leqslant b^p$,则

① $$\left(a^p-\sum_{k=1}^n p_ka_k^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(b^p-\sum_{k=1}^n p_kb_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left\{(a+b)^p-\sum_{k=1}^n p_k(a_k+b_k)^p\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

② 若$0\leqslant q_k\leqslant p_k$,则

$$0\leqslant\left\{\left(\sum_{k=1}^n q_ka_k^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^n q_kb_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\}^p-\sum_{k=1}^n q_k(a_k+b_k)^p$$

$$\leqslant(a+b)^p-\sum_{k=1}^n p_k(a_k+b_k)^p-\left\{\left(a^p-\sum_{k=1}^n p_ka_k^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(b^p-\sum_{k=1}^n p_kb_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\}^p.$$

(4) 设a,b,a_k,b_k,p_k为非负实数,$p,q>1$,$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

若$\sum_{k=1}^n p_ka_k^p\leqslant a^p$, $\sum_{k=1}^n p_kb_k^q\leqslant b^q$,则

① $\left(a^p-\sum_{k=1}^n p_k a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(b^q-\sum_{k=1}^n p_k b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant ab-\sum_{k=1}^n p_k a_k b_k.$

② 若 $0\leqslant q_k\leqslant p_k$，则

$$0\leqslant\left(\sum_{k=1}^n q_k a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^n q_k b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}-\sum_{k=1}^n q_k a_k b_k$$
$$\leqslant ab-\sum_{k=1}^n p_k a_k b_k-\left(a^p-\sum_{k=1}^n p_k a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(b^q-\sum_{k=1}^n p_k b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

2002 年，Y. J. Cho 等还将上述不等式推广到 p 半内积空间上去.（[330]33(4)(2002)，309 ～ 318)(石长伟的优化推广见[351]2006(3)：287 ～ 290)

103.　记 $S_n(a)=\sum_{k=1}^n a_k^2$，$S_n(b)=\sum_{k=1}^n b_k^2$，$S_n(ab)=\sum_{k=1}^n a_k b_k$，$\sigma_n(a,b)=S_n(a)S_n(b)-[S_n(ab)]^2$，设 $\{a_k\}$，$\{b_k\}$ 不成比例，即是 $a_ib_j\neq a_jb_i(i\neq j)$，

(1)　若 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 是满足

$$\sum a_k x_k=0,\sum b_k x_k=1 \tag{103.1}$$

的任一实数列，则

$$S_n(x)\geqslant S_n(a)/\sigma_n(a,b), \tag{103.2}$$

仅当 $x_k=y_k$ 时等号成立，其中 $S_n(x)=\sum_{k=1}^n x_k^2$，

$$y_k=\frac{b_kS_n(a)-a_kS_n(b)}{\sigma_n(a,b)},k=1,\cdots,n. \tag{103.3}$$

证　设 $\{y_k\}$ 由 (103.3) 式定义，则 $\{y_k\}$ 满足条件 (103.1) 式，而且 $\sum x_ky_k=S_n(a)/\sigma_n(a,b)$，特别，$\sum y_k^2=S_n(a)/\sigma_n(a,b)$，故有

$$\sum x_k^2-\sum y_k^2=\sum(x_k-y_k)^2\geqslant 0$$

由此得到，$S_n(x)\geqslant S_n(y)=S_n(a)/\sigma_n(a,b)$.

注　当 $\{a_k\}$，$\{b_k\}$，$\{x_k\}$ 为复数列时，只要将条件 (103.1) 式改成 $\sum a_k\bar{x}_k=0$，$\sum b_k\bar{x}_k=1$，$S_n(a)=\sum|a_k|^2$，$S_n(ab)=\sum a_k\bar{b}_k$，则不等式 (103.2) 仍成立.

(2)　**Fan-Todd 不等式**：

$$\frac{S_n(a)}{\sigma_n(a,b)}\leqslant\binom{n}{2}^{-2}\sum_{k=1}^n\left[\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^n\left(\frac{a_j}{a_jb_k-a_kb_j}\right)\right]^2.$$

提示：令 $x_k=\binom{n}{2}^{-1}\left[\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^n\frac{a_j}{a_jb_k-a_kb_j}\right]$，$(1\leqslant k\leqslant n)$. 在二重和

$\sum_{k=1}^n a_kx_k=\binom{n}{2}^{-2}\sum_{k=1}^n\left[\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^n\frac{a_ka_j}{a_jb_k-a_kb_j}\right]$中，它的 $n(n-1)$ 项可以按以下成对形式分组：

$$\binom{n}{2}^{-1}\left(\frac{a_ka_j}{a_jb_k-a_kb_j}+\frac{a_ja_k}{a_kb_j-a_jb_k}\right),$$

每一对这样的和等于 0，因而 $\sum_{k=1}^{n} a_k x_k = 0$，同理，可证 $\sum b_k x_k = 1$. 因而可用(1)的结论导出所要证的不等式.

注 这些不等式的进一步推广见[4] § 2.12. 另见[2]45.

104. 设 $\sum x_k^2 = 1$，$\sum a_k^2 > 0$，$\sum a_k x_k = 0$，$(k = 1, \cdots, n)$，则

$$\left(\sum b_k x_k\right)^2 \leqslant \left(\sum a_k^2\right)^{-1} \sum_{j<k} (a_k b_j - a_j b_k)^2.$$

105. (1) 设实数列 $\{a_k\}$ 满足 $\sum a_k = 0$，$\sum |a_k| = 1$，则对于任意实数 $\{x_k\}$，$k = 1, \cdots, n$，有

$$\left|\sum a_k x_k\right| \leqslant (M - m)/2.$$

式中 $M = \max\{x_k : 1 \leqslant k \leqslant n\}$，$m = \min\{x_k : 1 \leqslant k \leqslant n\}$.

证 不妨设 $m = x_1$，$M = x_n$，从 $\sum a_k = 0$，得到

$$\left|\sum a_k x_k\right| = \frac{1}{2}\left|\sum (2x_k - x_n - x_1) a_k\right| \leqslant \frac{1}{2}\sum |2x_k - x_n - x_1||a_k|$$

$$\leqslant (x_n - x_1) \cdot \frac{1}{2}\sum |a_k| = \frac{1}{2}(M - m).$$

推论 取 $x_k = 1/k$，得 1989 年全国高中数学竞赛题：

$$\left|\sum (a_k/k))\right| \leqslant (1 - (1/n))/2.$$

推广： 设实数列 $\{a_k\}$ 满足 $\sum_{k=1}^{n} a_k = S$，$\sum_{k=1}^{n} |a_k| \leqslant \sigma$，则对于任意实数 $x_k (1 \leqslant k \leqslant n)$，有

$$\left|\sum a_k x_k\right| \leqslant (1/2)(M - m)\sigma + (1/2)|M + m| \cdot |S|.$$

式中 M, n 分别是 $x_k (1 \leqslant k \leqslant n)$ 中的最大值和最小值.

证 不妨设 $m = x_1 \leqslant x_k \leqslant x_n = M$. 于是

$$|2x_k - (x_1 + x_n)| = |(x_n - x_k) + (x_1 - x_k)| \leqslant |x_n - x_k| + |x_1 - x_k|$$
$$= (x_n - x_k) + (x_k - x_1) = x_n - x_1 = M - m.$$

从而 $\left|\sum a_k x_k\right| = \frac{1}{2}\left|\sum 2a_k x_k\right| = \frac{1}{2}\left|\sum 2a_k x_k - (x_n + x_1)\left(\sum a_k - S\right)\right|$

$$\leqslant \frac{1}{2}\sum |2x_k - x_n - x_1||a_k| + \frac{1}{2}|M + m| \cdot |S|$$

$$\leqslant \frac{1}{2}(M - m)\sigma + \frac{1}{2}|M + m| \cdot |S|.$$

(2) **Lakshmanamurti 不等式**：设 m 为整数，n 个实数 x_k 满足条件 $\sum x_k = 0$，$\sum x_k^2 = n$. 令 $S_m = \frac{1}{n}\sum x_k^m$，则

① $S_{2m} \geqslant S_{m+1}^2 + S_m^2$；

② $S_m \leqslant \dfrac{(n-1)^{m-1} + (-1)^m}{n(n-1)^{m/2-1}}$.

仅当 $x_1 = \sqrt{n-1}, x_k = -\dfrac{1}{\sqrt{n-1}}$ $(2 \leqslant k \leqslant n)$ 时等号成立.

(Math. Student (1950), 18:111 ~ 116)

106. **F T T(Fan—Taussky—Todd) 不等式**:设 $a_k (1 \leqslant k \leqslant n)$ 为实数,$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$.

(1) 若 $\sum_{k=1}^{n} a_k = 0, a_{n+1} = a_1$,则

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1})^2 \geqslant 4S_n (\sin \frac{\pi}{n})^2,$$

仅当 $a_k = c_1 \cos t + c_2 \sin t$(式中 $t = 2k\pi/n, 1 \leqslant k \leqslant n$) 时等号成立.(**Wirtinger 不等式**)

(2) 若 $a_1 = 0$ 则

$$\sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1})^2 \geqslant 4S_n [\sin \frac{\pi}{2(2n-1)}]^2,$$

仅当 $a_k = \sin \dfrac{(k-1)\pi}{2n-1}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ 时等号成立.

(3) 若 $a_0 = a_{n+1} = 0$,则

$$2S_n (1 - \cos \frac{\pi}{n+1}) \leqslant \sum_{k=1}^{n+1} (a_k - a_{k-1})^2 \leqslant 2S_n (1 + \cos \frac{\pi}{n+1}),$$

仅当 $a_k = c\sin t$ 时左边等号成立,而仅当 $a_k = c(-1)^{k-1} \sin t$ 时右边等号成立,式中 $t = k\pi/(n+1), 1 \leqslant k \leqslant n$.

(4) 若 $a_0 = 0$,则

$$2S_n (1 - \cos \frac{\pi}{2\pi+1}) \leqslant \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1})^2 \leqslant 2S_n (1 + \cos \frac{2\pi}{2n+1}),$$

仅当 $a_k = c\sin t$ 时左边等号成立,而仅当 $a_k = c(-1)^{k-1} \sin 2t$ 时右边等号成立,式中 $t = k\pi/(2n+1), 1 \leqslant k \leqslant n$.

(5) 若 $a_0 = a_{n+1} = 0$,令 $\Delta^2 a_k = a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1}$,则

$$16S_n [\sin \frac{\pi}{2(n+1)}]^4 \leqslant \sum_{k=1}^{n} (\Delta^2 a_k)^2 \leqslant 16S_n [\cos \frac{\pi}{2(n+1)}]^4,$$

仅当 $a_k = c\sin(k\pi/(n+1))$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ 时等号成立.

(6) 若 $a_0 = 0, 0 < t < \pi/n$, $\mu = 2(1 + \cos t)$, $\lambda_k = 1 + \dfrac{\sin(k+1)t}{\sin(kt)}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$,则

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1})^2 + \lambda_n a_n^2 \leqslant \mu S_n,$$

仅当 $x_k a_k + y_{k-1} a_{k-1} = 0$, $2 \leqslant k \leqslant n$ 时等号成立,式中 $x_k = (\mu - 1 - \lambda_k)^{1/2}$, $y_{k-1} = (\lambda_{k-1} - 1)^{1/2}$.

(7) $\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{k+1} - a_n a_1 \leqslant (\cos \dfrac{\pi}{n}) S_n$.

(8) $a_1^2+\sum_{k=2}^{n}(a_k-a_{k-1})^2+\lambda a_n^2\geqslant\mu S_n$，仅当存在 t：$0\leqslant t\leqslant\pi/n$，使得 $\mu\leqslant 2(1-\cos t),\lambda\geqslant 1-\dfrac{\sin(n+1)t}{\sin(nt)}$.

(FTT不等式由 Fan,K. ,Taussky,O. 和 Todd,J. 给出，见 Monatsh Math. ,1955,59：73 ~ 90. 而(3)(4) 中右边的不等式和(6) 是 Alzer. H. 1990 年证明的. 见[301]1991,161：142 ~ 147. 1994,182(3)：654 ~ 657；[22]439；[360]621(4)(1994),315 ~ 320)

2001 年，卢小宁、肖振纲证明了一个包括(3)(4) 的一个更一般的结果，即下述(9)：

(9) 设 $0<t<\pi/n,n>1$，则存在常数 c，使得

$$\frac{\sin(n+1)t}{\sin nt}a_n^2\pm 2\sum_{k=1}^{n-1}a_ka_{k+1}\leqslant 2(\cos t)S_n.$$

式中取“+”号时，仅当 $a_k=c\sin kt$ 时等号成立；取负号时，仅当 $a_k=c(-1)^{k-1}\sin kt$ 时等号成立.

证 因为 $t\in(0,\dfrac{\pi}{n})$，所以 $\sin kt>0,k=1,2,\cdots,n-1$. 于是

$$\frac{\sin(k+1)t}{\sin kt}a_k^2+\frac{\sin kt}{\sin(k+1)}a_{k+1}^2\geqslant\pm 2a_ka_{k+1},$$

仅当 $a_{k+1}\sin kt\pm a_k\sin(k+1)t=0$ 时等号成立.

在不等式两边分别加上 $\dfrac{\sin(n+1)t}{\sin nt}a_n^2$，得到

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(k-1)t+\sin(k+1)t}{\sin kt}a_k^2\geqslant\frac{\sin(n+1)t}{\sin nt}a_k^2\pm 2\sum_{k=1}^{n-1}a_ka_{k+1},$$

再利用和差化积公式 $\sin(k-1)t+\sin(k+1)t=2\sin kt\cos t$ 即可得证.

([348]2001,11:24 ~ 25)

107. 设 $\{a_k\},\{b_k\}$ 为实数列，且 $\sum_{k=1}^{n}a_k=0$，则

(1) $\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n}a_ja_k\leqslant 0$；

(2) $$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k^3\right|\leqslant\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{3/2};\tag{107.1}$$

(3) $\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ka_j\mid b_k-b_j\mid\leqslant 0$；

(4) 若 $p>1$，则

$$\sum_{k=1}^{n}\mid a_k\mid^{2p}\geqslant n^{1-p}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^p,\tag{107.2}$$

当 $0<p\leqslant 1$ 时，不等号反向. 当 n 为偶数时，n^{1-p} 是最佳常数. 简超在证明使该不等式(107.2) 以后进一步提出猜想：

设 $n\geqslant 5$ 且为奇数，记 $S_n(p)=\sum_{k=1}^{n}a_k^p$，则

$$\frac{n^2+3}{n(n^2-1)}[S_n(2)]^2 \leqslant S_n(4) \leqslant \frac{n^2-3n+3}{n(n-1)}[S_n(2)]^2. \tag{107.3}$$

（中学数学，1998.10）

2004 年，杨志明提出：$n \geqslant 4$ 时，使

$$C_1[S_n(2)]^2 \leqslant S_n(4) \leqslant C_2[S_n(2)]^2 \tag{107.4}$$

成立的 C_1，C_2 的最佳值是多少？（[351]2004(1)：18 ～ 20）

108.　设 $a_k > 0$，b_k 为任意实数，若 $\sum\limits_{k\neq j} a_k b_j = 0$，则 $\sum\limits_{k\neq j} b_k b_j \leqslant 0$，$(1 \leqslant k, j \leqslant n)$.

证　由条件，$(\sum a_k)(\sum b_k) = \sum(a_k b_k) + \sum\limits_{k\neq j} a_k b_j = \sum(a_k b_k)$. 利用柯西不等式，得：

$$\left(\sum a_k\right)^2\left(\sum b_k\right)^2 = \left(\sum a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum a_k^2\right)\left(\sum b_k^2\right) \leqslant \left(\sum a_k\right)^2\left(\sum b_k^2\right).$$

于是，从

$$\left(\sum b_k\right)^2 \leqslant \sum b_k^2 = \left(\sum b_k\right)^2 - 2\sum_{k\neq j} b_k b_j, \quad \text{即得} \quad \sum_{k\neq j} b_k b_j \leqslant 0.$$

109.　**Redheffer 递归(recurrent) 不等式**：设 $f_k = f_k(a_1, \cdots, a_k)$ 和 $g_k = g_k(a_1, \cdots, a_k)$ 定义在集 $D = D_1 \times \cdots \times D_k$ 上，则

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} g_k$$

称为**递归不等式**，当且仅当存在函数 $F_k(\lambda)$，使得 $\sup\{(\lambda f_k - g_k) : a_k \in D_k\} = F_k(\lambda) f_{k-1}$　$(k = 1, \cdots, n, f_0 = 1)$ 成立.

1967，年 Redheffer，R. 证明，上述递归不等式对所有 $a_k \in D_k$ 成立，当且仅当存在一个实数序列 σ_k，使得 $\sigma_1 \leqslant 0$，$\sigma_{n+1} = 0$，且 $\lambda_k = F_k^{-1}(\sigma_k) - \sigma_{k+1}$，$k = 1, \cdots, n$，其中 $F_k^{-1}(\sigma)$ 表示方程 $F_k(\lambda) = \sigma$ 的一个解.

（提示：用数学归纳法证明. 详见[318]1967，17(3)：683 ～ 699）

利用递归不等式可以证明许多著名的不等式，例如，前面 No.106（FTT 不等式），及下面的 No.110 ～ 111.

110.　设 $a_k > 0$，$1 \leqslant k \leqslant n$，$p > 1$，$a = (a_1, \cdots, a_n)$，$\| a \|_p = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{1/p}$，$A_k = \dfrac{1}{k}\sum\limits_{j=1}^{k} a_j$，则

(1)　$\sum\limits_{k=1}^{n} A_k^p \leqslant \dfrac{p}{p-1}\sum\limits_{k=1}^{n}(A_k^{p-1} \cdot a_k)$.

证　利用 Young 不等式（见本章 No.27），

$$A_k^{p-1} A_{k-1} \leqslant \frac{1}{p}[(p-1)A_k^p + A_{k-1}^p].$$

从而

$$A_k^p - \frac{p}{p-1}A_k^{p-1}a_k = A_k^p - \frac{p}{p-1}A_k^{p-1}[kA_k - (k-1)A_{k-1}]$$

$$= A_k^p(1-\frac{kp}{p-1}) + \frac{(k-1)p}{p-1}A_k^{p-1}A_{k-1}$$

$$\leqslant A_k^p(1-\frac{kp}{p-1}) + \frac{k-1}{p-1}[(p-1)A_k^p + A_{k-1}^p] = \frac{1}{p-1}[(k-1)A_{k-1}^p - kA_k^p].$$

由此即可得证.

(2) **Hardy-Landau 不等式:**

$$\| A \|_p < \frac{p}{p-1} \| a \|_p.$$

即 $\left(\sum_{k=1}^n A_k^p\right)^{1/p} < \frac{p}{p-1}\left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{1/p}.$

证 从(1) 和 Hölder 不等式,得到

$$\sum_{k=1}^n A_k^p < \frac{p}{p-1}\sum_{k=1}^n A_k^{p-1}a_k \leqslant \frac{p}{p-1}\left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^n A_k^{q(p-1)}\right)^{1/q}.$$

式中 $1/p + 1/q = 1$,再注意到 $q(p-1) = p$,即可得证.

Hardy-Landau 不等式有以下推广:

(3) 设 a_j, b_j, c_j 均为非负实数,$1 \leqslant j \leqslant n, 1 \leqslant m \leqslant n$,

① 若 $1 \leqslant s \leqslant r$ 时,$\sum_{k=1}^m a_k\left(\sum_{j=1}^k b_j\right)^r \leqslant \left(\sum_{j=1}^k b_k\right)^s$,则

$$\sum_{k=1}^n a_k\left(\sum_{j=1}^k b_jc_j\right)^r \leqslant \kappa(r,s)\left(\sum_{k=1}^n b_kc_k^{r/s}\right)^s,$$

式中 $\kappa(r,s) = \left(\frac{r}{r-s}\right)^r$. 特别地,取 $s=1, b_k=1, a_n = \frac{1}{n^r}$. 又得到 Hardy-Landau 不等式. ([320]1987,38:401 ~ 425)

② 若 $0 < r < s \leqslant 1$ 时,$\sum_{k=1}^m a_k\left(\sum_{j=1}^k b_j\right)^{\frac{r}{r-s}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^m b_k\right)^{\frac{1-r}{s-r}}$,则

$$r^r\left(\sum_{k=1}^n a_kc_k^{r/s}\right)^s \leqslant \sum_{k=1}^m b_k\left(\sum_{j=k}^n a_jc_j\right)^r.$$

特别,取 $s=1, p=r, b_k=1, a_k=k^q, c_k=k^{-q}x_k, 1 \leqslant k \leqslant n$,式中 $q = \frac{r}{1-r}$,就得到 **Copson 不等式.** ([320]1988,39(2):385 ~ 400)

③ 2008 年,张小明、褚玉明利用最值单调不等式证明,$p \geqslant 2$ 时,

$$\sum_{k=1}^n A_k^p \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{k=1}^n a_k^p - \min_{1\leqslant k\leqslant n}\{ka_k^p\}\left\{\left(\frac{p}{p-1}\right)^p - 1\right\}.$$

并猜想 $1 < p < 2$ 时该不等式仍成立. ([351]2008(3):299 ~ 307)

(4) 若 $0 < p < 1$,则

$$\sum_{k=1}^n A_k^{\frac{1}{p}} + \frac{n}{1-p}A_n^{1/p} < \frac{1}{(1-p)^{1/p}}\sum_{k=1}^n a_k^{1/p}. \text{ ([4]174)}$$

(5) $\sum_{k=1}^n A_k^2 + \left(\frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}\right)\| a \|_1^2 \leqslant 4\| a \|_2^2$. ([386]1998,270:275 ~ 286)

111. **Carleman 不等式:** 设 $a_k > 0, 1 \leqslant k \leqslant n$,则

$$\sum_{k=1}^{n}(a_1\cdots a_k)^{1/k} < e\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right). \tag{111.1}$$

证 利用 No. 109(递归不等式),细节见[4]173 ~ 174,而 Hardy 等([1]280 ~ 281)利用 AG 不等式的变形给出了一个巧妙的简洁证明:选取正数列$\{c_k\}$,使得

$\left(\prod_{k=1}^{n}c_k\right)^{1/n} = n+1$. 此处我们选取 $c_k = \dfrac{(k+1)^k}{k^{k-1}}$. 于是

$$\sum_{k=1}^{n}(a_1\cdots a_k)^{1/k} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(c_1a_1)(c_2a_2)\cdots(c_ka_k)}{c_1c_2\cdots c_k}\right)^{1/k} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(c_1\cdots c_k)^{1/k}}\left(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}c_ja_j\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}c_ka_k\left(\sum_{m=k}^{n}\frac{1}{m(c_1\cdots c_m)^{1/m}}\right) = \sum_{k=1}^{n}c_ka_k\left(\sum_{m=k}^{n}\frac{1}{m(m+1)}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}c_ka_k\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+1}\right) < \sum_{k=1}^{n}\frac{c_ka_k}{k} = \sum_{k=1}^{n}a_k\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < e\sum_{k=1}^{n}a_k.$$ 证毕.

1963 年,Bruijn 将上述系数 e 改进为渐进式

$$\lambda_n = e - \frac{2\pi^2 e}{(\ln n)^2} + 0\left(\frac{1}{(\ln n)^3}\right).$$

2001 年,匡继昌与 Rassias,Th. M. 证明 Carleman 不等式的一种加权推广和改进形式:

设 $0 < q_{n+1} \leqslant q_n$, $Q_n = \sum_{k=1}^{n}q_k$,则 $\forall n > 1$,成立

$$\sum_{k=1}^{n}q_{k+1}\left(\prod_{j=1}^{k}a_j^{q_j}\right)^{\frac{1}{Q_n}} \leqslant e\sum_{k=1}^{n}\left[1-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{b_mq_k^m}{(Q_k+q_k)^m}\right]q_ka_k. \tag{111.2}$$

式中$\{b_k\}$由下述递推式确定:

$$b_1 = \frac{1}{2}, b_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{n+2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{n+2-k}\right).$$

2003 年,Maria Johansson 等证明:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{k}a_j\right)^{\frac{1}{k}} < e^{1-\frac{1}{n}}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)a_k. \tag{111.3}$$

([304]4(3)(2003))

2008 年以来,张小明、褚玉明等利用最值单调定理先后证明:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{k}a_j\right)^{\frac{1}{k}} \leqslant e\sum_{k=1}^{n}a_k - \omega_n. \tag{111.4}$$

式中 $\omega_n = \dfrac{en}{n+1}\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{ka_n\}$,或者 $\omega_n = (e-1)\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{ka_k\}$,或者 $\omega_n = 2(e-1)\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{(k-\dfrac{1}{2})a_k\}$ 等.([164]177 ~ 185)

Carleman 不等式的级数形式第 11 章 §2. No. 38.

112. 设 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant 0$,

(1) **Weinberger 不等式**:若 $r \geqslant 1$,则

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k^r \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k\right)^r.$$

(2)　**Bellman 不等式**：若 $f(0)=0$，$f'(0)\geqslant 0$，$f'(x)$ 递增连续，则

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}f(a_k)\geqslant f\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k\right).$$

(提示：利用函数图形面积的比较，见[8]152 ~ 153 或转化为比较导数的积分)

113.　**Laguerre 不等式**：设 $\sum_{k=1}^{n}x_k=p$，$\sum_{j<k}x_jx_k=q$，$n>2$，则对于所有 $k=1,\cdots,n$，有

$$\left|x_k-\frac{p}{n}\right|<\left(1-\frac{1}{n}\right)\sqrt{p^2-\frac{2n}{n-1}q}.$$

提示：根据假设，$\sum_{k=1}^{n}x_k^2=p^2-2q$，因此，从 $\sum_{j<k}(x_j-x_k)^2\geqslant 0\Rightarrow p^2-\frac{2n}{n-1}q\geqslant 0$. 将这个关系式用于其余 $n-1$ 个 $x_j(j\neq k)$，得到

$$(p-x_k)^2-\frac{2(n-1)}{n-2}(q-px_k+x_k^2)\geqslant 0.$$

即 $nx_k^2-2px_k+2(n-1)q-(n-2)p^2\leqslant 0$，由于此式左边的判别式 $(n-1)^2\left(p^2-\frac{2n}{n-1}q\right)\geqslant 0$，故 x_k 必介于其两实零点之间.

114.　设 $\sum_{k=1}^{n}x_k=b$，$\sum_{k=1}^{n}x_k^2=\frac{b^2}{n-1}$　$(b>0,n\geqslant 2)$，则

$$0\leqslant x_k\leqslant\frac{2b}{n},\ (k=1,\cdots,n)\tag{114.1}$$

证　由假设，有 $\sum x_k^2=\frac{b^2}{n-1}=\frac{1}{n-1}\left(\sum x_k\right)^2$. 于是

$(n-2)\sum x_k^2=2(x_1x_2+\cdots+x_1x_n+x_2x_3\cdots+x_2x_n+\cdots+x_{n-1}x_n)$，从而

$$(n-2)x_1^2+(x_2-x_3)^2+\cdots+(x_2-x_n)^2+(x_3-x_4)^2+\cdots+(x_3-x_n)^2+\cdots+(x_{n-1}-x_n)^2=2x_1(x_2+\cdots+x_n).\tag{114.2}$$

若 $x_1<0$，则从(114.2)式，有 $x_2+\cdots+x_n<0$，于是，$b=x_1+(x_2+\cdots+x_n)<0$，这与假设矛盾. 因此，必须 $x_1\geqslant 0$. 同理可证 $x_k\geqslant 0$，$k=2,\cdots,n$. 为证(114.1)式右端，可令 $y_k=\frac{2b}{n}-x_k$，则 $\sum y_k=b$，$\sum y_k^2=\frac{b^2}{n-1}$，从而 $y_k\geqslant 0$，即 $x_k\leqslant 2b/n$，$k=1,\cdots,n$. 证毕.

115.　**Kalajdžic 不等式**：设 $x_j\geqslant 0$，$j=1,\cdots,n$，且 $\sum_{j=1}^{n}x_j=na$，则对于 $k\geqslant 1$，有

$$\sum_{m_1,\cdots,m_n=0}^{k}\frac{x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}}{m_1!\cdots m_n!}\leqslant n(n^k-1)\frac{a^{k+1}}{(k+1)!}\quad\left(\text{式中}\sum_{j=1}^{n}m_j=k+1\right).$$

证　多项式展开可以写成

$$\sum_{\substack{m_1+\cdots+m_n=k+1\\0\leqslant m_j\leqslant k}}\frac{(k+1)!}{m_1!\cdots m_n!}x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}=\left(\sum_{j=1}^{n}x_j\right)^{k+1}-\sum_{j=1}^{n}x_j^{k+1}=(na)^{k+1}-\sum_{j=1}^{n}x_j^{k+1}$$

$$\leqslant(na)^{k+1}-na^{k+1}=n(n^k-1)a^{k+1}.$$ (见[4]289)

116.　设 $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n \prod_{k=1}^{n}(x - x_k)$，其中 $a_n \neq 0$. 则

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k| \cdot |x|^k \leqslant |a_n| \prod_{k=1}^{n}(|x| + |x_k|).$$

117.　[IMO]. 设 $a_k = c + \sum_{j=k}^{n-1} a_{j-k}(a_j + a_{j+1})$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $a_0 = a_n = 1$，则

$$c \leqslant \frac{1}{4n}.$$

118.　[MCM]. 设 $p > 1$，n 个正数 a_k 满足 $(n-1)^{p-1}(\sum a_k^p) < (\sum a_k)^p$，$(n > 3)$，则对任何 $1 \leqslant i < j < k \leqslant n$，都有

$$2^{p-1}(a_i^p + a_j^p + a_k^p) < (a_i + a_j + a_k)^p.$$

提示：利用带参数的 Hölder 不等式：

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k |a_k|)^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{|b_k|}{\lambda_k}\right)^q\right)^{1/q},$$

式中 $\lambda_k > 0 (1 \leqslant k \leqslant n)$，$p, q$ 为共轭指数：$(1/p) + (1/q) = 1$，$p > 1$. ([99](2)32 ～ 37)

119.　[MCM]. 设 k 个正数 $x_1, \cdots, x_k$ 满足

$$\prod_{j=1}^{k} x_j = \sum_{j=1}^{k} x_j,\ 1 < k \leqslant n，则\quad \sum_{j=1}^{k} x_j^{n-1} \geqslant kn.$$

仅当 $k = n$ 且所有的 x_j 相等时等号成立.（见[99](2)P80)（提示：利用 A-G 不等式）

120.　设 p, q 为自然数，$p \geqslant q$，$x_k (1 \leqslant k \leqslant n)$ 为正数，则

$$\left(\sum x_k^p\right) / \left(\sum x_k^q\right) \geqslant \left(\prod x_k\right)^{\frac{p-q}{n}},$$

仅当所有 x_k 相等时等号成立.

121.　**Opial 型离散不等式**：设 $\{a_k\}$ 为实数列，$\Delta a_k = a_k - a_{k-1}$，$\Delta b_k = b_k - b_{k-1}$，$a_0 = b_0 = 0$.

(1)　$2S_n\left(\sin\frac{\pi}{2(n+1)}\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k \Delta a_k \leqslant 2S_n\left(\cos\frac{\pi}{2(n+1)}\right)^2$，式中 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$，更一般形式见[369]1984，47：413 ～ 417；

(2)　设 $\{a_k\}$ 为非负递增实数列，$p \geqslant 1$，则

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^p \Delta a_k \leqslant \frac{(n+1)^p}{p+1} \sum_{k=1}^{n} (\Delta a_k)^{p+1}.$$ (Canad. Math. Bull. 1967，10：115 ～ 118) 更一般形式为

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p |\Delta a_k|^q \leqslant c_n(p,q) \sum_{k=1}^{n} |\Delta a_k|^{p+q}.$$

式中 $c_n(p,q)$ 的表达式见 Canad. Math. Bull. 1968，11：73 ～ 77. 1992 年，杨国胜等证明：若 $a_0 = a_n = 0$，$p, q \geqslant 1$，则当 n 为奇数时，$c_n(p,q) = \frac{q(n+1)^p}{2^p(p+q)}$；当 n 为偶数时，$c_n(p,q) = \frac{q(n+2)^p}{2^p(p+q)}$. ([330]1992，23(1)：67 ～ 78，另见[353]2001(3)：11 ～ 14)

(3) $\sum_{k=1}^{n}(a_k\Delta b_k+b_k\Delta a_k)\leqslant\frac{n}{2}\sum_{k=1}^{n}[(\Delta a_k)^2+(\Delta b_k)^2]$.

若加上 $a_n=b_n=0,p,q\geqslant 1$,则

$$(p+q)\sum_{k=1}^{n}(|a_k|^p|b_k|^q)\leqslant\left(\frac{n}{2}\right)^{p+q}\sum_{k=1}^{n}(p|\Delta a_k|^{p+q}+q|\Delta b_k|^{p+q}).$$

(Pachpate,B. G. [301]1987,127(2):470 ~ 474)

(4) $\sum_{k=1}^{n}(|a_k||\Delta a_k|+|b_k||\Delta b_k|)\leqslant\left(\frac{n+1}{2}\right)\sum_{k=1}^{n}(|\Delta a_k|^2+|\Delta b_k|^2)$.

(Pachpatte,B. G. ,An. Stiint. Univ. “Al. I. Cuza” Iasi Sect,I a Mat. (N. S)1990,36(3):237 ~ 240)

(5) $\left(\sum_{k=1}^{n}(\Delta a_k)a_{n+1-k}^{p}\right)^{1/p}\leqslant\sum_{k=1}^{n}(\Delta a_k)a_{n+1-k}^{1/p}$, $p\geqslant 1$,

(Alzer,H. [358]1994,133(1 ~ 3):279 ~ 283)

122. 设 $k_j\in N,D_j=\{1,2,\cdots,k_j+1\},D=\prod_{j=1}^{n}D_j=D_1\times D_2\times\cdots\times D_n$,对于 f:$N^n\to R^1$,定义差分算子:$x=(x_1,\cdots,x_n),\Delta_jf(x)=f(x_1,\cdots,x_{j-1},x_j+1,x_{j+1},\cdots,x_n)-f(x),\Delta_j\Delta_if(x)=\Delta_j[\Delta_if(x)]$,若 $f:D\to R^1$ 满足条件:

$f(x_1,\cdots,x_{j-1},1,x_{j+1},\cdots,x_n)=f(x_1,\cdots,x_{j-1},k_j+1,x_{j+1},\cdots,x_n)\equiv 0,j=1,2,\cdots,n$,则称 $f\in F(D)$. 若 $f\in F(D),p\geqslant 1,q>0$,则

(1) $$\sum_{r_1=1}^{k_1}\cdots\sum_{r_n=1}^{k_n}|f(r_1,\cdots,r_n)|^p|\Delta_n\cdots\Delta_1f(r_1,\cdots,r_n)|^q$$
$$\leqslant\left(\frac{k_1k_2\cdots k_n}{2^n}\right)^p\sum_{r_1=1}^{k_1}\cdots\sum_{r_n=1}^{k_n}|\Delta_n\cdots\Delta_1f(r_1,\cdots,r_n)|^q;$$

(2) $$\sum_{r_1=1}^{k_1}\cdots\sum_{r_n=1}^{k_n}|f(r_1,\cdots,r_n)|^p\leqslant\left(\frac{k_1k_2\cdots k_n}{2^n}\right)^p\sum_{r_1=1}^{k_1}\cdots\sum_{r_n=1}^{k_n}|\Delta_n\cdots\Delta_1f(r_1,\cdots,r_n)|^p.$$

它包含了 Pachpatte,G. B. 当 $n=2,3$ 时的一系列结果.

杨恩浩等还建立了更为广泛的类似不等式.(暨南大学学报,2000,21(3):1 ~ 7)

123. **幂和的乘积不等式**:1985 年,Zsolt,P. 证明:设 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in R^n,x_k>0$,$1\leqslant k\leqslant n,\sum a_k=0$ (a_k 为实数),$a=(a_1,\cdots,a_n)$. 记 $M(x,a)=\sum x_k^{a_k}$,则

$\prod[M(x,a)]^{a_k}\geqslant 1$ 成立的充要条件是 $\sum a_k|b_k-b_m|\geqslant 0$ 对所有 $m(1\leqslant m\leqslant n)$ 成立. 这个不等式包含了 Lyapunov 不等式和 Daroczy,Z. ,Losonczi,L. 的结果. (Monatsh Math. 1985,100(2):137 ~ 144)

124. $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}\right)^2\leqslant\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_ja_k}{j+k-1}$,仅当 $a_2=\cdots=a_n=0$ 时等号成立.

证 令 $b_k=\frac{k-1}{k}a_k,k=1,\cdots,n$,则

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_ja_k}{j+k-1}-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}\right)^2=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{b_jb_k}{j+k-1}$$

$$=\int_0^1\Big(\sum_{j=1}^n\sum_{j=1}^n b_jb_kx^{j+k-2}\Big)\mathrm{d}x=\int_0^1\Big|\sum_{k=1}^n b_kx^{k-1}\Big|^2\mathrm{d}x\geqslant 0.$$

125.　设 p,q,m,n 都是自然数，$f(x)>0$ 且递增，则

(1)　$$\sum_{k=1}^{p}f\Big(\frac{p}{k}\Big)+\sum_{k=1}^{q}f\Big(\frac{q}{k}\Big)\leqslant\sum_{k=1}^{p+q}f\Big(\frac{p+q}{k}\Big);$$

(2)　$$\sum_{k=p+1}^{p+m}f\Big(\frac{p}{k}\Big)+\sum_{k=q+1}^{q+n}f\Big(\frac{q}{k}\Big)\leqslant\sum_{k=p+q+1}^{p+q+m+n}f\Big(\frac{p+q}{k}\Big).$$

([1] 定理 396)

126.　$\left|\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}-\sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}\right|\leqslant\sum_{k=1}^n|a_k-b_k|$，推导弧长公式时用到这个不等式.

127.　设 a_k,b_k 是正数，$k=1,\cdots,n.$ $p\geqslant 1$，Q 表示集合 $\{1,\cdots,n\}$ 的全部置换的集合，则

$$\left|\Big(\sum_{k=1}^n a_k^p\Big)^{1/p}-\Big(\sum_{k=1}^n b_k^p\Big)^{1/p}\right|\leqslant\min\Big\{\sum_{k=1}^n|a_k-b_{t(k)}|:t\in Q\Big\}.$$

([4]384 ~ 385)

128.　设 $|x_k|\leqslant 1$，$|y_k|\leqslant 1$，$k=1,\cdots,n$，则

$$\sum\sqrt{1-(x_k^2+y_k^2)}\leqslant n\cdot\sqrt{1-\Big(\frac{1}{n}\sum x_k\Big)^2-\Big(\frac{1}{n}\sum y_k\Big)^2}.$$

提示：构造 R^n 中“单位球”模型.

129.　设 $a_1<a_2<\cdots<a_n$，则

(1)　$$\sum_{k=1}^n|x-a_k|\geqslant\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=p}^n a_j-\sum_{j=1}^{p-1}a_j，当\ n\ 为偶数，a_{p-1}\leqslant x\leqslant a_p，\\ \displaystyle\sum_{j=q}^n a_j-\sum_{j=1}^{q-1}a_j，当\ n\ 为奇数，且\ x=a_q，\end{cases}$$

式中 $p=(n/2)+1$，$q=(n+1)/2$.

(2)　$$\sum_{1\leqslant k<j\leqslant n}(a_j-a_k)^r\geqslant c_r(n)\min_{1\leqslant k<n}(a_{k+1}-a_k)^r,$$

式中 $r>0$，$c_r(n)$ 的最大值为

$$c_r(n)=\sum_{1\leqslant k<j\leqslant n}(j-k)^r.$$

特别，当 $r=2$ 时，$c_2(n)=\sum_{k=1}^n(n-k)k^2=\dfrac{n^2(n-1)(n+1)}{12}$. ([305]2000,107(6))

130.　设 $a_k>0$，并记 $S_n=\sum_{k=1}^n a_k$，则

(1)　$$\ln\Big(\frac{1}{2}\Big(1+\frac{S_n}{a_1}\Big)\Big)<\sum_{k=2}^n\frac{a_k}{S_k}<\ln\frac{S_n}{a_1}.$$

其中左边不等式成立还要求 $a_1=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\{a_k\}$，由 Alzer，H. 与 Brenner，J. L. 于 1992 年证明；右边不等式由 Linkovskii，Z. B. 于 1979 年证明.

(2)　$$\sum_{k=2}^n\sum_{j=1}^m\frac{1}{j}\Big(\frac{a_k}{S_k}\Big)^j<\ln\frac{S_n}{a_1}.$$

证 设 $k \geqslant 2$,则

$$\ln \frac{S_{k-1}}{S_k} = \ln\left(1 - \frac{a_k}{S_k}\right) = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}\left(\frac{a_k}{S_k}\right)^j < -\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j}\left(\frac{a_k}{S_k}\right)^j.$$

于是

$$\sum_{k=2}^{n}\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j}\left(\frac{a_k}{S_k}\right)^j < \sum_{k=2}^{n} \ln \frac{S_k}{S_{k-1}} = \ln \frac{S_n}{a_1}.$$ ([301]1992,168(2):319 ~ 328)

131. **Volenec 不等式:** 设 $a_k > 0$, $\sum_{k=1}^{n} a_k = 1$, $p > 0$,则

(1) $$\prod_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\left(\sum_{j=1}^{k} a_{i_j}\right) \leqslant \left(\frac{k}{n}\right)^{\binom{n}{k}};$$

(2) $$\prod_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\left[\sum_{j=1}^{k}(1-a_{i_j})\right] \leqslant \left(\frac{(n-1)k}{n}\right)^{\binom{n}{k}};$$

(3) $$\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\left[\prod_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{a_{i_j}}-1\right)\right]^p \leqslant \binom{n}{k}(n-1)^{pk};$$

(4) $$\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\left(\prod_{j=1}^{k}\frac{1}{1-a_{i_j}}\right)^p \geqslant \binom{n}{k}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{pk};$$

(5) $$\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\left(\prod_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{a_{i_j}}\right)\right)^p \geqslant \binom{n}{k}n^{pk},$$

以上均仅当 $a_1 = \cdots = a_n = 1/n$ 时等号成立.([4]473)

132. **初等对称多项式不等式:** 设 $a_k > 0$, $a = (a_1, \cdots, a_n)$,我们在第 1 章 §3(3.139)式定义了 a 的 k 次对称函数 $E_n(a,k)$,此处继续讨论它的有关不等式,为了简化记号,将 $E_n(a,k)$ 改记为 $S_k(a)$ 或 S_k. $B_k = B_k(a) = S_k(a)/\binom{n}{k}$, $P_k(a) = (B_k(a))^{1/k}$ 就是 a 的 k 次对称平均(见第 1 章 §3(3.140)). $S_1 = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $S_2 = \sum_{1\leqslant k_1<k_2\leqslant n} a_{k_1}a_{k_2}$, $\cdots$, $S_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$.

(1) $$\frac{S_n}{S_{n-1}} < \cdots < \frac{S_3}{S_2} < \frac{S_2}{S_1} < S_1;$$

这个不等式有多种证明([1]53 ~ 60). 1983 年,堵秀凤利用判定实系数多项式正根个数的 Descartes 定理给出了一个新的证明.([345]1983,11:27)

(2) $[S_k(a)]^{1/k} + [S_k(b)]^{1/k} \leqslant [S_k(a+b)]^{1/k}$;

(3) **Marcus-Lopes 不等式:**

$$\frac{S_k(a)}{S_{k-1}(a)} + \frac{S_k(b)}{S_{k-1}(b)} \leqslant \frac{S_k(a+b)}{S_{k-1}(a+b)};\ (S_0(a) = S_0(b) = 1).$$

推广: 设 $1 \leqslant m < k < n$,则

$$\left(\frac{S_k(a)}{S_{k-m}(a)}\right)^{1/m} + \left(\frac{S_k(b)}{S_{k-m}(b)}\right)^{1/m} \leqslant \left(\frac{S_k(a+b)}{S_{k-m}(a+b)}\right)^{1/m}.$$

(朱宗毅,[344]1988,1:51 ~ 54)

(4) $S_k(a) > 0 \Leftrightarrow a_k > 0$.

(5)　**Newten 不等式(对数凸性不等式)：** $B_{k-1}(a)\cdot B_{k+1}(a)\leqslant(B_k(a))^2$.

仅当 $\forall a_k$ 相等时等号成立.([12]139)

推广：　**立方不等式：**设 $n\geqslant 3, k=0,1,\cdots,n-3$,则

$$6B_kB_{k+1}B_{k+2}B_{k+3}-4B_kB_{k+2}^3-B_k^2B_{k+3}^2-4B_{k+1}^3B_{k+3}+3B_{k+1}^2B_{k+2}^2\geqslant 0.$$

证明见[305]1989,96(9):815 ~ 819.

(6)　$(3S_3-S_1S_2)^2\leqslant 2[1-(1/n)](S_1^2-2S_2)(2S_2^2-3S_1S_3)$,

仅当 $a_1=\cdots=a_n$ 时等号成立.

(7)　[MCM].设 $0<a_1<a_2<\cdots<a_n<2a_1$. $n\geqslant 3$, p 为素数且 p^k 能整除 $S_n(a)$,则 $S_n(a)>p^k\cdot n!$.(提示:用反证法)

(8)　[MCM].设 $a_k\geqslant 0$, $\sum\limits_{k=1}^n a_k=1$,则当 $n\geqslant 4$ 时,

$$S_2(a)\leqslant\frac{1}{4}.$$

提示:$0\leqslant\sum\limits_{j\neq k}(a_j-a_k)^2=2\sum\limits_{k=1}^n a_k^2-2S_2(a)$.这表明 $\sum\limits_{k=1}^n a_k^2-S_2(a)=0$ 时 $S_2(a)$ 最大,因为这时 $a_1=a_2=\cdots=a_n$,又已知 $\sum\limits_{k=1}^n a_k=1$,所以 $a_k=\frac{1}{n}$.从而 $S_2(a)$ 的最大值 $=\sum\limits_{k=1}^n(\frac{1}{n})^2=\frac{1}{n}$.即　$S_2(a)\leqslant\frac{1}{n}\leqslant\frac{1}{4}$.

(9)　设 $1\leqslant k\leqslant n-1$,则

$$4(S_{k-1}S_{k+1}^3+S_{k-1}^2S_{k+2}^2+S_k^3S_{k+2})\leqslant 3(S_{k-1}S_{k+2}+S_kS_{k+1})^2.$$

Briggs,W. E. 在证明了上述结果后,进一步问下述两个不等式是否成立:

① $S_{k+1}(S_{k-1}S_{k+3}+2S_kS_{k+2})<S_{k-1}S_{k+2}^2+S_k^2S_{k+3}+S_{k+1}^3$;

② $S_{k-1}^2(S_{k+1}^2-S_kS_{k+2})<S_k^2(S_k^2-S_{k-1}S_{k+1})$.

([305]1991,98(9),E6629)

(10)　$S_n\leqslant\frac{1}{n^2}S_1S_{n-1}\leqslant\frac{1}{n^2}S_1^n$.(王振、陈计,[348]1994,1:34)

133.　**欧氏空间 R^n 中 n 维向量不等式：**设 $x=(x_1,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,\cdots,y_n)\in R^n$. $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 是多重指标,其中 α_k 是非负整数. $|\alpha|=\sum\limits_{k=1}^n\alpha_k$, $x^\alpha=\prod\limits_{k=1}^n(x_k^{\alpha_k})$,

$|x|=\left(\sum\limits_{k=1}^n|x_k|^2\right)^{1/2}$, c,c_1,c_2 为正的常数,

(1)　$c_1|x|^{2m}\leqslant\sum\limits_{|\alpha|=m}|x^\alpha|^2\leqslant c_2|x|^{2m}$;

(2)　$c_1(1+|x|^2)^m\leqslant\sum\limits_{|\alpha|\leqslant m}|x^\alpha|^2\leqslant c_2(1+|x|^2)^m$;

(3)　$\dfrac{1+|x-y|^{n/r}}{1+|z|^{n/r}}\leqslant c(1+|x-y-z|^{n/r})$,　$r>0$;

(4)　设 $|\alpha|\leqslant m$, $\delta=\min\{\sum\limits_{k=1}^n|x_k|^m:|x|=1\}>0$,则

$$|x^{\alpha}| \leqslant (1+|x|)^{m} \leqslant 2^{m}(1+|x|^{m}) \leqslant \frac{2^{m}}{\delta}\sum_{|\alpha|\leqslant m}|x^{\alpha}|;$$

(5) 若 $|x|>2|y|$，则

$$\left|\frac{x-y}{|x-y|}-\frac{x}{|x|}\right| \leqslant \sqrt{2}\left|\frac{y}{x}\right|.$$

证 我们用平面几何方法来证明这个高维空间中的不等式，作以 $|x|$，$|y|$，$|x-y|$ 为边长的直角三角形 $OA'B'$（斜边长为 $|x|$）. 在 OB' 上取 $\overline{OB}=\frac{x-y}{|x-y|}$，在 OA' 上取 $\overline{OA}=\frac{x}{|x|}$，则 $|\overline{OB}|=|\overline{OA}|=1$，记 $\angle AOB=\theta$，则 $\angle ABO=\angle BAO=\alpha=\frac{\pi-\theta}{2}$. $|\overline{AB}|=|\overline{OB}-\overline{OA}|=\left|\frac{x-y}{|x-y|}-\frac{x}{|x|}\right|$，$\sin\theta=\left|\frac{y}{x}\right|$，$\sin\alpha=\sin(\frac{\pi-\theta}{2})=\cos\frac{\theta}{2}=\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^{1/2}=\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{|x-y|}{|x|}\right)\right]^{1/2}$. 再利用正弦定理：$\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}}=\frac{\sin\theta}{\sin\alpha}$，得到

$$\left|\frac{x-y}{|x-y|}-\frac{x}{|x|}\right|=\left|\frac{y}{x}\right|\cdot\left(\frac{2|x|}{|x|+|x-y|}\right)^{1/2}\leqslant\sqrt{2}\left|\frac{y}{x}\right|.$$

(6) **Peetre 不等式：** $\left(\frac{1+|x|^{2}}{1+|y|^{2}}\right)^{t}\leqslant 2^{|t|}(1+|x-y|^{2})^{|t|}$，$t\in R^{1}$.

134. **Beckenbach 不等式：** 设 $a_k,b_k>0$，$k=1,\cdots,n$，$1<p\leqslant 2$，令 $S_n(a,p)=\sum_{k=1}^{n}a_k^{p}$，$S_n(a+b,p)=\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{p}$，则

$$\frac{S_n(a+b,p)}{S_n(a+b,p-1)}\leqslant\frac{S_n(a,p)}{S_n(a,p-1)}+\frac{S_n(b,p)}{S_n(b,p-1)}.$$

当 $0\leqslant p\leqslant 1$ 时，不等号反向.

提示：利用 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式，详见[2]27 ~ 28.

1985 年，王挽澜、王鹏飞利用拟线性化方法和基本不等式，建立了类似于上述不等式的结果：若 $1<p<2$. 则

(1) $$\sum a_kb_k\leqslant\frac{S_n(a,p)}{S_n(a,p-1)}\cdot\frac{\left[S_n(b,\frac{p}{p-1})\right]^{p-1}}{\left[S_n(b,\frac{p-1}{p-2})\right]^{p-2}};$$

(2) $$\frac{\left[S_n(a+b,\frac{p}{p-1})\right]^{p-1}}{\left[S_n(a+b,\frac{p-1}{p-2})\right]^{p-2}}\leqslant\frac{\left[S_n(a,\frac{p}{p-1})\right]^{p-1}}{\left[S_n(a,\frac{p-1}{p-2})\right]^{p-2}}+\frac{\left[S_n(b,\frac{p}{p-1})\right]^{p-1}}{\left[S_n(b,\frac{p-1}{p-2})\right]^{p-2}};$$

(3) $$\left(\frac{S_n(a+b,p)}{S_n(a+b,\frac{(p-1)^2}{p-2})}\right)^{2-p}\leqslant\frac{S_n(a+b,p)}{S_n(a+b,p-1)}\leqslant\frac{S_n(a,p)}{S_n(a,p-1)}+\frac{S_n(b,p)}{S_n(b,p-1)}.$$

（成都大学学报，1988.1）1991 年，毛经中证明，若 $p\geqslant 2$，则

$$\frac{S_n(a,1)+[S_n(a,p)]^{1/p}}{S_n(a,p)\cdot S_n(a,1-p))}\leqslant\frac{n+n^{1/p}}{n^{2}};$$

若 $p,q\geqslant 2$，则对所有非负实数 c_1,c_2，有

$$\frac{c_1[S_n(a,p)]^{1/p}+c_2[S_n(a,q)]^{1/q}}{S_n(a,p)S_n(a,q)S_n(a,1-p-q)}\leqslant\frac{c_1n^{1/p}+c_2n^{1/q}}{n^3},$$

仅当所有 a_k 相等时等号成立，这是 Malfatti 不等式的推广．作者还推广了 Beckenbach 不等式．([333]1991，36(15)：1194)

135.　**Adamović 不等式**：设 $a_k>0,k=1,\cdots,n$，则

$$\binom{n}{2}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{1}{a_ia_j}\geqslant 4\Big(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{1}{a_i+a_j}\Big)^2,$$

仅当 $a_1=\cdots=a_n$ 时等号成立．([4]290)

136.　**伪平均不等式**：设：(1)　$a_k,b_k,c_k,d_k(k=1,\cdots,n)$ 都是正数；

(2)　$\sum a_k\geqslant\sum c_k$；

(3)　$a_k-c_k=b_k-d_k,k=1,\cdots,n$，则

$$\frac{(\sum a_k)(\sum b_k)}{(\sum c_k)(\sum d_k)}\leqslant\max\left\{\frac{a_1b_1}{c_1d_1},\cdots,\frac{a_nb_n}{c_nd_n}\right\}.$$

当条件(2)中不等号反向时，上述不等式也反向．([305]1961，68：670 ~ 671)

137.　设 n 个正数 a_k 不全相等，则

$f_n(x)=(\sum_{k=1}^n a_k^{x+1})/(\sum_{k=1}^n a_k^x)$ 是 $(-\infty,\infty)$ 上严格递增函数．([348]1989，3：6)

138.　设 $a_k\geqslant 1,1\leqslant k\leqslant n,p>0$，则

$$n(\sum_{k=1}^n a_k^p)\leqslant(\sum_{k=1}^n a_k^{p+1})(\sum_{k=1}^n 1/a_k).$$

证　对于任意实数 p,q，$f(x)=(\sum_{k=1}^n a_k^{x-q})(\sum_{k=1}^n a_k^{p-x})$ 是凸函数，且关于 $x_0=\frac{1}{2}(p+q)$ 对称，所以，在 x 离开 x_0 时，f 递增．特别，取 $q=0$，就得到所需要的不等式

$$f(p)\leqslant f(p+1).$$

139.　设：(1)　$a_k>0,k=1,\cdots,n,\ 0<b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$，

(2)　$(a_{k+1})/(b_{k+1})\leqslant(\sum_{j=1}^k a_j)/(\sum_{j=1}^k b_j)$，$k=1,\cdots,n-1$.

则

$$\sum(a_k/b_k)\geqslant n(\sum a_k)(\sum b_k)^{-1},$$

仅当 $a_k=c\cdot b_k,k=1,\cdots,n$ 时等号成立．当条件(2)中不等号反向时，上式中不等号也反向．

注　条件(2)可换成 $\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\leqslant\frac{a_k}{b_k},k=1,\cdots,n-1$，或 $a_1\geqslant\cdots\geqslant a_n>0$，

证　用数学归纳法，[350]1985，6：17 ~ 19.

140.　(1)　设 $a_k>0,1\leqslant k\leqslant n$，且 $a_{n+1}=a_1$，则

$$\sum_{k=1}^n\frac{a_{k+1}}{a_k}\leqslant\sum_{k=1}^n\Big(\frac{a_k}{a_{k+1}}\Big)^n;\qquad\sum_{k=1}^n\Big(\frac{a_k^{m+1}}{a_k^m}\Big)\geqslant\sum_{k=1}^n a_k.$$

(2)　设 $p, a_k, b_k (1 \leqslant k \leqslant n)$ 均为正数，则

$$\sum (a_k^{p+1}/b_k^p) \geqslant (p+1)\sum a_k - p\sum b_k,$$

仅当 $a_k = b_k$ 时等号成立.

推论 1　Radon 不等式:

$$\sum (a_k^{p+1}/b_k^p) \geqslant (\sum a_k)^{p+1}/(\sum b_k)^p,$$

仅当所有 a_k/b_k 相等时等号成立.

推论 2　$\sum (a_k/b_k^p) \geqslant \sum (p+1-pb_k)a_k$,

仅当 $\forall b_k = 1$ 时等号成立.

推论 3　$\sum (a_k/b_k^p) \geqslant (\sum a_k)^{p+1}/(\sum a_k b_k)^p$

仅当所有 a_k 相等时等号成立.([305]1952,59:687 ~ 688,[348]1989,1:3 ~ 5,1989,8:21)

(3)　设正数 $a_k, b_k (1 \leqslant k \leqslant n)$ 满足 $\sum_{k=1}^n a_k = A, \sum_{k=1}^n b_k = B$，则当 $p > 0, \beta$ 为实数时，有

$$\sum_{k=1}^n \frac{b_k^\beta}{a_k^p} \geqslant n(\frac{n}{A})^p B^{\beta/n};\quad \text{若}\ \beta > p \geqslant 1, \text{则}\quad \sum_{k=1}^n \frac{b_k^\beta}{a_k^p} \geqslant n^{1+p-\beta}\frac{B^\beta}{A^p}.$$

仅当 $a_1 = \cdots = a_n, b_1 = \cdots = b_n$ 时等号成立.

推论　设 $a_k > a_{k+1}, b_k > 0$ 且 $\prod_{k=1}^{n-1} b_k = b_n^{n-1}$，则

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_k}{a_k - a_{k+1}} + \frac{(n-1)^2 b_n}{a_n - a_1} \geqslant 0.$$

([348]1987,8:29)

(4)　[MCM]. 设 $a_k, b_k > 0, \sum_{k=1}^n a_k = A, \sum_{k=1}^n b_k = B$，则

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k b_k}{a_k + b_k} \leqslant \frac{AB}{A+B}.$$

(5)　设 a_k, b_k, p, q 均为正数，则

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{a_k^{p+q}}{b_k^p}\right)^q \geqslant \frac{\left(\sum_{k=1}^n a_k^q\right)^{p+q}}{\left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^p},$$

仅当 $\forall a_k/b_k$ 相等时等号成立.(安振平,[345]1994,6:43)

(6)　[MCM]. 设 $|a_k| \leqslant 1, a_{n+1} = a_1$，则

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+a_k a_{k+1}} \geqslant \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+a_k^2}.$$

(7)　设 $a_k > 0,\ a_{n+1} = a_1,\ p > 1$，则

① $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{a_k^p}{a_k + a_{k+1}} \leqslant \frac{p}{2}\sum_{k=1}^n a_k - \frac{p-1}{2^{\frac{p}{p-1}}}\sum_{k=1}^n (a_k + a_{k+1})^{\frac{1}{p-1}}$;

② $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{a_{k+1}}\right)^{n-1} \geqslant -n+2\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\prod_{k=1}^{n}a_k^{-\frac{1}{n}}\right)$.

([305]114(1)(2007):647)

(8)　设 a_k,λ 为实数,$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$,$\sigma_k=S_n+(\lambda-1)a_k>0$.则当 $\lambda>1$ 或 $\lambda<1-n$ 时,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\sigma_k}\leqslant\frac{n}{n+\lambda-1}.$$

当 $1-n<\lambda<1$ 时,不等号反向.仅当所有 a_k 相等时等号成立.([345]2006(4):58)

(9)　设 x_k 为实数,$a>0$,则

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k}{a+\sum_{j=1}^{k}x_j^2}\right)<\sqrt{\frac{n}{a}}\qquad(42\text{ 届 IMO})$$

$a=1$ 时见[305]116(4)(2009):366.

141.　[MCM].设正数 $a_k,b_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 满足

$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}b_k$,则　$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{a_k+b_k}\geqslant\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}a_k$.

提示:$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{a_k+b_k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k^2}{a_k+b_k}=\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=0$.从而

$$4\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{a_k+b_k}-2\sum_{k=1}^{n}a_k=2\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2+b_k^2}{a_k+b_k}-\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(a_k-b_k)^2}{a_k+b_k}\geqslant0.$$

142.　[IMO].设 $x_k>0$,$x_ky_k-z_k^2>0$,$1\leqslant k\leqslant n$,则

$$\frac{n^3}{\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}y_k\right)-\left(\sum_{k=1}^{n}z_k\right)^2}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_ky_k-z_k^2},$$

仅当 $x_1=\cdots=x_n,y_1=\cdots=y_n,z_1=\cdots=z_n$ 时等号成立.

提示:用数学归纳法,$n=2$ 时的证明见[38]452.

143.　设 $a_k>0$,$1\leqslant k\leqslant n$,$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$,$n>2$,$0<\beta\leqslant1$,则

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{S_n-a_k}{a_k}\right)^{\beta}\geqslant(n-1)^{2\beta}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{S_n-a_k}\right)^{\beta}.$$

仅当 $a_1=\cdots=a_n$ 时等号成立.

证　令

$$A=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{S_n-a_k}{a_k}\right)^{\beta}=(n-1)^{\beta}\sum_{k=1}^{n}a_k^{-\beta}\left(\frac{1}{n-1}\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}a_j\right)^{\beta},$$

由于　$f(x)=-x^{\beta}$ 当 $x>0$ 时为凸函数,所以,由 Jensen 不等式,对于 $k=1,\cdots,n$,有

$$-\left(\frac{1}{n-1}\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}a_j\right)^{\beta}\leqslant-\frac{1}{n-1}\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}a_j^{\beta},\text{即}\quad\left(\frac{1}{n-1}\sum_{j\neq k}^{n}a_j\right)^{\beta}\geqslant\frac{1}{n-1}\sum_{j\neq k}^{n}a_j^{\beta},$$

仅当 $a_1=\cdots=a_{k-1}=a_{k+1}=\cdots=a_n$ 时等号成立.所以

$$A \geqslant (n-1)^{\beta} \sum_{\substack{j \neq k \\ j,k=1}}^{n} \frac{1}{n-1} a_j^{\beta} a_k^{-\beta}$$

仅当 $a_1 = \cdots = a_n$ 时等号成立. 将上式变为

$$A \geqslant (n-1)^{\beta} \sum_{j=1}^{n} a_j^{\beta} (\frac{1}{n-1}) \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} a_k^{-\beta}.$$

又由于 $f(x) = x^{-\beta}$ 当 $x > 0$ 时为凸函数, 再由 Jensen 不等式, 得到

$$A \geqslant (n-1)^{\beta} \sum_{j=1}^{n} a_j^{\beta} (\frac{1}{n-1} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} a_k)^{-\beta} = (n-1)^{\beta} \sum_{j=1}^{n} \frac{(n-1)^{\beta} a_j^{\beta}}{(S_n - a_j)^{\beta}},$$ 所以

$$A \geqslant (n-1)^{2\beta} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{a_j}{S_n - a_j} \right)^{\beta}.$$

仅当 $a_1 = \cdots = a_n$ 时等号成立. 证毕. ([305]1986. 93(7):573)

144.　设 $a_k > 0, 1 \leqslant k \leqslant n, n > 1$, 令 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, 则

(1)　$\sum_{k=1}^{n} \frac{S_n}{S_n - a_k} \geqslant \frac{n^2}{n-1}$;

(2)　$n\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{S_n - a_k}\right)^{-1} \leqslant n - 1 \leqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{S_n - a_k}{a_k}\right)$.

以上均仅当 $a_1 = \cdots = a_n$ 时等号成立.

145.　**Shapiro 不等式**: 设 $0 \leqslant a_k < 1. 1 \leqslant k \leqslant n$.　令 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, 则

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1 - a_k} \geqslant \frac{nS_n}{n - S_n}.$$

仅当所有 a_k 相等时等号成立.

证 1　用 Cauchy 不等式:

$$n^2 = \left[\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{1 - a_k} \right)^{1/2} (1 - a_k)^{1/2} \right]^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - a_k} \right) \left(\sum_{k=1}^{n} (1 - a_k) \right).$$

从而

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1 - a_k} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - a_k} \right) - n \geqslant \frac{n^2}{\sum_{k=1}^{n} (1 - a_k)} - n = \frac{n^2}{n - S_n} - n = \frac{nS_n}{n - S_n}.$$

证 2　不妨设 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$, 则 $1 - a_1 \geqslant 1 - a_2 \geqslant \cdots \geqslant 1 - a_n$. 从而 $\frac{a_1}{1 - a_1} \leqslant \cdots \leqslant \frac{a_n}{1 - a_n}$. 由 Chebyshev 不等式(第 1 章 §3No. 9),

$$\frac{1}{n} S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(1 - a_k)} (1 - a_k) \leqslant \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1 - a_k} \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (1 - a_k) \right)$$

$$= \left(\frac{n - S_n}{n^2} \right) \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1 - a_k} \right).$$

证 3　用幂级数展开式和 C_p 不等式(本章 No. 18):

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{1-a_k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{m=1}^{\infty}a_k^m\right)=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^m\right)\geqslant\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{n^{m-1}}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^m=S_n\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{S_n}{n}\right)^{m-1}$$
$$=\frac{S_n}{1-(S_n/n)}=nS_n/(n-S_n).$$

用证 3 的办法可类似地证明它的下述推广形式：

(1)　设 $a_k\geqslant 0, M>a_k, 1\leqslant k\leqslant n, S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$，则当 $p>0$ 时，成立

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^p}{M-a_k}\geqslant\frac{n^{2-p}S_n^p}{nM-S_n}.$$

特别，取 $M=2S_n, p=1$，得到

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{2S_n-a_k}\geqslant\frac{2n}{2n-1}\quad[\text{MCM}];$$

若取 $M=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n}a_k, m<n$，则

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^p}{S_n-ma_k}\geqslant\frac{n^{2-p}S_n^{p-1}}{n-m};$$

若取 $M=S_n$，则

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^p}{S_n-a_k}\geqslant\frac{n^{2-p}S_n^{p-1}}{n-1};\quad\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{M+a_k}\leqslant\frac{nS_n}{nM+S_n}.$$

(2)　设 $a_k>0, m,n,p\in N, m\geqslant 2p, S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$，则

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^m}{\left(\sum_{j=1}^{n}a_j^p\right)-a_k^p}\geqslant\frac{n^{1+p-m}S_n^{m-p}}{n-1}.$$

(胡道煊，[345]1993，9：43 ～ 45)

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^m}{(S_n-a_k)^p}\geqslant\frac{n^{1+p-m}S_n^{m-p}}{(n-1)^p}$$

(申建春，[345]1993，4：32 ～ 34)

(3)　设 $a_k>0, S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k, S_n(q)=\sum_{k=1}^{n}a_k^q, n\geqslant 3, \prod_{k=1}^{n}a_k=1$，则

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^p}{S_n-a_k}\geqslant\frac{n}{n-1}$$

成立的充要条件是　$p^2+(n-2)p-(n-1)\geqslant 0$；而

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^p}{S_n(q)-a_k^q}\geqslant\frac{n}{n-1}$$

成立的充要条件是　$p^2+(n-2)pq-(n-2)q^2\geqslant 0$.(郭要红，[345]2002.7；19)

(4)　设 $a_k>0$，$p\geqslant 1$，则

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{S_n-a_k}\right)^p\geqslant\frac{n}{(n-1)^p}\qquad(30\text{ 届 IMO 预备题})$$

(5) 设 $a_k \geqslant 0$，令 $S_n(p)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^p$，$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，若 $p\geqslant n$ 或 p 为正整数，则

$$\frac{S_n^p}{n}\leqslant\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k S_{n-k}^p}{k+1}\leqslant\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p S_n^p.$$

左边不等式在 $P\geqslant n-1$ 时仍成立.([305]115(6)(2008),571)

(6) 设 $a_k>0$，$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，$p$ 为实数，$q>0$. 令 $Q_k=pa_k+q(S_n-a_k)>0$. 则当 $q>p$ 时，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{Q_k}\geqslant\frac{n}{p+(n-1)q}.$$

当 $q<p$ 时，不等号反向.(田隆岗，[345]2004(4):48)

取 $p=\frac{1}{S_n}-1$，$q=\frac{1}{S_n}$，$0<a_n<1$ 又归结为 Shapiro 不等式.

(7) 设 $r>1$，$\frac{r-1}{r+1}\leqslant a_k<1$，则

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{1-a_k}\geqslant\frac{nM_n(a,r)}{1-M_n(a,r)}.$$

式中 $M_n(a,r)=\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^r\right)^{\frac{1}{r}}$ 是 $a=(a_1,\cdots,a_n)$ 的 r 阶平均.

(张小明，[351]2008(2):239 ~ 244)

146. (1) 设 $a_k>0$，$a_{k+1}=a_1$，$p>0$，$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\leqslant 1$，则

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k^m+a_k^{-m})^p\geqslant n\left[\left(\frac{n}{S_n}\right)^m+\left(\frac{S_n}{n}\right)^m\right]^p.$$

([351]2009(2),163 ~ 165)

(2) **M-D 不等式(Mitrinovic-Djokovic 不等式)**：设 $a_k>0$，$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，$n\geqslant 2$. 1988 年，陈计证明当 $p>-1$，$S_n\leqslant n-2+2\sqrt{2+\sqrt{5}}$ 时，成立

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_k+\frac{1}{a_k}\right)^p\geqslant n\left(\frac{S_n}{n}+\frac{n}{S_n}\right)^p. \tag{146.1}$$

(宁波大学学报，1988,2(1):115 ~ 117)

当 $p=2$ 时，可用 Cauchy 不等式证明，当 $p\neq 2$ 时，可用拉格朗日乘数法求函数

$$f(a_1,\cdots,a_n;\lambda)=\sum_{k=1}^{n}\left(a_k+\frac{1}{a_k}\right)^p+\lambda S_n$$

的极值，同一年，余红兵等将上述对 S_n 的限制条件减弱为 $S_n\leqslant 2\sqrt{3}$.(中国科技大学学生学报，1988,4(1)11 ~ 12) 李再湘利用 $f(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^p$，当 $p>0$ 与 $x>0$ 时的凸性，证明 $p>0$，$S_n\leqslant 2\sqrt{2+\sqrt{5}}$ 时 MD 不等式成立，而当 $p\geqslant 1$ 时，对 S_n 的限制条件可去掉.([350]1988,6:26 ~ 27)1998 年，庞跃辉利用幂平均的单调性(见第 1 章 §3) 给出了一个

简捷的证明：因为

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\geqslant\frac{n^2}{S_n}，所以，\sum_{k=1}^{n}(a_k+\frac{1}{a_k})=S_n+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\geqslant S_n+\frac{n^2}{S_n}=n(\frac{S_n}{n}+\frac{n}{S_n}).$$

由幂平均的单调性，当 $p\geqslant 1$ 时，成立

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+\frac{1}{a_k})^p\geqslant n(\frac{S_n}{n}+\frac{n}{S_n})^p.$$

且仅当所有 a_k 相等时等号成立.（数学教学研究，1998，2：42）王振与陈计证明. 当 $-1\leqslant p<1$，$S_n\leqslant n-2+\left(\frac{2-p+\sqrt{5-4p}}{1-p}\right)^{1/2}$ 时，MD不等式成立.（[342]1992，7(4)：95～99）

我们问：使(146.1)式成立的关于 p 与 n 的充要条件是什么？

147.　设 $b,a_k>0,S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k,a_{n+1}=a_1$，则 $\sum_{k=1}^{n}\frac{b^{\alpha}}{a_k+a_{k+1}}\geqslant\frac{n^2}{2S_n}$，式中 $\alpha=a_k-a_{k+1}$.（证明见[348]1990，11：34）

148.　设 $a_k\geqslant 0,0\leqslant x_k\leqslant 1,\sum_{k=1}^{n}a_k=1$，则

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{1+x_k}\leqslant\left(1+\prod_{k=1}^{n}x_k^{a_k}\right)^{-1}.$$

仅当 $x_1=\cdots x_n$ 时等号成立.

提示：令 $y_k=\ln x_k$，$f(y)=(1+e^y)^{-1}$，由凹函数的 Jensen 不等式 $\sum_{k=1}^{n}a_kf(y_k)\leqslant f(\sum_{k=1}^{n}a_ky_k)$ 即可得证.

149.　设 $a_k>0,\sum_{k=1}^{n}a_k=1$，则

(1)　$\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}\frac{a_ja_k}{a_j+a_k}\leqslant\frac{n-1}{4}$.

(2)　$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_1+\cdots+a_k}{a_1\cdots a_k}\geqslant k\binom{n}{k}n^{k-1}$.

仅当 $\forall a_k=1/n$ 时，(1)(2) 中等号成立.（[4]282）

150.　[MCM]. 设 $a_k>0,\sum_{k=1}^{n}a_k=1$，则

(1)　$\frac{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k}}{\sqrt{n-1}}\leqslant\sqrt{\frac{n}{n-1}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\sqrt{1-a_k}}$.

证 1　用 Cauchy 不等式和 AGH 不等式；

证 2　用 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x}}$ 在(0,1)上的凸性；

证 3　用逐步调整原理.（[99]4：64～72）

1991 年，叶国祥用排序原理和幂平均不等式，将上式推广为：设 $p\geqslant 1,p\geqslant q>0$，

$n \geqslant 2, S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^{r}$，则

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^p}{(S_n - a_k)^q} \geqslant \frac{1}{(n-1)^q} \sum_{k=1}^{n} a_k^{p-q}.$$

仅当所有 a_k 相等时等号成立. 由上式推出：

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^p}{(\sum_{k=1}^{n} a_k^p) - a_k^p} \geqslant \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} a_k^{p-q}.$$

(证明见[350]1991,6:15 ~ 17)

(2)　$\frac{1}{2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{a_k + a_{k+1}} < 1 \quad (a_{n+1} = a_1)$.

问：$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^p}{a_k + a_{k+1}}$ 当 $p > 0$ 时的最优上下界是什么？

151.　(1)　设 $a_k, x > 0$，令

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_1 a_2 \cdots a_{k-1}}{\prod_{j=1}^{k} (x + a_j)}$$，其中第一项理解为 $\frac{1}{x + a_1}$，则 $S_n(x) < \frac{1}{x}$.

(证明见[305]98(1)1991,54 ~ 55)

(2)　设 $0 \leqslant x_k < 1$，$a_k > 0$，$\sum_{k=1}^{n} a_k = 1$，$a, b > 0$，则

$$C_1 \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(1 - x_k^a)} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1 - x_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1 + x_k}\right) \leqslant C_2 \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1 - x_k^b}\right)$$

成立的充要条件是 $C_1 \leqslant \min\left\{1, \frac{a}{2}\right\}$，$C_2 \geqslant \max\left\{1, (1 - \min_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{a_k}{2}) b\right\}$.

(Alzer, H. 等,[302]2006 Article 21572)

(3)　令 $S_n(a) = (\sum_{k=1}^{n} a_k^p) \sum_{k=1}^{n} (\lambda + a_k)^{-p} \quad \lambda > 0$

江永明证明：若 $p \leqslant 0$ 或 $p \geqslant 1$，则 $S_n(a) \geqslant n^2 (\lambda n + 1)^{-p}$；

若 $0 < p \leqslant \frac{3}{5}$，$1 \leqslant \lambda \leqslant (n - \frac{1}{n})$，则不等号反向. 仅当 $\forall x_k = \frac{1}{n}$ 时等号成立.

([351]12(1)(2005),29 ~ 31)

我们问：$\frac{3}{5} < p < 1$ 时，$S_n(a)$ 的上、下界是多少？

(4)　设 $p > 0$. 记 $S_n(a, p, \lambda) = (\sum_{k=1}^{n} a_k^p) \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + (1 + \lambda a_k)^p}\right)$，已知

① $S_n(a, \frac{1}{2}, 2) \leqslant \frac{n^2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+2}}$,

② $S_n(a, \frac{1}{2}, 3) \leqslant \frac{n^2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+3}}$,

③　当 $0 < \lambda \leqslant 3.563518020n$, $n \geqslant 2$ 时, $S_n(a, \frac{1}{2}, \lambda) \leqslant \frac{n^2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+\lambda}}$.

([305]2008(3);[351]2006(3):339 ~ 341;2008(4):465 ~ 466)

我们问:在一般情形下, $S_n(a, p, \lambda)$ 的上、下界是什么?

[351]2008(2):237 ~ 238 提出了类似问题的 8 个猜想.

152.　设 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant 0, b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n \geqslant 0, k_1, \cdots, k_n$ 与 $j_1, \cdots, j_n$ 分别是 $1, \cdots, n$ 的任意两个排列,则

$$\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} \frac{a_{k_r} b_{j_s}}{r+s} \leqslant \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} \frac{a_r b_s}{r+s}.$$

提示:令 $d_r = \sum_{s=1}^{n} \frac{b_{j_s}}{r+s}, r = 1, \cdots, n$,则 $d_1 \geqslant \cdots \geqslant d_n$,由排序不等式,有 $\sum d_r a_{k_r} \leqslant \sum d_r a_r$,再注意到 $d_r = \sum (b_{j_s} \cdot \frac{1}{r+s}) \leqslant \sum \frac{b_r}{r+s}$,即可得证.

153.　**Laplace 不等式**:设 $a_n > \cdots > a_1 > 0$, $b_n > \cdots > b_1 > 0$, $n > 1$,则

$$\frac{\sum a_k^2}{\sum a_k} < \frac{\sum a_k^2 b_k}{\sum a_k b_k}.$$

提示:用数学归纳法.

154.　1967 年,Marshall 等证明:若 $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n > 0, a_1/b_1 \geqslant a_2/b_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n/b_n > 0, \lambda_k > 0\ (1 \leqslant k \leqslant n)$,则

$$F(r) = \left[\frac{\sum \lambda_k a_k^r}{\sum \lambda_k b_k^r}\right]^{1/r}$$

关于 r 递增,特别,有 $(\prod a_k/b_k)^{1/n} \leqslant (\sum a_k)/(\sum b_k)$,仅当所有的比 a_k/b_k 相等时等号成立. 1987 年,王挽澜等证明,在上述条件下, $F_n(a)/F_n(b)$ 关于 n 递增,即

$$F_{n-1}(a)/F_{n-1}(b) \leqslant F_n(a)/F_n(b).$$

仅当所有 a_k/b_k 相等时等号成立. 式中

$$F_r(x) = \prod (\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r} x_{k_j})^{\alpha}, \alpha = \binom{n}{r}^{-1},$$ $\prod$ 号对 $1 \leqslant k_1 < \cdots < k_r \leqslant n\ (1 \leqslant r \leqslant n)$ 求积,特别地,对于 $a_k \geqslant 0\ (1 \leqslant k \leqslant n)$,有 $F_{n-1}(a) \leqslant F_n(a)$,

仅当所有 a_k 相等时等号成立.(成都科技大学学报,1988,6:83 ~ 88)

155.　令 $H_r(x) = \sum_{k_1+k_2=r} x_1^{k_1} x_2^{k_2}, k_1, k_2 \geqslant 0, r \geqslant 1$. 1987 年,王挽澜等证明:当 $b_1 \geqslant b_2 > 0, a_1/b_1 \geqslant a_2/b_2 \geqslant 0$ 时, $\left(\frac{H_r(a)}{H_r(b)}\right)^{1/r}$ 关于 r 递增,仅当 $a_1/b_1 = a_2/b_2$ 时等号成立. 特别地,当 $0 \leqslant a_1, a_2 \leqslant 1/2$ 时, $(H_r(a)/H_r(1-a))^{1/r}$ 关于 r 递增,仅当 $a_1 = a_2$ 时等号成立. 而当 $b_1 = b_2 = 1$ 时,即为 Detemple-Robertson 不等式.(成都科技大学学报,1988,6:83 ~ 88)

156.　**循环不等式**:设 $f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_k + x_{k+1}}, g_m(x_1, \cdots, x_n) =$

$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{x_{k+1}+\cdots+x_{k+m}}$,式中 $x_k\geqslant 0,k=1,\cdots,n,(n\geqslant 3),x_{n+j}=x_j,j=1,\cdots,m$,所有分母均大于 0. $g_m(x_1,\cdots,x_n)$ 称为循环和,$f(x_1,\cdots,x_n)$ 称为修正循环和(modified cyclic sum),则

(1) [IMO] $1<f(x_1,\cdots,x_n)<n-1$.

(2) $g_m(x_1,\cdots,x_n)\geqslant\frac{1}{m}\left[\frac{n+m-1}{m}\right]\geqslant\frac{n}{m^2},(x_k>0)$.

特别,当 $m=2$ 时,就是一道数学奥林匹克试题:$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{x_{k+1}+x_{k+2}}>\frac{n}{4}$,可改进为 $S_n>\frac{5n}{12}$. 但是,若将下界改为$\frac{n}{2}$,就是 Shapiro 在 1954 年提出的著名猜想:

当 $n\geqslant 3$ 时,$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{x_{k+1}+x_{k+2}}\geqslant\frac{n}{2}$,仅当所有 x_k 相等时等号成立,其中所有 $x_k\geqslant 0$ 且 $x_k+x_{k+1}>0,x_{n+j}=x_j,j=1,2$.

经过许多学者几十年的努力,到 20 世纪 70 年代,才证明上式对于 $n\leqslant 12$ 成立而对于所有不小于 14 的偶数和不小于 25 的奇数不成立. Troesch, B. A. 在 1985 年证明上式在 $n=13$ 时成立,在 1989 年又证明上式对于满足 $15\leqslant n\leqslant 23$ 的奇数也成立. 才将问题全部解决. 1971 年,Drinfeld 还证明$\inf_n\{S_n/n\}=0.4945668$. (Math. comp. 1989,53(188):657 ~ 664. Math. Notes. 1971,9:68 ~ 71,中学数学教学 1992,3,4)

(3) 若 $n\mid m+2$ 或 $2m$ 或 $2m+1$ 或 $2m+2$,从而当

$\sin\frac{r}{n}\pi\geqslant\sin(2m+1)\frac{r}{n}\pi,r=1,\cdots,[n/2]$ 时,有

$g_m(x_1,\cdots,x_n)\geqslant\frac{n}{m}$,以及$(\sum_{k=1}^{n}x_k)^2\geqslant\frac{n}{m}\sum_{k=1}^{n}x_k(x_{k+1}+\cdots+x_{k+m})$.

(4) $\frac{x_1+\cdots+x_k}{x_{k+1}+\cdots+x_n}+\frac{x_2+\cdots+x_{k+1}}{x_{k+2}+\cdots+x_1}+\cdots+\frac{x_n+x_1+\cdots x_{k-1}}{x_k+\cdots+x_{n-1}}\geqslant\frac{nk}{n-k}$.

$(1\leqslant k<n)$,其中 $x_k>0,k=1,\cdots,n$.

(5) 设 $p,q,x_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 均为正数,则$\sum(x_k^{p+q}/x_{k+1}^q)\geqslant\sum x_k^p$.

提示:用 Hölder 不等式,见[348]1989,9:9.

特别取 $p=q=1$,即得 1984 年全国数学联赛第二试的试题:

$\sum(x_k^2/x_{k+1})\geqslant\sum x_k$. 不等式左边分母$\{x_{k+1}\}$可换成它的任一排列.

(6) $\sum x_k^{p+q}/(x_k^{p+q}+x_{k+1}^p x_{k+2}^q)\leqslant n-1$, p,q 为任意实数.

(7) $\sum\left(\frac{x_k^{n-1}}{x_k^{n-1}+\prod_{j\neq k}x_j}\right)^{1/2}>1\quad(n\geqslant 2)$.

(8) $\sum(x_k x_{k+1}/x_{k+2})\geqslant\sum x_k$.

(9) $\frac{(\sum x_k)^2}{2\sum(x_k^2)}\leqslant\sum\frac{x_k}{x_{k+1}+x_{k+2}}$.

以上(5) ~ (9) 中所有 x_k 均为正数. 且均为[MCM].

(10)　[MCM]. 设 $\alpha = \min\{x_1, \cdots, x_n\}$，则

$$\sum(1+x_k)/(1+x_{k+1}) \leqslant n + (1+\alpha)^{-2}\sum(x_k-\alpha)^2.$$

仅当所有 x_k 相等时等号成立. ([348]1992. 4)

(11)　设 $x_k > 0$，则

$$\sum x_k^{x_{k+1}} > 1 + (n-2)\min\{x_1^{x_2}, x_2^{x_3}, \cdots, x_{n-1}^{x_n}, x_n^{x_1}\}.$$

(Cater, F. S. , [305]1980, 87(4): 302 ~ 303)

(12)　1996 年，杨定华提出猜想：当 $x_k > 0$ 时，证明或否定：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_{k+2}^m}{x_k+x_{k+1}} \geqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^m}{x_k+x_{k+1}} \quad (m \in N).$$

仅当所有 x_k 相等时等号成立. (数学教学通讯，1996. 2)

(13)　令 $S_n = \dfrac{x_1}{x_1+\cdots+x_{n-1}} + \dfrac{x_2}{x_2+x_3+\cdots+x_n} + \cdots + \dfrac{x_n}{x_n+x_{n-2}+\cdots+x_1}$，

则当 $n \geqslant 4$ 时，$1 < S_n < n-2$.

157. **Hilbert 不等式**：设 $a_k \geqslant 0, b_k \geqslant 0, k = 0, 1, \cdots, n$, $\|a\|_p = \left(\sum\limits_{k=0}^{n}|a_k|^p\right)^{1/p}$，$1 \leqslant p < \infty$，则

(1)　$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{a_j a_k}{j+k+1} \leqslant \pi\sum_{k=0}^{n}a_k^2 = \pi\|a\|_2^2;$$

(2)　$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{a_j a_k}{j+k+1} \leqslant \pi\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(j+k)!}{j!k!}\cdot\frac{a_j a_k}{2^{j+k+1}};$$

(3)　$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{a_j b_k}{2j+2k+1} \leqslant (n+1)\sin\frac{\pi}{2(n+1)}\|a\|_2\|b\|_2.$$

注　Hilbert 不等式(1) 可求用函数的极值方法证明. ([1]308 ~ 309)，而且(1) 中的常数 π 还可以减小. ([4]Ex3 · 9 · 36) 此外，我们还可以用复变函数的积分理论得到一个简捷的证明：设 C 是由单位圆、实轴从正数 ε 到 1 的两边沿以及圆心为原点、半径为 $\varepsilon(0 < \varepsilon < 1)$ 的小圆组成，$P_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n}a_k z^k$ 为复多项式，而 $P_n(x)$ 是实多项式，则由柯西积分定理，有

$$\begin{aligned}0 = \int_C \log z[P_n(z)]^2\mathrm{d}z &= \int_\varepsilon^1 \log x[P_n(x)]^2\mathrm{d}x \\ &+ \int_0^{2\pi} i\theta[P_n(e^{i\theta})]^2 ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta - \int_\varepsilon^1(\log x + 2\pi i)[P_n(x)]^2\mathrm{d}x \\ &- \int_0^{2\pi}(i\theta + \log\varepsilon)[P_n(\varepsilon e^{i\theta})]^2 i\varepsilon e^{i\theta}\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

令 $\varepsilon \to 0$，得到

$$2\pi\int_0^1 P_n^2(x)\mathrm{d}x = \left|\int_0^{2\pi}\theta P_n^2(e^{i\theta})ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta\right| \leqslant \int_0^{2\pi}\theta P_n(e^{i\theta})P_n(e^{-i\theta})\mathrm{d}\theta$$

$$= \sum a_k^2 \int_0^{2\pi} \theta \mathrm{d}\theta + \sum_{j \neq k} a_j a_k \int_0^{2\pi} \theta \cos(j-k)\theta \mathrm{d}\theta = 2\pi^2 \sum a_k^2.$$

再注意到$\sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_j a_k}{j+k+1} = \int_0^1 [P_n(x)]^2 \mathrm{d}x$,不等式(1) 即可得证.

(4) $\sum_{\substack{j,k=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{a_j b_k}{j-k} \leqslant \pi \| a \|_2 \| b \|_2$.

(5) 1996 年,胡克证明:设 $0 < \lambda < 1$, $\forall a_k$ 为复数,则

$$\frac{\lambda}{\lambda\pi - \sin(\lambda\pi)} \left| \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+\lambda} \sin(\lambda\pi) - \pi a_0 \right|^2 + (\sin(\lambda\pi)) \left(\sum_{m,k=0}^{n} \frac{a_m \bar{a}_k}{m+k+\lambda} \right) \leqslant \pi \| a \|_2^2.$$

证 令 $f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k \sin(k + \frac{\lambda}{2})x$. 由 Cauchy 不等式,有

$$\frac{1}{2} \left| \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+\lambda} \sin(\lambda\pi) - \pi a_0 \right| = \left| \int_0^{\pi} f(x) \sin(\frac{\lambda x}{2}) \mathrm{d}x \right| \leqslant \left\{ \int_0^{\pi} (\sin \frac{\lambda x}{2})^2 \mathrm{d}x \right\}^{1/2} \left\{ \int_0^{\pi} | f |^2 \right\}^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \pi - \frac{\sin\lambda\pi}{\lambda} \right\}^{1/2} \left\{ \pi \sum_{k=0}^{n} | a_k |^2 - (\sin\lambda\pi) \sum_{m,k=0}^{n} \frac{a_m \bar{a}_k}{m+k+\lambda} \right\}^{1/2}.$$

([339]1996,4:521 ~ 525;另见[338]1998,18(2):192 ~ 199;[159]49 ~ 50)

(6) 1998 年,印度 Pachpatte,B. G. 对 Hilbert 不等式作了另一种形式的推广:设 p, $q \geqslant 1$, $a_k, b_j \geqslant 0$, $A_m = \sum_{k=1}^{m} a_k$, $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$,则

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{A_k^p B_j^q}{k+j} \leqslant \frac{1}{2} pq \sqrt{mn} \left\{ \sum_{k=1}^{m} (m-k+1)(A_k^{p-1} a_k)^2 \right\}^{1/2}$$

$$\times \left\{ \sum_{j=1}^{n} (n-j+1)(B_j^{q-1} b_j)^2 \right\}^{1/2}.$$ ([301]1998,226:166 ~ 179)

随后,赵长键和Debnath对上式作了进一步的改进和推广.([340]2000,20(4):413 ~ 416 和[301]2001,262:411 ~ 418)

(7) [107] 第二卷 866 ~ 867 指出:

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{a_k b_j}{k+j} \leqslant c(p,q) \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q \right)^{1/q},$$

$(1/p) + (1/q) = 1$, $1 < p < \infty$,式中常数 $c(p,q)$ 的渐近性态问题至今(1988) 尚未解决,只知道 $c(2,2) = \pi - \frac{1}{2}\pi^5 (\ln n)^{-2} + O(\ln\ln(n(\ln n)^{-3}))$, $(n \to \infty)$. ([376]1962,68:70 ~ 73)

(8) 2000 年,匡继昌 —Debnath,L. 给出了一般形式的有限和的估计,作为特例,得出

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \frac{a_k b_j}{k+j+1} < \left\{ \sum_{k=0}^{n} 2(\arctan \sqrt{\frac{2n+2}{2k+1}}) a_k^2 \right\}^{1/2} \times \left\{ \sum_{k=0}^{n} 2(\arctan \sqrt{\frac{2n+2}{2k+1}}) b_k^2 \right\}^{1/2}$$

$$< 2\arctan \sqrt{2(n+1)} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right)^{1/2}.$$

([301]2000,245(1):248 ~ 265)

(9)　2008 年，褚玉明、张小明证明：设 $a_k > 0$，则

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_k a_j}{k+j} \leqslant \pi\sum_{k=1}^{n}a_k^2 - \min_{1\leqslant k\leqslant n}\{ka_k^2\}\left\{\pi\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}-\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{kj}(k+j)}\right\}$$

$$\leqslant \pi\sum_{k=1}^{n}a_k^2 - \left(\pi-\frac{1}{2}\right)\min_{1\leqslant k\leqslant n}\{ka_k^2\}.$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{k+j}\right)^2 \leqslant \pi^2\sum_{k=1}^{n}a_k^2 - \min_{1\leqslant k\leqslant n}\{ka_k^2\}\left\{\pi^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{j}(k+j)}\right)^2\right\}$$

$$\leqslant \pi^2\sum_{k=1}^{n}a_k^2 - \left(\pi^2-\frac{1}{4}\right)\min_{1\leqslant k\leqslant n}\{ka_k^2\}.$$

作者们提出猜想：将上述 min 换成 max 后，不等号能否反向？

([351]2008(1):35 ~ 43,53 ~ 64)

(10)　2009 年，张小明等利用最值单调定理证明：设 $a_k > 0$，$p > 1$，则

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{a_k}{k+j}\right)^p < \left(\frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{p})}\right)^p\left\{\sum_{k=1}^{n}a_k^p - \frac{4n}{2n+1}B_n\right\},$$

式中 $B_n = \min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{(k-\frac{1}{2})a_k^p\right\}$. ([164]177 ~ 185)

Hilbert 不等式的无穷级数和积分形式分别见第 11 章 § 2 和第 13 章.

158.　设 $a = (a_1,\cdots,a_n)$ 为正数序列，它的算术平均 $A_n = A_n(a) \leqslant 1$. 调和平均 $H_n = H_n(a) > 1$，则对所有实数 p，有

$$\prod_{k=1}^{n}(a_k^p + \frac{1}{a_k^p}) \geqslant \begin{cases}(A_n^p + A_n^{-p})^n,\\(H_n^p + H_n^{-p})^n,\end{cases} \tag{158.1}$$

(数学教学通讯，1991，5:28)

记　$a^p + a^{-p} = (a_1^p + \frac{1}{a_1^p},\cdots,a_n^p + \frac{1}{a_n^p})$. 则(158.1) 式可改记为

$$G_n(a^p + a^{-p}) \geqslant A_n^p + A_n^{-p} \text{ 和 } G_n(a^p + a^{-p}) \geqslant H_n^p + H_n^{-p}.$$

当 $p = 1, S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}a_k \leqslant n+3$ 时，李文志等证明

$$G_n(a + a^{-1}) \geqslant A_n + A_n^{-1}. \tag{158.2}$$

而当 $n = 2$ 时，桂香分证明，使(158.2) 式成立的充要条件是 $0 < S_2 \leqslant 2\sqrt{2+\sqrt{5}}$([345]1987，10:49)；当 $n = 3$ 时，陈计证明 $S_3 = 3/2$ 或 6 时，(158.2) 式成立([348]1988，12:36，14). 当 $n \geqslant 3$，王振证明，当 $S_n \leqslant n(n+\sqrt{4n-3})$ 时，(158.2) 式成立. ([348]1995.5)

作者在本书第二版中提出，当 $n \geqslant 3$ 时，使(158.2) 式成立，S_n 应满足什么样的充要条件？(作为 100 个未解决问题中的 34)，该问题于 1994 年由续铁权解决，解决该问题的基本思路是：考虑函数

$$f(x) = n\ln(A_n - x + \frac{1}{A_n - x}) + \ln(A_n + nx + \frac{1}{A_n + nx})$$

当 A_n 取什么值时在 $x = 0$ 取最小值，再证明 $\forall n \geqslant 2$，存在两个正数 T_n, L_n 满足

$$1 \leqslant T_n < L_n < \sqrt{2+\sqrt{5}}.$$

于是(158.2) 式成立的充要条件是 $A_n \leqslant L_{n-1}$.(青岛教育学院学报,1994,3;38 ~ 44)

159. 设 $\alpha,\beta,p,a_k(1 \leqslant k \leqslant n)$ 均为正数,则

$$\prod_{k=1}^{n}(\alpha a_k^p + \beta a_k^{-p}) \geqslant (n^2+1)^n \left(\frac{\alpha^n \beta^{n^3} S_n^q}{n^{2n^3+q}}\right)^{A_n},$$

特别地,

$$\prod_{k=1}^{n}(a_k + a_k^{-1}) \geqslant (n+\frac{1}{n})^n S_n^{B_n},$$

式中 $q = np - n^3 p$, $A_n = \dfrac{1}{n^2+1}$, $B_n = \dfrac{n(1-n^2)}{n^2+1}$. 类似结果见本章 No. 74.

160. **王挽澜不等式**:设 $a = (a_1,\cdots,a_n)$ 为正数序列,$G_n(a)$ 为 a 的几何平均.

(1) 设 $0 < p < 1$,则

$$\left[\prod_{k=1}^{n}(a_k+1)^p - 1\right]^{1/n} \leqslant (G_n(a)+1)^p - 1,$$

当 $p > 1$ 时不等号反向,仅当所有 a_k 相等时等号成立;

(2) 设 $p > 0$,则

$$(G_n(a)+1)^p + 1 \leqslant \left\{\prod_{k=1}^{n}[(a_k+1)^p + 1]\right\}^{1/n},$$

当 $p < 0, 0 < a_k < \dfrac{1}{|p|}$ 时不等号反向. 仅当所有 a_k 相等时等号成立.

(宁波大学学报,1995,8(3):27 ~ 29)

161. 设 $a_k \geqslant 0$, 令 $S_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k$,则

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}S_k^2 - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=0}^{n}S_k\right)^2 \leqslant \frac{4}{45}(S_n - S_0)^2.$$

([22]297)

162. 1998 年,Starc 证明:设 $a_k > 0$,则

$$\sum_{k=1}^{n}a_k(a_k+1) \geqslant \log(3^n \prod_{k=1}^{n}a_k).$$

2001 年,匡继昌与 Starc 将上式中的系数 3 改进为 $2e^{\frac{3}{4}} = 4.22\cdots$(J. Math. Info. Quarterly11(4)(2001),176 ~ 177)

163. 2001 年,匡继昌和 Starc 证明:设 $a,a_k > 0$,则

$$a\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right) + b\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right) + nc \geqslant \log\left[\left(\frac{b+\sqrt{b^2+8a}}{2}\right)^n \left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)\right] + \frac{n[b\sqrt{b^2+8a} - b^2 + 4a(1+2c)]}{8a},$$

仅当 $\forall a_k = \dfrac{-b+\sqrt{b^2+8a}}{4a}$ 时等号成立. 由此推出:

(1) $\sum_{k=1}^{n}a_k^2+\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}\log a_k\geqslant n\left(\log 2+\frac{3}{4}\right)$;

(2) $\sum_{k=1}^{n}a_k^2-\sum_{k=1}^{n}\log a_k\geqslant \frac{n}{2}(\log 2+1)$.

(J. Math. Info. Quarterly11(4)(2001),176 ~ 177)

164.　设 x_k 为实数,$p_k\geqslant 0$, $\sum_{k=1}^{n}p_k=1$, 记

$$S_m=\sum_{k=1}^{n}p_kx_k^m-\left(\sum_{k=1}^{n}p_kx_k\right)^m,$$

则

$$S_{2m}S_{2m+2}\geqslant\left(1-\frac{1}{m(2m+1)}\right)S_{2m+1}^2.$$

证:令　$f(x,t)=\frac{t^2x^{2m+2}}{(2m+2)(2m+1)}+\frac{2tx^{2m+1}}{2m(2m+1)}+\frac{x^{2m}}{2m(2m-1)}$,

因为 $f''_{x^2}\geqslant 0$,所以 $\forall t$, f 是 x 的凸函数. 用 Jensen 不等式,

$$\sum_{k=1}^{n}p_kf(x_k,t)-f\left(\sum_{k=1}^{n}p_kx_k,t\right)\geqslant 0.$$

由此即可得证.

165.　离散 Steffensen 不等式:设 $x_1\geqslant\cdots\geqslant x_n\geqslant 0$, $0\leqslant y_k\leqslant 1$,且存在 m_1,m_2,使得

$$1\leqslant m_1\leqslant\sum_{k=1}^{n}y_k\leqslant m_2,$$

则

$$\sum_{k=n-m_1+1}^{n}x_k\leqslant\sum_{k=n-m_1+1}^{n}x_k+\left(\sum_{k=1}^{n}y_k-m_1\right)x_n\leqslant\sum_{k=1}^{n}x_ny_n$$
$$\leqslant\sum_{k=1}^{m_2}x_k-\left(m_2-\sum_{k=1}^{n}y_k\right)x_n\leqslant\sum_{k=1}^{m_2}x_k.$$

(石焕南,吴善和,[351]2005(2):118 ~ 121)

166.　设 $x_k>0$, $p\geqslant 1$,则

$$\left(\frac{e}{p}\right)^p\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^p\right)\leqslant\exp\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right),$$

仅当某个 $x_k=p$,而其余均为 0 时等号成立.(石焕南,[351]2007(4):395 ~ 397)

167.　设 $x_k\geqslant 0$,令 $S_n=\sum_{k=1}^{n}x_k$,则

$$\frac{n-1}{n^3}S_n^4\leqslant\sum_{1\leqslant k<j\leqslant n}x_kx_j(x_k^2+y_j^2)\leqslant\frac{1}{8}S_n^4.$$

右边不等式是 40 届 IMO.([351]2007(4):474 ~ 475)

168.　设 $a_k,q>0$, $c>1$,则

$$\prod_{k=1}^{n}(a_k^{n+q}-a_k^q+c)\geqslant\left(\frac{c-1}{n-1}\right)^{n-1}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^n.$$

当 $n=c=3$，$q=2$ 时即为 2004 美国 IMO.(蒋明斌,[351]2006(4):441 ~ 443)

169.　设 $x_k, q_k>0$,令 $Q=\sum_{k=1}^{n} q_k$，$A=\frac{1}{Q}\sum_{k=1}^{n} q_k x_k$，$G=\left(\prod_{k=1}^{n} x_k^{q_k}\right)^{\frac{1}{Q}}$,则

$$e^G-1\leqslant\left\{\prod_{k=1}^{n}(e^{x_k}-1)^{q_k}\right\}^{\frac{1}{Q}}\leqslant(e^G-1)e^{A-G}.$$

([305]2006,113(3):268)

170.　设 $a_k>0$,令 $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$,则

$$\left(\frac{S_n}{n}\right)^{S_n}\leqslant\prod_{k=1}^{n} a_k^{a_k}\leqslant S_n^{S_n}.$$

(李明,[351]2009(1):102 ~ 103)

171.　设 $a_k>0$，$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$，$b_k=S_n-a_k$，$\sigma_n=\sum_{k=1}^{n} b_k$,则

$$\frac{\prod_{k=1}^{n} a_k}{\prod_{k=1}^{n}(S_n-a_k)}\leqslant\frac{\prod_{k=1}^{n} b_k}{\prod_{k=1}^{n}(\sigma_n-b_k)}.$$

([305]2008,115(3) 问题 11252)

172.　设 $a_k>0$，$n\geqslant 3$,则用数学归纳法可以证明：

$$\sum_{1\leqslant k<j\leqslant n}\frac{1}{(a_k+a_j)^2}\geqslant\frac{\binom{n}{2}^2}{4\sum_{1\leqslant k<j\leqslant n} a_k a_j}.$$

(汪长银,[351]2006(4):449 ~ 450)

173.　设 $a_k>0$，$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$,若 $1<S_n\leqslant 2$,则

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{a_k^2+1}\right)^2\leqslant\frac{n^3 S_n^2}{(S_n^2+n^2)^2}.$$

$n=4$，$S_n=2$ 时即为[381]1990 第 1528 号问题.(乾州人,[351]2006(4):455 ~ 457)

作者提出:要使上述不等式成立,S_n 的最佳范围是什么?

174.　设 $0<a_k<1$，$p>0$,记 $f(p)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1-a_k^p}$,则 $f(p)\geqslant\frac{n}{1-\left(\prod_{k=1}^{n} a_k^{\frac{p}{n}}\right)}$.

特别

$$f(n)\geqslant\frac{n}{1-\prod_{k=1}^{n} a_k}.$$

([351]2008(2):174 ~ 176)

175.　设 $a_k>0$，$\sum_{k=1}^{n} a_k=1$，p,q,λ,为实数,记

$$f_n(p,q,\lambda)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\lambda a_k^p}\right)^q.$$

(1)　若 $0<\lambda\leqslant\frac{2^p}{3}$,则当 $0<q<1$ 时,$f_n(p,q,\lambda)\leqslant n\left(\frac{n^p}{n^p+\lambda}\right)^q$;

当 $q\geqslant 1$ 时,$f_n(p,q,\lambda)\geqslant\frac{n}{(n^p+\lambda)^q}$;

(2)　设 $0<\lambda\leqslant 2$,则若 $0<q<1$,则 $f_n(p,q,\lambda)\leqslant n\left(\frac{1}{n(\lambda+1)}\right)^q$;

若 $q\geqslant 1$,则 $f_n(p,q,\lambda)\geqslant\left\{\frac{1}{n}\left(n-1+\frac{1}{\lambda+1}\right)\right\}^q$;

(3)　设 $q=1$,$p\geqslant 2$,$0<\lambda<\min\{2,\frac{2^p}{3}\}$,则

$$n-1+\frac{1}{\lambda+1}<f_n(p,1,\lambda)\leqslant\frac{n^{p+1}}{n^p+\lambda}.$$

([351]2005(1)105 ~ 107;(2):147 ~ 149)

注　当 a_k,$\lambda>0$,$\prod_{k=1}^{n}a_k=1$ 时,$f(1,1,\lambda)$ 和 $f_n(1,q,\lambda)$ 的上下界估计见中学教研2003(9):24 ~ 27 和[351]2005(4):399 ~ 404.

我们问:在 $\prod_{k=1}^{n}a_k=1$ 的条件,$f_n(p,q,\lambda)$ 的上下界是多少?

176.　设 $a_k>0$,记 $a=(a_1,\cdots,a_n)$,$a^{-1}=(a_1^{-1},\cdots,a_n^{-1})$.

$$G_n(a)=\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^{\frac{1}{n}},\qquad f_n(p)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+a_k)^p}.$$

(1)　蒋明斌证明:设 $0<p\leqslant n-1$,$G_n(a)\geqslant n^{\frac{1}{p}}-1$ 时,$f_n(p)\geqslant\frac{n}{(1+G_n(a))^p}$,并猜想 $0<G_n(a)\leqslant\left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{1}{p}}-1$ 时,不等号反向;但作者已证明这时 $f_n(p)>1$. 作者还猜想:$G_n(a)>\left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{1}{p}}-1$ 时,$f_n<n-1$. (已知 $p=\frac{1}{2}$ 时成立).

([351]2004(3):321 ~ 324;2008(2):206 ~ 209)

(2)　若 $a_k\geqslant 1$,则

$$\frac{n}{1+G_n(a)}\leqslant f_n(1)<n-\frac{n^{n+1}}{n^{n+1}+[G_n(\frac{1}{a})]^n};$$

若 $0<a_k\leqslant 1$,则

$$\frac{n^{n+1}}{n^{n+1}+G_n(a)^n}<f_n(1)\leqslant\frac{n}{1+G_n(a)}.$$

(邬天泉,[351]2003(6):14 ~ 18)

177.　设 $a_k>0$,$\sum_{k=1}^{n}a_k=1$,令 $g(p,q,\lambda)=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^q}{1+\lambda a_k^p}$.

2007 年,蒋明斌证明:设 $0<\lambda<n^2$.

则当 $a_k \geqslant \frac{2n}{n^2-\lambda}$ 时，$g(2,1,\lambda) \leqslant \frac{n^2}{n^2+\lambda}$.

当 $a_k \leqslant \frac{n^2-\lambda}{2n\lambda}$ 时，$g(2,0,\lambda)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\lambda a_k^2} \leqslant \frac{n^3}{n^2+\lambda}$.（[351]2007(2):176～178）

我们要问：在一般情况下，$g(p,q,\lambda)$ 的上下界是什么？

178.　设 $a_k>0$，$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$，记 $f(p,q,\lambda_k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^p}{\lambda_1 a_k^q+\lambda_2(S_n-a_k)}$.

(1)　设 $0<\lambda_1<\lambda_2$，则 $f(1,1,\lambda_k) \geqslant \frac{n}{\lambda_1+(n-1)\lambda_2}$，

当 $\lambda_1>\lambda_2$ 时，不等号反向．仅当所有 x_k 相等时等号成立．（褚小光[351]2008(1):26～29）

(2)　2008年，蒋明斌证明：设 $\prod_{k=1}^{n}a_k \geqslant 1$，若 $p \geqslant 1$，则

$$f(p,p,1)=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^p}{a_k^p+(S_n-a_k)} \geqslant 1;$$

若 $\frac{1}{1-n}<p<1$，则不等号反向．作者还提出两个猜想：

①　设 $\prod_{k=1}^{n}a_k=1$，若 $p \leqslant \frac{1+n}{1-n}$，则 $f(p,p,1) \geqslant 1$，

②　设 $\prod_{k=1}^{n}a_k \geqslant 1$，若 $\frac{1+n}{1-n}<p<-\left(\frac{1}{n-1}\right)$，则 $f(p,p,1) \leqslant 1$.

（[351]2008(2):147～150）

我们可以进一步问：在一般情况下，$f(p,q,\lambda_k)$ 的最佳上下界是多少？

179.　设 $a_k>0$，$\sum_{k=1}^{n}a_k=1$，$f(p)=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)\sum_{k=1}^{n}(1+a_k)^{-p}$，则

(1)　$n-1+\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant \frac{n^2}{\sqrt{n+1}}$;　　(2)　$f\left(\frac{1}{m}\right) \geqslant n-1+2^{-\frac{1}{m}}$.

（舒金根，[351]2004(1):39～41）

我们问：对于一般的 p，$f(p)$ 的最佳上下界是多少？

180.　设 $a_k>0$，$G_n=\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^{\frac{1}{n}}$，$p$ 为实数．$b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的一个排列．若 $\lambda>n^m-1$，则 $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k^p}{b_k^p+\lambda G_n^p}\right)^{\frac{1}{m}} \geqslant n\left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^{\frac{1}{m}}$.

（蒋明斌，中学数学研究，2004.11）

181.　设 $a_k>0$，$a_n=\frac{1}{2}(a_{n-1}^2+1)$，$a_1=3$，则

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{1+a_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k(1+a_k)}\right) \leqslant \frac{(a_1+a_n)^2}{16a_1a_n}.$$

（[305]116(6)(2009),547 问题 11442）

182.　设 $a_k>0$，$\sum_{k=1}^{n}a_k=1$，则

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1+a_k}{1+a_k^n}\leqslant\frac{(n+1)n^n}{n^n+1}.$$

(侯典峰,[351]2007(3):299 ～ 306)

183.　设 $a_k>0$, $a=(a_1,\cdots,a_n)$, $S_n(a)=\sum_{k=1}^{n}a_k$, $\sigma_m=\sum_{j=1}^{m}a_{k_j}$, $n\geqslant 2$.

$$f_m(a)=\sum_{1\leqslant k_1<\cdots<k_m\leqslant n}\frac{\sigma_m(a)}{S_n(a)-\sigma_m(a)},\qquad g_m(a)=\sum_{1\leqslant k_1<\cdots<k_m\leqslant n}\frac{S_n(a)-\sigma_m(a)}{\sigma_m(a)}.$$

则(1)　当 $1\leqslant m\leqslant n-1$ 时, $f_m(a)\geqslant\binom{n}{m}\frac{m}{n-m}$; $g_m(a)\geqslant\binom{n}{m}\frac{n-m}{m}$.

(2)　当 $m\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]$时,成立

$$g_m(a)-f_m(a)\geqslant\binom{n}{m}\frac{n(n-2m)}{m(n-m)}.$$

当 $m\geqslant\frac{n}{2}$ 时,不等号反向.(石焕南,张小明,[351]2008(2):126 ～ 133)

第四章　几何不等式

几何不等式已有许多专著,如参考文献中的[3,7,15,19,32,53,134,174]等,而[31,33～38,99,100]等著作中,几何不等式也占了很大的篇幅,国内外出版的数学杂志,特别是[351],大量刊登各种几何不等式的论文..20世纪90年代以来,由中国科学院成都计算机研究所杨路研究员研究开发的不等式型机器证明软件“BOTTEMA”的问世和不断升级,为证明和发现新的不等式特别是几何不等式提供了强有力的工具,刘保乾等借助这种软件已发现和证明了几千个三角形几何不等式(见[134]和[170],[351]2010(1):77～86).要想在一本书内全面反映这么多的研究成果是不可能的,本章仍以本书第三版的编排方式为基础,适当补充了新的有代表性的新成果和新方法.

在本章中,都设 a,b,c 为 $\triangle ABC$ 的边长;A,B,C 为内角(注意以弧度为单位);S 为面积;$p=(a+b+c)/2$ 为半周长;h_a,h_b,h_c 为高;l_a,l_b,l_c 为中线长;t_a,t_b,t_c 为内角平分线长(在[3]等文献中,中线长记为 $m_a,\cdots$,内角平分线记为 $w_a,\cdots$);r_a,r_b,r_c 为旁切圆半径;r,R 分别为三角形(或多边形)内切圆和外接圆半径;$\sum$ 表示循环和,$\prod$ 表示循环积,例如 $\sum f(a)=f(a)+f(b)+f(c)$,$\sum f(a,b)=f(a,b)+f(b,c)+f(c,a)$,$\prod f(a)=f(a)f(b)f(c)$,对于四边形,$\sum f(a)$ 则表示 $f(a)+f(b)+f(c)+f(d)$ 等.tan 与 tg,cot 与 ctg 通用.

在不等式后面,用{锐}表示锐角三角形,{钝}表示钝角三角形,{等正}表示仅当正多边形(如正三角形,正方形等)时不等式中的等号成立,{等似}表示两个多边形(包括三角形)相似时等号成立.n,m,k,j 等表示自然数.对于初学者,希望注意以下几个问题:

1.　**要充分注意隐含条件.** 例如 $A+B+C=\pi$;$a-b<c<a+b$;从三角形大边对大角,可得 $(a-b)(A-B)\geqslant 0$ 等;从 $a\geqslant b\geqslant c$ 得 $A\geqslant B\geqslant C$,从而 $l_a\leqslant l_b\leqslant l_c$,$h_a\leqslant h_b\leqslant h_c$,$t_a\leqslant t_b\leqslant t_c$.若 $\triangle ABC$ 是锐角三角形,则意味着 $t>8$ 时,有

$$\sum a^2>tR^2,\text{即}\quad p^2>r^2+4Rr+(t/2)R^2.$$

若 $\triangle ABC$ 为钝角三角形,则意味着 $t<8$ 时上式中不等号均反向,若 $\triangle ABC$ 是直角三角形,则 $\sum a^2=8R^2$,即 $p^2=r^2+4Rr+4R^2$([3]11,26～28).还经常用到三角形中的等量关系,例如,面积 $S=pr$;$\prod a=4SR=4prR$;$h_a=\dfrac{2S}{a}$;$t_a=\sqrt{bc\left[1-\dfrac{a^2}{(b+c)^2}\right]}$;

$l_a=\sqrt{\dfrac{b^2}{2}+\dfrac{c^2}{2}-\dfrac{a^2}{4}}$;$\sum\cos A=1+\left(\dfrac{r}{R}\right)$;

$$\sum ab=p^2+4Rr+r^2;\ \sum a^2=2(p^2-4Rr-r^2);$$

$$\sum a^3=2p(p^2-6Rr-3r^2);\ \sum a^4=2(p^2-4Rr-r^2)^2-8p^2r^2,$$

利用正弦定理、余弦定理,半角公式等,往往可以使三角形边的不等式与角的不等式相互转化.例如$\sum a^2 \geqslant 4\sqrt{3}S \Leftrightarrow \sum \operatorname{ctg}A \geqslant \sqrt{3}$,$\sum a^2 \geqslant 4\sqrt{3}S + \sum(a-b)^2 \Leftrightarrow \sum \operatorname{tg}\frac{A}{2} \geqslant \sqrt{3}$.

2. **要注意几何不等式与代数不等式的联系.** 通过代换:$x=(b+c-a)/2, y=(c+a-b)/2, z=(a+b-c)/2$,就可把三角形边$a,b,c$的不等式转化为正数$x,y,z$的代数不等式.还可利用三正数$a,b,c$能构成三角形边长的许多充要条件(记为$\{\Delta\}$):

(1) $\{\Delta\} \Leftrightarrow 25(\sum a^4) < 11(\sum a^2)^2 \Leftrightarrow \sqrt{3}(\sum \sin^2 A) < 10\prod \sin A$;

(2) $\{\Delta\} \Leftrightarrow pa^2 + qb^2 \geqslant pqc^2$,式中$p+q=1$.

(3) 若正数a,b,c满足$2(\sum a^4) < (\sum a^2)^2$,则$\{\Delta\}$;若$n$个正数$a_k$满足$(n-1)\sum a_k^4 < (\sum a_k^2)^2 (n \geqslant 3)$,则这些数中任何三个都可构成三角形的边长.

(4) 利用韦达定理,即三次方程

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (a \neq 0)$$

的根x_1, x_2, x_3与系数a,b,c的关系

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a},$$

$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a},$$

$$\sigma_3 = x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}.$$

于是三次方程

$$x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 4pRr = 0$$

的三个根x_1, x_2, x_3恰好就是$\triangle ABC$的三边a,b,c.

事实上,由韦达定理

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 2p = a + b + c,$$

$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = p^2 + r^2 + 4Rr = ab + bc + ca,$$

$$\sigma_3 = x_1x_2x_3 = 4pRr = 4p\left(\frac{abc}{4s}\right)\left(\frac{s}{p}\right) = abc.$$

([43]83 ~ 94)

(5) **利用a,b,c为三正数的充要条件:** $\sum a > 0, \sum ab > 0, \prod a > 0$,易证三次方程$x^3 + px^2 + qx + r = 0$的三个实根$a,b,c\{\Delta\} \Leftrightarrow p < 0, r < 0, q > 0, p^3 - 4pq + 8r > 0$.(其他条件可见[19]第一章或[348])1991,9:40 ~ 41.)利用这些关系,常常可以沟通代数不等式与几何不等式,成为证明和发现新不等式的一种重要手段.

3. **注意复数,凸函数,优化理论,基本不等式等其他知识的综合运用.** 例如利用下述基本定理就可以统一证明许多三角不等式:

定理 1 设$F(x,y,z)$是实对称齐次多项式,其次数$n \leqslant 3$.

(1) 若$F(1,1,1), F(1,1,0), F(2,1,1)$均非负,则$F(a,b,c) \geqslant 0$;

(2) 若$F(1,1,1) > 0, F(1,1,0), F(2,1,1)$非负,则$F(a,b,c) > 0$;

(3) 若 $F(1,1,1)=0, F(1,1,0)>0, F(2,1,1)\geqslant 0$,则 $F(a,b,c)\geqslant 0$.{等正}([305]1971,78:879)

定理 2 设 f 是$[0,\infty)$ 上的凸函数,则

$$3f(2p/3)\leqslant \sum f(a)\leqslant f(0)+2f(p).$$

定理 3 设 f 是$[0,2p]$ 上三阶凸函数(定义见第 7 章 § 1),则

$$(1/3)\sum f(a)-f(2p/3)\leqslant (1/3)\sum f(b+c)-f(4p/3).$$

例如,$f(x)=x/(2p-x)$ 是三阶凸函数,由定理 3,得

$$\sum \frac{b+c}{a}-\sum \frac{a}{b+c}\geqslant \frac{9}{2}.$$

利用正弦定理、三角形面积公式等还可以使边与角的不等式互化.

定理 4 设 f 是$[0,\pi/2]$ 上三阶凸函数,则

$$\sum f\left(\frac{\pi-A}{2}\right)-\sum f\left(\frac{A}{2}\right)\geqslant 3\left[f\left(\frac{\pi}{3}\right)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right].$$

若 f 是严格三阶凸函数,则上式中仅当正三角形时等号成立.

利用定理 4 可以证明三角形的角的不等式.

此外,陈胜利,张小明,孙文彩,褚小光,刘保乾还在[100]3 ~ 32 和[134][351] 中分别研究了三角形不等式的不同证明方法.

§ 1 三角形不等式

一、 三角形边长、面积与 p,r,R 不等式

1. [MCM]. **Finsler-Hadwiger 不等式:**

$$4\sqrt{3}S+\sum(a-b)^2\leqslant \sum a^2\leqslant 4\sqrt{3}S+3\sum(a-b)^2, \qquad \text{\{等正\}}$$

特别,$\sum a^2\geqslant 4\sqrt{3}S$ 称为 **Weitzenböck 不等式**,苏化明总结出它的 24 种证法,([99]12:106 ~ 117). 此外,南秀全还用费马点定理给出了一个新的证明,([99]3:71 ~ 72) 推广:

(1) $\sum a^n\geqslant 2^n\times 3^{(1-\frac{n}{4})}S^{n/2}+\sum(a-b)^n$. {等正}

(2) 设 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 为任意实数,则

$$\sum\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2+\lambda_3}a^2\right)\geqslant 2\sqrt{3}S;$$

(3) 设 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 为任意实数,则

$$\left(\sum\lambda_1 a^2\right)^2\geqslant 16S^2\left(\sum\lambda_1\lambda_2\right) \quad \text{(Oppenheim)}$$

仅当 $a^2:b^2:c^2=(\lambda_2+\lambda_3):(\lambda_3+\lambda_1):(\lambda_1+\lambda_2)$ 时等号成立,它等价于 **Kooi 不等式:**

$$\sum(\lambda_2\lambda_3 a^2)\leqslant\left(\sum\lambda_1\right)^2R^2.$$

([3]147;[19]681;[348]1991,6:39 ~ 42)

(4) **单增不等式**:设 $\triangle ABC$ 的最大角 $A \leqslant \alpha$,则

$$\sum a^2 \leqslant 4\sqrt{3}S + \lambda \sum (a-b)^2.$$

式中 $\lambda = [2-2\sin(\alpha+\pi/6)]/[2\sin(\alpha/2)-1]^2$ 是 α 的递增函数. 特别,当 $A \leqslant \alpha = 2\pi/3$ 时,下式成立

$$\sum a^2 \leqslant 4\sqrt{3}S + \frac{\sqrt{3}+2}{2}\sum (a-b)^2 < 4\sqrt{3}S + 2\sum (a-b)^2.$$

当 $\triangle ABC$ 为锐角三角形时,有

$$\sum a^2 \leqslant 4\sqrt{3}S + (2-\sqrt{3})(\sqrt{2}+1)^2\sum (a-b)^2 < 4\sqrt{3}S + \frac{16}{9}\sum (a-b)^2.$$

这是对刘健结果和猜想的改进.([32]82 ~ 86)

(5) $\sum a^2 \geqslant 4\sqrt{3}S + \sum (a-b)^2 + 2\sum\left[\sqrt{a(p-a)} - \sqrt{b(p-b)}\right]^2.$

(董林,中学数学研究,1999.4:17)

使 $\sum a^2 \geqslant 4\sqrt{3}S + \lambda\sum (a-b)^2$ 成立的最大 $\lambda = 1$.

(6) $4S(4-\frac{2r}{R})^{1/2} \leqslant \sum a^2 - \sum (a-b)^2 \leqslant 4S(1+\frac{R}{r})^{1/2}.$

(7) $1 \leqslant \frac{\sum a^2}{\sum ab} \leqslant 1 + \sqrt{1-\frac{2r}{R}}; \frac{3(2R-r)}{5R-r} \leqslant \frac{\sum a^2}{\sum ab} \leqslant \frac{2R^2+r^2}{(R+r)^2}$(丁遵标). {等正}

(8) $\sum a^{4t} \geqslant 3^{1-t}4^{2t}S^{2t} + \sum (a^{2t}-b^{2t})^2. (t>0).$ {等正}

(9) $\sum a^n \geqslant \frac{4}{\sqrt{3}}p\sum a^{n-2} + \sum a^{n-2}(b-c)^2 \geqslant 2^n \times 3^{1-(\frac{n}{4})}p^{n/2} + \sum a^{n-2}(b-c)^2.$

(王志亮,中等数学,1995.3:14)

(10) $(4/3)p^2 \leqslant \sum a^2 \leqslant 2p(p-\sqrt{3}r)$.(Bager,[19]176)

2. **Neuberg 不等式**:$\sum a^2 \leqslant 9R^2$. {等正}

推广:(1) **Gerretsen 不等式**:

$36r^2 \leqslant 18Rr \leqslant 12r(2R-r) \leqslant \sum a^2 \leqslant 8R^2+4r^2 \leqslant 9R^2.$ {等正}

(它的证明及其进一步推广见[19]50,170 ~ 171)

(2) 当 $t \leqslant \frac{\ln 9 - \ln 4}{\ln 4 - \ln 3} \approx 2.818$ 时,$\sum a^t \leqslant 3(\sqrt{3}R)^t$.

(Elem. Math,1962,17:40 ~ 41;1963,18:31 ~ 32)

(3) $4\sqrt{3}S \leqslant 3[(\prod a)\prod(b+c-a)]^{1/3} \leqslant \sum a(b+c-a)$

$$\leqslant \frac{9(\prod a)}{\sum a} \leqslant \frac{3\sqrt{3}(\prod a)}{\sqrt{\sum ab}} \leqslant \frac{9(\prod a)}{\sum \sqrt{ab}} \leqslant 3(\prod a)^{2/3}$$

$$\leqslant \sum a\sqrt{bc} \leqslant \{3(\prod a)(\sum a)\}^{1/2} \leqslant \sum ab \leqslant (1/2)\sum (a+b)\sqrt{ab}$$

$$\leqslant (\frac{1}{3})(\sum a)^2 \leqslant (\frac{1}{3})(\sum \sqrt{a})(\sum a^{3/2}) \leqslant \frac{(\sum a)(\sum a^{3/2})}{\sum \sqrt{a}} \leqslant \sum a^2 \leqslant 9R^2.$$

（宋庆，[348]1990，12：17 ～ 19）

(4) $4\sqrt{3}S \leqslant \left\{\begin{matrix} \sum a^2 - \sum (a-b)^2 \\ 4\sqrt{3}S\left(\dfrac{R}{2r}\right)^{1/3} \end{matrix}\right\} \leqslant 3\left(\prod a\right)^{2/3} \leqslant 4\sqrt{3}S\left(\dfrac{R}{2r}\right)^{1/2} \leqslant \sum ab$

$$\leqslant \left\{\begin{matrix} \dfrac{1}{3}\left(\sum a\right)^2 \\ \sqrt{3}\cdot\sqrt{\sum (ab)^2} \end{matrix}\right\} \leqslant \left\{\begin{matrix} 4\sqrt{3}S\left(\dfrac{R}{2r}\right) \\ \sum a^2 \leqslant \left\{\begin{matrix} \sqrt{3\sum a^4} \leqslant 4\sqrt{3}S\left(\dfrac{R}{2r}\right)^{17/12} \\ 4\sqrt{3}S\left(\dfrac{R}{2r}\right)^{7/6}. \end{matrix}\right. \end{matrix}\right.$$

（陈胜利，[100]601 ～ 602）

3.　$\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{\sum a^2}{\left(\sum a\right)^2} < \dfrac{1}{2}.$

对于{钝}，不等式左边可改进为 $6-4\sqrt{2}$.

提示：利用控制不等式和凸函数不等式.（[345]1985，9：35 ～ 37）

4.　$3 \leqslant \dfrac{\left(\sum a\right)^2}{\sum ab} < 4.$　　{等正}

对于{钝}，上限可改进为 16/5.

5.　**Bager 不等式**：$72\sqrt{3}r^3 \leqslant 24rS \leqslant 36\sqrt{3}Rr^2 \leqslant 12RS \leqslant 8S(2R-r)$

$\leqslant 4S(5R-4r) \leqslant \sum a^3 \leqslant 4pR(2R-r) \leqslant 6\sqrt{3}R^2(2R-r).$　　{等正}

6. (1)　[MCM]. $\sum a^3 < \sum a(b-c)^2 + 4\prod a = \sum a(b^2+c^2) - 2\prod a.$

这个不等式实际上是长为 a,b,c 的线段可以构成三角形的充要条件，逆命题可用反证法证明.（[38]873）

(2)　$\sum a^3 \leqslant 2\sum a(b-c)^2 + 3\prod a.$

7. (1)　$\dfrac{1}{4} < \dfrac{\prod (a+b)}{\left(\sum a\right)^3} \leqslant \dfrac{8}{27}$，对于{钝}，上限可改进为 $1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(2)　$\dfrac{1}{2}pr(R-2r) + \dfrac{3}{4}\prod (a+b) \leqslant 2\sum a^3 \leqslant \left(\sum a\right)\left(\sum a^2\right).$

8.　$2\sum a - \sum \dfrac{1}{a} \leqslant \sum a^3 < \dfrac{1}{4}\left(\sum a\right)^3.$

9.　$3\left(\sum a^3 + 3\prod a\right) \leqslant 2\left(\sum a\right)\left(\sum a^2\right)$.（[3]P. 3.）　　{等正}

10.　$4r\left(\sum a\right)^2 + 2\sum a^3 < 9\prod a + \left(\sum a\right)\left(\sum a^2\right).$

11.　**Goldner 不等式**：　$\sum a^4 \geqslant 16S^2.$　　{等正}

改进与推广：

(1)　$54R^3(R-r) \geqslant \sum a^4 \geqslant 16S^2 + 4\sqrt{3}S\sum (a-b)^2 + \dfrac{1}{2}\left(\sum (a-b)^2\right)^2.$

$$16\left(\frac{R}{r}-1\right)S^2 \leqslant \sum a^4 \leqslant 16\left(\frac{R^2}{2r^2}-1\right)S^2.$$ （丁遵标） {等正}

(2) 设 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 中任两数之和大于 0，则

$\left(\sum \frac{\lambda_1}{\lambda_2+\lambda_3}a^4\right) \geqslant 8S^2$. 仅当 $\frac{a^2}{\lambda_2+\lambda_3}=\frac{b^2}{\lambda_3+\lambda_1}=\frac{c^2}{\lambda_1+\lambda_2}$ 时等号成立.

([19]34). 由此推出一系列不等式，(中学数学，1994. 1)

12. $\sum (ab)^2 \leqslant \sum a^4 < 2\sum (ab)^2$.

13. $36r^2 \leqslant 4\sqrt{3}S \leqslant 18Rr \leqslant 4r(5R-r) \leqslant \sum ab \leqslant 4(R+r)^2 \leqslant 9R^2$. {等正}

更进一步加细([19]172)

14. $2\sum ab - \sum c^2 \leqslant 2\sum a\sqrt{(p-b)(p-c)} \leqslant \sum ab$. 它等价于

$\frac{1}{2}\sum (a-b)^2 \leqslant \sum a(\sqrt{p-b}-\sqrt{p-c})^2 \leqslant \sum (a-b)^2$.

(吴跃生，[100]561)

15. (1) **Goldstone 不等式**：$16(pr)^2 \leqslant \sum (ab)^2 \leqslant 4(pR)^2$. ([19]177) {等正}

(2) $p^2(p^2-8Rr+5r^2) \leqslant \sum (ab)^2 \leqslant p^2(p^2-7Rr+3r^2)$.

16. **Klamkin 不等式**：(1) 设非负实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 中任何两数之和大于 0，$0<t\leqslant 2$，则

$$\sum \frac{\lambda_1}{\lambda_2+\lambda_3}(bc)^t \geqslant \frac{3}{2}\left(\frac{4S}{\sqrt{3}}\right)^t.$$ ([19]106)

(2) $\sum \sqrt{bc} \geqslant p + \frac{29Rr}{2p} - \frac{2r^2}{p}$. (张小明，中学数学，1999，9：43)

(3) 设 $t>0$，则 $\sum a^t(a-b) \geqslant 0$. $t<0$ 时，不等号反向 {等正}

17. (1) **Gerretsen 不等式**：

$$8r(R-2r) \leqslant 4(R-2r)(R+r-\sqrt{R(R-2r)}) \leqslant \sum (a-b)^2$$
$$\leqslant 4(R-2r)(R+r+\sqrt{R(R-2r)}) \leqslant 8R(R-2r).$$ {等正}

([3]No. 5. 25. [19]172)

(2) $\frac{p^2}{2R}(R-2r) \leqslant \sum (a-b)^2 \leqslant \frac{2p^2}{R}(R-2r)$. (张小明，[100]600)

18. **Benezech 不等式**：设 t 为实数，则

$$\left(\sum a^2\right)\sum (bc)^{t-2} < 2\left(\sum a^t\right)\left(\sum a^{t-2}\right).$$

提示：考虑重心坐标为 (a^t,b^t,c^t) 的点 G，分别计算 GA^2,GB^2,GC^2 和

$$\left(\sum a^t\right)^2\left(\sum \frac{GA}{bc}\right)^2.$$

19. (1) **Catalen 不等式**：设 $t\geqslant 2$，则

$$\sum a^t b(a-b) \geqslant 0;\quad \sum a^2 b(a-b) \geqslant 8r^2(a-b)^2.$$ (安振平) {等正}

(2) $\sum a^t b(a^u - b^u) \geqslant 0$，式中 $t \geqslant 2, u \geqslant 1$. {等正}

(3) $\sum (p-a)\sqrt{bc} \geqslant \frac{2}{3}p^2$（刘健） {等正}

20. **Guba 不等式**：$2\sqrt{3}S \leqslant \sum a(p-a) \leqslant 9Rr$. {等正}

21. $\prod a < \sum a^2(p-a) \leqslant \frac{3}{2}\prod a$. 证明见[3]3. {等正}

22. **Djordjevic 不等式**：设 t 为实数，则

$$\sum a^t(p-a) \leqslant \frac{1}{2}\left(\prod a\right)\left(\sum a^{t-2}\right).$$ {等正}

23. **Andersson 不等式**：$\left(\frac{8r}{R}-3\right)p\left(\prod a\right) \leqslant \sum a^3(p-a) \leqslant p\left(\prod a\right)$. {等正}

24. **Janous 不等式**：

$$2p\sum \sqrt{p-a} \leqslant 3\sum \sqrt{bc(p-a)}.$$ ([305]1988,95)

25. $\sqrt{p} < \sum \sqrt{p-a} \leqslant \sqrt{3p}$.

对于{钝}，下限可改进为 $\sqrt{2p}$. ([6]200)

26. (1) $\sum \sqrt{a(p-a)} \leqslant \sqrt{2p}$.

对于{钝}，下限是 p，它的改进见[19]130.

(2) $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4}(abc)^{\frac{2}{3}}$.

(3) $\frac{a}{2}\left(\frac{4r}{R}-1\right) \leqslant \sqrt{(p-b)(p-c)} \leqslant \frac{a}{2}$.

([305]116(1)(2009)，问题 11306)

(4) $\sqrt{2} < \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{a+b+c}} \leqslant \sqrt{3}$.

(郭要红，[345]2006,6)

(5) $2\sqrt{2} < \sum \left(\frac{b+c-a}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant 3\left(\frac{R}{2r}\right)^{\frac{1}{2}}$.

(安振平，[351]2008(4)：459 ～ 461)

(6) $\sum \frac{\sqrt{a+b-c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}} \leqslant 3$. （47 届 IMO 预选题）

27. $\sqrt{2}\sum a \leqslant \sum \sqrt{a^2+b^2} \leqslant \left(1+(\sqrt{2}/2)\right)\sum a$.

28. (1) **Janous 不等式**：设 $0 < t < 1$，则

$$\sum \left(\frac{1}{a}\right)^t \leqslant 3^{1-2t}\left(\frac{p}{Rr}\right)^t.$$ {等正}

特别地，当 $p = 1/2$ 时，上式称为 **Flore 不等式**. ([363]1978,83：217)

(2) $\sum a^{-n} \geqslant 3^{\alpha}R^{-n}$，式中 $\alpha = 1-(n/2)$.

(3)　设 $0 < t \leqslant 1$，则 $\sum a^{-t} \leqslant 3^{-\frac{t}{2}}(R^{-t} + 2^{1-t}r^{-t})$.

(司徒凌波，[351]2004(3)，396 ～ 399)

29.　(1)　$\frac{\sqrt{3}}{R} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2(R+r)} \leqslant \sum \frac{1}{a} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2r}$.　{等正}

(2)　$\frac{11\sqrt{3}}{5R+12r} \leqslant \sum \frac{1}{a} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{5}{4R} + \frac{7}{8r})$.　{等正}

(陈计，福建中学数学，1993.6:10 ～ 11)

(3)　$\frac{243\sqrt{3}}{110R+266r} \leqslant \sum \frac{1}{a} \leqslant \frac{\sqrt{(R+r)(R+2r)}}{2Rr}$.(杨学枝，[31]236 ～ 242)

2000 年，周永良利用 p、R、r 间的最强不等式导出了 $\sum \frac{1}{a}$ 的最强不等式.([100]175 ～ 199)

30.　$\frac{9r}{2S} \leqslant \frac{r(5R-r)}{RS} \leqslant \sum \frac{1}{a} \leqslant \frac{(R+r)^2}{RS} \leqslant \frac{9R}{4S}$.　{等正}

31.　$\frac{\sqrt{3}}{R} \leqslant \frac{2(5R-r)}{3\sqrt{3}R^2} \leqslant \frac{5R-r}{Rp} \leqslant \sum \frac{1}{a} \leqslant \frac{(R+r)^2}{RS} \leqslant \frac{(R+r)^2}{3\sqrt{3}Rr^2} \leqslant \frac{\sqrt{3}R}{4r^2}$.　{等正}

32.　$\sum \left(\frac{1}{a}\right)^{2t} \leqslant 3\left(\frac{\sqrt{3}}{4S}\right)^t + \lambda \sum \left(\frac{1}{a^t} - \frac{1}{b^t}\right)^2$. 式中 $\lambda = \frac{1}{2}$，$0 < t < \frac{\ln 9 - \ln 4}{\ln 4 - \ln 3}$.(陈计)

杨之提出，λ 的最小值是什么？见[35]. 陈琦提出猜想：$0 < t \leqslant 1$ 时，

$$\sum \left(\frac{1}{a}\right)^{2t} \leqslant \frac{1}{3^{t-1}(2-t)}\left[\frac{1-t}{R^{2t}} + \left(\frac{1}{2r}\right)^{2t}\right].$$

已知 $t = 1/4, 1/2, 1$ 时不等式成立.([31]243 ～ 246)

33.　$\frac{2(5R-r)}{R} \leqslant (\sum a)(\sum \frac{1}{a}) \leqslant \frac{2(R+r)^2}{Rr}$.　{等正}

34.　**Walker 不等式：**　$\sum \frac{1}{a^2} \leqslant \frac{1}{4r^2}$.

改进与推广：

(1)　$\frac{1}{R^2} \leqslant \frac{1}{2Rr} \leqslant \frac{1}{3}(\sum \frac{1}{a})^2 \leqslant \sum \frac{1}{a^2} \leqslant \frac{(R^2+r^2)^2 + Rr^3}{R^2r^3(16R-5r)} \leqslant \frac{1}{4r^2}$.　{等正}

(2)　若 △ABC 为非钝角三角形，则　$\sum \frac{1}{a^2} \geqslant \frac{5}{4S}$(等腰 △ 成立等号).

35.　$3 \leqslant \frac{7R-2r}{2R} \leqslant \sum \frac{b}{a} \leqslant \frac{1}{2} + (\frac{R}{r} + \frac{r}{R}) \leqslant \frac{3R}{2r}$.　{等正}

$$\frac{23}{108}\left(\frac{p^2}{Rr}\right) < \sum \frac{b}{a} < \frac{1}{4}\left(\frac{p^2}{Rr}\right).\text{(刘保乾)}$$

36.　$\frac{9}{4p} < \sum \frac{1}{a+b} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4r}$.　{等正}

37.　$4\sum \frac{1}{a} - \sum \frac{a}{bc} \leqslant \frac{(5/R)+(2/r)}{\sqrt{3}}$.(Bilcev)

38.　设 $M = 1 - (2r/R)$. 刘保乾和张小明提出，是否成立：

$$2M \leqslant \sum\left(\frac{b-c}{a}\right)^2 \leqslant 3M;\quad \frac{2}{9}M \leqslant \sum\left(\frac{b-c}{b+c}\right)^2 \leqslant 2M.$$

刘一张还提出一系列类似的问题,([100]200 ~ 222)

39. 令 $M = R^2 + 3Rr + 2r^2$,则

$$\frac{M}{R^2+M} \leqslant \sum\left(\frac{p-a}{b+c}\right) \leqslant \frac{6R}{9R-2r}.$$ ([19]174) {等正}

40. $\sum\left(\frac{1}{p-a}\right) \geqslant \frac{5+4\sqrt{2}}{p}$; {等正}

推广 $\sum(p-a)^{-n} \geqslant 3^{1+n}p^{-n}$; $\sum(p-a)^n \geqslant 3^{\alpha}r^n$,式中 $\alpha = 1+\frac{n}{2}$.

41. $\sum\left(\frac{a}{p-a}\right) = \frac{4R}{r} - 2 \geqslant 6$. ([99]3.7)

42. $\frac{5}{S} \leqslant 2\cdot\sum\frac{1}{a(p-a)} \leqslant \frac{1}{r^2} \leqslant \sum\left(\frac{1}{p-a}\right)^2$.

43. $\sum\left(\frac{a}{p-a}\right)^{1/2} \geqslant \frac{9\sqrt{3Rr}}{p}$.

44. $\sum\left(\frac{bc}{p-a}\right) \geqslant p\left(5-\frac{2r}{R}\right)$;(Bilcev).([19]178)

45. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 为正数,则

$$\sum\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2+\lambda_3}\right)\left(\frac{bc}{p-a}\right) \geqslant \sum a.$$ ([381]1987,13:52)

46. **Guba 不等式:** $\sum\left(\frac{a-b}{p-b}\right) \leqslant 0$.(转引[19]145)

47. 设 $t \geqslant 1$,则

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{t-2}p^{t-1} \leqslant \sum\frac{a^t}{b+c} < 2p^{t-1}.$$

48. 设 $t \geqslant 0$,则

$$\frac{3(3t+2)}{4} < \frac{(2+5\sqrt{2})t+2(5\sqrt{2}-4)}{4} \leqslant \sum\left(\frac{tp+a}{b+c}\right) < \frac{5t+4}{2}.$$

对于{钝},上限可改进为$(7t+5)/3$.

49. (1) $\sum\frac{a}{b+c} \leqslant \frac{1}{6}\left(\sum a\right)\left(\sum\frac{1}{a}\right)$.(杨学枝)

(2) $\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\sum\left(\frac{b-c}{b+c}\right)^2 \leqslant \sum\frac{a}{b+c} \leqslant \frac{3}{2}+\frac{3}{4}\sum\left(\frac{b-c}{b+c}\right)^2$.([100]562 ~ 563)

(3) 设 $b^2 = ac$,则

$$-\frac{9\sqrt{5}}{10}+\frac{7}{2} < \sum\frac{a}{a+b} < \frac{9\sqrt{5}}{10}-\frac{1}{2}.$$ (刘永春,[165]118 ~ 119)

(4) $\sum\frac{a^2bc}{(a+b)(a+c)} \leqslant \frac{9}{4}Rr$. ([305]116(5)(2009),463.问题 11435)

(5) $\frac{r}{R} \leqslant \frac{\left\{2\prod(2a^2-(b-c)^2)\right\}^{\frac{1}{2}}}{\prod(a+b)}$. {锐}

([305]113(8)(2006),760.问题 11245)

50.　$\sum \frac{1}{b^2+c^2} \geqslant \frac{1}{2R^2}$.

51.　**Klamkin 不等式：**

$\sum\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}\right) \leqslant 3 \leqslant \sum\left(\frac{a}{b}\right)^2$.　([331]1971(357～380):33～44)　{等正}

52.　$\sum \frac{b^3+c^3-a^3}{b+c-a} \leqslant \sum bc$.　(Morghescu,[363]1986,91:21)　{等正}

53.　**Mirea 不等式：**

(1)　$\frac{16}{3}S^2 \leqslant \frac{\sum a^2}{\sum (1/a)^2} \leqslant 9R^4$;　{等正}

(2)　$\frac{16S^2}{9R^2} \leqslant \frac{\sum (ab)^2}{\sum a^2} \leqslant 3R^2$. ([363]1933,39:411)　{等正}

54.　**B-B 不等式(Braune-Bottema 不等式)：**

$$5-\frac{4r}{R} \leqslant \frac{\sum a^3}{\prod a} \leqslant \frac{2R}{r}-1.$$　{等正}

(Elem. Math. 1975,30:18;1976,31:15～16)

55.　$1 \leqslant \frac{(\sum a)(\sum a^3)}{(\sum bc)^2} \leqslant \frac{R}{2r}$.　{等正}

(Elem. Math. 1973. 28:102;1974,29:96～97)

56.　设 $t>0$,则

$$\frac{4(9-2t)}{27}p^2 \leqslant \sum a^2 - \frac{1}{p}\left(\prod a\right) < 2p^2.$$

对于{钝},上限可改进为$\frac{6-t}{4}p^2$,([6]200)

57.　$12\sqrt{3}Rr^2 \leqslant \prod a \leqslant 4Rr[2R+(3\sqrt{3}-4)r] \leqslant 6\sqrt{3}R^2r$.　([3]62)　{等正}

58.　$32RS \leqslant 4pr(9R-2r) \leqslant \prod(a+b) \leqslant 4p(2R^2+3Rr+2r^2) \leqslant 8pR(R+2r)$ $\leqslant 24\sqrt{3}R^3$. ([19]172～173)　{等正}

59.　令 $d=pr/R$,则

$$4d^2/(3\sqrt{3}) \leqslant 2rd \leqslant 3\sqrt{3}r^2 \leqslant 2pd/(3\sqrt{3}) \leqslant S \leqslant 3\sqrt{3}Rr/2$$
$$\leqslant p^2/(3\sqrt{3}) \leqslant pR/2 \leqslant 3\sqrt{3}R^2/4.$$　{等正}

利用 $S=pr$,可得到有关 p,r,R 的不等式.

60.　**Mircea 不等式：**$\sqrt{S} \leqslant R+(r/2)$.

61.　$\sqrt{3}S \leqslant r(4R+r) \leqslant \sqrt{3}S+(1/2)\sum(a-b)^2$.

62.　$r^3(16R-5r) \leqslant S^2 \leqslant r^2(3r^2+4Rr+4R^2)$.　{等正}

63. 设 $q = \left[(1/2)\sum(a-b)^2\right]^{1/2}$，则

$$p(p+a)^2(p-2q) \leqslant 27S^2 \leqslant p(p-a)^2(p+2q),$$

式中两个等号均在等腰三角形且其底边为最小(或最大)边时成立.

64. $S \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{3}\sum a^t\right)^{2/t}$，$t>0$. ([305]1927,34:382 ~ 384) {等正}

65. $S \leqslant \frac{3}{4}\frac{\prod a}{\sqrt{\sum a^2}} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4}(\prod a)^{2/3}$. {等正}

66. $S \leqslant (\sqrt{3}/4)(\prod a)^{1/3}[\prod a^2 - \prod(a-b)^2]^{1/6}$. {等正}

([350]1986,2:11 ~ 13)

67. $p^2 \geqslant 3\sqrt{3}S + (1/2)\sum(a-b)^2$. {等正}

68. $8Rr + (11/(3\sqrt{3}))S \leqslant p^2 \leqslant 4R^2 + [11/(3\sqrt{3})]S$, {等正}

69. **Bottema 基本不等式**：令 $d = \sqrt{R(R-2r)}$，则

(1) $\sqrt{R+r-d}(\sqrt{2R}+\sqrt{R-r+d}) \leqslant p \leqslant \sqrt{R+r+d}(\sqrt{2R}+\sqrt{R-r-d})$,

(2) $2R^2+10Rr-r^2-2(R-2r)d \leqslant p^2 \leqslant 2R^2+10Rr-r^2+2(R-2r)d$.

(3) $16Rr-5r^2+r^2(\frac{R-2r}{R-r}) \leqslant p^2 \leqslant 4R^2+4Rr+3r^2-r^2(\frac{R-2r}{R-r})$. ([164]110)

因为 $d<R-r$，得到 **Gerretsen 不等式**：

$$r(16R-5r) \leqslant p^2 \leqslant 4R^2+4Rr+3r^2. \quad \text{\{等正\}}$$

对于非钝角三角形，有 $p^2 \geqslant 2R^2+8Rr+3r^2$. ([31]371 ~ 384 或[100]175 ~ 199)

$p>2R+r$ {锐}；$p<2R+r$ {钝}；$p=2R+r$ {直角}.

70. **Janic 不等式**： $\sqrt{3}p \leqslant 5R-r$. {等正}.

71. (1) $9\sqrt{3}r-p \leqslant 4pr/R \leqslant 6\sqrt{3}r \leqslant 3\sqrt{6Rr} \leqslant 2p \leqslant 2[2R+(3\sqrt{3}-4)r] \leqslant 3\sqrt{3}R$. ([19]165 ~ 166)

(2) $p \geqslant r[3\sqrt{3}+\frac{t}{R}(R-2r)]$. 式中 $t_{\max} = 6.829212418\cdots$. (刘保乾、黄拔萃，[100]582)

72. $p^4 \leqslant 2(2R^2+10Rr-r^2)p^2 - r(4R+r)^3$. (褚小光)

73. $p \geqslant \sqrt{r}(\sqrt{6R}-\sqrt{2R-r})$.

74. 设 $t>0$，则

$$(\frac{r}{R})^t + (\frac{p}{R})^t \leqslant 2^{-t}(1+3^{3t/2}). \quad \text{\{等正\}}$$

75. $ab > 4Rr + r^2$. (褚小光)

76. $\frac{R}{r} \geqslant \frac{b}{c}+\frac{c}{b}$. (Bandila. V.)([363]1985,90:65)

77. $\frac{R}{r}+\frac{r}{R} \geqslant \frac{5}{2}$. {等正}

78. $\frac{r}{2R-r}\leqslant\frac{3r}{4R+r}\leqslant\frac{r}{R+r}\leqslant\frac{r(16R-5r)}{(4R+r)^2}$

$$\leqslant(\frac{p}{4R+r})^2\leqslant\frac{R}{2(2R-r)}\leqslant\frac{1}{3}\leqslant\frac{4R+r}{27r}\leqslant\frac{R^2}{4r(R+r)}.$$

79. 记 $H_t=\frac{1}{2}\sum a^{2t}$,$K_t=\sum(ab)^t$. 1954 年,Beatty,S. 证明:

$$(K_1-H_1)(3K_1-5H_1)\leqslant 12S^2\leqslant(K_1-H_1)^2.$$

1988 年,陈计证明,当 $t\geqslant 1$ 或 $t\leqslant 0$ 时,下式成立

$S^{2t}\geqslant 2^{2(1-2t)}3^{t-2}(K_t-H_t)(3K_t-5H_t)$. ([381]1989,15:1 ～ 3)

80. 设 a^t,b^t,c^t 可以构成一个三角形 $\triangle_t$,它的面积为 S_t,1975 年,Oppenheim,A. 证明:当 $0<t<1$ 时,成立 $R_t\leqslant 3^{\frac{t-1}{2}}R^t$ 和

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^{1-t}S^t\leqslant S_t\leqslant\left(\frac{3}{2}\right)^{1-t}S^t. \qquad \{等正\}$$

当 $t\geqslant 1$ 或 $t\leqslant 0$ 时,不等号反向. ([331]1974,461 ～ 497,257 ～ 263)

1988 年,钱黎文等证明:S_t 具有对数凸性,即 $0<\lambda<1$ 时,$S_{t_1}^{\lambda}S_{t_2}^{1-\lambda}\leqslant S_q$,式中 $q=\lambda t_1+(1-\lambda)t_2$. 冷岗松证明 $\triangle_t$ 的周长,R_t,r_t 等也有类似的性质,([344]1988,2:75 ～ 77,湖南教育学院学报,1992,5:121 ～ 123)

81. **Euler 不等式(1765 年)**:$R\geqslant 2r$. {等正}

前面不少不等式实际上涉及了 Euler 不等式的改进和推广,此外,我们还介绍以下结果:

(1) 设 $\triangle ABC$ 是 Bager 型锐角三角形,即 $\frac{\pi}{6}\leqslant A\leqslant B\leqslant\frac{\pi}{3}\leqslant C\leqslant\frac{\pi}{2}$,则

$$\frac{r}{R}\geqslant\frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

提示:利用 $f(x)=\log(\sin\frac{x}{2})$ 在 $(0,\pi)$ 上的凹性,得到

$$\frac{r}{4R}=\prod(\sin\frac{A}{2})\geqslant\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{8}.$$

(Murty,V. N. 等,[381]1985,11:191)

(2) [MCM]. $r\leqslant 2R(\sin\frac{A}{2})(1-\sin\frac{A}{2})$,

仅当 $b=c$ 时等号成立. ([38]1366 ～ 1367)

(3) 设 $f(x)=\frac{4p^2/R-2rx}{27-x}$,则当 $-\infty<x\leqslant y\leqslant 11$ 时,$2r\leqslant f(x)\leqslant f(y)\leqslant R$.

提示:考虑 f 的单调性,见 Elem. Math. 1965,20:140;1966,21;139.

(4) $R\geqslant 2r+\frac{1}{8R}\sum(a-b)^2$. (宋庆,中学数学,1993,5:11)

(5) 与 $\triangle ABC$ 两边相切且与 $\triangle ABC$ 外接圆内切的三个圆的半径分别记为 r_1,r_2,r_3,则

$$4r \leqslant 3(r_1r_2r_3)^{1/3} \leqslant r_1 + r_2 + r_3 \leqslant 2R.$$ {等正}

(李同林,中学数学,1993,5:11)

(6) $\dfrac{R}{2r} \geqslant \exp\left(\sum \dfrac{(a-b)^2}{2c^2}\right)$. ([305]115(2)(2008):172)

82. 椭圆焦点三角形 ABC,是指三角形有两个顶点 A,B 在椭圆的焦点上.设椭圆的离心率为 e,则

$$\left(\frac{4R+r}{S}\right)^2 \geqslant \begin{cases} \dfrac{(2-e)^2}{1-e^2}, & 0 < e < \dfrac{2}{3}, \\ \dfrac{8e}{e+1}, & \dfrac{2}{3} < e < 1. \end{cases}$$

(石长伟,[351]2006(4):420 ~ 422)

83. 在非钝角 $\triangle ABC$ 中,用 O,G,I,H 分别表示 $\triangle ABC$ 的外心、重心、内心和垂心.分别以三边为对称轴,再分别作出 O,G,I,H 的关于这三边为对称轴的对称点,连接同一类的三个点,得到一个三角形,这样的三角形共有 4 个,分别称为 $\triangle ABC$ 的外心、重心、内心和垂心的边对称三角形,其面积分别记为 S_O,G_G,S_I,S_H,其半周长分别记为 p_O,p_G,p_I,p_H. 2005 年,王明建等证明:

(1) $S_H \leqslant S_I \leqslant S_G \leqslant S_O$;

(2) $p_H \leqslant p_I \leqslant p_G \leqslant p_O$.

仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时等号成立.([165]120 ~ 124)

二、 三角形内角不等式

1. $\sum\left(\dfrac{1}{A}\right)^t \geqslant \dfrac{3^{t+1}}{\pi^t}$, $(t > 0)$.

提示:利用 Hölder 不等式.

2. 利用 $f(x) = (\sin x)^t$ 当 $t < 0$ 时为凸函数,当 $0 < t \leqslant 1$ 时在 $[0,\pi]$ 上是凹函数,当 $t \geqslant 2$ 时在 $[0,\pi/4]$ 上是凸函数,易证下述不等式(其中记 $\alpha = 1 + (t/2)$, $\beta = 1 - (t/2)$):

(1) 若 $0 < t \leqslant 1$,则 $0 < \sum(\sin A)^t \leqslant 3^\alpha/2^t$,对于{锐},下限可改进为 2,对于{钝},上限可改进为 $1 + 2^\beta$.特别地,有

$3\sqrt{3}(r/R) \leqslant \sum \sin A \leqslant 2 + (3\sqrt{3} - 4)(r/R) \leqslant 3\sqrt{3}/2$,{等正}.对于{锐},下限可改为 2,对于{钝},上限可改为 $1 + \sqrt{2}$;

$0 < \sum \sqrt{\sin A} \leqslant \sqrt{3p/R} \leqslant 3(3/4)^{1/4}$.{等正}.对于{锐},下限为 2,对于{钝},上限为 $1 + 2^{3/4}$.若 $t < 0$,则 $\sum(\sin A)^t \geqslant 3^\alpha/2^t$,对于{钝},下限为 $1 + 2^\beta$.

若 $t > 0$,则 $\sum(\sin A)^t \geqslant 3\left(\prod \sin A\right)^{t/3} \geqslant 3^\alpha[r^2/(2R^2)]^{t/3} \geqslant 3^\alpha(r/R)^t$. {等正}

(2) $\dfrac{15r}{2R} \leqslant \dfrac{3r}{R^2}(2R - r) \leqslant \sum \sin^2 A \leqslant \dfrac{2R^2 + r^2}{R^2} \leqslant \dfrac{9}{4}$,{等正},对于{锐},下限为 2,对于{钝},$1 < \sum \sin^2 A < 2$,对于{直角},$\sum \sin^2 A = 2$.

(3)　$\frac{9\sqrt{3}r^2}{2R^2} \leqslant \frac{3\sqrt{3}r^2}{2R^3}(5R-4r) \leqslant \frac{pr}{2R^3}-(5R-4r)$

$$\leqslant \sum \sin^3 A \leqslant \frac{p(2R-r)}{2R^2} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{4R}(2R-r) < \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$ {等正}

(4)　$\sum \sin^4 A \leqslant 2-\frac{1}{2}(\frac{r}{R})^2-3\left(\frac{r}{R}\right)^4 \leqslant 2-5(\frac{r}{R})^4$. ([19]189)　{等正}

(5)　若 $0<t\leqslant 1$,则 $1<\sum(\sin\frac{A}{2})^t \leqslant 3/2^t$;$t<0$ 时,$\sum(\sin\frac{A}{2})^t \geqslant 3/2^t$;

对于{锐},当 $0<t\leqslant 1$ 时,下限为 2^β,当 $t\geqslant 2$ 时,成立 $3/2^t \leqslant \sum(\sin\frac{A}{2})^t \leqslant 2^\beta$;

对于{钝},$g(t)=2^{-t/2}+2(\sqrt{2-\sqrt{2}}/2)^t$ 是 $0<t\leqslant 1$ 时的上限,$t<0$ 时的下限.

特别地,$1<\sum\sin(A/2)\leqslant 3/2$.(上限可改进为$\sqrt{2}$);　$\sum[\sin(A/2)]^{-1}\geqslant 6$;

$3/4\leqslant \sum[\sin(A/2)]^2 < 1$.　{等正}

(6)　若 $t\geqslant 1$,则

$$\sin(\frac{\pi}{t}) < \sum \sin(\frac{A}{t}) \leqslant 3\sin(\frac{\pi}{3t}) < \frac{\pi}{t}.$$

(Bursuc,I.[363].1980,85:365)

(7)　$|\sum\sin(mA)|\leqslant 3\sqrt{3}/2$,$(m\in Z)$,$-2<\sum\sin 3A\leqslant 3\sqrt{3}/2$,仅当 A,B,C 中有一个为 $7\pi/9$,其余两个均为 $\pi/9$ 时等号成立.([305],1982.99(3))

(8)　$\sum\sin(2kA)\geqslant -3/2$;$\sum\sin(4m+1)(A/2)\leqslant 3/2$;

$\sum\sin(4m-1)(A/2)\geqslant -3/2$.

(9)　$\sum\sin^2(mA)\leqslant 9/4(m\in Z)$;$\sum\sin^2[(2k-1)A/2]\geqslant 3/4$;

$36(r/R)^4\leqslant 6(r/R)^2+12(r/R)^4\leqslant \sum\sin^2(2A)\leqslant 9/4$.

(10)　我们还可以得到更一般的不等式.记

$$M_k(x)=\begin{cases}(\sum x^k/3)^{1/k}, & k\neq 0,\infty,\\ (xyz)^{1/3}, & k=0,\\ \min\{x,y,z\}, & k=-\infty,\\ \max\{x,y,z\}, & k=\infty.\end{cases}$$

则,①　$-\infty<k\leqslant 1$ 时,有

$0<M_k(\sin A)\leqslant p/(3R)\leqslant 2/3+(\sqrt{3}-(4/3))(r/R)\leqslant \sqrt{3}/2$.　{等正}

对于{钝},上限为$[(1+2^\beta)/3]^{1/k}$,式中 $\beta=1-(k/2)$.

②　对于{锐},当 $0<k\leqslant 1$ 时,有$(2/3)^{1/k}<M_k(\sin A)\leqslant\sqrt{3}/2$.

③　$k=-\infty$ 时,$0<\min\{\sin A,\sin B,\sin C\}\leqslant\sqrt{3}/2$.对于{钝},上限为$\sqrt{2}/2$.

④　已知 $k=(\lg 9-\lg 4)/(\lg 4-\lg 3)$ 是使 $M_k(\sin A)\leqslant\sqrt{3}/2$ 成立的最大值.又已知当 $0<t\leqslant 1,k\leqslant 1$ 时,有

$$M_k(\sin tA) \leqslant \sin(t\pi/3). \tag{1}$$

[19]161 提出两个问题：第一，求出使(1)式成立的 $k=k(t)$ 的最大值；第二，对于 $q>k$，求出使 $M_q(\sin A)<m(q)$ 成立的最小值 $m(q)$.

⑤　若 $k\leqslant 3$，则 $M_k(\sin A\sin B)\leqslant 3/4$；若 $3<k\leqslant 4$，则 $M_k(\sin A\sin B)\leqslant 3^{-1/4}$.

⑥　若 $-1\leqslant k\leqslant(\lg 9-\lg 4)/(\lg 4-\lg 3)$，则 $2\sqrt{3}r\leqslant M_k(a)\leqslant\sqrt{3}R$.

利用各种变换，又可得到新的不等式. 例如通过变换 $A_1=(\pi-A)/2$ 等，可将 $M_k(\sin A)$，$M_k(\sin A\sin B)$ 转化为 $M_k(\cos\frac{A}{2})$，$M_k(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2})$ 等.

3.　利用 $f(x)=(\cos x)^t$ 当 $t<0$ 时为凸函数，当 $0<t\leqslant 1$ 时在 $[0,\pi]$ 上为凹函数，当 $0<t\leqslant 2$ 时在 $[0,\pi/4]$ 上为凹函数，易证下述不等式[其中仍记 $\alpha=1+t/2$，$\beta=1-(t/2)$]：

(1)　对于{锐}，若 $0<t\leqslant 1$，则 $1<\sum(\cos A)^t\leqslant 3/2^t$；若 $t<0$，则 $\sum(\cos A)^t\geqslant 3/2^t$.

(2)　对于{钝}，当 $t\geqslant 2$ 时，有 $\sum(\cos A)^t\geqslant 3/2^t$.(Mascioni, V.)

(3)　$3r/R<\sum\cos A\leqslant 2\cos(C/2)+\cos C\leqslant 3/2$.

(4)　$3/4\leqslant 2(r/R)-(r/R)^2\leqslant\sum\cos^2 A\leqslant 3(R-r)^2/R^2<3$. {等正}；对于{锐}，上限为 1，对于{钝}，下限为 1.

(5)　$\frac{3}{8}\leqslant\frac{2R^3-3Rr^2-4r^3}{2R^3}\leqslant\sum\cos^3 A\leqslant\frac{4R^2+12Rr-34r^2}{4R^2}$；　　{等正}

当 n 是大于 1 的奇数时，$\sum(\cos A)^n<\frac{5}{4}$.

(6)　$0<t\leqslant 1$ 时，$2<\sum(\cos\frac{A}{2})^t\leqslant 3^\alpha/2^t$，对于{钝}，上限为 $2^{-t/2}+2(\sqrt{2+\sqrt{2}}/2)^t$.

(7)　$t<0$ 时，$\sum(\cos\frac{A}{2})^t\geqslant 3^\alpha/2^t$. 对于{钝}，下限为 $2^{-t/2}+2(\sqrt{2+\sqrt{2}}/2)^t$.

(8)　若 $0<t\leqslant 2$，且对于{锐}，有 $1+2^\beta<\sum(\cos\frac{A}{2})^t\leqslant 3^\alpha/2^t$.

(9)　$2<1+\sum\sin(A/2)\leqslant\sum\cos(A/2)\leqslant 3\sqrt{3}/2$. 对于{锐}，下限为 $\sqrt{2}+1$.

(10)　$2\leqslant 9r/(2R)\leqslant(3/2)(1+r/R)<\sum\cos^2(A/2)\leqslant p^2/(6Rr)$.　　{等正}

(11)　$\sqrt{3}p/(2R)\leqslant\sum\cos^2(A/2)\leqslant 9/4$.　　{等正}

(12)　若 $t\geqslant 2$，则 $2+\cos(\pi/t)<\sum\cos(A/t)\leqslant 3\cos(\pi/(3t))$.

(13)　设 $\sum A=k\pi$，$k\in N$，则

$$-3\leqslant(-1)^{nk+1}\sum\cos nA\leqslant 3/2,\quad(-1)\leqslant(-1)^{nk+1}\prod\cos nA\leqslant\frac{1}{8}.$$

(14)　$\sum(\cos mA)^2\geqslant 3/4\quad(m\in Z)$.

(15)　$|\sum\cos(nA/2)|\leqslant 3\sqrt{3}/2$　(n 为奇数).

(16) $\sum[\cos(k-(1/2))A]^2 \leqslant 9/4.$

(17) $\sum(\cos 2A)^2 \leqslant 3-6(r/R)^2-12(r/R)^4 \leqslant 3-36(r/R)^4.$ {等正}

4. (1) $1+\frac{\sqrt{3}p}{9R} \leqslant \sum\sin(\frac{A}{2}) \leqslant 1+\frac{p}{4R}-\frac{(3\sqrt{3}-4)r}{4R}$;

(2) $1+\frac{\sqrt{2}-1}{2R}p-\frac{3\sqrt{6}-3\sqrt{3}-2}{2R}r \leqslant \sum\sin(\frac{A}{2}) \leqslant \sqrt{2}+\frac{3-2\sqrt{2}}{R}r$;

(3) $\sum\sin(\frac{A}{2}) \geqslant 1+\sqrt{\frac{r}{2R}} \geqslant 1+\frac{3\sqrt{3}}{2p}r$. (杨学枝,尹华焱,[100]591 ~ 592)

(4) $\sum(\sin\frac{A}{2})^{2n} \geqslant \frac{3}{4^n}$;

(5) $\frac{3\sqrt{2}}{4}(4^{1/3}-1) < \sum\sin\frac{A}{4} < \frac{\sqrt{2}}{4}(3\sqrt{3}-1)$;

(6) $\frac{3}{4}(2-\sqrt{3}) \leqslant \sum(\sin\frac{A}{4})^2 < \frac{1}{2}$;

5. 令 $f(n)=\sum(\cos\frac{A}{2})^n$. 则

(1) $2 < f(2) \leqslant 9/4$ (Kooistra, 1957);

(2) $1+(1/\sqrt{2}) < f(3) < 2$.

(左边不等式见陈胜利等,[100]418 ~ 420,右边不等式属于陈计,1992)

(3) $3/2 < f(4) < 2$. (陈计)

(4) $\frac{5}{4} < f(6) < 2$; $f(7) \geqslant \frac{81\sqrt{3}}{128}$; $\frac{243}{256} \leqslant f(8) < 2$. (陈计)

(5) $n > 7$ 时 $f(n) \geqslant \frac{3^\alpha}{2^n}$. {等正},式中 $\alpha = 1+\frac{n}{2}$.

(6) 当 $3 \leqslant n \leqslant 6$ 时, $f(n) \leqslant 2-\left[4-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right]\left(\frac{r}{R}\right)$. (吴善和,[100]588)

(7) $\sum\cos(\frac{A}{2}) \leqslant 2+\frac{p}{4R}-\frac{16-9\sqrt{3}}{4R}r$. (杨学枝等,[100]589)

(8) $2-\frac{2-\sqrt{2}}{4}\left(\frac{p}{R}\right)+\frac{15\sqrt{3}-3\sqrt{6}-16}{4}\left(\frac{r}{R}\right) \leqslant \sum\left(\cos\frac{A}{2}\right)^3$

$\leqslant \sum\left(\sin\frac{A}{2}\right)^3+1+\frac{9\sqrt{3}-11}{4}\left(\frac{r}{R}\right)$. (杨学枝等,[100]588 ~ 589)

(9) $\sum\left(\cos\frac{A}{2}\right)^3 \leqslant \sum\cos(\frac{A}{2})-\prod\cos(\frac{A}{2})$.

(尹华焱,Neuger 不等式的改进,[100]587)

(10) 对{锐}, $\sum\left(\cos\frac{A}{2}\right)^3 \leqslant \frac{53\sqrt{3}}{48}+\frac{\sqrt{3}r}{24R} \leqslant \frac{9\sqrt{3}}{8}$. (杨学枝等,[100]420 ~ 421)

(11) $2+\frac{\sqrt{2}-1}{2R}p+\frac{9\sqrt{3}-3\sqrt{6}-8}{2R}r \leqslant \sum\cos(\frac{A}{2}) \leqslant \sqrt{2}+1+\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}-2}{R}r$.

(12)　$\sum\cos(\frac{A}{2})\leqslant 2+\frac{p}{4R}-\frac{16-9\sqrt{3}}{4R}r$.(杨学校等,[100]589,591)

(13)　$\min\left\{1+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n;2;3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right\}\leqslant\sum\left(\cos\frac{A}{2}\right)^n$

$$\leqslant\max\left\{1+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n;2;3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right\},n\geqslant 2.$$ (杨寅,[345]1997,4:25)

6. (1)　$\frac{5}{2}<\sum\left(\cos\frac{A}{4}\right)^2<\frac{3}{4}(2+\sqrt{3})$;

(2)　$\frac{\sqrt{2}}{4}(2+3\sqrt[3]{4})<\sum\cos\frac{A}{4}<\frac{3\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$.

7. (1)　$1+\sum\cos A<\sum\sin A\leqslant 3(\sqrt{3}-1)/2+\sum\cos A$.

对于{锐},$1<\sum\cos A<\sum\sin A$.（左边不等式对一般三角形也成立）

(2)　$\sum\sin 2A\leqslant\sum\sin A\leqslant\sum\cos(A/2)\leqslant 3\sqrt{3}/2$.

8.　$-\sum\cos 2A\leqslant\sum\cos A\leqslant\sum\sin(A/2)\leqslant 3/2$.

9.　$\sum A=k\pi,k,m\in N,m\geqslant 2$,令 $S_m=\sum[(\sin(nA)]^{2m}+(\cos(nA))^{2m}]$,则

$$\max\left\{\frac{9}{4^m}\binom{2m}{m}-\frac{3}{2},\frac{3}{2^{m-1}}\right\}\leqslant S_m\leqslant 3.$$

[19]97 ~ 99 给出了它的证明,并指出,当 m 比较大时,下界并不是最好的,如何改进它的下界?在三角形中,成立 $5/2<\sum[(\sin(A/4))^4+(\cos(A/4))^4]\leqslant 21/8$.

10. (1)　**Garfunkel 不等式:**

$(2/\sqrt{3})\sum\sin A\leqslant\sum\cos((A-B)/2)\leqslant(2/\sqrt{3})\sum\cos(A/2)$,　　{等正}

([381].1985,11:288)

(2)　$1+\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{p}{R})+\frac{8-3\sqrt{6}}{2}(\frac{r}{R})\leqslant\sum\cos(\frac{A-B}{2})\leqslant 1+\sqrt{2}+(4-2\sqrt{2})(\frac{r}{R})$.

(杨学校等,[100]591)

11.　$3\sqrt{3r/(2R)}\leqslant\sum\sqrt{\sin A\sin B}\leqslant S/(Rr)$.

左边不等式在正三角形时成立等号.([19]180,186)

12.　**Bager 不等式:**

$$\sum\cos(B-C)\leqslant(1+(2r/R))\sum\cos A.$$ {等正}

13.　**Janous 不等式:**令 $g(n)=\left|\sum\sin n(B-C)\right|$,则 $g(1)<1;g(2)<3\sqrt{3}/2$;$n\geqslant 3$ 时,$g(n)\leqslant 3\sqrt{3}/2$.([381]1987,13:179)

14.　$\sin^2A+\lambda(\sin^2B+\sin^2C)\leqslant 1+\lambda+(1/4)\lambda^2,(\lambda>0)$,

仅当 $\lambda<2,B=C=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arccos\frac{\lambda}{2}$ 时等号成立,特别地,有

$$\sin^2A+\sin B\sin C\leqslant 25/16.$$ (宋庆,[350]1996,2)

15. $1<\sum\cos A\leqslant\sum\sin(A/2)$.

16. $3\sum\sin^2A-2\sum\cos^3A\leqslant 6$.

17. $\sum\sin^2A\leqslant\sum[\cos(A/2)]^2\leqslant 9/4\leqslant 3\sum[\sin(A/2)]^2\leqslant 3\sum\cos^2A$.

18. (1) $\sum\cos A\geqslant(3/4)+6\prod\sin(A/2)$;

(2) $\sum\cos A\geqslant(\frac{1}{2})+\prod\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)$.

(3) $\prod\cos(B-C)>-\frac{1}{8}$.(宋庆,[100]589)

19. 对于{锐},有$\sum\sin^2A+\sum\sin(2A)<16\{\prod\cos(A/2)\}^2$.

20. $\sum(\sin A)^3\leqslant(\sum\sin A)(\sum\sin^2(A/2))$.

21. $\left[\frac{\sum\sin A}{\sum\cos(A/2)}\right]^3\geqslant 8\prod\sin(A/2)$,只对 Bager I 型三角形成立.即$A\leqslant B\leqslant C$,且$B\geqslant\pi/3$.([381]1985,11:325;1987,13:132 ~ 133)

22. $\frac{9r}{2R}\leqslant 5\left(\frac{r}{R}\right)-(\frac{r}{R})^2\leqslant\sum\sin A\sin B\leqslant(1+r/R)^2\leqslant 9/4$. {等正}

23. $\sum\sin A\sin B\leqslant\frac{p^2}{3R^2}$; $\sum\sin A\sin B\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{4}$. {等正}

提示:$\sum\sin A\sin B=(1/4)[(p/R)^2+(r/R)^2+4(r/R)]$.

24. (1) $\sum\sin 2A\sin 2B\leqslant 5(r/R)^2+8(r/R)^3\leqslant 9(r/R)^2$.

(2) $\frac{p}{2R}+\frac{\sqrt{2}-1}{4}(\frac{p}{R})^2-\frac{27(\sqrt{2}-1)}{8}(\frac{r}{R})\leqslant\sum\sin A\sin(\frac{A}{2})$

$\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{p}{R})-\frac{r}{R}-(3\sqrt{6}-3\sqrt{3}-2)(\frac{r}{R})^2$.(尹华焱等,[100]587)

(3) $\sum\sin A(\sin\frac{A}{2})^2\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{8}$.{锐}.(刘保乾等,[100]592)

25. $(7/2)(r/R)-1\leqslant 4(r/R)-(r/R)^2-1\leqslant\sum\cos A\cos B$

$\leqslant(r/R)+(r/R)^2\leqslant 3r/(2R)\leqslant 3/4$. {等正}

26. 若$0\leqslant t\leqslant 1$,则$\cos^2(t\pi/4)+2\cos(t\pi/4)\leqslant\sum\cos tA\cos tB\leqslant 1+2\cos(t\pi/2)$,对于{锐},上限为$3\cos^2(t\pi/6)$.([381]1987,13:181 ~ 183)

27. **Janous 不等式:**

$3/4\leqslant 1-(r/R)^2\leqslant\sum\cos A-\sum\cos A\cos B<2-3(r/R)+(r/R)^2<2$,

对于{锐},上限为 1,对于{钝},下限为$(2\sqrt{2}-1)/2$,由此推出$\sum\cos A\cos B\leqslant 3/4$.

28. $0<1/(3\sqrt{3})[(32-15\sqrt{3})(r/R)-(10-3\sqrt{3})(r/R)^2]$

$\leqslant\sum\sin A-\sum\sin A\sin B<1$.

29. 对于非钝角三角形，有

$$4\sum(\cos A\cos B)^2 \leqslant \sum\cos^2 A;\ \sum(\cos A\cos B)^2 \leqslant (1/4) - 4\prod(\cos A)^2.$$

(Oppenheim, A. [305](1965, 12:1129)) 其中等号仅在正三角形或等腰直角三角形时成立.

30. (1) $3(7r-2R)/(2R) \leqslant 3\sum\cos A\cos B \leqslant \sum\sin A\sin B$

$\leqslant 3\sum\sin(A/2)\sin(B/2) \leqslant \sum\cos(A/2)\cos(B/2) \leqslant 9/4.$ {等正}

(2) $1+\frac{2\sqrt{2}-1}{4}\left(\frac{p}{R}\right)+\frac{10+3\sqrt{3}-6\sqrt{6}}{4}\left(\frac{r}{R}\right) \leqslant \sum\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$

$\leqslant \sqrt{2}+\frac{1}{4}\left(\frac{p}{R}\right)+\frac{18-3\sqrt{3}-8\sqrt{2}}{4}\left(\frac{r}{R}\right) \leqslant \frac{1}{2}+\sqrt{2}+\left(\frac{7-4\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{r}{R}\right);$

(杨学枝等, [100]591)

31. (1) $9\sqrt{3}r/(4p) \leqslant \sum\sin(A/2)\sin(B/2) \leqslant 5/8+r/(4R) \leqslant 3/4.$

提示：利用面积公式和正弦定理.([348]1989.7)

(2) $\frac{p}{4R}+\frac{6-3\sqrt{3}}{4}\left(\frac{r}{R}\right) \leqslant \sum\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} \leqslant \frac{1}{2}+\frac{r}{2R}.$ (杨学枝等, [100]591)

32. $\sum\sin A\sin(A/2) \leqslant 4/\sqrt{3};\quad \sum\sin(A/2)\cos(B/2) \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{4}.$

33. $3r/(8R) \leqslant (1/4)[2(r/R)-(r/R)^2] \leqslant \sum[\sin(A/2)\sin(B/2)]^2$

$\leqslant (1/4)[1-(r/R)+(r/R)^2] \leqslant (1/8)(2-(r/R)).$ {等正}

34. $\sum[\cos(A/2)\cos(B/2)]^2 \geqslant (1/4)(p/R)^2;$

$27r/(8R) \leqslant 1+11r/(8R) \leqslant 1+(3/2)(r/R)-(r/2R)^2 \leqslant \sum[\cos(A/2)\cos(B/2)]^2$

$\leqslant (1/4)[5+3(r/R)+(r/R)^2] \leqslant (10R+7r)/(8R) \leqslant 27/16.$ {等正}

35. $3/4 \leqslant \sum\sin(A/2)-\sum\sin(A/2)\sin(B/2) < 1$，对于{锐}，上限为$(2\sqrt{2}-1)/2$，对于{钝}，下限为$\sqrt{2-\sqrt{2}}(1-1/\sqrt{2})+(3\sqrt{2}-2)/4$.

36. **Klamkin 不等式：**

$$2\sum\sin(A/2)\sin(B/2) \leqslant \left(\sum\sin A\sin B\right)^{1/2} \leqslant \sum\cos A \leqslant \sum\sin(A/2).$$

37. $\sum(\sin(A/2)\sqrt{\sin B\sin C}) \leqslant p/(2R).$ {等正}

38. $\sum(\cos(A/2)\sqrt{\sin B\sin C}) \leqslant p/R.$ ([363]1969, B20:663～664) {等正}

39. $9/16 \leqslant (1/4)[3-(r/R)-(r/R)^2]$

$\leqslant \sum\cos^2(A/2)-\sum(\cos(A/2)\cos(B/2))]^2$

$= \sum\sin^2(A/2)-\sum[\sin(A/2)\sin(B/2)]^2$

$\leqslant 1-(r/R)+(1/4)(r/R)^2 \leqslant 1-7r/(8R) < 1.$

40.　**Janous 不等式：**

$$15/8 \leqslant 2-(1/2)(r/R)^2 \leqslant \sum[\sin^4(A/2)]+\cos^4(B/2)]$$
$$\leqslant 3[1-(r/R)+(1/2)(r/R)^2]<3.$$ {等正}

41.　$\sum\cos^3(A/2)\cos((B-C)/2)\leqslant 9\sqrt{3}/8.$ {等正}

42.　$\sum[\sin(A/2)+\sin(B/2)]^2\leqslant 3.$

43.　若 $t>0$，令 $\alpha=1+(t/2)$，则

$$\sum(\sin A)^t \geqslant 3(\prod\sin A)^{t/3}\geqslant 3^{\alpha}(r^2/2R^2)^{t/3}\geqslant 3^{\alpha}(r/R)^t.$$ {等正}

44.　$\sum\sin^2(A/2)\geqslant 1-(1/4)\prod\cos(\frac{A-B}{2}).$

45.　$12\sqrt{3}(r/R)^2\leqslant(3\sqrt{3}/2)(r/R)^2[9-2(r/R)]\leqslant\prod(\sin A+\sin B)$

$\leqslant(p/R)[1+(3/2)(r/R)+(r/R)^2]\leqslant 3\sqrt{3}.$ {等正}

46.　(1)　$8\prod\sin A\leqslant\prod(\sin A+\sin B)\leqslant 2\sum\sin A\leqslant 2\sum\sin((A/2)+B).$

(2)　$\prod\sin\frac{A}{4}+\prod\cos\frac{A}{4}\leqslant\frac{1}{4}(12+\frac{3r}{R})^{1/2}$.（黄汉生，[100]585）

47.　$0<\prod\sin A\leqslant 3\sqrt{3}/8$，对于{钝}，上限为 1/2.

提示：利用 $f(x)=\lg\sin x$ 在 $(0,\pi)$ 上的凹性，若利用 Schur 凸函数（第 7 章 §1）. 可以进一步证明　$\prod\sin A\geqslant\sqrt{3}/4$.

48.　$3\sqrt{3}r^2/(2R^2)\leqslant\prod\sin A\leqslant(r/R)+(3\sqrt{3}/2-2)(r/R)^2$

$\leqslant 3\sqrt{3}r/(4R)<3\sqrt{3}/8$.（[19]181） {等正}

49.（1）　$(2pr/R^2)[6(r/R)-2-3(r/R)^2]\leqslant\prod\sin 2A\leqslant 2pr^3/R^4$

$\leqslant 4(r/R)^3+2(3\sqrt{3}-4)(r/R)^4\leqslant 3\sqrt{3}(r/R)^3\leqslant 3\sqrt{3}/8.$ {等正}

(2)　$\prod\sin 2A\leqslant 2S/R^2$.（[165]121）

50.　设 $\sum A=k\pi, k\in N, x,y,z$ 为正数，则

$$\prod|\sin nA|^x\leqslant\left[\frac{(\sum xy)^2}{4(\prod x)(\sum x)}\right]^{(\sum x)/2}.$$

特别，$\prod|\sin nA|\leqslant 3\sqrt{3}/8$. 提示：利用加权均值不等式（第一章 §3）.

51.　$$\prod\sin(\frac{nA}{2})\begin{cases}\leqslant 1/8, & n=4m+1,\\ \geqslant -1/8, & n=4m-1,\end{cases}$$

$m\in Z$，特别 $0<\prod\sin(A/2)\leqslant 1/8$. {等正}

52.　令 $f(x,y,z)=\sin(xA)\sin(yB)\sin(zC)$.

(1)　$f(1,1,1/2)\leqslant 2\sqrt{3}/9$，仅当 $A=B, \cos A=\sqrt{3}/3$ 时，等号成立.

(2)　$f(1/2,1/2,1)\leqslant\frac{1}{54}(2\sqrt{13}-5)\sqrt{2\sqrt{13}+22}$，仅当 $A=B$，且 $\cos A=(\sqrt{13}$

$-1)/6$ 时等号成立.

(3) $f(1/4,1/4,1/2)\leqslant(5\sqrt{10}-14)/54$,仅当 $A=B,\cos(A/2)=(\sqrt{10}+2)/6$ 时等号成立.([305]1937,44:579 ~ 583)

我们要问:当实数 x,y,z 不全相等时,如何求出 $f(x,y,z)$ 的上下界?

53. $9r/(4R)-1\leqslant 3(r/R)-1-(3/2)(r/R)^2\leqslant\prod\cos A\leqslant(1/2)(r/R)^2\leqslant 1/8$.

对于{锐},$0\leqslant\prod\cos A\leqslant 1/8$,左边等号在直角三角形时成立;

对于{钝},$-1\leqslant\prod\cos A\leqslant 0$.

54. 设 $\sum A=k\pi,k\in N$,则

$$-1\leqslant(-1)^{nk+1}\prod\cos nA\leqslant 1/8.$$

55. 设 $\sum A=k\pi$,k 为奇数,则 $\left|\prod\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)A\right|\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

56. $\frac{abc}{8R^3}<\prod\cos\frac{A}{2}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{8}$,对于{锐},下限为 $1/2$,对于{钝},上限为 $(1+\sqrt{2})/4$.

提示:利用 $f(x)=\lg\cos x$ 在 $(0,\pi/2)$ 上的凹性.

57. $72\prod\cos A\leqslant 12\sum\cos A\cos B\leqslant 3\sum\cos(A-B)\leqslant 16\left(\sum\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right)^2$

$$\leqslant 4\sum\sin A\sin B\leqslant 9\prod\cos\frac{A-B}{2}\leqslant 6\sum\cos A. \quad \{等正\}$$

([19]157 和孙建斌等,中学数学(湖北)1993.2)

58. $(2r/R)^2\leqslant(r/2R)^2(9-2(r/R))\leqslant\prod(\cos A+\cos B)$

$$\leqslant(r/R)+(3/2)(r/R)^2+(r/R)^3\leqslant 1. \quad \{等正\}$$

59. $\prod\cos A\leqslant 8\prod\left(\sin\frac{A}{2}\right)^2\leqslant\frac{1}{3\sqrt{3}}\prod\sin A\leqslant\prod\sin\frac{A}{2}\leqslant\frac{1}{3\sqrt{3}}\prod\cos\frac{A}{2}$

$$\leqslant\prod\sin\frac{\pi-A}{4}\leqslant\frac{1}{3\sqrt{3}}\prod\cos\frac{\pi-A}{4}\leqslant\frac{1}{8}. \quad \{等正\}$$

60. (1) $\prod\cos A\leqslant\prod(1-\cos A)$;

(2) $\left(2-\frac{3\sqrt{3}r}{p}\right)\prod\cos A\leqslant\prod(1-\cos A)$. {锐}.

61. $24\prod\cos A\leqslant\sum\cos^2(A-B)$.

提示:利用 $(x+y)^2\geqslant 4xy$ 和 $\cos A=-\cos(B+C)$ 证明 $\cos^2(B-C)\geqslant 8\prod\cos A$.

62. $1+\prod\cos A\geqslant\sqrt{3}\prod\sin A$.

对于{钝},$\sqrt{3}$ 可改为 2.([6]197)

63. 设 $0<t\leqslant 1/2$,令 $\alpha=t\pi/3$,则 $\cos(3\alpha)\leqslant\prod\cos(tA)+\prod\sin(tA)$

$$\leqslant\sin^3\alpha+\cos^3\alpha.$$ ([381]1987,13:154 ~ 156)

64.　$\sqrt{2}/2 < \prod\cos(A/4) + \prod\sin(A/4) \leqslant 3\sqrt{6}/8$.

65.　$\prod\cos(2^nA) + \prod(1+\cos(2^nA)) \geqslant 0$，$n=1$ 时就是 **Bottema** 不等式.
([381]1982，8：296～297，1983，9：113，1984，10：228～229，320，或[19]154～155)

66.　对于{锐}，有

$\sum(\sin A)^{\cos A} > \sum(\cos A)^{\sin A}$；$\prod(\sin A)^{\cos A} > \prod(\cos A)^{\sin A}$.

67.　$\sum(1+\cos 2A)/(1+\cos A) > 1$. 它等价于 G-B 不等式. (No. 163)

68.　$\sum\dfrac{\cos(B/2)\cos(C/2)}{\sin(A/2)} \geqslant \dfrac{9}{2}$.

69.　$5-\dfrac{r}{R} \leqslant \sum\dfrac{\cos(B/2)\cos(C/2)}{\sin(A/2)} \leqslant \dfrac{(R+r)^2}{rR}$.　{等正}

70.　$6 \leqslant 7-2(r/R) \leqslant \sum(\sin A+\sin B)/\sin C \leqslant 1+2(R/r)+2(r/R) \leqslant 3R/r$.
{等正}

71.（1）　$\sum\dfrac{\sin(A/2)}{\sin(B/2)\cos(C/2)} \geqslant 2\sqrt{3}$；（2）　$\dfrac{\sum\cos(3A)}{\sum\cos A} \geqslant -2$.

72.　对于{锐}，有

$$\frac{\sum\sin(2A)}{\sum\sin(4A)} \leqslant -1.$$

提示：利用 $\sum\sin(2A) = 4\prod\sin A$，$\sum\sin(4A) = -4\prod\sin(2A)$，证明

$$\prod\sin(2A) \leqslant \prod\sin A.$$

73.　$\sum(\cos^2A+\cos^2B)/(\cos A+\cos B) \geqslant 1+(r/R)$.

74.（1）　$\sum\sin(A+B)/(\sin A+\sin B) \geqslant 3/2$.

提示：由三角形内角和公式与正弦定理，转化为代数不等式 $\sum a/(b+c) \geqslant 3/2$. (Ch3. No. 34(20))

（2）　$\sum\dfrac{\cos^2A}{\sin B\sin C} \geqslant 1$.　(安振平，[351]2008(1)：119～122).

（3）　$\dfrac{15}{4}-\dfrac{3R}{4r} \leqslant \sin B\sin C+2\cos(B/2)\cos(C/2) \leqslant 2+\dfrac{r}{2R}$.

（4）　$\dfrac{7r}{2R}-1 \leqslant \cos B\cos C+2\sin(B/2)\sin(C/2) \leqslant 1-\dfrac{r}{2R}$.

(杨志明、褚小光，[351]2004(1)：91～95；2005(1)：84～85)

75.　对于{锐}，有 $\sum\dfrac{2}{A}\sin\dfrac{A}{2} \leqslant \dfrac{9}{\pi}$.

76.　对于{锐}，有 $\sum\dfrac{\sin A}{A} \leqslant \dfrac{9\sqrt{3}}{2\pi}$.

提示：利用 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 在 $(0,\pi/2)$ 上的凸性.

77. [MCM]. $2\sum\frac{\sin A}{A}\leqslant\sum\left(\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right)\sin A$.

提示：考虑矩阵模型：

$$M=\begin{pmatrix}\sin A & \sin B & \sin C\\ \frac{1}{A} & \frac{1}{B} & \frac{1}{C}\end{pmatrix}\ (\text{全反序}),\quad M_1=\begin{pmatrix}\sin A & \sin B & \sin C\\ \frac{1}{B} & \frac{1}{C} & \frac{1}{A}\end{pmatrix}\ (\text{乱序 }1),$$

$$M_2=\begin{pmatrix}\sin A & \sin B & \sin C\\ \frac{1}{C} & \frac{1}{A} & \frac{1}{B}\end{pmatrix}\ (\text{乱序 }2).$$

由第 3 章 No. 86 排序不等式有 $S(M)\leqslant S(M_1)$，$S(M)\leqslant S(M_2)$，于是

$$2S(M)\leqslant S(M_1)+S(M_2).$$

78. $A\cos B+\sin A\cos C>0$. ([305]1957,64:24)

79. $\prod\sin A\leqslant\left(\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\right)^3\prod A$.

80. $0<\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}<1+\sqrt{2}$.

81. $\sin(A/2)+\sin(B/2)+\cos(C/2)\geqslant\sin A+\sin B-\sin C$.

82. $0<\cos^2(A/2)+\cos^2(B/2)-\cos^2(C/2)<2$.

83. 设 $C\geqslant\pi/2$，则

(1) $1<\sin A+\sin B-\cos C\leqslant 3/2$； (2) $3/4\leqslant\sin^2A+\sin^2B+\cos^2C<1$；

(3) $2<\cos A+\cos B+\sin C\leqslant 3\sqrt{3}/2$； (4) $2<\cos^2A+\cos^2B+\sin^2C\leqslant 9/4$.

84. 对于{锐}，有

(1) $0<\cos A+\cos B+\sin C<1+\sqrt{2}$.

(2) [MCM]. $A<B<C\Rightarrow\sin 2C<\sin 2B<\sin 2A$. ([38]1357)

85. 若 A,B 均小于 $\pi/2$，则 $\cos A+\cos B-\sin C>0$；
若 $A>\pi/2$ 或 $B<\pi/2$，则不等号反向.

86. $\cos A+\cos B-2\sin\frac{C}{2}\leqslant 0$.

87. **Andrica 不等式：**

$\sin^2B+\sin^2C\leqslant 1+2\sin B\sin C\cos A$. ([363]1976,81:337)

88. 若 t 为实数，则

$$t(t-2)\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\geqslant 0.$$

提示：考虑关于 t 的二次式 $t^2\sin\frac{A}{2}-2t\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{B-C}{2}$ 的判别式.

89. 设 $A+B+C=k\pi$，则

(1)　$\left|\sum \sin nA\cos nB\cos nC\right| \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}$.　([22]434)

(2)　$\frac{3}{2}(\prod \sin^2 nA)^{1/3} \leqslant (-1)^{nk+1}\sum \cos nA\sin nB\sin nC \leqslant \frac{9}{8}$.　([22]435)

(3)　$\sin(nA)\sin(nB) \leqslant \begin{cases}\sin^2(nC/2), n \text{ 或 } k \text{ 为偶数,} \\ \cos^2(nC/2), n \text{ 和 } k \text{ 为奇数.}\end{cases}$ ([19]93)

90.　设 $C \geqslant \pi/2$,则　$-1/8 \leqslant \sin A\sin B\cos C < 0$.

91.　对于{锐},有 $0 < \cos A\cos B\sin C < 3\sqrt{3}/8$.

92. (1)　$\sin A + (\sin B)^2 + (\sin C)^2 \leqslant 1 + \sqrt{2}$;

(2)　$(\cos A)^2 + \cos B + \cos C > \frac{3}{4}$;

(3)　$\cos A + (\cos B)^2 + (\cos C)^2 > \frac{3}{4}$;

(4)　设 λ 为实数,则 $\cos A + \lambda(\sin 2B + \sin 2C)$,　$\sin A + \lambda(\cos 2B + \cos 2C)$, $\sin\frac{A}{2} + \lambda(\sin B + \sin C)$,　$\cos\frac{A}{2} + \lambda(\cos B + \cos C)$ 的上界均为 $\sqrt{1+4\lambda^2}$.

$\cos 2A + \lambda(\sin 2B + \sin 2C) \leqslant 1 + (\lambda^2/2)$.

(宋庆,中学数学,1999,6:43 ~ 44)

93. (1)　$\sum\sqrt{1-\cos A\cos B} \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$;　(2)　$\sum\sqrt{1-\sin A\sin B} \geqslant \frac{3}{2}$.

(张善立等,[100]586)

94.　设 $t \geqslant 0$,则 $\sum(\operatorname{tg}A)^t \geqslant 3^\alpha$,　{锐}　{等正}

式中 $\alpha = 1 + (t/2)$;若再令 $\beta = (t+2)/9$,则当 $t \geqslant 1$ 时,成立

$$\sum(\operatorname{tg}A)^t \geqslant 3^{3\beta}(\sum \operatorname{tg}A)^\beta \geqslant 3^\alpha > 3 + (3t/2).$$ ([19]135 和[3]117)

当 $t \geqslant 1$ 时,可利用 $f(x) = (\operatorname{tg}x)^t$ 在 $(0,\pi/2)$ 上的凸性.

95.　对于{锐},$\sum \operatorname{tg}A = \prod \operatorname{tg}A \geqslant 3\sum \operatorname{ctg}A \geqslant 3\sqrt{3}$.

96.　对于{钝},$\sum \operatorname{tg}A < 0$, $\prod \operatorname{tg}A < 0$.

97.　$\sum_{k=1}^{n}[\sum(\operatorname{tg}A)^{2k}] \geqslant \frac{9}{2}(3^n - 1)$. ([348]1987,7:33,31)　{等正}

98.　设 $t \geqslant 1$, $\beta = 1 - (t/2)$, $\sum A = k\pi, k \in N$,则 $\sum|\operatorname{tg}(n+1/2)A|^t \geqslant 3^\beta$; $\sum|\operatorname{ctg}nA|^t \geqslant 3^\beta$. 特别,对于{锐},$\sum \operatorname{ctg}^2 A \geqslant 1$,([19]93 ~ 94) 但若 $0 < t < 1$, $\sum A = k\pi, k \in N$,([19]98 ~ 99) 提出:当 k 为奇数,n 为非负整数时,$\sum|\operatorname{tg}(n+1/2)A|^t$ 和当 n 为自然数时,$\sum|\operatorname{ctg}nA|^t$ 的最佳下界是什么?

99.　$\sqrt{3} \leqslant (3/p)(2R - r) \leqslant \sum \operatorname{ctg}A \leqslant (2R^2 + r^2)/(pr) \leqslant (\sqrt{3}/4)(R/r)^2$.

{等正}

100. (1) $\sum \operatorname{ctg} A \geqslant p/(3r)$; (2) $\sum \operatorname{ctg} A \geqslant \sqrt{\frac{9R}{4r} - \frac{3}{2}}$. {等正}

101. $1 \leqslant \frac{9(2R-r)^2}{4R^2+4Rr+3r^2} - 2 \leqslant \sum \operatorname{ctg}^2 A \leqslant \frac{(2R^2+r^2)^2}{r^3(16R-5r)} - 2 \leqslant \frac{3R^3}{8r^3} - 2$. {等正}

102. $\sum \operatorname{ctg}^2 A \geqslant \frac{p^2}{9r^2} - 2$. {等正}

103. 对于{锐}, $\sum \operatorname{ctg} 2A < 0$.

104. $\sum (\operatorname{ctg}(A/2))^t - \sum (\operatorname{tg}(A/2))^t \geqslant 3^\alpha - 3^\beta$, 式中 $\alpha = 1 + (t/2)$, $\beta = 1 - (t/2)$, $0 < t < 1$, 或 $t > 2$.

提示: $f(x) = (\operatorname{tg} x)^t$ 在 $[0, \pi/2]$ 上当 $t > 2$ 或 $0 < t < 1$ 时是三阶凸函数. 于是可以利用本节前面的定理 4.

105. 若 $t \geqslant 1$, 令 $\beta = 1 - (t/2)$, 则 $\sum (\operatorname{tg}(A/2))^t \geqslant 3^\beta$. {等正}

提示: 利用 $f(x) = (\operatorname{tg} x)^t (t \geqslant 1)$ 在 $(0, \pi/2)$ 上的凸性. 特别地, 有

$$\sum \operatorname{tg}(A/2) \geqslant \sqrt{3}, \quad \sum \operatorname{tg}^6(A/2) \geqslant 1/9.$$

106. $\frac{2\sqrt{3}r}{R} \leqslant \frac{2(4R+r)}{3\sqrt{3}R} \leqslant \frac{4R+r}{2R+(3\sqrt{3}-4)r} \leqslant \sum \operatorname{tg} \frac{A}{2} \leqslant \frac{4R+r}{3\sqrt{3}r} \leqslant \frac{\sqrt{3}R}{2r}$. {等正}

107. $\sum \operatorname{tg} \frac{A}{2} \leqslant \frac{9Rr}{2S}$; $\sum \operatorname{tg} \frac{A}{2} \leqslant \frac{p}{3r}$. {等正}

108. $3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{3t} \leqslant \sum \operatorname{tg} \frac{A}{t} < \operatorname{tg} \frac{\pi}{t}, (t \geqslant 2)$.

提示: 利用 $f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{t} (t \geqslant 2)$ 在 $(0, \pi)$ 上的凸性.

109. (1) $\frac{2(6r^2 - R^2)}{R^2} \leqslant 2 - \frac{2r}{R} \leqslant \sum \left(\tan \frac{A}{2}\right)^2 \leqslant \frac{3R^2 - 8r^2}{4r^2}$. {等正}

(2) $1 \leqslant \frac{16}{9}\left[\sum \left(\sin \frac{A}{2}\right)^2\right]^2 \leqslant \sum \operatorname{tg}^2\left(\frac{A}{2}\right) \leqslant \frac{16R^2 - 24Rr + 11r^2}{r(16R-5r)}$. {等正}

110. $\frac{1}{\sqrt{3}} \leqslant \sum \operatorname{tg}^3\left(\frac{A}{2}\right) \leqslant \frac{9R^3}{8\sqrt{3}r^3} - \frac{8}{\sqrt{3}}$; $\sum \operatorname{tg}^3\left(\frac{A}{2}\right) \geqslant \frac{3r}{p}$. {等正}

(更好的下界估计见[19]183)

111. $\sum \operatorname{tg}^2(A/t) \geqslant 3 \operatorname{tg}^2(\pi/3t)$. $(t \geqslant 2)$.

112. 对于{锐}, $\sum \operatorname{ctg} A \leqslant -\sum \operatorname{ctg}(2A)$.

113. (1) 令 $\alpha = 1 + (m/2)$, $m \in Z$, 则 $\sum \left(\operatorname{ctg} \frac{A}{2}\right)^m \geqslant 3^\alpha$.

(2) $3^{1-\frac{n}{2}} \leqslant \sum \left(\operatorname{tg} \frac{A}{2}\right)^n \leqslant \sum (\operatorname{ctg} A)^n$.

114. $3\sqrt{3} \leqslant \left(1 + \frac{13R}{r}\right)^{1/2} \leqslant \sum \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \leqslant 2\left(\frac{R}{r}\right) + 3\sqrt{3} - 4 \leqslant \frac{3\sqrt{3}R}{(2r)}$. {等正}

115. (1)　$9R/2r \leqslant (8R/r)-7 \leqslant \sum \mathrm{ctg}^2(A/2) \leqslant [2(R/r)-1]^2$.　{等正}

116.　$\sum \mathrm{ctg}^2(A/2) \geqslant p^2/(3r^2)$.　{等正}

117.　$\sum \mathrm{ctg}^2(A/2) \geqslant [\sum \mathrm{ctg}(A/2)] \sum \mathrm{ctg}A$.

提示：令 $x=\mathrm{ctg}(A/2), y=\mathrm{ctg}(B/2), z=\mathrm{ctg}(C/2)$，转化为代数不等式.([3]2.44)

118.　$9\sqrt{3} \leqslant 9\sqrt{3}(\frac{R}{2r}) \leqslant 3\sqrt{3}[(\frac{4R}{r})-5] \leqslant \sum \mathrm{ctg}^3(\frac{A}{2})$

$\leqslant 3\sqrt{3}[2(\frac{R}{r})^3-4(\frac{R}{r})^2+\frac{3R}{2r}]$.　{等正}

119.　$\sum \sqrt{\mathrm{tg}(A/2)} \leqslant 3\cdot\sqrt{(4R+r)/(3p)}$.　{等正}

120.　$\sum \sqrt{\mathrm{ctg}(A/2)} \leqslant \sqrt{3p/r}$.　{等正}

121.　$\sum \mathrm{ctg}(A/4) \geqslant 3(2-\sqrt{3})+(2p/r) \geqslant 6+(p/r) \geqslant 3(2+\sqrt{3})$.　{等正}

122.　$1<\sum \mathrm{tg}(A/2)\mathrm{tg}(B/2)<\sqrt{3}$.

123.　$\sum [(\mathrm{tg}(A/2)\mathrm{tg}(B/2)]^2 \geqslant (8R-7r)/(16R-5r) \geqslant 1/3$.

124.　$\sum \sqrt{\mathrm{tg}(A/2)\mathrm{tg}(C/2)+5} \leqslant 4\sqrt{3}$.

125.　$9 \leqslant \sum \mathrm{ctg}(A/2)\mathrm{ctg}(B/2)=4(R/r)+1 \leqslant 9R/(2r)$.

126.　$\sum \mathrm{ctg}(A/2)\mathrm{ctg}(B/2)-\sum \mathrm{ctg}(A/2) \geqslant 5-3\sqrt{3}+2(R/r) \geqslant 9-3\sqrt{3}$.

127.　设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，则

(1)　$\sum \mathrm{tg}A\mathrm{tg}B \geqslant \sum \mathrm{ctg}(A/2)\mathrm{ctg}(B/2) \geqslant 9$;　{等正}

(2)　$\sum \mathrm{tg}A(\mathrm{ctg}B+\mathrm{ctg}C) \geqslant 6$;　(3)　$\sum \mathrm{ctg}A(\mathrm{tg}B+\mathrm{tg}C) \geqslant 6$.　{等正}

提示：令 $x=\mathrm{tg}A\mathrm{ctg}B$ 等，并利用 $x+(1/x) \geqslant 2\ (x>0)$.

128.　$6 \leqslant \sum (\mathrm{tg}\frac{A}{2}+\mathrm{tg}\frac{B}{2})\mathrm{ctg}\frac{C}{2}=\sum (\mathrm{ctg}\frac{A}{2}+\mathrm{ctg}\frac{B}{2})\mathrm{tg}\frac{C}{2}=4(\frac{R}{r})-2$.

{等正}

129.　$6(R/p)-2(R^2/rp)-3(r/p) \leqslant \prod \mathrm{ctg}A \leqslant r/p \leqslant 1/(3\sqrt{3})$.　{等正}

130.　$\frac{2r}{3\sqrt{3}R} \leqslant \frac{r}{2R+(3\sqrt{3}-4)r} \leqslant \prod \mathrm{tg}\frac{A}{2} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{9}$.　{等正}

提示：利用 $f(x)=\log\mathrm{tg}x$ 在 $(0,\pi/2)$ 上的凸性.

131.　$\triangle ABC$ 为锐角三角形的充要条件是 $\mathrm{tg}A\mathrm{tg}B>1$；若 $C \geqslant \pi/2$，则 $\mathrm{tg}A\mathrm{tg}B<1$.

132.　对于{钝}，$\prod \mathrm{ctg}A<0$.

133.　$\frac{4R\sqrt{3r}}{9r} \leqslant \prod (\mathrm{ctg}A+\mathrm{ctg}B) \leqslant \frac{2\sqrt{3}}{9}\left(\frac{R}{r}\right)^2$.　{等正}

134.　$\frac{8}{3\sqrt{3}} \leqslant \prod (\mathrm{tg}\frac{A}{2}+\mathrm{tg}\frac{B}{2}) \leqslant \frac{4R}{3\sqrt{3}r}$.　{等正}

135. $12\sqrt{3}R/r\leqslant\prod[\mathrm{ctg}(A/2)+\mathrm{ctg}(B/2)]\leqslant 6\sqrt{3}(R/r)^2$. {等正}

136. 设$\sum A=k\pi$，k为奇数，$t>0$，令$\beta=1-(t/2)$，则

$$\sum\left|\sec(n+\frac{1}{2})A\right|^t\geqslant 2^t3^\beta.$$

137. 对于{锐}，有$\sum\sec A\geqslant 6$；　$\sum\sec A\geqslant\frac{4R}{r}-\frac{2r}{R}-1$. {等正}

138. 对于{锐}，$\sum(\sec A)^n\geqslant 3\times 2^n$，而对于{钝}，$\sum\sec^2A>3$.

139. (1)　设$\sum A=k\pi$，$k\in N$，$t>0$，令$\beta=1-(t/2)$，则

$$\sum\left|\csc(nA)\right|^t\geqslant 2^t3^\beta;$$

(2)　$\sum(\csc A)^n\geqslant 2^n\times 3^{1-\frac{n}{2}}$.

140. $2\sqrt{3}\leqslant\frac{2(5R-r)}{p}\leqslant\sum\csc A\leqslant\frac{2(R+r)^2}{pr}\leqslant\frac{2}{3\sqrt{3}}(\frac{R}{r}+1)^2\leqslant\frac{\sqrt{3}R^2}{2r^2}$. {等正}

141. $\left(\frac{25R}{4r}-\frac{1}{2}\right)^{1/2}\leqslant\sum\csc A\leqslant 2p/(3r)$. {等正}

142. $\sum\csc^2A\geqslant 27(R/p)^2$.

143. $\frac{4(5R-r)^2}{4R^2+4Rr+3r^2}-\frac{4R}{r}\leqslant\sum\csc^2A\leqslant\frac{4(R+r)^4}{r^3(16R-5r)}-\frac{4R}{r}$. {等正}

144. (1)　$\sum\csc(\frac{A}{2})\geqslant 7-\frac{2r}{R}$.

(2)　$(p/R)+3(2-\sqrt{3})\leqslant\sum\csc(A/2)<(p/R)+1$.

145. $6\leqslant 9\sqrt{3}(\frac{R}{p})\leqslant\sum\csc(\frac{A}{2})\leqslant 2(\frac{R}{r}+1)$ (刘保乾等,[100]592)

146. $\sum\sec^2(A/2)\geqslant 5-\frac{2r}{R}$.

147. $\sum\csc^n(A/2)\geqslant 2^n\times 3$.

148. $\sum\csc(2A)\geqslant\sum\csc A\geqslant\sum\sec(A/2)\geqslant 2\sqrt{3}$.

149. $\sum\csc A\geqslant(9/4)\prod\sec(A/2)$.

提示：令$x=\sin A$，$y=\sin B$，$z=\sin C$，利用代数不等式$(\sum x)(\sum\frac{1}{x})\geqslant 9$.

150. $\sum\sec A\sec B\geqslant 12$. {等正}

151. $\prod\mathrm{ctg}A\leqslant(8\sqrt{3}/9)\prod\sin(A/2)\leqslant\prod\mathrm{tg}(A/2)$

$\leqslant(8/27)\prod\cos(A/2)\leqslant\sqrt{3}/9\leqslant(1/27)\prod\mathrm{ctg}(A/2)$. ([34]76～77)

152. $\prod\mathrm{ctg}(A/2)>\pi(1+\prod\cos(A/2))$.

153.　$\sum \sec(A/2) \leqslant 2\sum \operatorname{tg}(A/2) \leqslant 9R^2/(2S)$.

154.　对于{锐}，有

$$\sum \sec A\sec B \geqslant 3\sum \csc A\csc B \geqslant \sum \csc\frac{A}{2}\csc\frac{B}{2} \geqslant \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)\prod \operatorname{ctg}\frac{A}{2}$$

$$\geqslant \left(\frac{9\sqrt{3}}{2}\right)\prod \sec\left(\frac{A}{2}\right) \geqslant 3\sum \sec\frac{A}{2}\sec\frac{B}{2}.$$

([348]1990，1：43 和[350]1992，5：37 ～ 38)

155.　$\sum \dfrac{\operatorname{tg}(A/2)}{\csc B + \csc C} \geqslant \dfrac{3r}{2R}$.

156.　$\sum \sqrt{\operatorname{tg}(A/2)\operatorname{tg}(B/2)}\sec(A/2) \leqslant 2$.

157.　若 $\log\operatorname{tg}A, \log\operatorname{tg}B, \log\operatorname{tg}C$ 成等差数列，则　$\pi/3 \leqslant B < \pi/2$.

158.　对于{锐}，若 $\sin B = 3\cos A\cos C$，则　$\pi/3 < B < \pi/2$.

159.　$\sum \csc A\csc B \geqslant 4$.

160.　对于{锐}，当 $t \geqslant 1$ 时，有

$$(2^t - 1)^3 \leqslant \prod[(\sec A)^t - 1] \leqslant (1 - 2^{-t})\prod(\sec A)^t. \qquad \{等正\}$$

左边不等式见安徽教育学院学报 1989，2. 林祖成利用拉格朗日乘子法给出了一个证明.

161.　对于{锐}，$\sum \sin A + \sum \operatorname{tg}A > 2\pi$；

162.　$\sum \sin A > \min\{\operatorname{tg}\frac{A}{8}, \operatorname{tg}\frac{B}{2}, \operatorname{tg}\frac{C}{2}, \operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\} + 2$.

163.　**G-B 不等式(Garfunkel-Bankoff 不等式)：**

$$2 - 8\prod \sin(A/2) \leqslant \sum \operatorname{tg}^2\left(\frac{A}{2}\right) \leqslant \frac{1}{4}\prod \csc\left(\frac{A}{2}\right) - 1. \qquad \{等正\}$$

提示：利用 $f(x) = \operatorname{tg}^2(x/t)$ 当 $t \geqslant 2$ 时在 $(0,\pi)$ 上的凸性，它可改进为

$\sum \operatorname{tg}^2(A/2) \geqslant 1 + [1 - 8\prod \sin(A/2)]/M^2$，式中

$M = \max\{\cos(A/2), \cos(B/2), \cos(C/2)\}$. ([348]1991，10：18)

164.　$\sum \sin(A/2) \cdot \sum \operatorname{ctg}(A/2) \geqslant 9\sqrt{3}/2$.

165.　$(\sum \operatorname{tg}^2(A/2))\prod \cos A \leqslant 1/8$.　([350]1992，2：23)

166.　$\sum \sec A \leqslant \sum(\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B) - 3$.

167.　$\sum \sec(A/2) \leqslant 2\sum \operatorname{tg}(A/2) \leqslant \sum \csc A \leqslant 2\sum \operatorname{ctg}A$.

168.　对于{锐}，有 $\sum \operatorname{ctg}(A/2) \leqslant (3/2)\sum \csc(2A)$.　{等正}

([381]1986，12：51，和 1987，13：200 ～ 201)

169.　$\sqrt{3} \leqslant \sum \operatorname{tg}((\pi - A)/4) \leqslant \sum \operatorname{tg}(A/2) \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{6}\sum \csc\left(\dfrac{A}{2}\right)$

$$\leqslant (1/3)\sum \operatorname{ctg}(A/2) \leqslant \sum \operatorname{ctg}A \leqslant (9/8)\prod \csc A.$$

170. $\sum \operatorname{ctg}A - 3\prod \operatorname{ctg}A \geqslant 2\sqrt{3}/3.$

171. 对于{锐}，$(\prod \operatorname{tg}A)(\prod \sin A) \geqslant 27/8.$ {等正}

172. $\frac{3\sqrt{3}}{4}\sum \sec(\frac{B}{2})\sec(\frac{C}{2}) \leqslant \sum \operatorname{ctg}\frac{A}{2} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4}\sum \csc(\frac{B}{2})\csc(\frac{C}{2}).$

(刘保乾等，[100]585 ~ 586)

173. $\sum \sec(\frac{A-B}{2}) \leqslant 2 + \frac{1}{2}(\frac{R}{r}).$（尹华焱－张小明，[100]588）

174. $6\sum \operatorname{tg}(\frac{A}{2}) \leqslant 2\sum \csc A + \sum \sec(\frac{A}{2}).$（刘保乾，[100]589）

175. (1) $\sum \sin(\frac{A}{2})\sum \csc\frac{A}{2} \geqslant 10 - (\frac{2r}{R})^4$；

(2) $\sum (\sin\frac{A}{2})^2 \sum (\csc\frac{A}{2})^2 \geqslant 10 - (\frac{2r}{R})^{17}.$（刘保乾等，[100]592）

176. $$8\prod \cos A \overset{①}{\leqslant} 3\sqrt{3}\prod \operatorname{ctg}A \leqslant \frac{8\sqrt{3}}{9}\prod \sin A \leqslant 8\prod \sin\frac{A}{2} \leqslant 3\sqrt{3}\prod \operatorname{tg}\frac{A}{2}$$

$$\leqslant \frac{2}{3}\sum \cos A \leqslant \frac{2}{3}\sum \sin\frac{A}{2} \leqslant 1 \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\sum \cos\frac{A}{2}\right)^{-1}$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}\sum \operatorname{tg}\frac{A}{2} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}(\sum \sin A)^{-1} = \frac{3\sqrt{3}}{8}\left(\prod \cos\frac{A}{2}\right)^{-1} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{9}\sum \operatorname{ctg}\frac{A}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{9}\prod \operatorname{ctg}\frac{A}{2} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}\sum \operatorname{ctg}A \overset{⑫}{\leqslant} \frac{\sqrt{3}}{9}\sum \operatorname{tg}A = \frac{\sqrt{3}}{9}\prod \operatorname{tg}A.$$

其中 ① 与 ⑫，即首尾两个不等式仅当锐角三角形时才成立.（陈胜利，福建中学数学，1989，4：19 ~ 20）

177. $f(p,q) = \sum \frac{(\cos A)^p}{1+(\cos A)^q}$ 的上、下界是什么？

已知 $f(4n,2n) \geqslant \frac{3}{4^n(4^n+1)}.$

178. $g(p,q) = \sum \frac{(\tan A)^p}{1+(\tan A)^q}$ 的上、下界是什么？

已知在锐角 $\triangle ABC$ 中，$g(2n,n) \geqslant \frac{3^{n+1}}{1+3^{\frac{n}{2}}}.$

179. $h(p,q) = \sum \frac{(\cot A)^p}{1+(\cot A)^q}$ 的上、下界是什么？

已知：(1) $h(4n,2n) \geqslant \frac{1}{3^{n-1}(3^n+1)}$；

(2) 在锐角 $\triangle ABC$ 中，$h(2,1) \geqslant \frac{1}{2}(3-\sqrt{3}).$（No.177 ~ 179 见侯典峰，[351]2008(1)：114 ~ 118）

三、　三角形边角不等式

1.　$\sin(\frac{A}{2}) \leqslant \frac{a}{a+b}$，仅当 $b = c$ 时等号成立.

2.　$a \geqslant b\cos B + c\cos C$. 提示：利用正弦定理.

3.　$2R \geqslant \sqrt{bc}\sec(A/2)$. ([348]1989，5：3)

4.　[MCM]. 若 $C \geqslant \pi/3$，则 $(a+b)\sum(1/a) \geqslant 4 + \csc(C/2)$.

5.　[MCM]. 若 a,b,c 成等差数列，则 A、B、C 中有两个小于 $\pi/3$.

提示：设 $b = a+d, c = a+2d$，(公差为 $d > 0$)，只要证 $B < \pi/3$. 利用余弦定理证

$$\cos B > 1/2.$$

6.　若 $\sin A, \sin B, \sin C$ 成等差数列，则 $\cos B \geqslant b^2/(2ac)$. ([350]1985，3：35)

7.　若 A,B,C 及 $\log a, \log b, \log c$ 均成等差数列，则对于任意实数 x，有

$$x^2\cos A + x + 1 > 0.$$

提示：证 $\triangle ABC$ 为等边，从而 $x^2\cos A + x + 1 = (1/2)[(x+1)^2+1] > 0$.

8. (1)　若 $2b < a+c$，则 $2B < A+C$.

(2)　若 $a^2 < b^2+c^2$，则 $A < \pi/2$；　若 $a^2 > b^2+c^2$，则 $A > \pi/2$.

(3)　若 $C = 3B$，则 $b < c < 3b$.

9.　**Bottema 不等式**：若 $A > B > C$，则

$$2R\cos A < R-d < 2R\cos B < R+d < 2R\cos C.$$

([3]43. 式中 d 是外心与内心的距离)

10.　对于{锐}，有 $\sum\cos A < p/R$.

11.　设 $f(x,y,z) = \sum(Ax)/(\sum x)$，则

$$f(\cos A,\cos B,\cos C) \leqslant \pi/3 \leqslant f(a,b,c) < \pi/2. \qquad \{等正\}$$

若 $A \leqslant B \leqslant C$，则 $f(a,b,c) \leqslant (\pi - A)/2$；

$$f(a,b,c) \leqslant (\pi/2)[1-\operatorname{tg}(A/2)\operatorname{tg}(B/2)].$$

(证明见[3]3.4)

12.　$\sum(aB+bA) \leqslant 2\sum(aA)$.

13.　$\dfrac{\sum(aB-bA)^2}{(\sum a)^2} < \dfrac{\pi^2}{4}$.

上界不能再改进. [3]3.5 指出，Leko. T. 有一极复杂的证明，希望能有一个较简单的证明.

14.　设 $\triangle ABC$ 为非钝角三角形，则

$$\frac{\pi^2}{\sum(aA)} \leqslant \sum(\frac{A}{a}) \leqslant \frac{3\pi}{\sum a}. \qquad \{等正\}$$

15.　$3\sum a \leqslant \pi\cdot\sum(a/A) \leqslant 9\sqrt{3}R$，左边不等式对任意三角形成立，而右边不等式只对非钝角三角形成立.

提示：利用 $f(x) = (\sin x)/x$ 在 $(0,\pi/2)$ 内递减和第一章 Chebyshev 不等式.([305]1977,84:294)

16. $\pi\sum(a^2/A) \leqslant 3\sum a^2$，见 Oppenheim, A. ([305]1977,84:294)

17. 设 $A \geqslant B \geqslant C$，则 $\sum a(C-B) \geqslant 0$. ([363]1977,82:20,179 ~ 180)

18. $\dfrac{b}{c} > \dfrac{B}{A+B}, \dfrac{a}{c} > \dfrac{A}{A+B}$. ([305]1927,34:247 ~ 250)

19. $(\prod a)(\prod A) \geqslant rS(2\pi/3)^2$.

20. $(\prod a)\prod(\pi - A) \geqslant Sp(4\sqrt{3}\pi/9)^3$.

提示：利用 $x/\sin x$ 的凸性和 Jensen 不等式.

21. $\dfrac{2bc\cos A}{b+c} < b+c-a < \dfrac{2bc}{a}$. (证明见[3]3.6)

22. 若 $a \leqslant b \leqslant c$，则 $2\cos^2(C/2) \leqslant \sum a/(b+c) \leqslant 2\cos^2(A/2)$.

推广：令 $f(t) = \sum a^t/(b^t + c^t)$, $g(t) = 2^{t-1}[\sin(C/2)]^t$, $\varphi(t) = 2^{t-1}t^{-t/2}$，则

(1) 当 $t < 0$ 时，$0 < f(t) \leqslant g(t)$；

(2) 当 $0 < t \leqslant 1$ 时，$g(t) \leqslant f(t) < 1$；

(3) 当 $1 \leqslant t \leqslant 2$ 时，$\min\{1, g(t)\} \leqslant f(t) \leqslant \max\{g(t), \varphi(t)\}$；

(4) 当 $t \geqslant 2$ 时，$\min\{g(t), \varphi(t)\} \leqslant f(t) \leqslant \max\{1, g(t)\}$.

(Simon, Stevin, 1949, 26:129 ~ 134)

23. 设 $a \geqslant b \geqslant c$，$\alpha,\beta,\gamma$ 是任意三角形的三内角，则

$bc + ca - ab < \sum(bc\cos\alpha) \leqslant (1/2)\sum a^2$，

仅当 $A=\alpha, B=\beta, C=\gamma$ 时等号成立，特别，取 $A = 2\pi/3, B = C = \pi/6$，得到

$$1 < \cos\alpha + \sqrt{3}(\cos\beta + \cos\gamma) \leqslant 5/2.$$

(Monatsh, Math. 1962, 66:174 ~ 178)

24. $0 < r < (a/2)[\sec(A/2) - \mathrm{tg}(A/2)]$.

25. $a < r_a < (a/2)[\sec(A/2) + \mathrm{tg}(A/2)]$.

26. $0 < r_b$（或 r_c）$< (a/2)[\mathrm{ctg}(A/2) + \csc(A/2)]$. (证明见[19]198)

27. $9r \leqslant 12r(1 - r/(2R)) \leqslant \sum a\sin A \leqslant 4R + (2r^2/R) \leqslant 4R + r \leqslant 9R/2$.

{等正}

提示：利用 $\sum a\sin\alpha = (\sum a^2)/(2R)$. 由此还可以证明 $\sum a\sin A \geqslant 2\sqrt{3}S/R$.

28. $54S \leqslant (\sum a)^2(\sum \sin A) \leqslant (9\sqrt{3}/2)\sum a^2$. {等正}

29. $\sum a^n\cos A \leqslant (1/3)(\sum a^n)(\sum\cos A) \leqslant (1/2)\sum a^n \leqslant \sqrt{(p/2)(\sum a^{2n-1})}$. ([19]169)

30. $\sum a\cos A \leqslant (3/2)\sum l_a\sin A \leqslant p$. ([381]1987,13:119)

31. 设 $0\leqslant t\leqslant 3$,则

$$\sum a^n(\sin\frac{A}{2})^t\geqslant\frac{1}{3}(\sum a^n)\sum(\sin\frac{A}{2})^t\geqslant 2^{3-t}(\sum a^n)\prod\sin(\frac{A}{2}).$$ ([19]169)

32. $\prod(1-\frac{a}{b+c})\leqslant\prod\sin\frac{A}{2}$. ([363]1957(8):47) {等正}

33. (1) $4\sqrt{3}S\leqslant 2\left(\sum ab\sin\left(\frac{c}{2}\right)\right)\leqslant\sum ab\leqslant\sum a^2\leqslant 2\sum a^2\sin\left(\frac{a}{2}\right)$.

(杨志明,[164]:77 ~ 81)

(2) $\sum\left(\sin\frac{A}{2}\right)^{-1}\geqslant\frac{1}{r}\left[\frac{\sum a^2+4\sqrt{3}S}{2}\right]^{\frac{1}{2}}$. ([305]112(2)(2005),问题 11015)

(3) $4\sqrt{3}S+\frac{1}{2}\sum(b-c)^2\leqslant\sum a^2\left(\cos\frac{B-C}{2}\right)^2$. (张维进,[351]2005(3):311 ~ 313)

(4) $$4\sqrt{3}S\leqslant\frac{4S\left(2-\sin\left(\frac{A}{2}\right)\right)}{\cos\left(\frac{A}{2}\right)}\leqslant 4S\sum\tan\left(\frac{A}{2}\right)\leqslant 2a(p-a)+2a\sqrt{bc}$$

$$\leqslant\sum ab\leqslant\sum a^2.$$ (王方斌等,[351]2008(4):439 ~ 441)

(5) $4S\leqslant\sum ab\tan\left(\frac{C}{2}\right)\leqslant\sum a^2\tan\left(\frac{A}{2}\right)$. (杨志明,[164]79)

(6) $9r\leqslant\sum a\cos(A/2)\leqslant\sqrt{3}p\leqslant 2\sqrt{3}R+(9-4\sqrt{3})r\leqslant 9R/2$. {等正}

([348]1990,6:20 ~ 21)

34. $\sum\frac{a}{b+c}(\sin\frac{A}{2})^t\geqslant\frac{3}{2^{t+1}}$,式中 $t\geqslant 2\log_2 3-2$. (吴跃生,[100]586)

35. $\sum\frac{a}{b+c}\cos B\cos C\leqslant\frac{4R+r}{12R}\leqslant\frac{3}{8}$. (刘健,陈胜利等,[100]427 ~ 432)

36. (1) 设 $t\geqslant 1$,则

$$\sum\frac{a}{b+c}(\mathrm{ctg}\,\frac{A}{2})^t\geqslant(\sqrt{3})^{t-3}\,\frac{(4R+r)^2}{Rp}\geqslant\frac{3^\beta}{2},\text{式中 }\beta=1+\frac{t}{2}.$$

(吴跃生,[100]:432 ~ 436)

(2) $\sum a^2\,\mathrm{tg}A\geqslant\frac{4rp^3}{2R^2+r^2}$.

37. 令 $t=(n+3)/2, n\geqslant 1$,则

$$2^{n-1}3^t r^n\leqslant\sum a^n\cos(A/2)\leqslant[(3p/2)\sum a^{2n-1}]^{1/2}.$$ {等正}

38. 若 $0\leqslant t\leqslant 2$,则

$$\sum a^n(\cos\frac{A}{2})^t\leqslant\frac{1}{3}(\sum a^n)\sum(\cos\frac{A}{2})^t\leqslant(\frac{3}{4})^{t/2}(\sum a^n)\leqslant 3^{t/2}2^{1-t}(\frac{p}{2}\sum a^{2n-1})^{1/2}.$$

39. (1) $\sum\frac{1}{a}\cos\frac{A}{2}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2r}$; (2) $\sum(1/a)\cos^2(A/2)\geqslant\frac{3\sqrt{3}p}{8S}\geqslant\frac{27r}{8S}$. {等正}

40. $\sum\sqrt{a}\cos(A/2)\geqslant(3/(2R))(abc)^{1/2}$.

41. $\prod(\sin A\sin B)^c < \prod(\sin A)^a$.

42. $\sum \frac{\cos A}{a} + \frac{\sqrt{3}}{2R} < \sum \frac{1}{a} \leqslant \frac{1}{R}\sum \operatorname{ctg} A$.

43. $\sum \operatorname{ctg} A \geqslant \frac{\sqrt{3}}{9}\frac{(\sum a)(\sum a^2)}{\prod a}$. ([305]1966,73:199)　{等正}

44. 对于{锐},有$\sum \sqrt{\operatorname{ctg}^2 A + \operatorname{ctg}^2 B} \geqslant \sqrt{6}(\sum a)(\sum a^2)(9\prod a)^{-1}$.
([348]1989,12:41)

45. $\sum a^n(\operatorname{tg}\frac{A}{2})^t \geqslant \frac{1}{3}(\sum a^n)\sum(\operatorname{tg}\frac{A}{2})^t$

$$\geqslant \begin{cases} 3^{-t/2}(\sum a^n) \geqslant 3^t(\sum a^n)\prod(\operatorname{tg}\frac{A}{2})^t, & t \geqslant 1, \\ 3^{(3-t)/2}(\sum a^n)(\prod \operatorname{tg}\frac{A}{2}), & 0 \leqslant t \leqslant 3. \end{cases}$$

46. $3R \leqslant \sum a\operatorname{tg}(A/2) \leqslant 5R - 4r$.　{等正}

提示:利用$\sum a\operatorname{tg}(A/2) = 2(2R-r)$.

47. $\sum a^2\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} \geqslant \frac{4S^2}{r(4R+r)}$. ([19]:684)　{等正}

48. $\sum(a+b)(\sec\frac{C}{2})^t \geqslant 4p\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^t$,式中$t \geqslant 1$.

49. $\frac{3}{p} \leqslant \frac{9\sqrt{3}R}{2p^2} \leqslant \sum \frac{(\sec\frac{A}{2})^2}{b+c} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}r}$.　{等正}

50. (1)　$(4/27)(\sum a)^3 \leqslant \sum a^3\csc^2 A \leqslant 12\sqrt{3}R^3$.　{等正}

(2)　$\sum \frac{a\sec A}{b^2+c^2} \geqslant \frac{p}{3Rr}$.　{等正}

(3)　$\sum a^2(\sec\frac{A}{2})^3 \geqslant 8R^2\sqrt{3}$.

(4)　$\sum ab(\sin A)^2 \leqslant p^2$;　$\sum ab(\cos A)^2 \leqslant p^2$.

(5)　$\frac{1}{2R}\sum bc(\sec\frac{B}{2})(\sec\frac{C}{2}) \leqslant \sum a\sec(\frac{A}{2}) \leqslant 6R$. ([36]:626)

四、　三角形其他元素(高、中线、内角平分线、旁切圆半径)不等式

(一)　三角形高的不等式

1. $h_a \leqslant \sqrt{bc}\cos(A/2)$.
2. $h_a \leqslant 2R\cos^2(A/2)$.
3. $h_a \leqslant (a/2)\operatorname{ctg}(A/2)$.
4. $9r \leqslant (2r/R)(5R-r) \leqslant \sum h_a \leqslant 2(R+r)^2/R$

$\leqslant 2R+5r\leqslant 3(R+r)\leqslant 9R/2$；　{等正}

若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，则　$\sum h_a \geqslant 2R+4r+r^2/R$；

若 $\triangle ABC$ 为钝角三角形，不等号反向.

5.　(1)　$\sum h_a \leqslant \sqrt{3}p$.

(2)　仅 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，则$\sqrt{3}\max\{h_a, h_b, h_c\}\geqslant p$.　{等正}

6.　$\sum h_a \leqslant \sqrt{3}\sum \sqrt{p-a}\leqslant \sqrt{3}\ p$.　{等正}

7.　$27r^2 \leqslant \sum h_a^2 \leqslant 4R^2+11r^2$.　{等正}

8.　(1)　$3^{1+n}r^n \leqslant \sum h_a^n < [(2^n-1)/2^n]\sum a^n, (n>2)$.

(2)　$\sum \frac{1}{h_a^n}\geqslant \frac{2^n\cdot 3^{1-n}}{R^n}$.

9.　$3(h_b^2+h_c^2)\leqslant l_b^2+l_c^2+4l_bl_c$.　(杨志明)

10.　$\sum \sqrt{b^2+c^2-h_a^2}\leqslant 6R$.

11.　$3\sqrt{3r}\leqslant \sum \sqrt{h_a}\leqslant (1+(r/R))\sqrt{6R}\leqslant 3\sqrt{6R}/2$.

$$\sum \sqrt{h_a}\leqslant \sqrt{3\sqrt{3}p}.$$　{等正}

12.　$\lambda \geqslant 2$ 时，$\sum\left(\frac{h_a}{p-a}\right)^{\lambda}\geqslant 3^{1+(n/2)}$.　(吴裕东)

13.　$27r^2 \leqslant (2r^2/R)(16R-5r)\leqslant \sum h_ah_b \leqslant (2r/R)(4R^2+4Rr+3r^2)\leqslant (27/2)Rr$.

14.　$28r^2-r^2(\frac{2r}{R})^8 \leqslant \sum h_ah_b \leqslant \sqrt{3\sqrt{3}S}$.

15.　$6S\leqslant 4(2-\frac{r}{R})S\leqslant \sum a(h_b+h_c-h_a)=2\sum h_a(p-a)\leqslant 4S(\frac{R^2+r^2}{Rr}-1)$.（丁遵标）

16.　设 $A\geqslant B\geqslant C$，则$\sum(h_b/h_c)\geqslant \sum(h_c/h_b)$，仅当 $\triangle ABC$ 为等腰三角形时等号成立.

17.　$\frac{1}{r}=\sum \frac{1}{h_a}\geqslant \frac{2}{R}$.　{等正}

18.　$\sum(1/h_a)\geqslant 3\sqrt{3}/p$.

19.　$\frac{2}{3Rr}\leqslant \sum \frac{1}{h_a^2}\leqslant \frac{R}{6r^3}$.

20.　$\frac{2}{3Rr}\leqslant \sum \frac{1}{h_ah_b}\leqslant \frac{R}{6r^3}$.

21.　$\sum \frac{a^2}{h_bh_c}\geqslant 4$.　{等正}

22.　$3R\leqslant \sum a^2/(h_b+h_c)<4R$.

23. $4\sqrt{3}(\frac{r}{R})^2 \leqslant \frac{4\sqrt{3}}{3}(\frac{7R-2r}{9R-2r}) \leqslant \sum \frac{a}{h_b+h_c} \leqslant \sqrt{\frac{3R}{2r}}$. {等正}

24. $3/2 \leqslant \sum (h_a - r)/(h_a + r) < 5/3$.

25. $6 \leqslant \frac{19}{3} - \frac{2r}{3R} \leqslant \sum (h_a + r)/(h_a - r) \leqslant 7 - \frac{2r}{R}$.(张小明,[100]:577)

26. $\sum \frac{1}{h_a - 2r} \geqslant \frac{3}{r}$.

27. $6 \leqslant \frac{7R-2r}{R} \leqslant \sum \frac{h_b+h_c}{h_a} \leqslant \frac{2R^2+Rr+2r^2}{Rr} \leqslant \frac{7R-2r}{2r}$. {等正}

28. $\sum a^2/(h_b^2 + h_c^2) \geqslant 2$.

29. $27r^3 \leqslant (2r^3/R)(16R - 5r) \leqslant \prod h_a \leqslant (2r^2/R)(4R^2 + 4Rr + 3r^2)$ $\leqslant (27/2)r^2R$. {等正}

30. $216r^3 \leqslant \prod (h_a + h_b) \leqslant 54R^2 r$.

(二) 三角形中线不等式

1. $(b+c-a)/2 < l_a < (b+c)/2$.

2. (1) $bc - (a^2/4) \leqslant l_a^2 < bc + (a^2/4)$. (2) $l_a^2 \geqslant p(p-a)$.

3. $(a/4)(8p - 9a) \leqslant l_a \leqslant \sqrt{3}p - \sqrt{p(p-b)} - \sqrt{p(p-c)}$. {等正}

4. $l_b + l_c \leqslant (3/4)\sum a$.

仅当三角形的三边为 $b+1, b, 1$ 时等号成立.([19]214)

5. $(2a^2 + bc)/4 \geqslant l_b l_c \geqslant (a^2/2) - b^2 - c^2 + (9bc/4)$.([348]1991,11:14)

6. $3p/2 < \sum l_a < 2p$.

7. $9r \leqslant \sum l_a \leqslant 4R + r \leqslant 9R/2$.

8. $\sqrt{9\sqrt{3}S} \leqslant \sum l_a \leqslant \sqrt{4p^2 - 16Rr + 5r^2}$. ([100]490) {等正}

9. $\sum l_a \geqslant a + b$.

等式仅当三边为 $b+1, b, 1$,而中线为 $(b-1)/2, (b/2)+1, b+(1/2)$ 时成立.

注 这是 Oppenheim,A. 对于 Erdös,P. 所提问题:$\sum l_a = a + b + tc$ 对 $t \geqslant 0$ 是否成立的回答之一,详见[19]214.

10. $(\sum l_a)(\sum \frac{1}{a}) > 15/2$.([348]1991,11:14)

11. (1) $27r^2 \leqslant 9r(2R - r) \leqslant \sum l_a^2 \leqslant 3(3R^2 + r^2) \leqslant 27R^2/4$.

(2) $\frac{2}{3Rr} \leqslant \sum (\frac{1}{l_a})^2 \leqslant \frac{1}{3r^2}$.

12. $\sum ab - \frac{1}{4}\sum a^2 \leqslant \sum l_a^2 \leqslant \sum ab + \frac{1}{4}\sum a^2$.

13. $4R\sum(al_a)\geqslant\sum bc(b+c)$.

14. $\sum al_a^2\geqslant 9RS$.

15. $r\sum l_a^2\leqslant\prod l_a$.

16. $\sum l_a^t<\sum a^t<(4^t/3)\sum l_a^t\quad(t\geqslant 1)$.([348]1991,8:21～24)

17. (1) $\sum l_a^6\geqslant p^4(p^2-12rR)$； (2) $\sum l_a^n\geqslant p^n\times 3^{1-\frac{n}{2}}$；

(3) $\sum\frac{1}{l_a^n}\geqslant\frac{2^n\times 3^{1-n}}{R^n}$.

18. $\sum a(l_b+l_c-l_a)\geqslant 6S$.

19. $(9/20)\sum ab<\sum(l_al_b)<(5/4)\sum ab$.([331]1971,(357～380):81～85)

20. $9r(R+r)\leqslant\sum l_al_b\leqslant 5R^2+(9/4)Rr+(5/2)r^2$.

21. $\sum(l_al_b)^2\geqslant rp^2(4R+r)\geqslant 9S^2$.

22. $-44Rr+61r^2\leqslant 4\sum l_al_b-5p^2\leqslant -20Rr+13r^2$.

它等价于$-28Rr+29r^2\leqslant(\sum l_a)^2-4p^2\leqslant -16Rr+5r^2$.

(褚小光,杨学枝,[100]571)

23. **Janous 不等式：** $\frac{5}{p}<\sum\frac{1}{l_a}\leqslant\frac{1}{r}$.

24. $\sum(1/l_a)\geqslant 3\sqrt{3}/(p+q)$,式中 $q=\frac{3\sqrt{3}-5}{10}\sum|a-b|$.

(石世昌,[348]1993,8:26～28)

25. $\sum(l_a/a)\geqslant 3\sqrt{3}/2$.

26. $\sum(l_a/a)^2\geqslant 9/4$.

27. $\frac{2}{R^2+2r^2}\leqslant\sum(\frac{1}{l_al_b})\leqslant\frac{\sqrt{3}}{S}$. {等正}

28. $\sum\frac{l_a}{b+c}\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{r}{R}$. {等正}

29. $\frac{9}{4}\leqslant\sum\frac{l_a^2}{bc}\leqslant\frac{2R+5r}{4r}\leqslant\frac{9R}{8r}$. {等正}

30. **Bager 不等式：**$\frac{2\sqrt{3}R^2}{3r^2}>\frac{\sum a^2}{l_bl_c}\geqslant 4$.

31. (1) $\sum(l_al_b)/(ab)\geqslant 9/4$. {等正}

(2) $p(p^2-7Rr+5r^2)\leqslant\sum al_bl_c\leqslant p(p^2-5Rr+r^2)$.

(刘保乾,[351]2009(2):207～209)

32. (1) $\sum\frac{ab}{l_al_b}\geqslant 4$； (2) $\sum\frac{ab}{l_a^2+l_b^2}\geqslant 2$. {等正}

33. $\sum(l_a l_b)^2/(ab) \geqslant (81/4)r^2$. {等正}

34. $\sum a^2/(l_b^2+l_c^2) \leqslant 2$. {等正}

35. [MCM]. $\sum l_a^2/(b^2+c^2) \leqslant 9/8$. {等正}

36. $\frac{3}{4}(1+\frac{r}{R}) \leqslant \sum \frac{l_a^2}{b^2+c^2} \leqslant 1+\frac{r}{4R}$.

37. $\frac{1}{2}+\frac{r}{8R} \leqslant \sum \frac{l_a^2}{(b+c)^2} \leqslant \frac{3}{4}(1-\frac{r}{2R})$.

38. $(\sum l_a)(\sum \frac{1}{l_a}) \geqslant 10-\frac{2r}{R}$.(褚小光,尹华焱)

39. $\sum l_a^3 \leqslant 10R^3-\frac{3}{4}Rr^2+\frac{5}{2}r^3$.(石世昌)

40. $\sum \frac{l_a}{l_b+l_c}(\sin\frac{A}{2})^2 \leqslant \frac{3}{8}$.(吴善和)

41. $(\sum a)(\sum \frac{1}{l_a}) \leqslant \left(\frac{63R+90r}{2r}\right)^{1/2}$.(杨学枝)

(以上 No. 36 ~ 41 见[100]572 ~ 573)

42. [MCM]. $\sum \frac{a^2+b^2}{l_c} \leqslant 12R$.([348]1995,4:32)

(三) 三角形内角平分线不等式

1. $t_a \leqslant \sqrt{bc}\cos\frac{A}{2}$.

2. $t_a \leqslant \sqrt{p(p-a)}$.

3. 若 $R=1$,则 $t_a \leqslant (\cos\frac{A}{2})^2\cos(\frac{B-C}{2})$.

4. $p+3(3-\sqrt{3})r \leqslant \sum t_a \leqslant \sqrt{p}\sum\sqrt{p-a} \leqslant \sqrt{3}p$.

5. (1) $\frac{3\sqrt{3}}{p} \leqslant \left(\frac{2}{Rr}\right)^{1/2} \leqslant \left(\frac{3\sqrt{3}}{S}\right)^{1/2} \leqslant \sum\frac{1}{t_a} < \frac{3R}{S}$.

(2) $\frac{1}{2r}+\frac{1}{R}+\frac{\sqrt{2}-1}{4R}(\frac{p}{r}-3\sqrt{3}) \leqslant \sum\frac{1}{t_a} \leqslant \frac{1}{2R}+\frac{3}{4r}$.

(杨学枝等,[100]575,473 和[350]1995.2)

6. $\frac{p}{2r}+\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant \sum\frac{a}{t_a} \leqslant \frac{\sqrt{2}p}{2r}+\frac{4\sqrt{3}-3\sqrt{6}}{2}$.(吴善和,[100]576)

7. (1) $\sum\frac{t_a}{a} \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$. (2) $\sum\frac{t_a}{\sqrt{bc}} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

(3) $\sum\frac{1}{t_a t_b} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{S}$. (4) $\sum\frac{t_a t_b}{ab} \geqslant \frac{9}{4}$. {锐}

8. **Janous 不等式**:若 $\lambda>0$,则 $\sum t_a^\lambda \geqslant 3^{\lambda+1}(Rr^2/2)^{\lambda/3} \geqslant 3^{\lambda+1}r^\lambda$. {等正}

而当 $0<\lambda\leqslant 1$ 时,有 $\sum t_a^\lambda \leqslant 3(p/\sqrt{3})^\lambda \leqslant 3(3R/2)^\lambda$. {等正}

9. $8p^2/9 \leqslant \sum t_a^2 \leqslant p^2$.

10. $3\sqrt{3}S \leqslant 27Rr/2 \leqslant \sum t_a^2 \leqslant p^2 - r(R/2 - r) \leqslant \dfrac{27R^2}{4}$. {等正}

提示:利用 Stewart 公式:$t_a^2 = bc - a^2bc/(2p-a)^2$,令 $f(t) = t(2p-t)^{-2}$,得到 $\sum t_a^2 = \sum ab - (\prod a)\sum f(a)$. 再利用 $f(t)$ 在$(0,2p)$上的凸性和海伦公式即可得证.

11. 设 $0 < \lambda \leqslant 1, x, y, z$ 为正数,则 $\sum x t_a^\lambda \leqslant (\sqrt{3}p/3)^\lambda \sum (yz/x)$,仅当 $x = y = z, A = B = C$ 时等号成立.([350]1991,5)

12. $\sum t_a^4 \leqslant (9/16)\sum a^4$.

13. (1) $\sum t_a^6 \leqslant p^4(p^2 - 12Rr)$; (2) $\sum \dfrac{1}{t_a^n} \geqslant \dfrac{3^{1+\frac{n}{2}}}{p^n}$. {等正}

14. $\sum (at_a)^2 \leqslant 81R^2r^2$.

15. $6rp \leqslant \sum at_a \leqslant 2p^2/\sqrt{3}$; $\sum at_a \leqslant 9\sqrt{3}Rr$.

16. $\sum a(t_b + b_c - t_a) \geqslant 6S$.

17. 设 λ 为实数,则

(1) $\sum (at_a)^\lambda \leqslant (1/2)p(\prod a)(\sum a^{\lambda-2})$. {等正}

(2) $(\sum a^\lambda t_a)^2 \leqslant (3/2)p(\prod a)\sum a^{2(\lambda-1)}$. {等正}

18. $\sum (t_a t_b)^2 \leqslant rp^2(4R + r)$.([305]1963,70:891,1964,71:687) {等正}

19. $\dfrac{16r}{9}(4R + r) < \dfrac{r}{9}(64R + 115r) \leqslant \sum t_a t_b \leqslant 3r(4R + r)$.

20. $\sum t_a^2 \geqslant \sum t_a t_b \geqslant 3\sqrt{3}S$.(刘健,[31]90 ~ 96)

21. **Janous 不等式:** $\dfrac{48Rr^2p}{p^2 + 2Rr + r^2} < \sum at_b t_c \leqslant \dfrac{Rp^3}{3r}$. {等正}

22. $3/2 \leqslant \sum \sqrt{1 - t_a^2/(bc)} < 3$.

23. $\sum (ab/t_c) \geqslant 4p/\sqrt{3}$.

24. $\sum (at_a)^{-1} \geqslant 4p/(\sqrt{3}\prod a)$. {等正}

25. $\sum (t_a t_b/t_c)(p - c) \leqslant 3S$.

26. $\sum t_a^{-2} \geqslant 9/p^2$; $\sum t_a^{-n} \geqslant 3^{1+\frac{n}{2}} p^{-n}$.

27. $\sum (b^2 + c^2)/t_a^2 \geqslant 8$.([331]1973,(412 ~ 460):155 ~ 157) {等正}

28. (1) $\sum \dfrac{t_a^2 + t_b^2}{a^2 + b^2} > 2$. (2) $\sum \dfrac{t_a + t_b}{a + b} \leqslant \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

29. $\sum \dfrac{t_a}{t_b t_c} \geqslant \dfrac{1}{r}$.

30. $\frac{1}{3R^2}\leqslant\sum\frac{1}{t_a^2}-\frac{1}{4r^2}\leqslant\frac{1}{6Rr}$. {等正}

31. $\frac{9}{4}-\frac{r}{2R}\leqslant\sum\frac{a^2}{t_b^2+t_c^2}\leqslant\frac{19}{8}-\frac{3r}{4R}$.

32. $\frac{40}{9}+\frac{r}{9R}\leqslant\sum\frac{t_b^2+t_c^2}{a^2}\leqslant 6-\frac{3r}{R}$.

33. (1) $\frac{8r^2(16R-5r)}{9R-2r}\leqslant\prod t_a\leqslant\frac{8Rrp^2}{9R-2r}\leqslant pS$;

(2) $\frac{432R^2r^2}{31R+2r}\leqslant\prod t_a\leqslant\frac{27}{8}R^3$;

(3) $\frac{2S^2}{R}\leqslant\prod t_a\leqslant\frac{S^2}{r}$;

(4) $\prod t_a\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{8}\prod a$.

(其中,No. 28 ~ 32 见[100]574 ~ 576,478)

34. $\sum\frac{p-a}{t_a}\leqslant\sqrt{3}$;当 $-1\leqslant\beta<0$ 时,$\sum(p-a)t_a^\beta\leqslant\frac{p^{\beta+1}}{3^{\beta/2}}$, {等正}

当 $\beta>0$ 时不等号反向.(刘健,中学数学,1995,8:24 ~ 26)

35. 1995 年,文家金,单墫证明了一个一般性不等式:

设 f 是$(0,\infty)$ 上递增的正函数,则当 $\lambda>0$ 时,下式成立

$$\sum\frac{f(a)}{t_a^\lambda}\geqslant\frac{1}{3^{\lambda/2}}\sum f(a)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^\lambda.$$ {等正}

由此推出了一系列不等式,如

$0<\lambda\leqslant 1$ 时,$\sum\frac{1}{t_a^\lambda}\geqslant\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^\lambda\sum\frac{1}{a^\lambda}$.

当 $\lambda>1$ 时,$\sum\frac{1}{t_a^\lambda}\geqslant\frac{2}{3^{\lambda/2}}\sum\frac{1}{a^\lambda}+3^{1+\frac{\lambda}{2}}(1-2^{1-\lambda})p^{-\lambda}$.

若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,则 $\frac{2\sqrt{3}}{3}\leqslant\frac{\sum t_a^{-1}}{\sum a^{-1}}<\sqrt{2}$.

进一步问:

(1) 当 $\lambda>0$ 时,$\frac{\sum t_a^{-\lambda}}{\sum a^{-\lambda}}$ 的最优下界是什么?

(2) 使 $\sum\frac{1}{t_a^\lambda}\geqslant\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^\lambda\sum\frac{1}{a^\lambda}$ 成立的 λ 的最大值是什么?(福建中学数学. 1995,4:16 ~ 17)

(四) 旁切圆半径不等式

1. $rr_a\leqslant\left(\frac{a}{2}\right)^2$.

提示:利用 $S=pr$ 和 $S=(p-a)r$.

2. **Lemoine 不等式**:$(3/2)R \leqslant r_a < 4R - \sqrt{3}(p-a)$.

特别,若 $r_a \leqslant r_b \leqslant r_c$,则 $r_a \leqslant (3/2)R$; $r_b < 2R$; $(3/2)R \leqslant r_c < 4R$.([3]63,66)

3. $R \geqslant (r_a + r)^2/[4(r_a - r)]$.

4. (1) $9r \leqslant \sqrt{3}p \leqslant \sum r_a \leqslant 9R/2$; (2) $\sum r_a \geqslant \dfrac{3(3-\sqrt{3})r}{2}$;

(3) $\sum r_a > 4R$; (4) $\sum r_a^n > p^n \times 3^t$,式中 $t = 1 - n/2$.

5. $\sum a r_a \geqslant 3Rp \geqslant 6S$.

6. $3r \sum r_a \leqslant \sum r_a r_b$.

7. $54Rr \leqslant 3\sum ab \leqslant 4\sum r_a r_b$.

8. $(27/2)Rr \leqslant r(16R-5r) \leqslant \sum r_a r_b \leqslant 4R^2 + 4Rr + 3r^2$

$\leqslant (1/3)(4R+r)^2 \leqslant (27/4)R^2$.

9. $(27/4)R^2 \leqslant 8R^2 - 5r^2 \leqslant \sum r_a^2 \leqslant 16R^2 - 24Rr + 11r^2 \leqslant p^2(4R-5r)/(3r)$.

10. $3p^2 r \leqslant 16R^3 + r^3 - 24Rr^2 \leqslant \sum r_a^3 \leqslant 64R^3 - 144R^2 r + 72Rr^2 + r^3$.

11. $\dfrac{2}{R} \leqslant \sum \dfrac{1}{r_a} = \dfrac{1}{r}$; $\sum \dfrac{1}{r_a^n} \geqslant \dfrac{2^n \times 3^{1-n}}{R^n}$.

12. $18r/p \leqslant \sum (a/r_a) \leqslant 9R/p$.

13. (1) $3(4r/p)^\lambda \leqslant \sum (a/r_a)^t \leqslant 3^\beta \cdot 2^t (p/r)^t$,式中 $\lambda = t/3, \beta = 1-2t$,左边不等式对于所有实数 t 成立,而右边不等式只对 $0 < t \leqslant 1/2$ 成立;

(2) 令 $g = \dfrac{2}{p}(4R+r), t \geqslant 1$,则 $3^{1-t} g^t \leqslant \sum \left(\dfrac{a}{r_a}\right)^t \leqslant g^t$.

14. $\dfrac{8R-7r}{r^2(16R-5r)} \leqslant \sum \dfrac{1}{r_a^2} \leqslant \dfrac{(2R-r)^2}{r^2(4R^2+4Rr+3r^2)}$.

15. $\dfrac{2}{3Rr} \leqslant \dfrac{4R+r}{r(4R^2+4Rr+3r^2)} \leqslant \sum \dfrac{1}{r_b r_c} \leqslant \dfrac{4R+r}{r^2(16R-5r)} \leqslant \dfrac{1}{3r^2}$.

16. $\sum (a/r_a) \leqslant 9R/p$; $\sum (a^2/r_a) \geqslant 12r$.

17. (1) $\sum \dfrac{a}{r_a^2} \geqslant \dfrac{6}{p}$; (2) $\sum \dfrac{a^3}{r_a} \leqslant \dfrac{1}{r} \prod a$.

(3) $4 \leqslant 4\left(\dfrac{\sqrt{2pR}}{3^{3/4} r} - 1\right) \leqslant \sum \dfrac{a^2}{r_b r_c} \leqslant \dfrac{6\sqrt{3}R^2}{pr} - 4$; (4) $\sum \dfrac{a^2}{r_b r_c} \geqslant \dfrac{2R}{r}$;

(5) $4 \leqslant 6 - \dfrac{4r}{R} \leqslant \sum \left(\dfrac{a}{r_a}\right)^2 \leqslant \dfrac{2R}{r}$; (6) $\dfrac{2}{\sqrt{3}r} \leqslant \sum \dfrac{a}{r_b r_c} \leqslant \dfrac{R}{\sqrt{3}r^2}$;

(7) $\dfrac{9\sqrt{3}r}{2} \leqslant \sum \dfrac{r_b r_c}{a} \leqslant \dfrac{9\sqrt{3}R^3}{16r^2}$; (8) $\sum \dfrac{r_b}{r_a} \leqslant \dfrac{4R}{r} - 5$.

18. (1) $4\sqrt{3}(3R-4r) \leqslant \sum \dfrac{a^3}{r_b r_c} \leqslant \dfrac{2\sqrt{3}R}{r}(3R-4r)$.

(2) $\sum \frac{r_b r_c}{a^2} \geqslant \frac{9}{4}$；　(3) $\sum \left(\frac{r_a}{a}\right)^2 \geqslant \frac{9}{4}$.

(4) $\sum \left(\frac{a}{r_a}\right)^{1/2} \leqslant \left(\frac{2p}{r}\right)^{1/2}$.(孙建斌,[345]2001,10)

(5) $\sum \frac{ab}{r_c^2} \geqslant \frac{2R}{r}$.(宋庆,中学数学,1995.7:38)

19. (1) $\sum \frac{r+r_c}{a+b} \geqslant \sqrt{3}$；　(2) $\sum \frac{r_a-r_b}{a-b} \geqslant 3\sqrt{3}$；　(3) $\sum \frac{r_a}{p-b} \geqslant 3\sqrt{3}$.

20. $\sum (r_b+r_c)/a \geqslant 3\sqrt{3}$.(管志宏,中学数学,1992.11)

21. $\sqrt{3} \leqslant \sum (r_b+r_c)/(b+c) \leqslant p/(2r)$.

22. (1) $\sum \frac{a^2}{(r_a-r)} \leqslant 9R$；　(2) $\sum \frac{r_a-r)}{a} \geqslant \sqrt{3}$；

(3) $\sum \frac{h_a-r_a}{h_a+r_a} \leqslant 0$；　(4) $\sum \frac{r+r_a}{r+2r_a} \leqslant \frac{12}{7}$.　([164]42)

23. $6 \leqslant 7-(2r/R) \leqslant \sum (r_a+r)/(r_a-r) \leqslant 2(1+(R/r))$.

24. $p/R \leqslant (4R^2+6Rr-r^2)/(Rp) \leqslant \sum (r_a/r) \leqslant (5R^2+3Rr+r^2)/(Rp)$.

25. $\sum (r_a r_b)^2/(ab) \geqslant 81r^2/4$.

26. $\frac{3\sqrt{3}}{R}(7r^2-R^2) \leqslant \sum \frac{r_b r_c}{a} \leqslant \frac{9\sqrt{3}}{32r}(9R^2-20r^2)$.

27. $6r \leqslant \sum a^2/(r_b+r_c) \leqslant (3/r)(3R^2-10r^2)$.

28. $8\prod r_a \leqslant 3\sqrt{3}\prod a$.

29. (1) $27r^3 \leqslant r^2(16R-5r) \leqslant \prod r_a \leqslant r(4R^2+4Rr+3r^2) \leqslant (27/4)rR^2 \leqslant \frac{27}{8}R^3$；　(2) $\prod r_a \leqslant \frac{\sqrt{3}}{9}p^3$；　(3) $\frac{9}{R^2} \leqslant \frac{\sum r_a}{\prod r_a} \leqslant \frac{R}{6r^3}$；

(4) $243r^4 \leqslant (\prod r_a)\cdot(\sum r_a) \leqslant p^4/3$.

30. $32Rr^2 \leqslant 4r^2(9R-2r) \leqslant \prod (r_a+r) \leqslant 4r(2R^2+3Rr+2r^2) \leqslant 8R^3$.

31. $108Rr^2 \leqslant 4Rr(16R-5r) \leqslant \prod (r_a+r_b) \leqslant 4R(4R^2+4Rr+3r^2) \leqslant 27R^3$.

以上均{等正}.在[19],[100],[32]等中还可找到其他旁切圆半径不等式.

(五)　联系高、中线、内角平分线的不等式

1. $t_a-h_a \leqslant R-2r$.

2. $l_a \leqslant (R/2r)h_a$.

3. $l_a/t_a \geqslant (b+c)^2/(4bc)$,仅当 $b=c$ 时等号成立.

4. $l_a/h_a \geqslant (b^2+c^2)/(2bc)$,仅当 $b=c$ 或 A 为直角时等号成立.

5. $9r \leqslant \sum h_a \leqslant \sum t_a \leqslant \sum l_a \leqslant \sum r_a \leqslant 9R/2$；

若 $a \leqslant b \leqslant c$，则 $a + \sum l_a \leqslant c + \sum t_a$.

6. $\sum t_a \leqslant \left\{\begin{matrix} \sqrt{3}p \\ 3(R+r) \end{matrix}\right\} \leqslant \sum r_a$.

7. $2r/R \leqslant (\sum h_a)/(\sum r_a) \leqslant (2/3)(1+(r/R))$.

8. $54r^4/R \leqslant \prod h_a \leqslant \prod t_a \leqslant \prod r_a \leqslant \prod l_a$.

9. $\prod h_a \leqslant 3^{3/4} S^{3/2} \leqslant \prod r_a$.

10. **Bager 不等式：**$\sum h_a^2 \leqslant \sum t_a^2 \leqslant p^2 \leqslant \sum l_a^2 \leqslant \sum r_a^2$. {等正}

11. 若 $-1 < t < 0$，则 $\sum h_a^t \geqslant \sum r_a^t$，若 $t > 0$ 或 $t < -1$，则不等号反向.

12. 若 $\lambda > 0$，则 $\sum t_a^\lambda \leqslant \sum l_a^\lambda$， 若 $\lambda < 0$，则不等号反向. {等正}

13. 若 $\lambda \geqslant 1$ 或 $\lambda \leqslant 0$，则 $\sum l_a^\lambda \leqslant \sum r_a^\lambda$.([348]1991,5:41)

14. $4h_a - r_a \leqslant 27R/2 - \sqrt{27}a$.

15. $\sum h_a h_b \leqslant \sum r_a r_b$.

16. $\sum t_a t_b \leqslant \sum r_a r_b$； $\sum t_a^2 \leqslant \sum r_a r_b$.

17. $\sum r_a t_a \leqslant p \sum \sqrt{(p-a)(p-b)} \leqslant p^2$.(证明见[3]92) {等正}

18. $\sum \dfrac{1}{h_a} = \sum \dfrac{1}{r_a} \geqslant 3^{3/4}/\sqrt{S}$.

19. $3R\sum h_a \leqslant 2\sum l_a^2$.

20. $\sum h_a l_a \leqslant p^2$.

21. x,y,z 为非负实数，则 $\sum h_a^x h_b^y h_c^z \leqslant \sum r_a^x r_b^y r_c^z$.([305]1966,73:82) {等正}

22. $3 \leqslant \sum \dfrac{t_a}{h_a} \leqslant \sqrt{3(1+\dfrac{R}{r})} \leqslant \dfrac{3R}{2r}$.

23. (1) $3\sqrt{3}S \leqslant \sum t_a t_b \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sum a t_a \leqslant \dfrac{1}{3}(\sum t_a)^2 \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sum a l_a \leqslant \sum t_a^2$.(王振) {等正}

(2) $\sum t_a t_b \leqslant \sum t_a r_a \leqslant \dfrac{1}{3}(\sum t_a)^2 \leqslant \dfrac{1}{3}(\sum h_a)(\sum r_a) \leqslant \sum t_a^2$

$\leqslant \dfrac{1}{3}(\sum l_a)(\sum r_a)$.(刘键，褚小光，[100]369～380) {等正}

24. $\sum h_a \leqslant l_a + t_a + r_a \leqslant \dfrac{9}{2}R$.(刘键，褚小光，[100]566)

25. (1) $1 < \sum(\dfrac{h_a}{t_a}) \leqslant 3$； (2) $\sum(\dfrac{h_a}{t_a})^\lambda \geqslant 3(\dfrac{2r}{R})^{\lambda/2}$.($\lambda > 0$). {等正}

26. $\sum(h_a/t_a) \geqslant 2p/(R\sqrt{3})$.

27. $\sum(r_a/t_a)^{\lambda}\geqslant 3\quad(\lambda>0)$.

28. $\sum(l_a/r_a)^n\geqslant 3^{\lambda}(p/r)^n\geqslant 3$. {等正}

式中$\lambda=1-(3n/2)$，$n\geqslant 2/3$. 已知$\sum(r_a/l_a)\geqslant 3$，问$\sum(r_a/l_a)^{\lambda}$的上下界是什么？

29. $\sum(r_a/h_a)^n\geqslant 3$，$(n\geqslant 1)$.

30. $\left(\frac{2R}{r}+5\right)^{1/2}\leqslant\left[\frac{2R}{r}+6\left(\frac{R}{2r}\right)^{1/3}-1\right]^{1/2}\leqslant\sum(\frac{r_a}{h_a})^{1/2}\leqslant((\frac{4R}{r})+1)^{1/2}$.

([348]1993.8)

31. $\sum\frac{1}{h_ar_a}\geqslant\frac{1}{r(2R-r)}$.

32. $3\leqslant 2(2-\frac{r}{R})\leqslant\sum\frac{h_a}{r_a}<2(\frac{R}{r}+\frac{r}{R}-1)$； $\sum\frac{r_a}{h_a}\geqslant\frac{3R}{2r}\geqslant\sum\frac{h_bh_c}{r_br_c}$.

33. $4r\sum r_a\leqslant\sum a^2\leqslant(27/4)R^4\sum h_a^{-2}$.

34. (1) $\sum(h_b/l_c)\leqslant 3$； (2) $\sum\frac{h_a}{l_b+l_c}\leqslant\frac{3}{2}$.

35. $3\leqslant\sum(l_a/h_a)^{1/2}\leqslant 3\sqrt{R/(2r)}$.

36. $3\leqslant\sum(l_a/h_a)\leqslant 1+(R/r)$.

37. (1) $p^2\leqslant\sum l_at_a\leqslant 3(2R^2+r^2)$； (2) $\sum l_at_a\leqslant p^2+2Rr-4r^2$；

(3) $\sum l_a(t_b+t_c)\leqslant 2p^2$. ([100]275,489)

38. $6r/R\leqslant\sum(t_a/l_a)\leqslant 3$.

39. $3\leqslant 13/4-(r/2R)\leqslant\sum(l_a/t_a)\leqslant(3R)/(2r)$.

40. $\frac{3}{2}\leqslant\frac{9\sqrt{3}R}{4p}\leqslant\sum\frac{r_a}{h_b+h_c}\leqslant\frac{p}{2\sqrt{3}r}$.

41. $\sum\frac{h_a+h_b}{r_a+r_b}\leqslant 3$.

42. $\sum(h_a-r_a)/(h_a+r_a)\leqslant 0$.

43. $\sum\left(\frac{h_a+h_b}{r_a+r_b}\right)^t\leqslant 3$，$0<t\leqslant 1$. 仅当$t=1$，$a=b=c$时等号成立.

44. $\sum\frac{(r_a+h_a)}{r+r_a}\geqslant\frac{9}{2}$. {等正}

45. $\sqrt{\frac{b}{c}}+\sqrt{\frac{c}{b}}\leqslant\frac{t_b}{t_c}+\frac{t_c}{t_b}\leqslant\frac{r_b+r_c}{t_a}\leqslant 2\frac{l_a}{h_a}\leqslant\frac{R}{r}$. (刘健等，[100]369)

46. $\sum\frac{t_a}{h_a+2r_a}\geqslant 1$. {等正}

47. $\sum\left(\frac{t_a}{h_a-2\lambda}\right)^{\lambda}\geqslant 3^{\lambda+1}$，$(\lambda\geqslant 1)$. 仅当$\lambda=1$，$a=b=c$时等号成立.

48. $\sum\left(\frac{t_a}{h_b+h_c}\right)^{\lambda}\geqslant\left(\frac{r}{4R}\right)^{\lambda/3},(\lambda>0)$.

49. $\prod(h_b+h_c)\leqslant 24\sqrt{3}\prod(S/t_a)$；　$\prod(h_b+h_c)\leqslant\prod(t_b+t_c)\leqslant\prod(r_b+r_c)$.

{等正}

50. $\prod\frac{h_b+h_c}{r_a+h_a}\leqslant 1$.　{等正}

51. $\prod\left(\frac{r_a+h_a}{b+c}\right)\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

52. $\frac{p}{2}\leqslant h_a+l_b+t_c\leqslant\sqrt{3}p$；$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{t_b}+\frac{1}{l_c}\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{p}$.

问：$h_a^{\lambda}+l_b^{\lambda}+t_c^{\lambda}$ 的上下界是多少？

53. $p\leqslant t_a+t_b+l_c\leqslant\sqrt{3}p$；　$3p/4\leqslant h_a+l_b+l_c\leqslant 2p$.

问：$h_a^{\lambda}+h_b^{\lambda}+t_c^{\lambda}$，$h_a^{\lambda}+h_b^{\lambda}+l_c^{\lambda}$，$l_a^{\lambda}+l_b^{\lambda}+h_c^{\lambda}$，$l_a^{\lambda}+l_b^{\lambda}+t_c^{\lambda}$，$t_a^{\lambda}+t_b^{\lambda}+h_c^{\lambda}$，$t_a^{\lambda}+t_b^{\lambda}+l_c^{\lambda}$ 各个上下界是什么？

54. $2\leqslant\sum\frac{a^2}{t_b^2+t_c^2}\leqslant\sum\frac{a^2}{h_b^2+h_c^2}\leqslant\frac{R}{r}$.（郝迎利，中学数学，2001.11:20）

55. $\sum h_a r_a\leqslant p^2$.

56. 设 $-1<\lambda<0$，则　$\sum(r_a r_b)^{\lambda}\leqslant\sum(h_a r_a)^{\lambda}$；

当 $\lambda\leqslant -1$ 或 $\lambda\geqslant 0$ 时，不等号反向（郭要红，[345]2002，2）

57. (1)　$\sum a l_a t_a\leqslant 2p(5R-r)$；　(2)　$\sum l_a t_b t_c\leqslant\frac{9\sqrt{3}}{8}abc$；　{等正}

(3)　$\sum t_a(l_b^2+l_c^2)\leqslant\frac{2}{\sqrt{3}}p^3$；　(4)　$\sum\frac{t_a+r_a}{a}\geqslant 3\sqrt{3}$；

(5)　$\sum a t_a r_a\leqslant\frac{2}{3}p^3$；　(6)　$\sum\frac{1}{l_a^2+r_a^2}\leqslant\frac{1}{3Rr}$；

(7)　$\sum a(r_a+l_a)\geqslant\frac{4}{\sqrt{3}}p^2$；　(8)　$\sum(r_a+l_a)(b+c)\geqslant\frac{16}{3}p^3$；

(9)　$\sum t_a(l_a+r_a)\leqslant 2p^2$；　(10)　$\sum l_a(r_a^2+t_a^2)\geqslant\frac{2}{\sqrt{3}}p^3$；

(11)　$\sum r_a l_a t_a\leqslant\frac{9\sqrt{3}}{8}abc$；　(12)　$\sum\frac{h_a}{l_b+l_c}\leqslant\frac{3}{2}$；

(13)　$\sum\frac{l_a+h_a}{l_a+r_a}\leqslant 3$；　等价于　$\sum\frac{r_a-h_a}{l_a+r_a}\geqslant 0$；

(14)　$\sum l_a(t_a+r_a)^2\geqslant\frac{9\sqrt{3}}{2}abc$.　（尹华焱，[351]2004(1)：85～86）

58. $\sum\frac{1}{r_a-\lambda r}\geqslant\sum\frac{1}{h_a-\lambda r}$，$0\leqslant\lambda\leqslant 1$.（$\lambda<0$ 时不等号反向）.

（尹华焱猜想，褚小光证明，中学数学，1999，5：38）

五、 含参数的三角形不等式(母不等式)

在下述不等式中，λ,x,y,z 均为实数. 对于这些实数的不同选取，并利用各种变形技巧，就可以推导出大量的几何不等式. 因此，有的学者把这些不等式称为母不等式，或三角形嵌入不等式，

1. [MCM]. $\sum x^2 \geqslant \sum 2yz\cos A$. 它还等价于 $\sum x^2 \geqslant \sum 2yz\sin(A/2)$，

仅当 $x:y:z=\sin A:\sin B:\sin C$ 时等号成立. 式中 $\sum A=\pi$ 的条件还可放宽，事实上，上述不等式对一切实数 x,y,z 成立的充要条件是 $A\pm B+C=(2k+1)\pi$，$(k\in Z)$. ([348]1990,4:42;[350]1984,3:34 ~ 36)

2. $\sum x^2 \geqslant (-1)^m \sum 2yz\cos(mA)$，　$(m\in Z)$.

3. $\sum x^2 \geqslant \pm \sum 2yz\sin(nA/2)$，

式中当 $n=4m+1$ 时取“+”号，当 $n=4m-1$ 时取“−”号，$m\in Z$. ([34]110 ~ 113)

4. $\sum x^2 \geqslant (2\sqrt{3}/3)\sum yz\sin A$，仅当 $x=y=z=0$ 或 $x=y=z\neq 0$ 且 $A=B=C=\pi/3$ 时等号成立.

5. (1) $\sum x^2 \geqslant 2\sum yz\sin(A-\pi/6)$.

提示：令 $\alpha=A-(\pi/6)$，$\beta=B-(\pi/6)$，$\gamma=C-(\pi/6)$，考虑 $(x-y\sin\gamma-z\sin\beta)^2+(y\cos\gamma-z\cos\beta)^2$.

(2) 设 $\sum A=k\pi$，k 为奇数，$m=n+[k/2]$，则

$$\sum x^2 \geqslant 2(-1)^m \sum yz\sin(n+(1/2))A.$$

仅当 $x\sec(n+1/2)A=y\sec(n+1/2)B=z\sec(n+1/2)C$ 时等号成立，([19]77)

6. **三角形边的嵌入不等式：**$\sum a^2(x-y)(x-z)\geqslant 0$，([36]191 ~ 198)

7. 设 $\sum A=k\pi$，$k\in N$，则

(1) $\sum x^2 \geqslant 2(-1)^{kn}(yz\cos nA - zx\sin nB - xy\sin nC)$.

(2) $\sum x^2 \geqslant 2(-1)^{kn+1}\sum yz\cos(nA)$　([22]424)

(3) $\sum x^2 \geqslant 2(-1)^{kn}(yz\sin nA - zx\cos nB + xy\sin nC)$.

提示：考虑 $[x+(-1)^{kn}(y\sin nC+z\sin nB)]^2+(y\cos nC-z\cos nB)^2\geqslant 0$；

$$[x+(-1)^{kn}(y\sin nC-z\cos nB)]^2+(y\cos nC-z\sin nB)^2\geqslant 0.$$

8. **Oppenheim 不等式：**　$(\sum x)^2 \geqslant 2\sqrt{3}\sum yz\sin A$. ([19]681)

9. 设　$\sum A=k\pi$，$k\in N$，则　$(\sum x)^2 \geqslant 4\sum yz\sin^2(nA)$.

当 $x\csc(2nA)=y\csc(2nB)=z\csc(2nC)$ 时等号成立；若 x,y,z 均为正数，则

$$(\sum xy)^2 \geqslant 4(\prod x)(\sum x\sin^2 A).$$

在[19]第六章中，还可找到大量类似的不等式.

10.　设 x,y,z 为实数且 $xyz>0$，则

$$\sum(x\cos A)\leqslant\sum\frac{yz}{2x},$$

若 $xyz<0$，则不等号反向. 仅当 $\frac{1}{x}:\frac{1}{y}:\frac{1}{z}=\sin A:\sin B:\sin C$ 时等号成立.

提示：考虑 $(xz\cos A+yz\cos B-xy)^2+(xz\sin A-yz\sin B)^2\geqslant 0$.

特别地，(1)　取 $x=1,y=z=\lambda$，得 $\cos A+\lambda(\cos B+\cos C)\leqslant 1+\lambda^2/2$.

(2)　取 $x=y=1,z=2$，得 $\cos A+\cos B+2\cos C\leqslant 9/4$. ([3]18 ～ 19)

(3)　取 $x=2\lambda_2\lambda_3, y=2\lambda_3\lambda_1, z=2\lambda_1\lambda_2$. 得到 **Wolstenholme 不等式(三角形角的嵌入不等式)**：

$$2\sum\lambda_2\lambda_3\cos A\leqslant\sum\lambda_1^2,$$

仅当 $\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3=a:b:c$ 时等号成立.

11.　设 $0<\lambda\leqslant 1+(4+\frac{2r}{R})^{1/2}$，则　$\frac{1}{(1+\lambda)^2}<\frac{\prod(a+b)}{\prod(\lambda a+b+c)}\leqslant\left(\frac{2}{2+\lambda}\right)^3$.

(Janous. W. 提出，陈计等证明，[100]583 ～ 584)

12.　对于{锐}，成立　$\sum(x\cos\frac{A}{2})^2\geqslant 2\sum yz\sin B\sin C$. (刘健等，[100]587)

13.　$(\sum x)^2\geqslant 4\sum xy(\cos\frac{C}{2})^2$，　仅当 $x:y:z=a:b:c$ 时等号成立.

六、　特殊三角形不等式

1.　**C-B 角不等式**(Crelle-Brocard 角不等式)：设 G 在 $\triangle ABC$ 内部满足：$\angle GAB=\angle GBC=\angle GCA=\omega$，则称 G 为 Brocard 点，或 C-B 点，ω 称为 G 的 Brocard 角，简称为 C-B 角.

注　ω 也是方程 $\mathrm{ctg}\,\omega=\sum\mathrm{ctg}A$ 在 $(0,\pi)$ 内的唯一实根，这是证明有关 C-B 点、角不等式的一个关键. C-B 点最早在 1816 年由 Crelle 所研究，但长时间内没有受到注意. 直到 1875 年由 Brocard 重新发现. 在这以后，已发表了相当多的文章，直到今天，仍然是人们研究的一个热点.

(1)　设 G_1,G_2 是 $\triangle ABC$ 的两个 C-B 点，则　$2G_1G_2\leqslant R$.　([3]14.25)

(2)　Yff **不等式**：$\omega\leqslant\pi/6$.　{等正}

提示：$\mathrm{ctg}\,\omega=\sum\mathrm{ctg}A\geqslant\sum\mathrm{tg}(A/2)\geqslant\sqrt{3}$.

注　这是 Yff, P. 在 1963 年提出的一个猜想. ([305]1963, 70:500)11 年后才由 Abi-Khuzam 给出了一个“巧妙、简捷又很有创造性的证明”. (Elem. Math, 1974, 29:141 ～ 142) 事实上，这里给出的证明是 Lalesco, T. 早在 1937 年就给出了，因此，这个不等式至少应称为 L-Y 不等式.

(3)　$\omega^3\leqslant\prod(A-\omega)$.　{等正}

提示：利用 $f(x)=\log(x/\sin x)$ 在 $(0,\pi)$ 上的严格凸性，由 Jensen 不等式，得到

$f(\frac{\pi}{6})=f(\frac{1}{6}\sum A)=f(\frac{1}{6}\sum(\omega+(A-\omega)))\leqslant\frac{1}{6}\sum[f(\omega)+f(A-\omega)]$. 再利用 $x/\sin x$ 在 $(0,\pi/6]$ 上的递增性.

1994 年，唐立华作了以下推广：设 O 为 $\triangle ABC$ 内任一点：$\alpha_1=\angle OAB$，$\alpha_2=\angle OBC$，$\alpha_3=\angle OCA$，$\alpha=\min\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$，则

$\alpha^6\leqslant\alpha_1\alpha_2\alpha_3(A-\alpha_1)(B-\alpha_2)(C-\alpha_3)$.（中学数学 1994，9：30 ～ 32）

(4)　$8\omega^3\leqslant ABC$.　　{等正}

证　从(3)，$64\omega^6\leqslant\prod[(4\omega)(A-\omega)]\leqslant\prod A^2$，而最后一个不等式等价于 $(A-2\omega)^2\geqslant 0$.（[19]330）

注　比较(3)(4)，Abi-Khuzam 在 1980 年提出：$8\prod(A-\omega)\leqslant ABC$ 是否成立？

(5)　为了改进(3)，(4)，将(4) 改写成　$2\omega\leqslant(\prod A)^{1/3}$.

Stroeker，R. J. 和 Hoogland，H. J. T. 先后提出许多猜想. 例如，能否将上式右边的几何平均改为调和平均？即

① $\sum\frac{1}{A}\leqslant\frac{3}{2\omega}$；　② $\sum\frac{1}{A^2}\geqslant\frac{3}{4\omega^2}$.　　{等正}

Mascioni 证明了这两个猜想. 在证明中用到拉格朗日乘子法. 他还证明：若 t_1，t_2 分别是使 $M_{-t}(A,B,C)\leqslant 2\omega\leqslant M_{-s}\leqslant(A,B,C)$ 成立的最小与最大正实数，则

$$1\leqslant t_1\leqslant\frac{\log(3/2)}{\log(4/3)}<\frac{\log 3}{\log 2}\leqslant t_2\leqslant 2.$$

1989 年，Faruk，F. 等证明了比猜想 ①② 更精细的不等式：

③ $\frac{1}{\omega}+\frac{3}{\pi}\leqslant\sum\frac{1}{A}\leqslant\frac{3}{2\omega}-\frac{(2\cos\omega-\sqrt{3})^2}{3\sin 2\omega}$.　　{等正}

④ $\frac{3}{4\omega^2}\leqslant\sum\frac{1}{A^2}\leqslant\frac{1}{\omega^2}-\frac{9}{\pi^2}$.　　{等正}

若 A,B,C 不全相等，则对于 $0\leqslant t\leqslant\beta$，存在唯一的 $\beta\in(1,2)$，使得 $\sum A^{-t}\leqslant 3(2\omega)^{-t}$，当 $t\notin(0,\beta)$ 时，不等号反向. 仅当 $t=0$ 或 $t=\beta$ 时等号成立.（[305]1989，96(7)：576 ～ 589）

(6)　$3\omega^{-1}\leqslant\sum(A-\omega)^{-1}$.

(7)　$\sum A^{-4}\leqslant\omega^{-4}-3^4\times 13\pi^{-4}$.（[305]1989，96：576 ～ 589）

(8)　$9\sin^2\omega\leqslant\sum\sin^2 A$，从而有　$\sum\cos^2 A\leqslant 3(1-3\sin^2\omega)$.　　{等正}

(9)　$18R\sin^2\omega\leqslant\sum a\sin A$.　　{等正}

(10)　设 C-B 点 G 到三角形三顶点的距离为 x,y,z，则 $6R\sin\omega\leqslant\sum x$.

(11)　设 C 为锐角. 则对于{锐角 △}，有 $\mathrm{ctg}\,\omega\sin 2C<2$；对于{钝角 △}，不等号反向.

提示：利用 $\mathrm{ctg}\,\omega=\sum\mathrm{ctg}A$，得到

$$\text{ctg}\omega\sin 2C = 2\cos C[\sin(A+B)(\text{ctg}A+\text{ctg}B)+\cos C]$$
$$= 2\cos^2(A+B)+2\sin^2(A+B)\cos C\csc A\csc B.$$

对于{锐角 △}, $\cos C\csc A\csc B = 1-\text{ctg}A\text{ctg}B < 1$.

(12) $8\prod\cos A \leqslant 6\sqrt{6}(\prod a)(\prod\cos A)^{1/2}(\sum a^2)^{-3/2} \leqslant 3\text{tg}^2\omega$. {等正}

(13) $\prod\csc A \leqslant (8/27)(\text{ctg}\omega)^3$.

(14) **Janous 不等式:**

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{(\prod\csc A)^{1/3}}{(\sum\csc^2 A)^{1/2}} \leqslant \cos\omega \leqslant \frac{9}{8}\cdot\frac{\prod\csc A}{(\sum\csc^2 A)^{1/2}}. \quad ([19]333)$$

2. 设 O 为锐角 $\triangle ABC$ 内一点. 令 $\alpha = \angle OAC, \beta = \angle OBA, \gamma = \angle OCB$. 则

(1) $\sum\text{ctg}\alpha > 2\sqrt{3}+\sum\text{ctg}A > 2^{3/2}3^{1/4}\cdot\sqrt{\sum\text{ctg}A}$ ([305]1990,97,E3314)

(2) $\sum\text{ctg}\alpha > 3^{5/4}\text{ctg}\omega$. ([305]1990,97:851 ~ 852)

(3) $\sum\text{ctg}\alpha > \text{tg}\omega + 3(\prod\sin A)^{-1/3}$. ([381]1990,16:20 和 1991,17:91 ~ 92)

3. **Morley 三角形不等式:** $\triangle ABC$ 的 Morley 三角形(记为 $\triangle_M$) 是指一个等边三角形,它的顶点是 $\triangle ABC$ 内角三等分线相邻对的交点,用 p_M、R_M、r_M、S_M 分别表示 $\triangle_M$ 的半周长、外接圆半径、内切圆半径、面积. 则

(1) $R_M/R \leqslant \frac{8\sqrt{3}}{3}\sin^3(\pi/9)$, 仅当 $\triangle ABC$ 等边时等号成立.

(2) $\frac{8\sqrt{3}}{3}\sin^3(\pi/9) \leqslant r_M/r < 2/9$. 左边等号仅当 $\triangle ABC$ 等边时成立.

注意: $r_M = R_M/2$, $r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$, $\triangle_M$ 的边长 $a_M = 8R\sin\frac{A}{3}\sin\frac{B}{3}\sin\frac{C}{3}$.

(3) $p_M/p \leqslant \frac{8}{\sqrt{3}}\sin^3(\pi/9) = 0.18479\cdots$ 仅当 $\triangle ABC$ 等边时等号成立.

(4) $S_M/S \leqslant \frac{64}{3}\sin^6(\pi/9) = 0.034148\cdots$ 仅当 $\triangle ABC$ 等边时等号成立.

4. **直角三角形不等式:** 设 $\triangle ABC$ 为直角三角形, C 为斜边.

(1) [MCM]. $n > 2$ 时, $a^n + b^n < c^n$.

(2) $c < a+b \leqslant \sqrt{2}c$, 仅当 $a = b$ 时等号成立; 若 x, y 为正数, 则

$$ax + by \leqslant c(x^2+y^2)^{1/2}.$$

(3) $r < \frac{1}{2}\max\{a,b\}$; $r \leqslant (\sqrt{2}-1)c/2 < c/4$, 仅当 $a = b$ 时等号成立.

(4) $\sqrt{2}-1 \leqslant \frac{r}{h_c} < \frac{1}{2}$; $\frac{2\sqrt{2}}{3} \leqslant \frac{a+b}{c+h_c} < 1$.

(5) $R \geqslant (\sqrt{2}+1)r$.

(6) $c^3 \geqslant 8RS$; $\sum a^3 \geqslant (2+\sqrt{2})\prod a$.

(7)　$S \leqslant (3-2\sqrt{2})p^2$；　$S \leqslant (a+b)^2/8$.

(8)　$R+r \geqslant \sqrt{2S}$.

(9)　$2ab/c^2 \leqslant \cos^2(\frac{A-B}{2})$.

(10)　设 x,y 为非负实数，令 $M=(b/a)^2$，则 $a^2x(x^M-y) \geqslant b^2y(x-y^{1/M})$.

提示：利用第 3 章 No. 27. Young 不等式.（[348]1989，3：7）

(11)　[MCM]. 对于直角 $\triangle ABC$ 内任意 n 个点，必可作适当编号 $P_1,\cdots,P_n$，使得 $\sum_{k=1}^{n-1} P_kP_{k+1} \leqslant c^2$.

(12)　[MCM]. 设 $h_c = CD$，连接 $\triangle BDC$ 和 $\triangle ADC$ 的内心的直线分别交 BC，AC 于 G,E，则 $\triangle GCE$ 的面积 $S_1 \leqslant S/2$.

5.　[MCU]. 设 A,B,C 是格点（即它们在平面上的坐标都是整数的点），则

$$\prod a \geqslant 2R;\quad S \geqslant 1/2.$$

6.　[MCM]. 设 a,b,c 成等比数列，则其公比 q 满足 $(\sqrt{5}-1)/2 < q < (\sqrt{5}+1)/2$；若 A,B,C 成等差数列，且 $a>b>c$，则 $a+c \leqslant 2b$.

7.　**费马点不等式**：若平面上一点 O 对于每一个内角都小于 $2\pi/3$ 的三角形的三边所张的视角相等，则称 O 为费马点，记 $OA=x$，$OB=y$，$OC=z$，则

(1)　$(4\sqrt{3}S)^{1/2} \leqslant \sum x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}\sum a$；

(2)　$3\sum xy \leqslant \sum a^2 \leqslant 3\sum x^2$；

(3)　$(\sum x)(\sum \frac{1}{a}) > 4+\frac{2}{\sqrt{3}} > 5$.（[348]1992，10 和[31]247 ～ 250）

(4)　$(\sum x)^2 \leqslant \sum ab - \sum[\sqrt{a(p-a)} - \sqrt{b(p-b)}]^2$.

（董林，中学数学研究，1999，4：17）

(5)　设 R_a,R_b,R_c 分别是 $\triangle BOC$，$\triangle AOC$，$\triangle AOB$ 的外接圆半径，R,r 为 $\triangle ABC$ 外接圆、内切圆半径，则

$$\sum \frac{1}{R_a} \leqslant \frac{1}{R}+\frac{1}{r}.$$（赵振华，中学数学教学，1994，1：37）

8.　若 D,E,F 分别位于 BC，CA，AB 上，$\triangle DEF$ 的面积记为 S_1，边长记为 a_1,b_1,c_1，周长记为 L_1，$\triangle AFE$，$\triangle BFD$，$\triangle DEC$ 的面积和周长依次记为 S_2,S_3,S_4 和 L_2,L_3,L_4，则

(1)　$(\sum a)^2 \leqslant 12\sum a_1b_1$.

仅当 D,E,F 是正三角 ABC 三边中点时等号成立.（[348]1992，2：40 ～ 41）

(2)　$3\sum AD < 5\sum a$.

(3)　$\sum a^2b_1c_1 \geqslant 4S^2$.

(4)　$S_1 \geqslant \min\{S_2,S_3,S_4\}$；$L_1 \geqslant \min\{L_2,L_3,L_4\}$；

当 $S_1 \geqslant S/4$ 时，$S_1 \geqslant (S_2S_3S_4)^{1/3}$；当 $S_1 \leqslant S/4$，且 $S_2 \leqslant S_3 \leqslant S_4$ 时，$S_1 \geqslant (S_2S_3)^{1/2}$.（孔凡哲，[350]1996.1:40）

(5)　若 $S_2 \leqslant S_3 \leqslant S_4$，则

$$S_1 \geqslant \sqrt{S_2^2 + 8S_2S_3} - S_2/2;\quad S_1^3 + (S_2 + S_3 + S_4)S_1^2 - 4S_2S_3S_4 \geqslant 0,$$

仅当 AD, BE, CF 共点时等号成立.（证明见[19]340）

(6)　[MCU]. 若 $BD \leqslant CD, CE \leqslant AE, AF \leqslant BF$，则 $S \leqslant 4S_1$.

(7)　[MCM]. 若 $AF/FB = BD/DC = CE/EA = 1/3$，则 $p < L_1 < 3p/2$.

(8)　若 $\triangle ABC$ 为正三角形，边长为 a. D, E, F 分别在 BC, CA, AB 上移动，但要保持 $BD + CE + AF = a$，则 $S_1 \leqslant S/3$.

(9)　若 $AE + AF = BD + BF = CD + CE$，猜测 $L_1 \geqslant p$. {等正}（[19]347. No. 1. 20）

(10)　[MCM] 若再在 $\triangle DEF$ 的三边 EF, FD, ED 上依次取 G, H, K. 若 $\triangle AFH$, $\triangle CDH$, $\triangle BDK$, $\triangle AEK$, $\triangle BGF$, $\triangle CEG$ 的面积依次记为 S_1 至 S_6，则

$$S \geqslant 8\left(\sum_{k=1}^{6} S_k\right)^{1/6}.\ ([348]1989,5:39)$$

9.　设 D, E 是 $\triangle ABC$ 所在平面上的两点，则：

(1)　$\sum (a+b) \cdot CD \geqslant 8S$.　(2)　$\prod a \leqslant \sum a \cdot AD \cdot AE$.

提示：用复数方法. 设 A, B, C, D, E 在复平面上对应的复数分别为 z_1, z_2, z_3, z, ω. 令

$$f(z) = \sum \frac{(z - z_1)(\omega - z_1)}{(z_2 - z_1)(z_3 - z_1)}.$$

记 $g(z) = f(z) - 1$. 因为 $g(z)$ 是 z 的一次多项式，且当 z 分别为 $z_k (k = 1,2,3)$ 时 $g(z) = 0$，从而 $f(z) \equiv 1$，于是在 $f(z)$ 右边各项取模不小于 1 即可得证.

(3)　若 D, E 重合，记为 D，则

$$\prod a \leqslant \sum a \cdot DB \cdot DC;\quad \prod a \leqslant \sum a \cdot DA^2.$$

10.　[MCM]. 设 G 为 $\triangle ABC$ 的重心或内切圆圆心，AG, BG, CG 分别交该三角形的外接圆于 D, E, F，则

$$AG + BG + CG \leqslant GD + GE + GF.\quad ([99](2):53 \sim 55 \text{ 和 } 13, 71 \sim 84)$$

11.　设 d_a, d_b, d_c 为 $\triangle ABC$ 顶点到内心的距离，则 $32Rr^5 \leqslant (\prod d_a)^2 \leqslant 8(Rr)^3$.（丁遵标，中学数学，2002(1):47）

12.　设 $\triangle ABC$ 的内切圆分别切三边于 D, E, F，$\triangle DEF$ 的面积记为 S_1，边长记为 a_1, b_1, c_1，则 $\sum a_1b_1 \leqslant (1/4)\sum ab$；$S_1 \leqslant (1/4)S$.

13.　[MCM]. 设 $\triangle ABC$ 内角平分线分别交外接圆于 D, E, F，$\triangle DEF$ 的面积记为 S_1，则 $27R^4S \leqslant 16S_1^3$.

14.　设 D, E, F 将 $\triangle ABC$ 的周长三等分. $\triangle DEF$ 的面积记为 S_1，边长记为 a_1, b_1, c_1，则

(1)　$\sum a \leqslant 2\sum a_1$.　{等正}

(2) $S_1 > (2/9)S$.(三分周界型面积不等式)
式中 2/9 是最佳常数.([305]1990,97,E3397 和 1992,99(4))

(3) 1989 年,陈计等提出猜想:

$$\sum (FE)^k \geqslant 2^{-k} \sum a^k, k \in N.$$

因为已知 $k = 1,2,3$,或 D,E,F 中某两点分布在 $\triangle ABC$ 的同一边且三等分周界时,对所有非负整数 k 成立.(朱玉杨,[348]1994,9:25 ~ 26)

15. [MCM].直线 l 分 $\triangle ABC$ 为两个面积相等的部分,分别交 AB,AC 于 D,E,则

$$4(AD + AE) > BD + DE + EC + CB.$$

提示:从 $S_{\triangle ADC} > S/2$ 得 $AD > BD$,同理 $AE > EC$.

16. (1) 设 G 为正 $\triangle ABC$ 内一点,D,E,F 是 G 关于 BC,CA,AB 的对称点,$\triangle DEF$ 的面积记为 S_1,则 $S_1 \leqslant S$,仅当 G 为 $\triangle ABC$ 的中心时等号成立.

证 设 G 到三边 BC,CA,AB 的距离依次为 h_1,h_2,h_3,则 $S = (\sqrt{3}/3)(\sum h_1)^2$,$S_1 = \sqrt{3}\sum h_1 h_2$,则 $S - S_1 = (\sqrt{3}/6)\sum(h_1 - h_2)^2 \geqslant 0$.

Veldkamp,G. R. 指出,上述不等式可归结为:设 G 在正 $\triangle ABC$ 内部,S_1 是它的垂足三角形的面积,则 $S_1 \leqslant S/4$.它还可推广为:设 G 在任意 $\triangle ABC$ 所在平面上,O 为 $\triangle ABC$ 外接圆圆心,则按 Gergonne 公式,$S_1 = |R^2 - OG^2|[S/(4R^2)]$,对于 $\triangle ABC$ 内所有点 G,有 $S_1 \leqslant S/4$.这个不等式甚至对以 O 为圆心,$\sqrt{2}R$ 为半径的圆内所有点 G 仍成立.([19]681)

(2) 设 G 为 $\triangle ABC$ 内部一点,连接 AG,BG,CG 分别交对边于 D,E,F,$\triangle DEF$ 的面积记为 S_1,则

① $S_1 \leqslant S/4$,仅当 G 为 $\triangle ABC$ 的重心时等号成立.

② 1989 年,胡波证明 $S_{\triangle EGF} \leqslant 3[5\sqrt{5} - 11)/2]S$.([348]1989,11:41)

注 从 ② 推出 $S_1 = S_{\triangle EGF} + S_{\triangle DGE} + S_{\triangle DGF} \leqslant (3/2)(5\sqrt{5} - 11)S$,与 ① 比较,说明 ② 的结果还可以改进.那么 ② 的最优上界是什么?

17. [MCU].设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,两个矩形的一部分内接于该三角形,其面积分别为 S_1,S_2,则

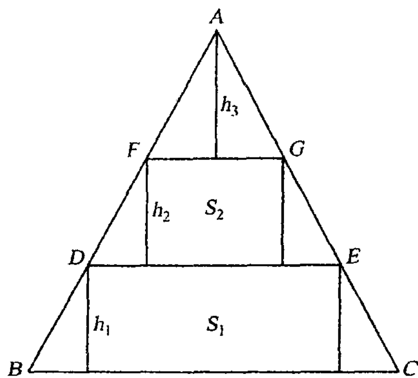
$$S_1 + S_2 \leqslant 2S/3.$$

证 如图所示,BC 边上的高 $h = \sum h_1$,记 $DE = a_1$,$FG = a_2$.由相似三角形的性质,得

$$\frac{a}{h} = \frac{a_1}{h_2 + h_3} = \frac{a_2}{h_3}.$$

从而 $\dfrac{S_1 + S_2}{S} = \dfrac{h_1 a_1 + h_2 a_2}{(ha)/2} = \dfrac{2}{h^2}\sum h_1 h_2$.

问题变成在条件 $\sum h_1 = h$ 下求 $Q = \sum h_1 h_2$ 的



17 题图

最大值.先固定 h_1，则 $h_2+h_3=h-h_1$，从而 $Q=h_1(h-h_1)+h_2h_3$，当 $h_2=h_3$ 时，h_2h_3 达到最大值.于是在条件 $h_1+2h_2=h$ 下，使得 $2h_1h_2+h_2^2$ 达到最大值，从而得出 $h_1=h_2=h_3=h/3$ 时，Q 达到最大值 $h^2/3$.

注 这是第46届普特南数学竞赛题，1987年，上海市又作为中学生数学竞赛题.(它的推广见[99](19)78～91)

18. [MCM].半径为 R 的圆内(包括圆周)有7个点，以其中任两点和圆心为顶点的三角形中，至少有一个三角形的面积不超过 $\sqrt{3}R^2/4$.

提示：将圆等分为6个扇形，再利用"抽屉原理"证明.

19. 设 O 为 $\triangle ABC$ 内任一点，记 $OA=x$，$OB=y$，$OC=z$，延长 AO，BO，CO 分别与三边交于 D_1，E_1，F_1，记 $OD_1=l_1$，$OE_1=l_2$，$OF_1=l_3$，O 到三边的距离为 $OD=h_1$，$OE=h_2$，$OF=h_3$，$\angle BOC$，$\angle COA$，$\angle AOB$ 的平分线长分别记为 t'_a，t'_b，t'_c.则

(1) 若 $a>b>c$，则 $\sum l_1<a$.

(2) **Guggenheimer 不等式：** $p<\sum x<2p$.

1989年，陈计作了指数推广：若 $t\geqslant 1$，则 $\sum x^t<\sum a^t$.([348]1989,12:3;[350]1992,3:34～35)

(3) **Barrow 不等式：**$\sum x\geqslant 2\sum t'_a$;

1961年，Oppenheim 作了加权推广：

$$\sum\lambda_1 x\geqslant 2\sum\frac{\lambda_2\lambda_3(y+z)}{\lambda_2 y+\lambda_3 z}t'_a\text{，式中 }\lambda_k(1\leqslant k\leqslant 3)\text{ 为正数.}$$

(4) $6r\leqslant\sum x$; $\sum x\geqslant\dfrac{3}{\sqrt{\sum a^{-2}}}$; $(\sum x)(\sum\dfrac{1}{a})>5$.

(5) 若 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，l 是 $\triangle ABC$ 的内切圆的切点为顶点形成的三角形的周长，则 $\sum x\geqslant 2l/3$.仅当 $\triangle ABC$ 为等边，且 O 为其中心时等号成立.

(6) $\sum x^2\geqslant(1/3)\sum a^2$，仅当 O 为重心时等号成立.(Leibniz 不等式)

(7) **托勒密不等式：**$zc\leqslant xa+yb$.

(8) **Steiner 不等式：**设在 $\triangle ABC$ 中除点 O 外，还取一点 M，使得

$(1/a)\sin\angle BMC=(1/b)\sin\angle AMC=(1/c)\sin\angle AMB$，则 $\sum ax\geqslant\sum a\cdot MA$. 仅当 O 与 M 重合时等号成立.

证 用面积比较法.过 A，B，C 分别作 MA，MB，MC 的垂线，相交构成一个新的 $\triangle EDF$.由于 $\sin\angle D=\sin\angle BMC$，$\sin\angle E=\sin\angle AMC$，$\sin\angle F=\sin\angle AMB$，从而由正弦定理得 $EF/a=DF/b=DE/c=q>0$.又 $S_{\triangle EOF}\leqslant EF\cdot AO/2=qax/2$;$S_{\triangle EMF}=qaAM/2$.$(q\sum ax)/2\geqslant S_{\triangle DEF}=(q\sum a\cdot MA)/2$.

(9) **Klamkin 不等式**：$\prod a \leqslant \sum ax^2$.

(10) $\sum(p-a)x \geqslant 2S$.

(11) **Bilcev 不等式**：$\sum x\sqrt{a(p-a)} \geqslant 2p\sqrt{Rr}$.

(12) $\sum(xy/ab) \geqslant 1$.

(13) $\prod(y+z) \leqslant \sum xa^2 \leqslant (\sum x)(\sum yz)$.

(14) $\sum h_1$ 介于 $\triangle ABC$ 的最短与最长高线之间，而且

$$(1/2)\sum x\sin A \leqslant \sum h_1 \leqslant \sum\left(x\sin\frac{A}{2}\right).$$

(15) $\sum h_1^2 \geqslant 4S^2/(\sum a^2)$.

(16) $\sum\sqrt{h_1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2R}}(\sum a^2)^{1/2}$，仅当 O 为三角形中心且三角形等边时等号成立.

(17) $\sum\sqrt{h_1} \leqslant \sqrt{3\sqrt{3}p}$. (Bager, A)

(18) $\sum(a/h_1) \geqslant 2p^2/S$.（22 届 IMO）

$0<t<1$ 时 $\sum(ah_1^t) \leqslant 2pr^t$，当 $t<0$ 或 $t>1$ 时不等号反向.

(19) $\sum(h_1+h_2)\cos\frac{C}{2} \leqslant 2p_1$，

式中 $2p_1$ 为 $\triangle DEF$ 的周长. 仅当 O 为 $\triangle ABC$ 内心时等号成立.

(20) $\sum ah_2h_3 \leqslant (1/4)\prod a$，仅当 O 为三角形外心时等号成立.

(21) $\sum(p-a)h_2h_3 \leqslant pr^2$.

(22) $\sum ah_1^2 + \sum(p-a)h_2h_3 \geqslant 3r^2p$.

(23) $\sum\frac{h_1h_2}{ab} \leqslant \frac{1}{4}$. 与(20)等价.

(24) $\sum(h_a/h_1) \geqslant 9$.

(25) $\sum h_1 \leqslant R-(r/2)$.

(26) $\prod h_1 \leqslant 8S^3/27\prod a$，仅当 O 为三角形重心时等号成立.

(27) 设 $p\geqslant 1$，则 $\sum\frac{x}{x+ph_1} \geqslant \frac{6}{p+2}$；$\sum\frac{x^p}{x^p+h_1^p} \geqslant 2$. $p=1$ 时就得到 Berker 不等式：$\sum\frac{x}{x+h_1} \geqslant 2$.（刘健，中学数学研究，2008(9)：43～44）

(28) **Erdös-Mordell 不等式**：

$$\sum x \geqslant 2\sum h_1 \qquad \{等正，O 为中心\}$$

([305]1935，42：396；1937，44：252～254)

该不等式可写成另一形式：

$$2\sum xh_1 \leqslant \sum xy.$$

推论　$2\sum(1/x) \leqslant \sum(1/h_1)$.

1948年，Hardy用复数方法给出了一个有趣的证明. 1993年，Arez给出了一个简短的初等证明，并指出该不等式不能推广到高维.（[305]1993:60 ～ 62）这个不等式已有许多推广，例如：

当 $t>1$ 时，$2\sum h_1^t < \sum h_1^t[(\frac{b}{c})^t + (\frac{c}{b})^t] < \sum x^t < \sum a^t$；

当 $0<t\leqslant 1$ 时，$2^t\sum h_1^t \leqslant 2^{t-1}\sum h_1^t[(\frac{b}{c})^t + (\frac{c}{b})^t] \leqslant \sum x^t < (1+2^{\frac{1}{t-1}})^{1-t}\sum a^t$，当 $t<0$ 时，第一、二两个不等式反向.（[19]313 ～ 319）

1992年，杨学枝证明：$\sum \frac{1}{h_1} \geqslant 2\sqrt{3}\sum \frac{1}{a}$，{等正}. 并提出了两个猜想：

①　$\sum \frac{1}{h_1^2} \geqslant 12\sum \frac{1}{a^2}$；　　②　$\sum \frac{1}{h_1h_2} \geqslant 12\sum \frac{1}{ab}$，

（[350]1992.2:35 ～ 37）

1994年，唐立华、冷岗松加强了猜想①，否定了猜想②，并将②修正为

$\sum \frac{1}{h_1^2} > 8(\sum \frac{1}{a^2})(\sum \frac{1}{h_1h_2})^2 \geqslant 432\sum(\frac{1}{ab})^2$.（[348]1994,6:23 ～ 24）

我们还可以进一步问：$\sum(h_1h_2)^t$ 与 $\sum(ab)^t$ 的大小关系如何？

$$\sum \frac{1}{h_1h_2} \geqslant 2\sum \frac{1}{xh_2}.\ ([345]1994,3:39)$$

1988年，陈计、李广兴猜想：

当 $t>1$ 时，$\sum x^t \geqslant 2\sum h_1^t + 6(2^{t-1}-1)(\prod h_1)^{t/3}$；当 $t<-1$ 时，$\sum h_1^t \geqslant 2\sum x^t + 6(2^{-t-1}-1)(\prod x)^{t/3}$，仅当 $\triangle ABC$ 为等边，O 为三角形中心时等号成立，并对 $|t|\geqslant 2$ 证明了这个猜想，但对于 $1<|t|<2$ 是否成立，还未解决.（宁波大学学报，1989,2(2):12 ～ 14;[348]1988,12）

(29)　$ax \geqslant bh_2 + ch_3$.

(30)　$\sum ax \geqslant 2\sum ah_1$.（[305]1956,63:571 ～ 572）

(31)　$\sum ax \geqslant \sum(ch_2 + bh_3)$（[53]117）；$\sum ax \geqslant 4S$. 仅当 O 为外心时等号成立.

(32)　$\sum(ax)^2 \leqslant 12R^2\sum h_1^2$.

(33)　$\sum xh_1 \geqslant 2\sum h_1h_2$. 它有许多推广：$t>1$ 时，$\sum(xh_1)^t > \sum[(b/c)^t + (c/b)^t](h_2h_3)^t \geqslant 2\sum(h_2h_3)^t$；$t<-1$ 时，$\sum(xh_1)^t < 2\sum(h_2h_3)^t$；$0<t\leqslant 1$ 时，$\sum(xh_1)^t \geqslant 2^{t-1}\sum[(b/c)^t + (c/b)^t](h_2h_3)^t \geqslant 2^t\sum(h_2h_3)^t$. 在[19]313 ～ 319还可找到大量类似的结果.

(34)　$\sum xy \geqslant 4\sum h_1h_2$.

推广 $0<t\leqslant 1$ 时，$\sum(xy)^t\geqslant 4^t\sum(h_1h_2)^t$，而当 $-1\leqslant t<0$ 时，不等号反向；当 $t>1$ 时，$\sum(xy)^t>4\sum(h_1h_2)^t$，而当 $t<-1$ 时，不等号反向. ([99](15)(1992)80 ~ 100)

(35) $\sum xy\geqslant\sum(h_1+h_2)(h_1+h_3)$； $2\sum ah_2h_3\leqslant\sum axh_1\leqslant 2RS$，仅当 O 为外心时等号成立.

(36) $\prod x\geqslant R/(2r)\prod(h_1+h_2)\geqslant\prod(h_1+h_2)$；

$$\prod x\geqslant(4R/r)\prod h_1\geqslant 8\prod h_1;\quad \frac{\prod a}{\prod x}\leqslant\sum\frac{p-a}{h_1}\leqslant\frac{rS}{\prod h_1}.$$

(37) $8\prod h_1\leqslant 8\prod l_1\leqslant\prod x\leqslant(32/27)R_0^3$，式中 R_0 是覆盖 $\triangle ABC$ 的最小圆半径. ([348]1990,3:17)

(38) $8\prod h_1\leqslant r\sum(xy)$.

(39) $12\prod h_1\leqslant\sum(h_1yz)$； $12\prod h_1\leqslant\sum h_1x^2$.

(40) $\sum(x/l_1)\geqslant 6$； $\sum(l_1/x)\geqslant 3/2$.

(41) $(5/R)<2\sum(1/x)\leqslant\sum(1/h_1)$.

(42) 1991年，安振平提出两个猜想：设 $\triangle D_1E_1F_1$ 的三边记为 a_1,b_1,c_1，证明或否定

$$h_ah_{a1}+l_bl_{b1}+t_ct_{c1}\leqslant(3/4)\sum(aa_1);\quad \frac{1}{h_ah_{a1}}+\frac{1}{l_bl_{b1}}+\frac{1}{t_ct_{c1}}\geqslant\frac{12}{\sum aa_1}.$$

([348]1991,8.问题征解74)

我们还可以进一步问，它们的推广 $(h_ah_{a1})^\lambda+(l_bl_{b1})^\lambda+(t_ct_{c1})^\lambda$ 的上下界是多少?

(43) 记 $AD_1=l_4$，$BE_1=l_5$，$CF_1=l_6$，安振平1991年提出证明或否定：$\lambda\geqslant 1$ 时，

① $l_4^\lambda+l_5^\lambda+l_6^\lambda<\sum a^\lambda$； ② $\frac{1}{l_4}+\frac{1}{l_5}+\frac{1}{l_6}>\frac{5}{p}$. ([348]1991,8:21 ~ 24)

但已有反例说明①不成立. ([348]1992,2:20)

我们在第三版中提问，$l_4^\lambda+l_5^\lambda+l_6^\lambda$ 的上下界是多少?2005年，王开贤证明了以下结果：

$$\frac{1}{l_4}+\frac{1}{l_5}+\frac{1}{l_6}>\frac{3}{p}.$$

以下不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$，则 $\lambda>0$ 时，$l_4^\lambda+l_5^\lambda+l_6^\lambda<2a^\lambda+b^\lambda$，当 $\lambda<0$ 时，不等号反向.

若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，则当 $\lambda>0$ 时，$l_4^\lambda+l_5^\lambda+l_6^\lambda\geqslant h_a^\lambda+h_b^\lambda+h_c^\lambda$，当 $\lambda<0$ 时，不等号反向.

若 $\triangle ABC$ 为直角或钝角三角形时，则上述"$\geqslant$"改为"$>$". ([351]2005(1):77 ~ 78)

(44) 设 O 是 $\triangle ABC$ 所在平面上任一点，2009年，褚小光和张志华证明：

$$\sum\frac{x}{\sqrt{a}}\geqslant\sqrt{\sum a};\qquad \sum\frac{l_a}{h_a}x\geqslant 3R.$$

并提出了两个猜想：

① 证明或否定：$\sum \frac{x}{r_a+r_b} \geqslant 1$，$\sum \frac{y}{r_a+r_b} \geqslant 1$.

② 猜想：$\sum \frac{x}{l_c} \geqslant 2$，$\sum \frac{x}{l_b} \geqslant 2$.([164]98 ~ 102)

(45) 2009 年，刘健证明：$\sum \sqrt{\frac{h_1 h_2}{r_1 r_2}} \leqslant 1$，$\sum \frac{(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2})^2}{r_1+r_2} \leqslant 2$.

并提出了两个猜想：设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，有

① 猜想：$\sqrt{l_b}+\sqrt{l_c} \geqslant \sqrt{2(t_b+t_c)}$；

② 猜想：$\sum \left(\frac{x}{t_a}\right)^2 \geqslant 2\sum \frac{xy}{h_c+r_c}$，式中 x,y,z 为任意实数.([164]154 ~ 157)

(46) 2004 年，褚小光证明：

① $p^2 \geqslant \sum h_1^2 + 8\sum h_1 h_2$；　② $\sum a^2 \geqslant \sum x + 8\sum h_1 h_2$；

③ $\sum a^2 \geqslant 2\sum h_1^2 + 10\sum h_1 h_2$.

并提出猜想：$\sum ab \geqslant \sum xy + 8\sum h_1 h_2$.([351]2004(1):47 ~ 48,(3):402 ~ 411)

(47) $\sum \frac{xy}{l_1 l_2} \geqslant 12$；$\sum \frac{l_1 l_2}{xy} \geqslant \frac{3}{4}$.

20. [MCM]. 设 O 是 $\triangle ABC$ 的内心. AO,BO,CO 的延长线分别与三边交于 D_1,E_1,F_1. 仍记 $OA=x,OB=y,OC=z,AD_1=l_4,BE_1=l_5,CF_1=l_6$，则

$$1/4 < (xyz)/(l_4 l_5 l_6) \leqslant 8/27.$$

这是 32 届 *IMO* 试题. 苏化明证明，不等式左边对于 O 是 $\triangle ABC$ 内任一点均成立，并给出了几十个类似的不等式.([99]13:71 ~ 84)

21. 周界中点三角形不等式：若三角形一边上的一点和这边所对的顶点把三角形的周界分割成两个等长的折线，就称该点为三角形的周界中点. 以三角形的三个周界中点为顶点的三角形，称为周界中点三角形. 该周界中点三角形的边长、半周长、面积分别记为 a_0,b_0,c_0,p_0,S_0，则

(1) $\frac{(R-r)r}{2R^2} \leqslant \frac{a_0 b_0 c_0}{abc} \leqslant \frac{4R-7r}{4R}$；

(2) $\frac{(R-r)r^2}{R} \leqslant \frac{a_0 b_0 c_0}{a+b+c} \leqslant \frac{r(4R-7r)}{2}$；

(3) $R-r \leqslant R_0 \leqslant \frac{2R^2}{r} - \frac{7R}{2}$.

(杨志明，[164]82 ~ 84)

22. 双曲线焦点三角形不等式：

设双曲线的离心率为 e，焦点为 F_1,F_2，P 为双曲线上任一点(除两顶点外)，r,R 分别为 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆和外接圆半径，则 $\frac{r}{R} \leqslant (e-e^{-1})(e-\sqrt{e^2-1})$.

七、 联系两个三角形的不等式

设 $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 的边长、面积等元素的记号分别加下标 1,2. 如 a_1,b_1,c_1，

S_1, a_2, b_2, c_2, S_2 等.

1. **N-P 不等式(Neuberg-Pedoe 不等式)**:令 $H_p = \sum a_2^{2p}(-a_1^{2p} + b_1^{2p} + c_1^{2p})$.

1891 年 Neuberg,J. 提出,1943 年 Pedoe,D. 第一个给出证明的著名不等式是:

$$H_1 \geqslant 16S_1S_2. \qquad \{等似\}$$

这个 N-P 不等式已有几十种证法和各种推广. 例如,1963 年 Oppenheim,A. 证明了与 N-P 不等式等价的下述不等式(一般称为 **Oppenheim 不等式**):

定义 a_3, b_3, c_3 为 $a_3 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ 等,则以 a_3, b_3, c_3 为边可以构成一个三角形,记其面积为 S_3,三个三角形 $\triangle_1, \triangle_2, \triangle_3$ 任一边的高依次记为 h_1, h_2, h_3,则

$$S_3 \geqslant S_1 + S_2, \quad h_3^2 \geqslant h_1^2 + h_2^2; \qquad \{等似\}$$

而 $S_3 \geqslant 2\sqrt{S_1S_2}$,仅当 S_1 与 S_2 全等时等号成立. ([305]1963,70;1964,71:444)

1973 年,Carlitz,L. 证明在某些附加条件下,有 $H_1 \geqslant 8(S_1^2 + S_2^2)$. ([305]1973,80:910 ~ 911)

1988 年,陈计、何明秋证明 $H_1 \geqslant 16S_1S_2 + 2\sum(a_1b_2 - a_2b_1)^2$. ([348]1988,1:3 ~ 4)

1981 年,高灵证明 $H_{1/2} \geqslant \sqrt{48S_1S_2}$. 1989 年,宋庆证明 $H_{1/2} \geqslant 2\sqrt{3}(\frac{p_1}{p_2}S_2 + \frac{p_2}{p_1}S_1)$. ([350]1994,4:43)

1987 年,马援证明:若 $0 \leqslant p \leqslant 1$,则 $H_p \geqslant 3[(16/3)S_1S_2]^p$. 当 $0 < p < 1$ 时,仅当 $\triangle_1$, $\triangle_2$ 均为等边时等号成立.

1991 年,杨世国证明了反向 N-P 不等式和反向 Oppenheim 不等式:令 $d_k = (b_k^2 + c_k^2 - a_k^2)/2$, $D_k = \begin{pmatrix} b_k^2 & d_k \\ d_k & c_k^2 \end{pmatrix}$, α_k, β_k 分别是矩阵 D_1, D_2 的特征值. $0 < m \leqslant \alpha_k, \beta_k \leqslant M, k = 1, 2$. 则 $H_1 \leqslant 8[(M/m)(S_1 + S_2)^2 - (S_1^2 + S_2^2)]$, $S_3 \leqslant \sqrt{M/m}(S_1 + S_2)$. ([345]1991,12:37 ~ 39)

[19] 指出,在 H_1 与 $16S_1S_2$ 之间还可作不同的插值. 例如

$$H_1 \geqslant (\sum a_1^2)(\sum a_2^2) - 2\sqrt{(\sum a_1^4)(\sum a_2^4)} \geqslant 16S_1S_2.$$

上述不等式还可作各种指数或加权推广. 例如:

令 $H_{p,q} = \sum a_2^{2/q}(-a_1^{2/p} + b_1^{2/p} + c_1^{2/p})$, $t = 1/p + 1/q$, $p, q \geqslant 1$,则

$$H_{p,q} \geqslant 3(\frac{4}{\sqrt{3}})^t S_1^{1/p} S_2^{1/q}. \quad ([19]354 \sim 371)$$

1994 年,尹华焱证明 $H_1 \leqslant 16S_1S_2\left[3\left(\frac{R_1R_2}{4r_1r_2}\right)^{3/2} - 2\right]$,仅当 $\triangle_1, \triangle_2$ 均为等边时等号成立. 作者还猜想:

$$16S_1S_2\left(\frac{R_1R_2}{4r_1r_2}\right)^{1/2} \leqslant H_1 \leqslant 16S_1S_2\left(\frac{R_1R_2}{4r_1r_2}\right)^{3/2}. \ ([350]1994,4:41 \sim 42)$$

2. [MCU]. 设以 $a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2$ 为边构成的三角形面积为 S,则

$$\sqrt{S} \geqslant \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}.$$ {等似}

(第 43 届普特南数学竞赛,[305]1983,90:546 ～ 553)

3. 设 x,y 为非负实数,令 $t = x + y, q = 1 + (t/2)$,则

$$\sum a_1^x a_2^y \geqslant 2^t 3^q r_1^x r_2^y.$$

4. 若 $x,y \geqslant 1$,令 $\lambda = x + y - 2$,则 $\sum a_1^x a_2^y \leqslant 9 \times 2^\lambda R_1^x R_2^y$.

5. $36 r_1 r_2 \leqslant 4\sqrt{3 S_1 S_2} \leqslant \sum a_1 a_2 \leqslant 8 R_1 R_2 + 4 r_1 r_2 \leqslant 9 R_1 R_2$.

6. $432(r_1 r_2)^2 \leqslant 16 S_1 S_2 + \sum a_2^2 (b_1^2 - c_1^2) \leqslant \sum (a_1 a_2)^2 \leqslant 36(R_1 R_2)^2$.

7. (1) $\sum \dfrac{1}{a_1 a_2} \geqslant \dfrac{1}{4 r_1 r_2} \geqslant \dfrac{1}{R_1 R_2}$;

(2) $\sum \dfrac{1}{a_1(-a_2 + b_2 + c_2)} \geqslant \dfrac{1}{R_1 R_2}$.

8. 1990 年,李世杰证明:设 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 为正数,则

$$\sum (\lambda_1 a_1 a_2) \geqslant 4\sqrt{(\sum \lambda_1 \lambda_2) S_1 S_2},$$ 仅当两个三角形相似且

$$\frac{a_1^2}{\lambda_2 + \lambda_3} = \frac{b_1^2}{\lambda_3 + \lambda_1} = \frac{c_1^2}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

时等号成立.由此推出

$$\sum a_1 a_2 (a_1 + a_2) \geqslant 8 \cdot 3^{1/4} \sqrt{S_1 S_2} (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}),$$

$$\sum (a_1 + a_2)^3 \geqslant 64 \times 3^{1/4} (S_1 S_2)^{3/4}.$$ ([348]1990,1:22 ～ 26)

9. $\sum \dfrac{a_2}{b_1^2 + c_1^2} \leqslant \dfrac{9 R_2}{8 S_1}$.

10. $\sum \dfrac{1}{a_2(p_1 - a_1)} \geqslant \dfrac{2}{R_1 R_2}$.

11. $\sum \dfrac{a_1}{p_2 - a_2} \geqslant 6\left(\dfrac{S_1}{S_2}\right)^{1/2}$.

12. $4(3 R_1 R_2)^{-1} \leqslant \sum (l_{a_1} l_{a_2})^{-1} \leqslant \dfrac{1}{3 r_1 r_2}$.

仅当两个三角形等边时等号成立.([348]1990,4:18)

13. $\sum l_{a_1} l_{a_2} \geqslant 3\sqrt{3 S_1 S_2}$.

14. $\sum a_1^2 r_{a_2} \geqslant 2 S_1 p_2$.

15. $\sum a_2 r_{a_1}^2 \geqslant 18 S_1 S_2 / p_2$.

16. $\sum \dfrac{a_1^2}{r_{c_2} r_{b_2}} \geqslant \dfrac{4 S_1}{S_2}$.

17. $\sum (r_{a_1} / h_{a_2}) \geqslant 3 \cdot \sqrt{S_1 / S_2}$.

18. $8\sqrt{3} \cdot (S_1/S_2)^{1/2} \leqslant \sum (b_1 + c_1)/r_{a_2} \leqslant 18 R_1 R_2 / S_2$.

19. [MCM]若 $\triangle_1, \triangle_2$ 均为等边三角形且内接于一个半径为 r 的圆,它们公共部分

的面积为 S_0，则 $2S_0 \geqslant \sqrt{3}r^2$.

20. 令 $Q_k = \sum(p_k - a_k)(p_k - b_k)$，$M_k = (\sum a_2^2)/(4Q_k)$，则

$$\sum a_2^2 a_1(p_1 - a_1) \geqslant 4(M_1 S_1^2 + (S_2^2/M_1)) \geqslant 8S_1S_2;$$

$$\sum a_1 a_2(p_1 - a_1)(p_2 - a_2) \geqslant 2[M_2 S_1^2/M_1 + M_1 S_2^2/M_2].$$

仅当两个三角形均为等边时等号成立.（[348]1988，3.4 和[350]1990.3：27 ~ 29）

21. $\sum(a_1^2/a_2) \leqslant R_1^2(\sum a_2)^2/\prod a_2$.

其中等号成立的充要条件是：$\triangle_1$ 为锐角三角形且 $\triangle_2$ 与 $\triangle_3$ 相似，其中 $\triangle_3$ 的三内角为 $A_3 = \pi - 2A_1$，$B_3 = \pi - 2B_1$，$C_3 = \pi - 2C_1$，而 R_1 是 $\triangle_1$ 的外接圆半径.

提示：利用正弦定理和三角恒等变换，将所要证的不等式转化为

$$(a_2 - b_2\cos C_3 - c_2\cos B_3)^2 + (b_2\sin C_3 - c_2\sin B_3)^2 \geqslant 0.$$

22. **涉及两个三角形角的不等式**：利用边角变换，可以将许多三角形边的不等式转化为角的不等式. 例如：

(1) $\sum \operatorname{ctg} A_1 \geqslant \sum(\cos A_2/\sin A_1)$； {等似}

(2) $\sum \operatorname{ctg} A_1(\operatorname{ctg} B_2 + \operatorname{ctg} C_2) \geqslant 2$.

这是角元的 N-P 不等式.（[350]1984，3：34 ~ 36）

23. $\dfrac{R_1}{r_2} \geqslant \dfrac{2}{3}\sum \dfrac{a_1}{a_2}$.（宋庆，[32]131 ~ 136） {等正}

24. 设 Q 是三角形所在平面上任一点，则

(1) $\sum a_2\,\overline{QA_1} \geqslant \left\{\dfrac{1}{2}\sum a_2^2(b_1^2 + c_1^2 - a_1^2) + 8S_1S_2\right\}^{1/2}$ （Bottema 不等式）；

(2) $\sum a_2\,\overline{QA_1} \geqslant 4\sqrt{S_1S_2}$ （Bottema－Klamkin 不等式）；

(3) $\sum a_2\,\overline{QA_1} \geqslant 2\sqrt{S_2}\left(\sum a_1\,\overline{QA_1}\right)^{1/2}$；

(4) $\sum \dfrac{\overline{QA_1}}{a_1a_2} \geqslant \dfrac{1}{R_2}$.

[(1) ~ (3) 见[351]2007(1)：72 ~ 82；(4) 见[356]1995，4：48 ~ 50]

§2 多边形与多面体不等式

一、（平面）四边形不等式

设四边形 $ABCD$ 的边长为 a,b,c,d，面积为 S，对角线长为 l_1,l_2，若存在内切圆和外接圆，它们的半径分别记为 r,R. 仍用 $\sum$，$\prod$ 分别表示循环和、积. 例如 $\sum f(a)$ 表示 $f(a)+f(b)+f(c)+f(d)$，因此半周长 $p = (\sum a)/2$.

（一） 一般四边形不等式

1. **托勒密不等式**：$l_1l_2 \leqslant ac + bd$.

提示：用复数证法. 以 A 为原点，设 B,C,D 对应的复数分别为 z_1,z_2,z_3. 由三角不等式 $|z_2(z_1-z_3)|\leqslant|z_1(z_2-z_3)|+|z_3(z_1-z_2)|$ 即可得证.

2. 在边长为一定的所有四边形中，以内接于圆的四边形的面积为最大，即

$$S\leqslant\sqrt{\prod(p-a)}\leqslant p^2/4. \qquad \{等正\}$$

提示：求 $S=\frac{1}{2}(ab\sin\theta+cd\sin\varphi)$ 在 $\theta+\varphi=\pi$ 时取得最大值. 第二个不等式用 A-G 不等式证明.

3. $p<l_1+l_2<2p$.

推广：$t>0$ 时，有 $p(l_1^t+l_2^t)>l_1^{t+1}+l_2^{t+1}$. ([3]15.1,2)

4. $4S\leqslant(a+c)(b+d)\leqslant\sum a^2$； $\sum ab\geqslant 6S$.

5. $(S\sum a)^2\leqslant 2(ab+cd)(ad+bc)(ac+bd)$.

6. $8S^3\leqslant(ab+cd)(ad+bc)(ac+bd)$.

7. $64S^3\geqslant\prod(a+b)$； $\prod(a^2+b^2)\geqslant 16S^4$. （丁遵标）

8. 1987 年，杨学枝证明：$16S^2\leqslant(\sum a)(\sum abc)$.

1991 年，作者又作了加权推广. ([348]1991,6:41)

9. $32\prod a\leqslant 3(\sum a^2)^2-4(\sum a^4)$,

仅当 $ABCD$ 为菱形时等号成立(陈计、王振).

10. [MCM]. 设 a,b,c,d,l_1,l_2 的最大最小值分别记为 M,m. 则

$$M\geqslant\sqrt{2}m. \ ([3]157)$$

11. [MCM]. 设四边形 AB,BC,CD,DA 的中点分别为 E,F,G,H，则

$$S\leqslant GE\cdot HF\leqslant(a+c)(b+d)/4.$$

12. 若 G 是四边形所在平面上任一点，则 $\sum GA^2\geqslant 2S$.

13. 若四边形 $ABCD$ 在单位正方形每边上各有一个顶点，则 $2\leqslant\sum a^2\leqslant 4$.

14. 若 G 是等腰梯形 $ABCD(AD\parallel BC)$ 内任一点，则 $GB+GC<AB+AC$. ([345]1991,7:49)

（二） 凸四边形不等式

1. 设 $ABCD$ 为凸四边形，则

(1) **Mircea 不等式**：$2<\sum\sin(A/2)\leqslant 2\sqrt{2}$；

$$4(\sqrt{2}-1)\leqslant\sum\operatorname{tg}(A/4)<2. \ ([19]401)$$

(2) $2S\leqslant ab+cd$； $2S\leqslant ac+bd$； $\sum a<2(l_1+l_2)<2\sum a$.

(3) 若 $a\leqslant b\leqslant c\leqslant d$，则 $S\leqslant 3\sqrt{3}c^2/4$. ([363]1969,B20:100～102)

(4) 若 $A+C>\pi$，则 $l_1/l_2<(ad+bc)/(ab+cd)$.

(5) 1986 年，Tutescu 曾提出猜想：$\sqrt{l_1^2+l_2^2}\leqslant 2\max\{a,b,c,d\}$.

等号在什么条件下成立?([363]1986(91)220)1991 年已证明.(数学教学,1991,1:30)

1994 年,文家金证明 $2\min\{a,b,c,d\} \leqslant \min\{a,c\}+\min\{b,d\} \leqslant \sqrt{l_1^2+l_2^2}$;当 $ABCD$ 是空间四边形时,下式成立

$$\sqrt{l_1^2+l_2^2} \leqslant \min\{\sqrt{b^2+d^2+2ac};\sqrt{a^2+c^2+2bd}\} \leqslant$$

$$\{\frac{1}{2}[(a+c)^2+(b+d)^2]\}^{1/2} \leqslant (\sum a^2)^{1/2} \leqslant 2\max\{a,b,c,d\}.$$ ([100]328 ~ 335)

(6)　若 G 是凸四形形 $ABCD$ 所在平面上任一点,则 $\sum GA^2 \geqslant (\sum a^2+l_1^2+l_2^2)/4$.

(7)　设正数 λ_k 满足 $\lambda_1+\lambda_3=\lambda_2+\lambda_4=2$,则 $\sum \lambda_1 a^2 \geqslant 4(\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_4-1)S$,仅当所有 $\lambda_k=1$,且凸四边形为正方形时等号成立.([348]1989,6:4 ~ 5)

(8)　若 $R=1$,则　$0<2p-(l_1+l_2)<2$.

(9)　若 $S=1$,则　$\sum a \geqslant 4$;　$l_1+l_2 \geqslant 2\sqrt{2}$.

(10)　设在凸四边形 $ABCD$ 内有一点 Q 与 CD 相距为 h,且 $AQ=h+AD$,$BQ=h+BC$,$AB=BC+AD$.则 $\frac{1}{\sqrt{h}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{AD}}+\frac{1}{\sqrt{BC}}$.　　(30 届 *IMO*)

提示:分别以 A,B,Q 为圆心,以 AD、BC,h 为半径作圆,由条件知,这三个圆相互外切,而且圆 Q 与 CD 相切.再作圆 A 与圆 B 的外公切线 MN,然后作与圆 A、圆 B、MN 相切的圆 O,则圆 O 的半径 $r \geqslant h$.再考虑直角梯形 $ABNM$ 中的几何关系.([99](4)5 ~ 7)

(11)　[MCM] 过凸四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 上一点 M,作 AB 的平行线交 BC 于 P,交 AD 于 Q,记 $a=AB$,$c=CD$.则 $MP^2+MQ^2 \geqslant (ac)^2/(a^2+c^2)$.

(12)　$\sum(\csc\frac{A}{2})^4 \geqslant 16$.

2.　在凸四边形 $ABCD$ 中,记 $u=CA+CB$,$v=DA+DB$,则对于 CD 上任一点 E,都有

$$EA+EB \leqslant \max\{u,v\}. \tag{2.1}$$

证明　先在 CD 上找出使(2.1)式成立的特殊点,例如,取 CD 的中点 Q,则

$$QA<(AC+AD)/2,\quad QB<(BC+BD)/2.$$

相加得　$QA+QB<(u+v)/2 \leqslant \max\{u,v\}$.

其次找 QC 的中点 E_1 和 QD 的中点 E_2,易证它们也满足

$$E_kA+E_kB \leqslant \max\{u,v\},k=1,2. \tag{2.2}$$

如此下去,得到无穷点集 $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$,它在 CD 上是稠密的,再用极限知识即可得证.([99](5):73)

3.　设 d_1,d_2 是凸四边形 $ABCD$ 中两条垂直的弦,它们将四边形的周长 $2p$ 分成 4 等份,则 $p \leqslant d_1+d_2$,仅当四边形为矩形时等号成立.[53]91 指出,这个问题除特殊情形外还未解决.

4.　**平行四边形不等式**:设 $ABCD$ 为平行四边形,则

(1)　设 F 是不在对角线交点上的任一点,则 $\sum AF>AC+BD$.

(2) 四边形内部任一点 Q 到各顶点距离之和不小于该点到各边距离之和的$\sqrt{2}$倍.

(3) 在 BC,CD 上分别取点 E,F,则 $S_{\triangle AEF} < S/2$.

5. 设四边形有外接圆,则

(1) $\sum a \leqslant 4\sqrt{2}R$; (2) $\prod a \leqslant 4R^4$; {等正}

(3) $\sum(a^{-1}) \geqslant 2\sqrt{2}/R$; (4) $\sum(a^{-2}) \geqslant 4(l_1^{-2}+l_2^{-2}) \leqslant (p/S)^2$; {等正}

(5) $4(\prod a)\sin^2(\frac{A+C}{2}) \leqslant (l_1l_2)^2$; (6) $l_1l_2 > 2(S/p)^2$.

6. 设四边形有内切圆,则

(1) $p \geqslant 4r$; {等正}

(2) $\sum a^2b(a-b) \geqslant 0$.(安振平,[348]1991,8:21 ~ 24)

(3) $\sum(p-a)^{-3} \geqslant 2(pr^2)^{-1}$.([345]1991,12)

问:当 $t \neq 3$ 时 $\sum(p-a)^{-t}$ 的上下界是多少?

(三) 双圆四边形不等式

设 $ABCD$ 为双圆四边形,即四边形既有内切圆,又有外接圆.则

1. **欧拉不等式**:$R \geqslant \sqrt{2}r$.这个不等式已有许多改进,例如,1986 年 Lascu,M. 证明 $R \geqslant (1/2)\max\{l_1,l_2\} \geqslant \sqrt{2}r$.([363]1986,91:95)

1990 年,肖振纲证明 $R \geqslant (\sqrt{2}/8)\sum a \geqslant \sqrt{2}r$(数学教学研究(甘肃),1990.5:25 ~ 26),同年杨世国又证明 $R^2 \geqslant 2r^2+OG^2$,式中 O,G 分别为四边形的外心与重心.仅当四边形为正方形时等号成立([350]1990.4:41 ~ 42).1995 年甘志亮证明([350]1995,1):

$$2r^2 \leqslant \frac{S}{2} = \frac{1}{2}(\prod a_k)^{1/2} \leqslant \frac{1}{12}\sum_{1\leqslant k<j\leqslant 4} a_ka_j \leqslant \frac{1}{32}(\sum_{k=1}^{4} a_k)^2 \leqslant \frac{1}{8}(\sum_{k=1}^{4} a_k^2) \leqslant R^2.$$

2. $(\sum a)^2 \geqslant 8(ac+bd)$.

3. $(a+c)^2 \geqslant 8\sqrt{2}Rr$,{等正}.

4. $(a+c)^2 \geqslant 8Rr\sqrt{1+\sin A\sin B}$.

5. $(\sum a)^2 \geqslant 8l_1l_2$.

6. $\prod a \leqslant 8(Rr)^2$.([19]402 ~ 405)

7. $S \leqslant \frac{p^2}{4}$; $\frac{(2-\sqrt{2})\sqrt{S}}{S} \leqslant \frac{1}{r} - \frac{1}{R}$.(张克刚,中等数学(天津),1993,4:3 ~ 5)

8. 涉及两个双圆四边形不等式:$\sum \frac{1}{a_1a_2} \geqslant \frac{1}{R_1R_2}$.

(蒋明斌,湖南教育学院学报,1999(增刊):142 ~ 143)

二、(平面)五边形不等式

设五边形 $ABCDE$ 的面积记为 S.

1.　(1)　[MCM]. 设 $ABCDE$ 为凸五边形，A_1,B_1,C_1,D_1,E_1 分别是五边形各边的中点，则 $A_1B_1C_1D_1E_1$ 的面积 $S_1 \geqslant \frac{1}{2}S$；若凸五边形顶点坐标均为整数，则 $S \geqslant \frac{5}{2}$.

(2)　$\Delta EAB,\Delta ABC,\Delta BCD,\Delta CDE,\Delta DEA$ 的面积依次记为 S_1 至 S_5. 则

$$\min_{1\leqslant k\leqslant 5}\{S_k\} \leqslant \frac{2S}{5+\sqrt{5}} \leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant 5}\{S_k\};\quad \left(\prod_{k=1}^{5}S_k\right)^{1/5} \leqslant \frac{2S}{5+\sqrt{5}} \leqslant \left(\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{5}S_k^2\right)^{1/2},$$

([348]1992,10:41 ~ 42 和[345]1999,8:26 ~ 28)

2.　设 $ABCDE$ 为正五边形，则 $S/4 < S_{\triangle BAE} < S/3$.

3.　设直线 l 过正五边形的中心 O 且与该五边形的各边或其延长线交于 $M_k(1 \leqslant k \leqslant 5)$，则 $\sum_{k=1}^{5}(OM_k)^{-1} \leqslant 4/R$. ([345]1991,7)

三、(平面)n 边形不等式

设(平面)n 边形($n \geqslant 3$)$A_1A_2\cdots A_n$ 的边长为 $a_k,a_{n+1}=a_1$，面积为 S，周长为 $L=2p=\sum a_k$.

(一)　一般 n 边形不等式

1.　[MCM] 若多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 内有另一多边形 $B_1B_2\cdots B_n$，这两个多边形的边对应平行，且每两个平行边之间距离都是 1. 设多边形 $B_1B_2\cdots B_n$ 的面积为 S_1，周长为 L_1，则 $S-S_1 > L_1+\pi$.

2.　设 x_k,y_k 分别是 n 边形的内点 Q 到顶点和边的距离. 则

$$\prod x_k \geqslant (\sec(\pi/n))^n \prod y_k.$$

3.　设 n 边形的直径为 1，则 $S \leqslant (n/2)\cos(\pi/n)\mathrm{tg}(\pi/2n)$.

4.　设 n 边形的边长为 a_k，周长 $L=2p=\sum a_k$，则

(1)　$\frac{2n}{n-1}\sum_{k<j}a_ka_j \leqslant L^2 \leqslant 4\sum_{k<j}a_ka_j$.

(2)　$\frac{(n-1)^2}{(L-a_k)(2n-3)} \leqslant \sum_{\substack{i=1\\ j\neq k}}^{n}\frac{1}{L-a_j} \leqslant \frac{n+1}{L-a_k}$.

([381]1980(6) 和 1981(7):28 ~ 29)

(3)　设 H 表示边长为 1 的正 n 边形，其内角为 $\theta(n \geqslant 4)$，若 K 是内接于 H 的任意 n 边形，其边长为 $a_k,1\leqslant k\leqslant n$，则 $n(1-\cos\theta)/2 \leqslant \sum a_k^2 \leqslant n(1-\cos\theta)$. ([305]1987,94:459 ~ 460)

(4)　设 $A_1,\cdots,A_{n-1}$ 是直径 $A_0A_n=2R$ 的半圆周上的 $n-1$ 个点，依次连结 A_0A_1，$A_1A_2,\cdots,A_{n-1}A_n$，记 $A_{k-1}A_k=a_k$，$(1\leqslant k\leqslant n)$，则 $\sum a_k^2 \geqslant 2nR^2(1-\cos(\pi/n))$.

提示：从 $a_k=2R\sin(\theta_k/2)$ 得 $a_k^2=2R^2(1-\cos\theta_k)$，对 k 求和并利用

$$\frac{1}{n}\sum\cos\theta_k \leqslant \cos(\frac{1}{n}\sum\theta_k),\quad 0\leqslant\theta_k\leqslant\pi.$$

5.　**安振平猜想**:设 $a_1,\cdots,a_n$ 是圆外切 n 边形的边长,$t\geqslant 2$,证明或否定

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^t a_{k+1}(a_k - a_{k+1}) \geqslant 0,$$

式中 $a_{n+1}=a_1$,当 $n=3$ 时就是 Catalen 不等式(见 §1No.19),而 $n=4,t=2$ 时已为安振平证明.(见本节一、(二)No.6(2) 和[348]1991,8:21 ~ 24)

6.　设 x_k 是多边形内一点到顶点 A_k 的距离.1988 年刘健证明:

$$\sum (a_k + a_{k+1})x_{k+1} \geqslant 4S\sec(\pi/n),$$

式中 $A_{n+1}=A_1$,仅当该多边形等边且多边形内一点为其中心时等号成立.([350]1988,2)

7.　对于每个闭凸曲线 C,存在一个最大面积为 S_n 的内切 n 边形 K_1 和最小面积为 σ_n 的外接 n 边形 K_2,使得 $(\sigma_n - S_n)/\sigma_n \leqslant [\sin(\pi/n)]^n$.设 C 的面积为 S,K_1,K_2 的周长分别为 l_n,L_n,则

$$(L_n - l_n)/L_n \leqslant 2[\sin(\frac{\pi}{2n})]^2;\quad S_n \geqslant S(\frac{n}{2\pi})\sin\frac{2\pi}{n}.\quad ([19]459)$$

8.　设 A_k 是凸 n 边形的内角,则对任意正数 t,有 $\sum_{k=1}^{n} A_k^{-t} \geqslant n^{t+1}[(n-2)\pi]^{-t}$.(谭登林,[345]1994,8:37)

(二)　凸 n 边形不等式

设(平面)凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的边长为 a_k,$1\leqslant k\leqslant n$,$A_{n+1}=A_1$,$a_{n+1}=a_1$,面积为 S,$L_t(a)=\sum a_k^{2t}$,$t=1/2$ 时为周长 $L=2p=\sum a_k$.G 为该多边形内部或边界上一点,$\angle A_kGA_{k+1}$ 的平分线与边 A_kA_{k+1} 交于 B_k,记 $x_k=GA_k$,$y_k=GB_k$,h_k 表示 G 与 A_kA_{k+1} 边的距离.凸多边形所包含的圆中面积最大的圆称为内极圆;包含凸多边形的面积最小的圆称为外极圆或覆盖圆.它们的半径分别记为 r,R.特别,对于双圆多边形,r,R 就是它的内切圆与外接圆的半径.

1.　[IMO].设 l 是凸 n 边形($n>3$)所有对角线长之和,则其边的算术平均小于对角线的算术平均,而且

$$n-3 < l/p < [\frac{n}{2}][\frac{n+1}{2}] - 2,$$

式中 $[x]$ 是不超过 x 的最大整数.

注　这是 25 届 IMO 试题.它的背景是 Popoviciu 在 1933 年证明的左边不等式,而右边不等式是他提出的两个猜想.(详细证明见[38]892 ~ 893)

2.　若 G 在凸 n 边形内部,则

$$p < \sum GA_k < (n-1)p.$$

3.　(1)　$r \leqslant S^{1/2}[n\mathrm{tg}(\pi/n)]^{-1/2} \leqslant R\cos(\pi/n)$.

(童林,中学数学,1994,6:15)

(2)　$(nr)\mathrm{tg}(\pi/n) \leqslant \sqrt{(nS)\mathrm{tg}(\pi/n)} \leqslant p \leqslant (nR)\sin(\pi/n)$.{等正}.由此推出**双圆 n 边形欧拉不等式**(又称为 **Chapple-Euler 不等式**):$R \geqslant r\sec(\pi/n)$.

杨世国猜想：$R^2 \geqslant r^2\sec^2(\pi/n)+OG^2$ {等正}，式中 O,G 分别是双圆 n 边形的外心和内心.([350]1990,4:41～42)1994 年柳锋祥证明了这个猜想.(中学数学教学参考,1994.8:35)

4. 设 $A_n(x),A_n(h)$ 和 $H_n(x),H_n(h)$ 分别是 $x=(x_1,\cdots,x_n),h=(h_1,\cdots,h_n)$ 的算术平均和调和平均，则 $A_n(x)\geqslant A_n(h)\sec(\pi/n)$； $H_n(x)\geqslant A_n(h)\sec(\pi/n)$.

([348]1989,5:3～4)

5. $R^2\geqslant 4\sqrt{3}S/[9(n-2)]$.

6. 关于 $L_t(a)=\sum a_k^{2t}$ 的不等式：

(1) $4nr^2\mathrm{tg}^2(\pi/n)\leqslant L_1(a)\leqslant 9R^2$； {等正}

(2) 1989 年，简超将 Finsler 不等式推广为：

$$L_t(a)\geqslant n\left(\frac{4S}{n}\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n}\right)^t+\frac{1}{n}\sum_{j<k}(a_j^t-a_k^t)^2. \qquad \{等正\}$$

式中 $t\geqslant 1$. 由此推出 $L_1(a)\geqslant 4S\mathrm{tg}(\pi/n)$.

当 $n=4,a_1,a_3$ 为对边，则 $L_1(a)\geqslant 4S^t+\frac{1}{2}\sum\limits_{j<k}(a_j^t-a_k^t)^2$，仅当四边形为矩形时等号成立.([348]1989,12 和 1988,6. 1988,10)

1991 年，杨学枝证明：设 $0<\beta_k<\pi,1\leqslant k\leqslant n$，且 $\sum\beta_k=\pi$，则 $\sum a_k^2\mathrm{ctg}\beta_k\geqslant 4S$. 仅当该凸 n 边形有外接圆且所有$(a_k/\sin\beta_k)=2R$ 时等号成立.([348]1991,6:41)

设 d 表示双圆 n 边形的圆心距，钱义光证明：$R^2\geqslant d^2+r^2\sec^2\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

并进一步问：使 $R^m\geqslant d^m+r^m\left(\sec\frac{\pi}{n}\right)^m$ 成立的最小的 m 是什么?([31]256～257)

(3) 若 $t\leqslant\dfrac{\log n-\log(n-1)}{\log\sin\frac{\pi}{n-1}-\log\sin\frac{\pi}{n}}$，则 $\sum a_n^t\leqslant n[2R\sin(\pi/n)]^t$.

([348]1991,6:40～41)

7. **B-L 不等式(Barrow-Lenhard 不等式)**：

$$\sum x_k\geqslant\left(\sum y_k\right)\sec(\pi/n). \qquad (1)$$

1988 年，王振、陈计对(1) 作了指数推广：

$$\sum x_k^t\geqslant\left(\sum y_k^t\right)\sec^t(\pi/n)\quad(0<t\leqslant 1). \qquad (2)$$

林祖成则证明当 $t>1$ 时，有

$$\sum x_k^t>\left(\sum y_k^t\right)\sec(\pi/n). \qquad (3)$$

问题：当 $-1\leqslant t<0$ 时，(2) 是否反向成立?而当 $t<-1$ 时，下式是否成立?

$$\sum y_k^t>\left(\sum x_k^t\right)\sec(\pi/n)$$

1989 年，王振、陈计对(2) 式作了加权推广：若 $\lambda_k>0,1\leqslant k\leqslant n,0<t\leqslant 1$，则

$$\sum\lambda_k x_k^t\geqslant\left(\sec\frac{\pi}{n}\right)\sum\frac{\lambda_k\lambda_{k+1}(x_k^t+x_{k+1}^t)}{\lambda_k x_k^t+\lambda_{k+1}x_{k+1}^t}y_k^t$$

([348]1988,12:1989.6;[350]1992,5:31 ～ 33)

8.　若 G 是凸 n 边形所在平面上任一点,则 $\sum x_k^2\sin A_k \geqslant 2S$. 仅当 G 为正 n 边形的中心时等号成立.([348]1988,9:3 ～ 5)

2004 年,蒋明斌证明:若 G,Q 是凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 所在平面上的两点,记 $x_k = GA_k$,$z_k = QA_k$,$1\leqslant k\leqslant n$,则 $\sum x_kz_k\sin A_k \geqslant 2S$.

Janic,R. R,证明 $\sum x_k\sin(A_k/2)\geqslant\sum h_k$. 仅当凸 n 边形的所有边与以 G 为圆心的一圆相切时等号成立,证明见[3]16.13.

于是可进一步问:$\sum x_k^2\sin(A_k/2)$ 与 $\sum x_kz_k\sin(A_k/2)$ 的下界是什么?

9.　设 S_1 为内接于单位圆的凸多边形的面积,S_2 为外切多边形的面积,该多边形的切点与内接多边形的顶点重合,则 $S_1 + S_2 \geqslant 6$.　{等正}

10.　若取凸 n 边形各边中点所组成的另一凸 n 边形的面积为 S_1,则当 $n\geqslant 6$ 时,有 $1/2 < S_1/S\leqslant 1$,而当 $n = 5$ 时,上界 1 可改进为 3/4.([348]1989,7:36)

11.　$\sum\dfrac{1}{a_k}\geqslant\dfrac{n}{R\sqrt{2-2\cos(2\pi/n)}}$.

12.　Mitrinovic-Pecaric 证明:$\prod(y_k+y_{k+1})\leqslant[2\cos(\pi/n)]^n\prod x_k$.

1991 年,王振、陈计证明:若 $0<t\leqslant 1$,则 $\sum(y_k+y_{k+1})^t\leqslant[2\cos(\pi/n)]^t\sum(x_k^t)$,并提出三个猜想:

(1)　$\sum x_k^t\geqslant(\sec\dfrac{\pi}{n})\sum y_k^t + n[(\sec\dfrac{\pi}{n})^t-\sec\dfrac{\pi}{n}]\cdot(\prod y_k)^{t/n}, t\geqslant 1$;

(2)　$E_m(x)\geqslant[\sec(\pi/n)]^mE_m(y)$;

(3)　$E_m(y_k+y_{k+1})\leqslant[2\cos(\pi/n)]^mE_m(x)$,式中 $E_m(x)=\sum x_{j_k}$,求和指标 j_k 满足 $1\leqslant j_1\leqslant\cdots\leqslant j_m\leqslant n$,$1\leqslant m\leqslant n$.([348]1991,7:28 ～ 29)

13.　**凸 n 边形 C-B 角不等式**:若 G 在凸 n 边形内,使得 $\angle GA_1A_2=\angle GA_2A_3=\cdots=\angle GA_nA_1=\omega_n(n\geqslant 3)$,则 $\omega_n\leqslant(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n})\pi$ {等正}([348]1989,9). 但曾登高等提出,对于一般凸多边形,C-B 点不一定存在. 若令 $\angle GA_kA_{k+1}=\alpha_k$,$1\leqslant k\leqslant n$,$A_{n+1}=A_1$,则 $\min\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}\leqslant(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n})\pi$. 并提出两个猜想:$(\prod\alpha_k)^{1/n}\leqslant(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n})\pi$;$\sum(2\alpha_k)^t\geqslant\sum A_k^t\quad(-1\leqslant t<0)$.([348]1992,4:41)

14.　设 a_k,S_1,b_k,S_2 分别是两个 n 边形的边长和面积. 令 $c_k=(a_k^p+b_k^p)^{1/p}$,$p\geqslant 1$,$1\leqslant k\leqslant n$,则当 $2\leqslant p\leqslant 4$ 时,以 c_k 为边长的 n 边形的最大面积 S 满足

$$S^{p/2}\geqslant S_1^{p/2}+S_2^{p/2}.$$

但当 $p>4$ 时上式不成立,而 $1\leqslant p<2$ 时,不知上式是否成立.

(陈计,宁波大学学报,1991,4(1):17 ～ 20)

15.　设两个凸 n 边形的边长分别为 a_k,b_k 且 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$,$b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$,

面积分别为 S_1, S_2，若 f, g 是$[0,\infty)$ 上两个递增的凸函数，则

$$\sum_j g(b_j)[-f(a_j)+\sum_{k\neq j}f(a_k)]\geqslant n(n-2)f\left(\sqrt{\frac{4S_1}{n}\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n}}\right)g\left(\sqrt{\frac{4S_2}{n}\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n}}\right).$$

特别取 $f(x)=g(x)=x^t$，$t>1$，得

$$\sum_j b_j^t(-a_j^t+\sum_{k\neq j}a_k^t)\geqslant n(n-2)\left[\frac{16S_1S_2}{n^2}\mathrm{tg}^2(\pi/n)\right]^{t/2}.$$ ([19]365 ~ 366)

这是三角形 N-P 不等式的推广.

16.　**凸 n 边形内角不等式：**

(1)　$(\prod\sin A_k)^{1/n}\leqslant\frac{1}{n}\sum\sin A_k\leqslant\sin\frac{2\pi}{n}$；

(2)　$[\prod\cos(\frac{A_k}{2})]^{1/n}\leqslant\frac{1}{n}\sum\cos\frac{A_k}{2}\leqslant\sin\frac{\pi}{n}$；

(3)　$(\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n})(\sum\mathrm{tg}\,\frac{A_k}{2})\geqslant n$.

17.　设平面凸 n 边形的周长为 1，S_n 表示顶点之间的距离（用欧式范数表示）之和，即 $S_n=\sum_{1\leqslant k<j\leqslant n}\|A_k-A_j\|$.

则 $\frac{n-1}{2}<S_n<\frac{1}{2}\left[\frac{n}{2}\right]^2$；若令 $T_n=\sum_{1\leqslant k<j\leqslant n}\|A_k-A_j\|^2$，则 $\frac{n}{4\pi^2}<T_n<\frac{n^2}{16}$.

([305]115(4)(2008),350)

我们问：S_n, T_n 的最佳上下界是多少？若令 $T_n(p)=\sum_{1\leqslant k<j\leqslant n}\|A_k-A_j\|^p$，那么，$T_n(p)$ 的上下界又是多少？

(三)　正 n 边形不等式

下面的多边形均为正 n 边形，记号同(二).

1.　[MCM]. 若 G 在正 n 边形内部，则至少有一个角 A_jGA_k 满足

$$\pi(1-1/n)\leqslant A_jGA_k\leqslant\pi.$$ ([99]13,22 ~ 24)

2.　$\pi(rR^2)^{1/3}<p<(\pi/3)(r+2R)$.

3.　设 d_k 是正 n 边形外接圆上一点到 A_k 的距离，则

(1)　$\sqrt{2n}R\leqslant\sum d_k\leqslant\sqrt{2}(nR)$；

(2)　$2R\mathrm{ctg}(\pi/2n)\leqslant\sum d_k\leqslant 2R\csc(\pi/2n)$.

([331]1967:181 ~ 196,67 ~ 68)

4.　$\sum h_k\geqslant\sqrt{3}na/6$. 式中 a 为正 n 边形的边长.

提示：$\frac{1}{2}a\sum h_k=\frac{na^2}{4}\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{n}\geqslant\frac{na^2}{4}\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{3}$.

5.　给定半径为 R 的圆 C. 设 p_n 为 C 的内接正 n 边形的周长，q_n 为 C 的外切正 n 边形的周长，则

(1)　$\{p_n\}$ 递增而 $\{q_n\}$ 递减；　(2)　$p_n<2\pi R<\frac{2}{3}p_n+\frac{1}{3}q_n$；

(3)　$p_n + q_n > 4\pi R$.

四、　四面体不等式

设四面体 $ABCD$ 的棱长为 $a_k(1 \leqslant k \leqslant 6)$，体积为 V，侧面积为 S_k，三对对棱之间的距离为 $d_k(1 \leqslant k \leqslant 3)$，外接球半径为 R，内切球半径为 r，高为 h_j，中线为 $l_j(1 \leqslant j \leqslant 4)$.

1.　$R \geqslant 3r$**(欧拉不等式)**{等正}.

2.　**棱长不等式：**

(1)　$12\sqrt{6}r \leqslant \sum a_k \leqslant 4\sqrt{6}R$；　(2)　$144r^2 \leqslant \sum a_k^2 \leqslant 16R^2$；

(3)　$360r^2 \leqslant \sum\limits_{j<k} a_j b_k \leqslant 40R^2$；　(4)　$\sum a_k^3 \geqslant 36\sqrt{2}V$；

(5)　$\sum a_k^{-1} \geqslant \dfrac{3\sqrt{6}}{2R}$；

以上(1)～(5)均为{等正}，即仅当四面体为正四面体时等号成立.

(6)　若 $\beta_k(1 \leqslant k \leqslant 6)$ 是四面体的相交于相应棱处的两个面所夹角(弧度数)，则

$$\pi/3 < \sum(a_k\beta_k)/(\sum a_k) < \pi/2.$$

其中的上下界都是最优的.([36]Vol. 2:201;[348]1987,6:5～7)

(7)　$\dfrac{1}{6} \leqslant \dfrac{\sum a_k^2}{(\sum a_k)^2} \leqslant \dfrac{1}{3}$.(王庚,[32]162～166)

(8)　设侧面 S_k 的外接圆半径为 R_k，王卫东证明

$$\prod_{k=1}^{4}(R^2 - R_k^2) \leqslant \left(\frac{8}{3}\right)^8. \qquad \{等正\}$$

并进一步猜想：$\sum\limits_{k=1}^{4} R_k^2 \leqslant \dfrac{32}{9}R^2$.([350]1994,2:44)

(9)　$\sum a_k \geqslant 4 \times 3^{5/3} \cdot V^{2/3}$.　{等正}

谭志中对上式作了改进.([350]1994,4)

(10)　$\dfrac{6}{5^\lambda} \leqslant \sum\limits_{k=1}^{6}\left(\dfrac{a_k}{a - a_k}\right)^\lambda < \dfrac{3}{2^\lambda}$. 式中 $\lambda \geqslant 1, a = \sum\limits_{k=1}^{6} a_k$. 仅当正四面体时等号成立.

(吴善和,石焕南,福建中学数学教学,2003,5:20)

3.　**体积不等式：**

(1)　$8\sqrt{3}r^3 \leqslant V \leqslant 8\sqrt{3}R^3/27$.

(2)　$V \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{24R}(\prod a_k)^{2/3}$.

(3)　$72V^2 \leqslant \prod a_k \leqslant 512R^6/27$.

(1)～(3)均为{等正}.(证明见[345]1981,6:29～30,1984,12:24～25. 推广见[350]1986,2:11～13)其中杨路利用 Cayley-Menger 行列式的证明技巧值得注意.

(4)　[MCM]. 若四面体只有一条棱大于 1，则 $V \leqslant 1/8$.(证明见[38]1197)

(5) [MCM] 若四面体的顶点在体积为 1 的圆柱上，则该四面体的体积 $V \leqslant 2/(3\pi)$

(6) [MCM] 若 $ABCD$ 为直角四面体，则 $162V \leqslant (5\sqrt{2}-7)(\sum a_k)^3$.

(苏化明，[99]1989，5：37 ~ 52)

(7) 若四面体存在棱切球(即与四面体的六条棱都相切的球)，棱切球的半径记为 R_t，则 $R \geqslant \sqrt{3}R_t$；$V \leqslant \dfrac{(\prod a_k)^{2/3}}{24R_t}$；$\sum a_k^2 \leqslant 15R^2 + 3R_t^2$；$8r^2R_t \leqslant V \leqslant \dfrac{8}{9}R^2R_t \leqslant \dfrac{8\sqrt{3}}{27}R^3$. 均仅当正四面体时等号成立.(林祖成，朱火芬，[32]175 ~ 187)

林朱并提出猜想：$R_t \geqslant \sqrt{3}r$.

(8) $V \leqslant \dfrac{2^{3/2}}{3^{7/4}}(\prod_{k=1}^{4} S_k)^{3/8}$； $\sum S_k \geqslant 6\sqrt[6]{3}V^{2/3}$； $\sum S_k{}^2 \leqslant \dfrac{16}{3}R^4$. {等正}

([36]855 和[351]2004(1)：83 ~ 84)

(9) 以四面体的内切球在四个面上切点为顶点的四面体的体积 $V_1 \leqslant \dfrac{1}{27}V$. ([36]840)

(10) 设 $\lambda_k > 0, 1 \leqslant k \leqslant 4$，则 $54\sqrt{3}V^2\sum\lambda_1\lambda_2\lambda_3S_4 \leqslant (\sum\lambda_k)^3\prod S_k$，仅当所有 λ_k 相等且为正四面体时等号成立.(唐立华，冷岗松，福建中学数学，1992.1)

4. [MCM]. 设四面体的一组相对棱之长为 a_j, a_k，则

$$r < \frac{a_ja_k}{2(a_j+a_k)}; \quad r < \frac{(a_j+a_k)}{8}.$$

提示：设 h 是包含 a_j, a_k 的两条异面直线之间的距离，作平行六面体. 使内接于四面体，并且 a_j, a_k 分别为六面体上下底面的棱. 于是该六面体的体积为 $6V$. 设 S 为四面体的表面积，于是从 $S > h(a_j+a_k)$，$V \leqslant ha_ja_k/6$，$V = rS/3$ 即可得证.([38]1106 ~ 1107)

5. [MCM].(1) 设 d 是四面体两条异面棱之间的最小距离，h 是该四面体的最小高，则 $h < 2d$.([38]1214)

(2) 若四面体(V_1)的顶点在四面体(V_2)的内部或棱面上，则(V_1)的棱长之和小于(V_2)棱长之和的 3/4 倍.

(3) 设 E、F、G 分别在四面体 $ABCD$ 的棱 AB、AC、AD 上，则 ΔEFG 的面积、周长都不超过 ΔABC、ΔABD、ΔACD、ΔBCD 的面积和周长中的最大者.

6. 设四面体以 a_k 为棱的二面角记为 $\theta_k(1 \leqslant k \leqslant 6)$. 则

(1) $\sum(\sin\theta_k)^2 \leqslant \dfrac{16}{3}$； (2) $\sum\cos\theta_k \leqslant 2$. {等正}

7. 设在四面体 $ABCD$ 中，以同一侧面 ABC 的三边为棱的二面角记为 α、β、γ，则

(1) 若 $ABCD$ 为直角四面体，即 DA、DB、DC 相互垂直，则 $\prod\cos\alpha \leqslant \sqrt{3}/9$. ([38]1211)

(2) 若 $ABCD$ 是等侧面四面体，则 $\prod\cos\alpha \leqslant 1/27$；$\sum\cos^2\alpha \geqslant 1/3$.

8. 设 $ABCD$ 是等腰四面体，即 $BC = AD = b$，$AC = BD = a$，$AB = CD = c$. 若 AB，

AC,AD 和 ΔBCD 所在平面成角 α,β,γ,则

(1) $\sum \sin\alpha\sin\beta \leqslant 2$.

(2) 体积 $V = \frac{1}{\sqrt{72}}\left\{\prod (a^2 + b^2 - c^2)\right\}^{\frac{1}{2}}$.

([345]1983,6:25 和[305]111(8)(2004),709 ~ 712.直角四面体的其他不等式见石焕南的文章[100]343 ~ 348.另见[348]2001,3 等)

9. **四面体中线、高、侧面积等元素不等式:**

(1) $16r \leqslant \sum l_j \leqslant 16R/3$.

(2) $64r^2 \leqslant \sum l_j^2 \leqslant 64R^2/9$.

(3) $96r^2 \leqslant \sum\limits_{j<k} l_j l_k \leqslant 32R^2/3$.

以上 l_j 可换成 h_j $1 \leqslant j \leqslant 4$.

(4) 若 S_j 是与 h_j 相对应的侧面积,则 $24\sqrt{3}r^2 \leqslant \sum S_j \leqslant 8\sqrt{3}R^2/3$; $\sum \frac{1}{S_k} \leqslant \frac{2\sqrt{3}}{9r^2}$.

(5) $\prod h_j \geqslant 256r^4$.

(6) [MCM]. 设 $r_j(1 \leqslant j \leqslant 4)$ 是四面体各面的内切圆半径,则 $\sum r_j \geqslant 4\sqrt{2}r$; $\sum r_j^{-1} \leqslant \frac{2\sqrt{2}}{r}$; $\sum r_j^{-2} \leqslant \frac{2}{r^2}$; $\frac{20}{3} \leqslant \sum\limits_{j=1}^{4}\left(\frac{h_j + r}{h_j - r}\right) < 8$ (周永国).若四面体的对棱之和为 1,则 $\sum r_j \leqslant \sqrt{3}/3$.

(7) 若四面体各面的旁切球半径为 $R_j(1 \leqslant j \leqslant 4)$,则

$$\sum\left(\frac{R_j}{h_j}\right) \geqslant 2;\ \sum\left(\frac{h_j}{R_j}\right) \geqslant 8;\quad \sum_{j<k}\frac{R_jR_k}{h_jh_k} \geqslant \frac{3}{2};\ \sum_{j<k}\frac{h_jh_k}{R_jR_k} \geqslant 24.$$

(1) ~ (7) 均为{等正}.([345]1982,7 和[350]1991,4)

(8) $\sum\limits_{j=1}^{4} l_j \geqslant \frac{8\sqrt{3}}{9}\sum\limits_{k=1}^{3} d_k$.

陈计提出,唐立华证明并推广为:

设 Q 为四面体 $ABCD$ 内任一点,Q 到顶点的距离记为 $D_k(1 \leqslant k \leqslant 4)$,则 $\left(\sum\limits_{k=1}^{4} D_k\right)^2 \geqslant 4\sum\limits_{k=1}^{3} d_k$.仅当 $ABCD$ 为等面四面体且 Q 为其外心时等号成立,唐立华还进一步提出两个猜想.([100]363 ~ 368)

(9) 当 $ABCD$ 为等面四面体时,下式成立 $\sum\limits_{k=1}^{3}\frac{1}{d_k^2} \geqslant \frac{1}{4r^2}$.(苏化明,中学数学(湖北),1993.4)

樊益武证明上式对一般四面体仍成立.([351] 2008(4):437 ~ 439)

(10) $\frac{4}{9} < \frac{\sum l_j}{\sum a_k} < \frac{2}{3}$.(胡跃宗,赵有为,[32]167 ~ 170)

(11) $(\sum S_k)^2 - \frac{4}{3}(\sum S_k^2) \geqslant 2\sqrt{2}V(\sum a_k)$. 由此推出

$$(\sum S_k)^2 \geqslant 3\sqrt{2}V(\sum a_k); \quad (\sum S_k) \geqslant \sqrt{2}r(\sum a_k); \quad V \geqslant \frac{\sqrt{2}}{3}r^2(\sum a_k).$$

(杨克昌,[32]286)

(12) 四面体各棱与其对棱中点所成的面称为中线面,其面积记为 S_k^*,($1 \leqslant k \leqslant 6$),则 $\sum_{k=1}^{6} \frac{1}{S_k^*} \leqslant \frac{4\sqrt{6}R}{3V}$. ([345]1996,4:48)

(13) 设四面体内一点 Q 到四个面的距离为 d_k^*,则 $\sum(\frac{1}{d_k^*})^2 \geqslant 2(\frac{9}{R^2} + \frac{1}{r^2})$.

仅当 Q 为正四面体中心时等号成立.(冷岗松等,[31]263 ~ 265)

唐立华、冷岗松还证明:

$$\sum(\frac{1}{d_k^*})^2 > 3\sqrt{3}\sum\frac{1}{S_k}; \quad \sum\frac{1}{d_k^*} \geqslant (6\sqrt{3})^{1/2}\sum(\frac{1}{S_k})^{1/2};$$

$$(\sum\frac{1}{d_1^* d_2^*})^2 \geqslant 432\sum\frac{1}{S_1 S_2}. \quad ([348]1994,6:23 \sim 24)$$

(14) **Nesbitt 不等式**:设 $\lambda \geqslant 1$,令 $S = \sum_{k=1}^{4} S_k$,则 $\frac{4}{3^\lambda} \leqslant \sum_{k=1}^{4}\left(\frac{S_k}{S - S_k}\right)^\lambda < 2$.

(吴善和,石焕南,福建中学数学,2003,5:20)

(15) 设 $\lambda \neq 4$,令 $f(\alpha) = \sum_{j=1}^{4}\left(\frac{h_j}{|h_j - r\lambda|}\right)^\alpha$. 若 $\alpha > 0$,则 $f(\alpha) \geqslant \frac{4^{\alpha+1}}{|4-\lambda|^\alpha}$,若 $-1 < \alpha < 0$,则不等号反向(匡继昌).

10. 设 K、Q 是正四面体 $ABCD$ 内任意两点,则 $\cos\angle KAQ > 1/2$.

11. [MCM]. 在四面体 $ABCD$ 中,$\angle BDC$ 是直角,D 到平面 ABC 的垂线足 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心,则

$$(AB + BC + CA)^2 \leqslant 3(AD^2 + BD^2 + CD^2),$$

仅当 $\triangle ABC$ 是正三角形时等号成立(IMO12).(证明见[38]1198)

12. **涉及两个四面体的不等式**:设四面体 $A'B'C'D'$ 的元素用 $ABCD$ 相应元素加"′"表示. 1982 年苏化明证明:

(1) $144rr' \leqslant \sum a_k a'_k \leqslant 16RR'$.

式中左边等号仅当两个四面体均为正四面体时成立;右边等号仅当两个四面体对应棱长成比例且每一四面体的三对对棱相等时成立.

(2) $64rr' \leqslant \sum h_j h'_j \leqslant \sum l_j l'_j \leqslant 64RR'/9$.

式中左边等号仅当每一四面体的各侧面面积相等时成立;中间等号仅当两个四面体均为正四面体时成立;右边等号仅当两四面体的对应中线成比例且每一四面体的三对对棱相

等时成立. 1991 年杨世国又对有关不等式作了加权推广. ([345]1982,7:31 ~ 33,10;[350]1991,3:36 ~ 39)

五、　长方体不等式

设长方体的棱长为 a,b,c,对角线长为 l,全面积为 S,体积为 V,对角线与相邻三条棱的角为 α,β,γ.

1. $S \leqslant 2l^2$;　$V \leqslant \frac{\sqrt{3}}{9}l^3$.

2. [MCM]. 若 $a<b<c$,则 $a<\frac{1}{3}(a+b+c-\sqrt{l^2-\frac{S}{2}})<c$.

3. $\sum a \leqslant \sqrt{3}l$.

4. $\sum a^3 \geqslant \frac{\sqrt{3}}{3}l^3$.

5. $\sum (\frac{l}{a})^2 \geqslant 9$.

6. $\sum \cos\alpha \leqslant \sqrt{3}$;　$\sum (\cos\alpha)^3 \geqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$.

7. $\sum \cos\alpha\cos\beta \leqslant 1$.

8. $\sum \sin\alpha \leqslant \sqrt{6}$;　$\sum (\sin\alpha)^3 \geqslant \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

9. $\sum \sin\alpha\sin\beta \leqslant 2$.

10. $\prod \cos\alpha \leqslant \frac{\sqrt{3}}{9}$.

11. $\prod \sin\alpha \leqslant \frac{2\sqrt{6}}{9}$.

12. $\sum (\frac{1}{\sin\alpha})^2 \geqslant \frac{9}{2}$; $\sum (\frac{1}{\cos\alpha})^2 \geqslant 9$.

(以上见刘国杰,中学数学教学(安徽),1993,3:24)

六、　棱锥、多面体不等式

1.　设正 n 棱锥的外接球半径和内切球半径分别为 R,r,则

$$R \geqslant r[1+\sec(\pi/n)].$$ ([350]1990,4:42)

2.　[MCM]. (1)　正四棱锥的相邻两个侧面所成的二面角大于 $\pi/2$ 而小于 π.

(2)　任何一个三面角,其任一面角小于其他两个面角之和;三个二面角之和必大于 π 而小于 3π.

(3)　任何一个凸多面体,其所有面角之和小于 2π,其所有二面角之和大于 $(n-2)\pi$,其中 n 是该多面体的面数.

七、n 维单形不等式

n 维欧氏空间 R^n 中子集 E 的任两点连线仍在 E 中，称 E 为凸体. 包含 R^n 中 $n+1$ 个点 $A_1,\cdots,A_{n+1}$ 的最小凸体，称为由 $\{A_1,\cdots,A_{n+1}\}$ 张成的 n 维单形(n − simplex)，记为 $\sum(A)$. 若 A_k 的坐标为$(x_{k1},\cdots,x_{kn})(1\leqslant k\leqslant n+1)$，则 $\sum(A)$ 的体积 $V(A)=V(A_1,\cdots,A_{n+1})$ 为

$$V(A)=\frac{1}{n!}\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & 1 \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & 1 \\ \cdots & & & & \\ x_{n+1,1} & x_{n+1,2} & \cdots & x_{n+1,n} & 1 \end{vmatrix}.$$

当 $n\neq 0$ 时，n 维单形有两个定向，用顶点的顺序给出. 注意彼此相差一个偶排列的两个顺序代表同一个定向.

0 维单形就是一点，1 维单形是一条线段，2 维单形是三角形，3 维单形是四面体. n 维单形可看成有 $n+1$ 个顶点的广义四面体. 所以，尝试将三角形、四面体不等式推广到 n 维单形上去，是近来研究的一个热点，下面设 $n\geqslant 2$. 在 R^n 中任取一点 M，记 $V_k=V(A_1,\cdots,A_{k-1},M,A_k,\cdots,A_{n+1})$. 体积的比值 $V_1:V_2:\cdots:V_{n+1}=\mu_1:\mu_2:\cdots:\mu_{n+1}$ 称为点 M 的重心坐标，记为 $M(\mu_1,\cdots,\mu_{n+1})$. 令 $\lambda_k=\mu_k/\left(\sum_{j=1}^{n+1}\mu_j\right)$，则$(\lambda_1,\cdots,\lambda_{n+1})$ 称为 M 的重心规范坐标. $n=2,3$ 时的重心规范坐标就是有限元方法中的面积坐标和体积坐标，$\sum(A)$ 的内切球和各侧面的切点记为 B_k，$1\leqslant k\leqslant n+1$，则 $\sum(B)$ 称为 $\sum(A)$ 的切点单形，$\sum(A)$ 的外接球半径记为 $R(A)$，内切球半径记为 $r(A)$. $\sum(A)$，$\sum(B)$ 的棱长分别记为 a_k，$b_k(1\leqslant k\leqslant m)$，式中

$$m=\binom{n+1}{2}=n(n+1)/2.$$

以$\{A_1,\cdots,A_{k-1},A_{k+1},\cdots,A_{n+1}\}$ 为顶点的 $n-1$ 维单形 F_k 的体积记为 V_k，F_k 所在的 $n-1$ 维超平面仍记为 F_k.

注　我们可以利用基的概念来定义单形. 设 R^n 中的点 $A_0,A_1,\cdots,A_n$ 满足条件：$A_1-A_0,A_2-A_0,\cdots,A_n-A_0$ 形成 R^n 的一组基，则称 $A_0,A_1,\cdots,A_n$ 是 R^n 的仿射无关点(affine independent point). 这些点的凸包称为以 $A_0,A_1,\cdots,A_n$ 为顶点的 n 维单形，记为 $\sum(A)$. 特别，设 $e_0=(0,\cdots,0)$ 为 R^n 中原点，$e_1,\cdots,e_n\in R^n$ 满足条件

$$\pi_k(e_j)=\delta_{k,j}=\begin{cases}1, & k=j\\ 0, & k\neq j\end{cases}$$

则 $e_0,e_1,\cdots,e_n$ 的凸包称为 n 维标准单形.

利用这个定义，我们可以将 R^n 中单形的概念推广到距离空间中去. 我们自然要问，距离空间中的单形有什么性质?R^n 中单形不等式能否推广到距离空间中的单形上?这些

问题还是一个空白，值得进一步去研究. 这是因为 R^n 中有许多好的几何结构，而一般距离空间中就没有相应的几何结构.

(一) 体积不等式

1. **Veljan 不等式：**

$$V(A)\leqslant\frac{1}{n!}\left(\frac{n+1}{2^n}\right)^{1/2}\left(\prod a_k\right)^{\frac{2}{n+1}}.$$

提示：用数学归纳法.

2. **Korchmaros 不等式：**

$$V(A)\geqslant\frac{[n^n(n+1)^{n+1}]^{1/2}}{n!}[r(A)]^n.$$

3. $V(A)\leqslant\left(\frac{n}{2^{n+1}}\right)^{1/2}\frac{1}{n!R(A)}\left(\prod a_k\right)^{2/n}$；

当单形的外心在其内部时，有

$V(A)\leqslant\frac{(n+1)^{(n+1)/2}}{n!n^{n/2}}(R(A))^n$.（杨世国，王佳，[32]294 ~ 295）

4. (1) $V(A)\leqslant(n+1)^{1/2}\left(\frac{[(n-1)!]^2}{n^{3n-2}}\right)^{\frac{1}{2(n-1)}}\left(\prod V_k\right)^{\frac{n}{n^2-1}}$，

仅当正则单形时等号成立.（张景中，杨路，中国科技大学学报，1981，2：1 ~ 8）

(2) $V(A)\geqslant\frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}\cdot n^{\frac{n^2-2}{2n}}}{n!}[R(A)]^{1/n}[r(A)]^{(n^2-1)/n}$.

仅当 $\sum(A)$ 为正则单形时等号成立.（杨世国，河西学院学报，2002，18(2)：9 ~ 12）

(3) 设 $p,q>0$ 且 $p+q\geqslant1$，则

$$V(A)\leqslant\frac{1}{n}\left[(n-1)!\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{1}{n-1}}(n+1)^{\frac{p}{2(n-1)q}}\times\left(\frac{\prod V_k^{2q}}{\sum V_k^{2q}}\right)^{\frac{1}{2(n-1)q}}.$$

仅当 $\sum(A)$ 为正则单形且 $p+q=1$ 时等号成立.（张晗方，[344]2002，32(1)：85 ~ 90）

5. $V(B)\leqslant\frac{1}{n^n}V(A)$. 仅当 $\sum(A)$ 为正则单形时等号成立.

6. $V(A)\leqslant\frac{1}{n!}[n^n(n+1)^{n+1}]^{1/2}\left(\sum l_k\right)^n$.

7. 设 $\sum(A)$ 的棱 a_k 与 a_j 之间的夹角为 α_{kj} 则

$$V(A)\leqslant\frac{1}{n!}\left(\prod a_k\right)\left(\sin\frac{\sum_{k<j}\alpha_{kj}}{\binom{n}{2}}\right)^{n-1}.$$

（冷岗松，[339]1990，4：522 ~ 523）

(二) $R(A)$ 与 $r(A)$ 的关系不等式

1. **Euler 不等式：**$R(A)\geqslant nr(A)$，仅当 $\sum(A)$ 为正则单形时等号成立.

1985 年，Klamkin 将上式改进为

$$[R(A)]^2 \geqslant [nr(A)]^2 + d^2.$$

式中 d 为单形 $\sum(A)$ 的内心与外心间的距离. 1995 年,冷岗松证明:

$$[R(A)]^2 \sin\theta \geqslant [nr(A)]^2,$$

其中 θ 是单形 $\sum(A)$ 对棱夹角的均值. ([344]1995,2:94 ~ 96)

2000 年,沈文选、冷岗松证明:

$$[R(A)]^2 \geqslant \frac{[nr(A)]^2}{\sin\theta} + d^2; \quad [R(A)]^2 \geqslant \frac{[nr(A)]^2}{\sin\theta} + d_0^2.$$

式中 d, d_0 分别是 $\sum(A)$ 的外心与内心,外心与重心之间的距离,仅当 $\sum(A)$ 为正则时等号成立. (湖南师大学报,2000,23(2))

2. $R(A) \geqslant nR(B)$; $r(A) \geqslant nr(B)$.

3. $\sum a_k^2 \leqslant (n+1)^2[R(A)]^2$.

仅当单形的重心 M 与它的外接球心重合时等号成立.

(三) 单形其他元素不等式

1. 设 $\sum(A)$ 的重心为 G, GA_k 与 $\sum(A)$ 的外接球面交于 B_k,令 $t_k = A_kB_k$,则

$$\sum t_k \geqslant 2\left(\frac{2}{n(n+1)}\right)^{1/2} \sum a_k; \quad \sum t_k^2 \geqslant \left(\frac{4}{n+1}\right)\sum a_k^2.$$

(苏化明,[342]1989,4(1):32 ~ 38)

我们问:当 $1 < p < \infty$ 时, $\sum t_k^p$ 与 $\sum a_k^p$ 有没有相类似的不等式?

2. 设 F_k 的单位法向量记为 e_k,令 $D_k = \det(e_1, \cdots, e_{k-1}, e_{k+1}, \cdots, e_{n+1})$,则 $\alpha_k = \arcsin|D_k|$ 称为 $\sum(A)$ 中顶点 A_k 所对应的顶点角,它满足高维边弦定理:

$$\sin\alpha_k = \frac{n^n[V(A)]^{n-1}}{n!\prod_{j\neq k} V_j}, \ (k = 1, \cdots, n+1).$$

(1) 对于任意 $x_k \geqslant 0$, $\sum_{k=1}^{n+1} x_k > 0$,下式成立

$$\sum_{k=1}^{n+1}\left(\prod_{\substack{j\neq k\\ j=1}}^{n+1} x_j\right)(\sin\alpha_k)^2 \leqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n+1} x_k\right)^n.$$

由此推出 $\sum_{k=1}^{n+1}(\sin\alpha_k)^2 \leqslant (1+\frac{1}{n})^n$; $\prod_{k=1}^{n+1}(\sin\alpha_k) \leqslant [\frac{1}{n+1}(1+\frac{1}{n})^n]^{\frac{n+1}{2}}$.

以上两式仅当 $\sum(A)$ 为正则单形时等号成立. ([382]1992,4:371 ~ 375)

张晗方则进一步证明:当 $p, q > 0$, $p + q \geqslant 1$ 时,成立

$\sum_{k=1}^{n+1}(\sin\alpha_k)^{2q} \leqslant (n+1)^p(1+\frac{1}{n})^{nq}$,仅当 $\sum(A)$ 为正则单形且 $p+q=1$ 时等号成立. ([344]2002,32(1):85 ~ 90)

(2) 若记 θ_{kj} 为单形 $\sum(A)$ 两个侧面 F_k, F_j 所成的角, $1 \leqslant k < j \leqslant n+1$,则

$$\sum_{k=1}^{n+1}(\sin\alpha_k)^2 \leqslant \frac{2}{n(n-1)}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-2}\sum(\sin\theta_{kj})^2 \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n;$$

$$\prod_{k=1}^{n+1}\sin\alpha_k \leqslant \left[\frac{(n+1)^{n-2}}{(n-1)^n}\right]^{\frac{n+1}{4}}\prod\sin\theta_{kj} \leqslant \left[\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{n+1}{2}};$$

仅当$\sum(A)$为正则时等号成立.(苏化明,[344]1995,3:38～43)

$$\forall \lambda_k \neq 0, 1 \leqslant k \leqslant n+1, \text{则} \sum(\lambda_k\lambda_j\sin\theta_{kj})^2 \leqslant \left(\frac{n-1}{2n}\right)\left(\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k^2\right)^2,$$

仅当所有$\frac{S_kS_j}{\lambda_k^2\lambda_j^2\cos\theta_{kj}}$相等时等号成立.(马统一,[345]1994.12:30～32)

(3)　设$\sum(A)$的两个侧面F_k,F_j的内角平分面面积为F_{kj},F_k的面积仍记为F_k,则

$$\sum_{1\leqslant k<j\leqslant n+1} F_{kj} \leqslant \left(\frac{n(n+1)}{8}\right)^{1/2}\sum_{k=1}^{n+1}F_k;\qquad \sum_{1\leqslant k<j\leqslant n+1}F_{kj}^2 \leqslant \frac{n+1}{4}\sum_{k=1}^{n+1}F_k^2,$$

第一个不等式中仅当$\sum(A)$为正则单形时等号成立,第二个不等式中仅当所有F_k相等时等号成立.(苏化明,[340],1992,12(3):315～318)

3.　设$\sum(A)$的外心O在其内部,由$\{A_1,\cdots,A_{k-1},O,A_{k+1},\cdots,A_{n+1}\}$张成的$n$维单形$\sum_k$的外接球半径记为$R_k$,内切球半径记为$r_k$,苏化明证明

$$\prod_{k=1}^{n+1}R_k \geqslant \left[\frac{n}{2}R(A)\right]^{n+1},$$

杨世国推广为

$$\left(\prod_{k=1}^{n+1}R_k\right)\Big/\left(\sum_{k=1}^{n+1}R_k\right) \geqslant \frac{1}{n+1}\left[\frac{n}{2}R(A)\right]^n,$$

仅当$\sum(A)$为正则单形时等号成立.杨世国并提出猜想:

$$\prod_{k=1}^{n+1}r_k \geqslant \left[\frac{n}{2}r(A)\right]^{n+1}.$$(河西学院学报,2002,18(2):9～12)

4.(1)　设$\sum(A)$的顶点A_k所对面的高为h_k,该面外的旁切球半径为r_k,则

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{h_k}{r_k} \geqslant n^2-1;\quad \sum_{1\leqslant k_1<\cdots<k_n\leqslant n+1}\frac{h_{k1}\cdots h_{kn}}{r_{k1}\cdots r_{kn}} \geqslant \binom{n+1}{n}(n-1)^n.$$

仅当$\sum(A)$各侧面面积相等时等号成立.(林祖成,[344]1994,2:50～56)

(2)　设$\alpha>0$,$\alpha\neq 1$,$0<\mu<\frac{(\alpha+1)(n-1)^\alpha}{\alpha-1}$,$\lambda>-\mu$,则

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{h_k^\alpha-\lambda r_k^\alpha}{h_k^\alpha+\mu r_k^\alpha} \leqslant (n+1)\frac{(n-1)^\alpha-\lambda}{(n-1)^\alpha+\mu}.$$

当$\mu\neq 2$时,仅当$\sum(A)$为正则单形时等号成立.当$\lambda<-\mu$时不等号反向.

(3)　设$\alpha>0$,$0<\mu<\left(\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\right)\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^\alpha$,$\lambda>\mu$,则

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{r^\alpha+\lambda r_k^\alpha}{r^\alpha+\mu r_k^\alpha} \geqslant (n+1)\frac{(n-1)^\alpha+\lambda(n+1)^\alpha}{(n-1)^\alpha+\mu(n+1)^\alpha}.$$

当 $\lambda < \mu$ 时不等号反向，仅当 $\sum(A)$ 为正则单形时等号成立.

((2)(3) 见张晗方[164]42 ~ 46)

(4)　$\dfrac{(n+1)(n+2)}{n} \leqslant \sum_{k=1}^{n+1}\left(\dfrac{h_k+r}{h_k-r}\right) < n+5$，仅当 $\sum(A)$ 为等面单形时，左等的等号成立.(周永国，[351]2004(2):267)

我们问:(1)(3) 中求和的上界，(2) 中求和的下界分别是什么?

5.　记 $F = \sum_{k=1}^{n+1} F_k$，棱长 $A_jA_k = a_{jk}$，令 $a = \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n+1} a_{jk}$，$\lambda \geqslant 1$，则

(1)　$\dfrac{n+1}{n^{\lambda}} \leqslant \sum_{k=1}^{n+1}\left(\dfrac{F_k}{F-F_k}\right)^{\lambda} < 2$;

(2)　$\dfrac{2^{\lambda-1}n(n+1)}{[(n-1)(n+2)]^{\lambda}} \leqslant \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n+1}\left(\dfrac{a_{jk}}{a-a_{jk}}\right)^{\lambda} < \dfrac{n}{(n-1)^{\lambda}}$.

仅当 $\sum(A)$ 为正则单形时，左等的等号成立. 周永国在证明(1)(2) 以后猜想 $0 < \lambda < 1$ 时，(1)(2) 仍成立.([351]2004(3):367 ~ 369)

6.　设 $\sum(A)$ 内部任一点 Q 到 $\sum(A)$ 的侧面 F_k 的距离为 d_k，则成立 **Gerber 不等式:**

$$\prod_{k=1}^{n+1} d_k \leqslant \frac{(n!)^{\frac{n+1}{n}}}{n^{\frac{n+1}{2}}(n+1)^{\frac{(n+1)^2}{2n}}} V^{\frac{n+1}{n}}.$$

仅当 $\sum(A)$ 为正则单形且 Q 为其内心时等号成立.([313]1975,56:97 ~ 111)

2002 年，杨世国推广了 Gerber 不等式:

$$\prod_{k=1}^{n+1} d_k \leqslant \left[\frac{(n!)^n V^n}{(n+1)^{\frac{(n^2+n)}{2}} n^{\frac{(n^2-2)}{2}} R}\right]^{\frac{1}{n-1}}.$$

仅当 $\sum(A)$ 为正则单形且 Q 为其内心时等号成立.(河西学院学报，2002,18(2):9 ~ 12)

(四)　联系两个单形的不等式

下面设 $\sum(A)$，$\sum(B)$ 是任意两个单形，它们的棱长和体积分别记为 a_k，b_k，$V(A)$，$V(B)$. $m = \dbinom{n+1}{2}$.

1.　设 $0 < p \leqslant 1$，则

$$\sum_{k=1}^{m} a_k^{2p}\left(\sum_{j=1}^{m} b_j^{2p} - nb_k^{2p}\right) \geqslant 2^{2p-2}n^2(n^2-1)\left(\frac{(n!)^2}{n+1}\right)^{\frac{2p}{n}}[V(A)V(B)]^{\frac{2p}{n}}.$$

仅当 $\sum(A)$，$\sum(B)$ 均为正则单形时等号成立.(陈计，马援，[339]1989,9(2):282 ~ 284)

2.　设 $0 < p \leqslant 2$，则

$$\sum_{k=1}^{m} a_k^{p}\left(\sum_{j=1}^{m} b_j^{p} - 2b_k^{p}\right) \geqslant \frac{n(n+1)(n^2+n-4)}{8}\left(\frac{2^n(n!)^2}{n+1}\right)^{p/n}\left[\left(\frac{\prod b_k}{\prod a_k}\right)^{\frac{2p}{n(n+1)}} V(A)^{\frac{2p}{n}}\right]$$

$$+\left(\frac{\prod a_k}{\prod b_k}\right)^{\frac{2p}{n(n+1)}} V(B)^{\frac{2p}{n}},$$

仅当$\sum(A)$，$\sum(B)$均为正则时等号成立.（唐立华，冷岗松，[344]1995，2:80～85）

3.　k-n型 Neuberg-Pedoe 不等式

设由$\sum(A)$的$k+1$顶点$A_{i_1},\cdots,A_{i_{k+1}}$所张成的$k$维子单形的$k$维体积记为$V_i(A,k)$，相应$\sum(B)$的子单形记为$V_i(B,k)$.

若$0<\alpha,\beta\leqslant 1$，$\gamma\in[0,n+1-k]$，$m=\binom{n+1}{k+1}$，则

$$\sum_{i=1}^{m}[V_i(A,k)]^{\alpha}\left\{\sum_{j=1}^{m}[V_j(B,k)]^{\beta}-\gamma[V_i(B,k)]^{\beta}\right\}$$
$$\geqslant m(m-\gamma)[\mu(n,k)]^{\alpha+\beta}[V(A)V(B)]^{\frac{k(\alpha+\beta)}{n}},$$

式中$\mu(n,k)=\frac{\sqrt{k+1}}{k!}\left(\frac{n!}{\sqrt{n+1}}\right)^{\frac{k}{n}}$，仅当$\sum(A)$与$\sum(B)$均为正则单形时等号成立.（另见[334]47(5)(2004)，941～946）

§3　凸体与等周不等式

一、　凸体不等式

1.　**B-M不等式(Brunn-Minkowski不等式)**：设A,B是R^n中非空有界凸集，$\mu(A)$为A的 Lebesgue 测度，则对于$0<t<1$，成立

$$[\mu(tA+(1-t)B)]^{1/n}\geqslant t[\mu(A)]^{1/n}+(1-t)[\mu(B)]^{1/n}. \tag{3.1}$$

令　$A+B=\{a+b:a\in A,b\in B\}$，则当$A,B$为$R^n$中非空紧集时，成立

$$[\mu(A+B)]^{1/n}\geqslant[\mu(A)]^{1/n}+[\mu(B)]^{1/n}. \tag{3.2}$$

特别，当$B_0=B(0,1)$是坐标在原点的单位闭球：$B_t=B(0,t)$，则

$A+tB_0=A+B_t=\{x\in R^n:d(x,A)\leqslant t\}$，这时(3.2)可写成

$$[\mu(A+B_t)]^{1/n}\geqslant[\mu(A)]^{1/n}+t[V(B_0)]^{1/n}. \tag{3.3}$$

式中

$$V(B_0)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{m!}, & n=2m,\\ \dfrac{2(2\pi)^m}{(2m+1)!!}, & n=2m+1.\end{cases} \tag{3.4}$$

（[15]68～71，146～147）

2.　**Bieberbach不等式**：设E_n为n维赋范线性空间.$A\subset E_n$，coA为A的凸包，V_n为E_n中单位球的体积，diamA为集A的直径，则

$$\mu(\mathrm{co}A)\leqslant\frac{V_n}{2^n}(\mathrm{diam}A)^n. \tag{3.5}$$

(等号成立的充要条件及证明见[15]93)

3. **Urysohn 不等式**：设 $A \subset R^n$，A 的具有法向量 $\pm v$ 的支撑超平面之间的距离称为 A 在方向 v 的宽度，记为 $h(v)$，$h(v)$ 的平均值定义为

$$h_m(A) = \frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{S^{n-1}} h(v)\mathrm{d}\sigma(v).$$

式中 S^{n-1} 为 R^n 中单位球，ω_{n-1} 为其 $n-1$ 维面积，$\mathrm{d}\sigma$ 为相应的曲面元，则

$$\mu(\mathrm{co}A) \leqslant \frac{V_n}{2^n}[h_m(A)]^n. \quad ([15]94) \tag{3.6}$$

4. **Loomis-Whitney 不等式**：设 A 是 R^n 中非空紧集，$e_1,\cdots,e_n$ 是 R^n 中正交基，$1 \leqslant m < n$. R_k^m 是 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 中 m 个向量所张成的子空间，$1 \leqslant k \leqslant N$，其中 $N = \binom{n}{m}$，用 A_k 表示 A 在 R_k^m 上的投影，则

$$\mu(A) \leqslant \prod_{k=1}^{N}[\mu_m(A_k)]^{\frac{n}{Nm}}, \tag{3.7}$$

式中 μ_m 表示 R^m 中的 Lebesgue 测度.([15]95. 原文见[376]1949,55:961 ~ 962)

5. **全平均曲率不等式**：设 A 是 R^3 中非空凸紧集，$\mu(A)$ 为 A 的 (L) 测度，A 的边界曲面的面积和全平均曲率分别记为 S 和 ρ，则 $\mu(A) \geqslant \frac{\pi S}{24\rho}\left(S - \frac{2\rho^2}{\pi^3}\right)$.(Groemer, H. [354]1965,86:361 ~ 364)

6. 设椭球的半轴为 a,b,c，表面积为 S，则

$$\left(\frac{4\pi}{3}\right)\sum ab \leqslant S \leqslant \left(\frac{4\pi}{3}\right)\sum a^2; \tag{3.8}$$

在体积相同的条件下，椭球的表面积 S 大于球的表面积，即除去 $a=b=c$，成立

$$S > 4\pi(abc)^{2/3}. \tag{3.9}$$

二、 圆与椭圆不等式

1. 设半径为 r_1,r_2,r_3 的三个圆互相外切，且它们内切于半径为 R 的圆，则

$$r_1 + r_2 + r_3 < 3R/2.$$

2. [MCM]. 三个圆两两外切，切点分别为 A,B,C，将三个圆的半径都扩大 $2/\sqrt{3}$ 倍. 圆心不变，则 $\triangle ABC$ 的每一点至少被一个扩大了的圆所覆盖.

3. [MCM]. 设 AB,CD 是以 O 为圆心，r 为半径的圆的两条互相垂直的弦，圆盘被它们分成的四部分面积依顺时针方向记为 S_1,S_2,S_3,S_4，则

$$\frac{\pi-2}{\pi+2} \leqslant \frac{S_1+S_3}{S_2+S_4} \leqslant \frac{\pi+2}{\pi-2}. \tag{3.10}$$

(30 届 IMO 备选题,[348]1980.5:39)

4. 设 $L(a,b)$ 表示椭圆 $(x/a)^2+(y/b)^2=1$ 的周长，$a \geqslant a_1 \geqslant b$，则 $L^2 - L_1^2 \geqslant 16(a^2 - a_1^2)$，式中 $L = L(a,b)$，$L_1 = L(a_1,b)$.([305]1971,78:202)

5. 设 S_n 表示椭圆 $(x/a)^2+(y/b)^2=1$ 的内接 n 边形的面积，则 $S_3 \leqslant (3\sqrt{3}/4)ab$；

$S_4 \leqslant 2ab$，$S_n \leqslant (n/2)ab\sin(2\pi/n)$；若 $a > b > 0$，$c = \sqrt{a^2 - b^2}$，则 $(x-c)^2 + y^2 \leqslant 4a^2$.

提示：对椭圆作压缩变换 $x_1 = x$，$y_1 = (a/b)y$，得到它的辅助圆 $x_1^2 + y_1^2 = a^2$.

6.　设圆面积为 S，周长为 L，它的内接和外切正 n 边形的面积分别为 S_1，S_2，周长分别为 L_1，L_2，则

(1)　$S_1S_2 < S^2$；　(3.11)

(2)　$L_1L_2 < L^2$.　(3.12)

(莫斯科国立大学 1991 年入学考试试题，[383]1993，40(2)：138 ～ 139)

7.　**刘徽割圆不等式**(公元 263 年)：设 S_n 为单位圆内接正 n 边形的面积，则

$$S_{2n} < \pi < 2S_{2n} - S_n. \tag{3.13}$$

1985 年，俞文魮等利用数值分析中的外推公式：

$$S_n^k = \frac{4^k S_{2n}^{k-1} - S_n^{k-1}}{4^k - 1}；T_n^k = \frac{2^{2k-1} S_{2n}^{k-1} - S_n^{k-1}}{2^{2k-1} - 1} \tag{3.14}$$

证明了一组新的割圆不等式：

(1)　$S_n^k < \pi < T_n^k$，　$(n \geqslant 3, k \geqslant 1)$；　(3.15)

(2)　$S_n^k < S_{2n}^k < S_n^{k+1}$；　(3.16)

(3)　$T_n^{k+1} < T_{2n}^k < T_n^k$.　(3.17)

从(3.16)(3.17)关于足标的单调性，为使 S_n^k 或 T_n^k 与 π 更加接近，外推一次的效果要优于边长加倍一次的效果.(曲阜师大学报，1985，1：41 ～ 45)

8.　**R^n 中单位球体积 V 的不等式**：已知 R^n 中以 r 为半径的球 $B(0,r) = \{x = (x_1, \cdots, x_n) : (\sum_{k=1}^n |x_k|^2)^{1/2} \leqslant r\}$ 的体积为

$$V_n(B) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} r^n = \begin{cases} \dfrac{\pi^m}{m!} r^{2m}, & n = 2m, \\ \dfrac{2(2\pi)^m}{(2m+1)!!} r^{2m+1}, & n = 2m+1, \end{cases}$$

相应球面 $S(0,r) = \{x = (x_1, \cdots x_n) : \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2\right)^{1/2} = r\}$ 的面积为

$$S_n(B) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} r^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{2\pi^m}{(m-1)!} r^{2m-1}, & n = 2m, \\ \dfrac{2(2\pi)^m}{(2m-1)!!} r^{2m}, & n = 2m+1, \end{cases}$$

式中 $\Gamma(n)$ 为 Gamma 函数.(第 8 章 §3)

当 $r = 1$ 时，即单位球的体积记为 V_n，表面积记为 S_n. Alzer, H. 利用 Γ 及其对数导数 Γ'/Γ 的性质证明了下述不等式：

(1)　$\frac{2}{\sqrt{\pi}} V_{n+1}^m \leqslant V_n \leqslant \mathrm{e} V_{n+1}^m$，式中 $m = \frac{n}{n+1}$；　(3.18)

(2)　$\left(\frac{n + (1/2)}{2\pi}\right)^{1/2} \leqslant \frac{V_{n-1}}{V_n} \leqslant \left(\frac{n + (\pi/2) - 1}{2\pi}\right)^{1/2}$；　(3.19)

(3) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha} \leqslant \frac{V_n^2}{V_{n-1}V_{n+1}} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\beta}$. (3.20)

式中 $\alpha = 2 - \frac{\ln\pi}{\ln 2}, \beta = \frac{1}{2}$.

以上常数均是最优的.应注意的是 V_n 不单调,在 $n = 5$ 时达到最大值.但 $V_n^{1/n}$ 却是严格递减且 $V_n^{1/n} \to 0(n \to \infty)$.([301]2000,252(1):353 ~ 363)

9. **费叶思-托特问题**:球面上 n 个点,每两点之间的球面距离(以这两点为端点的大圆上的最短弧的长)的总和记为 d_n.问这 n 个点处于什么位置时,d_n 最大?卡扎里诺夫在[53]125 ~ 127 给出了 d_n 的上、下界估计:

$$\pi n^2/4 \leqslant d_n \leqslant \pi n(n-1)/3. \tag{3.21}$$

但刘西垣在[53]127 上指出,(3.21)的下界与 $d_{2k+1} = \pi k(k+1)$ 的猜测矛盾,因此(3.21)的左端对大于3的奇数可能不成立.我们问:如何解决这个矛盾?如何找出 d_n 的最优上、下界?

10. **椭圆特征不等式**:我们已知中心在原点 O,长、短半轴分别为 a,b,半轴的比率 $p = \frac{a}{b} \geqslant 1$,当 $p \neq 1$ 时长轴与 x 轴的交角为 $\theta(0 \leqslant \theta < \pi)$ 的椭圆方程为

$$\gamma x^2 - 2\beta xy + \alpha y^2 = pb^2.$$

式中

$$\alpha = p(\cos\theta)^2 + \frac{1}{p}(\sin\theta)^2,\quad \beta = (p - \frac{1}{p})\cos\theta\sin\theta,\quad \gamma = p(\sin\theta)^2 + \frac{1}{p}(\cos\theta)^2.$$

利用 $\mu = -\frac{p-1}{p+1}e^{2i\theta}$ 和 $\lambda = \frac{2pb}{p+1}$,椭圆方程也可以写成

$$|z + \mu\bar{z}| = \lambda.$$

因此,p,θ 或 α,β,γ 称为椭圆的特征,它们的关系为 $\alpha\gamma - \beta^2 = 1$.而 μ 称为椭圆的复特征,在圆的情形,$p = 1$,$\alpha = \gamma = 1$,$\mu = \beta = 0$.

(1) 椭圆特征不等式:$\frac{1}{p} \leqslant \alpha,\ \gamma \leqslant p,\ |\beta| \leqslant \frac{1}{2}\left(p - \frac{1}{p}\right),\ |\mu| < 1$.

(2) 两个椭圆的特征间的不等式:

① $|p_2 - p_1| \leqslant |\alpha_2 - \alpha_1| + |\beta_2 - \beta_1| + |\gamma_2 - \gamma_1|$.

② $|\alpha_2 - \alpha_1| \leqslant |p_2 - p_1| + \sqrt{\left(p_2 - \frac{1}{p_2}\right)\left(p_1 - \frac{1}{p_1}\right)}\sin|\theta_2 - \theta_1|$;

$|\beta_2 - \beta_1| \leqslant |p_2 - p_1| \left(1 + \frac{1}{p_1p_2}\right) + 2\left[\left(p_2 - \frac{1}{p_2}\right)\left(p_1 - \frac{1}{p_1}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\sin|\theta_2 - \theta_1|$;

$|\gamma_2 - \gamma_1| \leqslant |p_2 - p_1| + \sqrt{\left(p_2 - \frac{1}{p_2}\right)\left(p_1 - \frac{1}{p_1}\right)}\sin|\theta_2 - \theta_1|$.

③ $|\mu_2 - \mu_1| \leqslant ||\mu_2| - |\mu_1|| + 2\sqrt{|\mu_2\mu_1|}\sin|\theta_2 - \theta_1|$.

④ $\left|\frac{\mu_2 - \mu_1}{1 - \bar{\mu}_1\mu_2}\right| \leqslant \frac{|p_2 - p_1|}{p_2 + p_1} + \sqrt{(p_2 - 1)(p_1 - 1)}\sin|\theta_2 - \theta_1|$.

这些不等式在解析函数理论中有重要应用.

11.　[MCU]. 设 C 是坐标平面上某个固定的单位圆，对于每边都同 C 相切的任一凸多边形 P，以 $N(P,x,y)$ 表示中心在 (x,y) 的单位圆周与 P 的公共点数. 令 $D=\{(x,y):N(P,x,y)\geqslant 1\}$，则

$$\iint_D N(P,x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<(8/3)\mid D\mid. \tag{3.22}$$

式中 $\mid D\mid$ 是 D 的面积，系数 8/3 是最佳的.（第 42 届普特南竞赛，[305]1982，89：679 ～ 686）

注　这个积分不等式并不需要计算二重积分，而只用到初等的 Cavalieri 面积割补方法即可得证.

三、　等周不等式

（一）　经典等周不等式

1882 年，Edler, F 证明了平面区域 D 的面积 S 和其周长 L 之间满足不等式：

$$L^2\geqslant 4\pi S, \tag{3.23}$$

仅当该区域 D 为圆时等号成立，这就是等周不等式. 推广到高维就是 $R^n(n\geqslant 2)$ 中某一区域 D 的体积 V 与构成该区域边界的 $n-1$ 维超曲面面积 S 之间满足

$$S^n\geqslant n^n v_n V^{n-1}, \tag{3.24}$$

式中 v_n 表示 n 维单位球的体积，仅当该区域 D 为球体时等号成立，其中 $n=3$ 时由 Schwarz 于 1890 年证明. 而对 $n\geqslant 2$ 的一般形式则分别由 Люстерник(1935) 和 Schmidt(1939) 给出.

已知 $n=2$ 时，即(3.23) 式有多种证法，下面用数学分析的方法更确切地叙述并证明(3.23) 式：

设 $p(t)$ 以 2π 为周期且有二阶连续导数，带参量 t 的直线族为

$$F(x,y,t)=x\cos t+y\sin t-p(t)=0. \tag{3.25}$$

（p 表示原点到直线族中具有法向方向 t 的那条直线的距离），这些直线的包络 C 是一条闭曲线，且满足(3.25) 和

$$F'_t(x,y,t)=-x\sin t+y\cos t-p'(t)=0.$$

于是曲线 C 的参数方程为

$$\begin{cases}x=x(t)=p(t)\cos t-p'(t)\sin t\\ y=y(t)=p(t)\sin t+p'(t)\cos t\end{cases} \tag{3.26}$$

C 的长度 L 和面积 S 满足等周不等式(3.23)，式中等号仅当 C 为圆周时成立. 它表示在给定长度的全部曲线中，圆周包围的面积最大.

证 1　**用 Fourier 级数方法.** 作 $p(t)$ 的 Fourier 级数展开式，

$p(t)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)$，于是

$p'(t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}k(b_k\cos kt-a_k\sin kt)$. 从而

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\mathrm{d}t=\pi a_0.$$

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(xy'_t-yx'_t)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\left[\frac{a_0^2}{2}-\sum_{k=2}^{\infty}(k^2-1)(a_k^2+b_k^2)\right].$$

所以 $S\leqslant(\pi/4)a_0^2=L^2/4\pi$. 仅当 $\forall k\geqslant 2, a_k=b_k=0$ 时，才成立 $S=L^2/(4\pi)$，即

$p(t)=a_0/2+a_1\cos t+b_1\sin t$，它定义一个圆.

证 2　用变分法. 设光滑曲线 C 的参数方程为

$$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}\quad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta).\tag{3.27}$$

C 的长度为　$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\mathrm{d}t.$ (3.28)

曲线 C 所围的面积为

$$S=S(x,y)=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta[x(t)y'(t)-y(t)x'(t)]\mathrm{d}t.\tag{3.29}$$

问题就变成在条件(3.28)下求泛函(3.29)的极值.

我们给出更一般的提法：在满足等周条件

$$\int_{x_1}^{x_2}G(x,y,y')\mathrm{d}x=a\quad(a\text{ 为常数})\tag{3.30}$$

和边界条件　$y(x_k)=y_k\quad(k=1,2)$ (3.31)

的一切曲线 $y=y(x)$ 中，确定一条曲线，使泛函

$$J(y)=\int_{x_1}^{x_2}g(x,y,y')\mathrm{d}x\tag{3.32}$$

达到极值，称为**广义等周问题.**

作辅助函数 $\varphi=g+\lambda G$　(λ 为待定常数)，则归结为求泛函 $J^*(y)=\int_{x_1}^{x_2}\varphi(x,y,y')\mathrm{d}x$ 的无条件极值问题，于是得到广义等周问题的欧拉方程

$$(g'_y+\lambda G'_y)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(g'_{y'}+\lambda G'_{y'})=0.\tag{3.33}$$

两个积分常数和待定常数 λ 可用等周条件(3.30)和边界条件(3.31)确定. 特别，取 $G(x,y,y')=\sqrt{1+(y')^2}$, $g(x,y,y')=y$，代入(3.33)，即得

$$1-\lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}}\right)=0.\tag{3.34}$$

它的积分曲线是圆族：

$$(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=\lambda^2.\tag{3.35}$$

积分常数 c_1,c_2 和 λ 由(3.30)(3.31)决定.(3.35)表明，等周问题的解是通过 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 两点且长度为 a 的圆弧.

证 3　初等方法. 蔡宗熹在“等周问题”(人民教育出版社，1964)中，只用到中学平面几何知识，给出了两种初等证法(包括著名的施坦纳证明)，并介绍了一系列有趣的应用：从物理上“在表面张力作用下，液体有力求使其表面积达到最小趋势”解释吹出来的肥皂泡为什么总是圆球，到几何上解释：在具有给定表面积的所有立体中，球有最大的体积；在具有给定体积的所有立体中，球有最小的表面积；在给定表面积的长方体中体积最大的和

给定体积的长方体中表面积最小的都是立方体；周长一定的三角形中，等边三角形有最大面积；在周长一定的矩形中，正方形的面积最大，而面积一定的四边形中，正方形的周长最小；在周长一定的 n 边形中，以正 n 边形的面积最大，而面积一定的 n 边形中，正 n 边形的周长最小；在周长一定的平面曲线中，圆所围的面积最大，在面积一定的平面闭曲线中，圆的周长最小，等等. 利用等周不等式还可证明 A-G 不等式.

[15]1 ～ 2 列出了等周不等式(3.23) 的 10 种不同的证明方法. 另见第 13 章 No. 29，(17.2) 式. 当 $n \geqslant 3$ 时，经典等周不等式的证明方法，就目前所知还只有两种：第一种证法是 Steiner 提出的对称化方法(注)，利用该方法，Schmidt 得到了经典等周不等式和 B-M 不等式(3.1). 在球型和双曲型 n 维空间的类似不等式(见 Math，Nachr，1948，1：81 ～ 157). 第二种证法是将经典等周不等式转化为 B-M 不等式(3.1) 并利用体积的比例除法，利用这一证法可得到 Minkowski 空间的经典不等式：

$$[S(A,B)]^n \geqslant n^n [V(A)]^{n-1} V(B). \tag{3.36}$$

式中 $V(A)$，$V(B)$ 分别为集合 A，B 的体积，$S(A,B)$ 是 A 相对于 B 的 Minkowski 面积.（详见 Busemann，H. [310]1949，71：743 ～ 762）

注　Steiner 关于直线 l 的"对称化"，是将平面域 P 变成另一平面域 Q，它满足：Q 关于 l 对称且与 l 垂直的任一直线，只要和 P，Q 之一相交，就必和另一个相交，且两条截线段具有相同的长度，Q 的截线段为 l 所平分；在高维情形，则取 l 为超平面，Q 与 P 为等积，而 Q 的周长(或表面积) 并不比 P 的大. 1945 年，Polya-Szegö 发现通过对称化容量并不增加，利用这个性质，各种特征值的等周不等式以及特征值的估计问题都统一地得到了解决.

(二)　等周型不等式(经典等周不等式的推广)

1.　**Bonnesen 不等式**(1921)：设 C 为 Jordan 平面曲线，C 的周长为 L，C 所围的面积为 S，内接于 C 的最大圆的半径为 r，外切于 C 的最小圆的半径为 R，并用 $\Delta = L^2 - 4\pi S$ 表示等周差，则

(1)　$$\Delta \geqslant (L - 2\pi r)^2. \tag{3.37}$$

(2)　$$\Delta \geqslant (2\pi R - L)^2. \tag{3.38}$$

(3)　$$\Delta \geqslant \pi^2 (R - r)^2. \tag{3.39}$$

(4)　$$\Delta \geqslant \left(L - \frac{2S}{R}\right)^2. \tag{3.40}$$

(5)　$\Delta \geqslant S^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)^2$.　　(6)　$\Delta \geqslant L^2 \left(\frac{R - r}{R + r}\right)^2$.

(7)　$$\frac{L - \sqrt{L^2 - 4\pi S}}{2\pi} \leqslant r \leqslant R \leqslant \frac{L + \sqrt{L^2 - 4\pi S}}{2\pi}. \tag{3.41}$$

(8)　若 $r < t < R$，则 $\Delta > (L - 2\pi t)^2$；　$\Delta > \left(\frac{S}{t} - \pi t\right)^2$；　$\Delta > \left(L - \frac{2S}{t}\right)^2$；$L - \frac{2S}{t} > \pi t - \frac{S}{t}$.

(9)　设曲线 C 位于半径为 a 的球面上，则

$$L^2 - 4\pi S + (\frac{S}{a})^2 \geqslant 8\pi a^2 \sin \frac{R-r}{4a(1+2\pi)}. \tag{3.42}$$

(10) 1942 年，Santalo，L. A. 证明：若曲线 C 位于具有负曲率 $-\frac{1}{a^2}$ 的曲面上，则

$$L^2 - 4\pi S - (\frac{S}{a})^2 \geqslant \frac{a^2}{4}(4\pi + \frac{S}{a^2})^2(\text{th}\frac{R}{2a} - \text{th}\frac{r}{2a})^2. \tag{3.43}$$

2. **解析等周不等式**：设 P_n 为平面 n 边形，它的面积记为 $S(P_n)$，周长为 $L(P_n)$，则

$$[L(P_n)]^2 \leqslant 4n\text{tg}(\frac{\pi}{n})S(P_n) + \left\{n\sin\frac{\pi}{n} - L(P_n)\right)^2,$$

若 P_n 的顶点均在单位圆周上，用 θ_k 表示第 k 边所对的圆心角，则上式变成：

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\sin\theta_k\right)^2 \geqslant n \cdot \text{tg}(\frac{\pi}{n})\sum_{k=1}^{n}\sin\theta_k\cos\theta_k + \left(n\sin\frac{\pi}{n} - \sum_{k=1}^{n}\sin\theta_k\right)^2.$$

(Ku Hsu-Tung，[303]2000，3(4)：459 ～ 472)

3. R^3 中凸体的边界称为卵形面，其表面积为 S. 内部的体积为 V，则

$$S^3 \geqslant 36\pi V^2. \tag{3.44}$$

仅当卵形面为球面时等号成立.

4. 等周不等式还包括依赖于图形的形状和大小的几何量或物理量之间的不等式. 例如，关于图形的边值问题的特征值之间的不等式关系，关于惯性矩，弹性梁的抗扭刚度，膜的基本频率，静电容量等物理量的估计以及集合，流形的几何特征之间的不等式等，因而等周不等式在数学物理、复变函数论、泛函分析、函数逼近论、变分法等都有广泛而深刻的应用. 例如：

(1) 设 p 是棱柱形弹性梁的抗扭刚度，S 是梁的横截面积，则

$$S^2 \geqslant 2\pi p \quad \text{(Saint-Venant)} \tag{3.45}$$

(2) 设 S 是膜的面积，f 是膜的基本频率，α 是 Bessel 函数 $J_0(x)$ 的第一个正根，则

$$f^2 \leqslant \frac{\pi\alpha^2}{S} \text{(Lord Rayleigh, 1877)} \tag{3.46}$$

(3) 设 C 是物体的静电电容量，V 为该物体的体积，则

$$3V \leqslant 4\pi C^3 \quad \text{(Poincare, 1903)} \tag{3.47}$$

(4) 用关于面积、体积的等周不等式证明线性和拟线性椭圆型微分方程解的先验估计.

(5) 函数逼近论中的宽度(Width) 是 Minkowski 空间中凸体的一种特殊的等周不等式.

(6) 泛函分析中，对 Sobolev 空间的嵌入算子的有界性和紧性条件可用等周不等式(联系测度和容量) 给出. 例如，设 μ 为非负测度，$q \geqslant 2$，$n > 2$，则

$$\left(\int_{R^n} |u|^q \mathrm{d}\mu\right)^{n/q} \leqslant C\int_{R^n}(\nabla u)^2 \mathrm{d}x \quad \forall u \in C_0^\infty(R^n) \tag{3.48}$$

成立的充要条件是 $\forall$ 紧集 $A \subset R^n$，满足等周不等式：

$$[\mu(A)]^{2/q} \leqslant C_1 \text{cap}(A). \tag{3.49}$$

式中 cap(A) 是集 A 的 Wiener 容量.(Landkof, N. S., Foundations of modern potential theory, Springer-Verlag, 1972)

(7) 在共形与拟共形理论中应用等周不等式成了一种标准的方法,包含子流形平均曲率,特别是对极小曲面的等周不等式在 Plateau 问题的求解中起着重要作用. 所谓 Plateau 问题,就是求具有给定边界的极小曲面问题. 1760 年,Lagrange 对形如 $z = z(x, y)$ 的曲面类,把问题化为求极小曲面的 Euler-Lagrange 方程的解,Plateau 在 1849 年的实验表明,极小曲面可由伸展在金属丝框架上的肥皂膜的形状来得到,所以,后来就称为 Plateau 问题. 现已推广到 Riemann 空间中. 更详细的应用见[108].

5. **混合体积不等式**:设 K_j 为 R^n 中的凸体,令 $K = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j K_j = \{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j x_j : x_j \in K_j, \lambda_j > 0\}$. 则 K 的体积 $V(K)$ 定义为关于 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 的 n 次齐次多项式:

$$V(K) = \sum_{j_1=1}^{m} \cdots \sum_{j_n=1}^{m} V(K_{j_1}, \cdots K_{j_n}) \lambda_{j_1} \cdots \lambda_{j_n}. \tag{3.50}$$

式中系数 $V(K_{j_1}, \cdots, K_{j_n})$ 关于下标的置换是对称的,并称为凸体 $K_{j_1}, \cdots, K_{j_n}$ 的混合体积 (mixed volumes).

混合体积是一个十分广泛的概念,将 $V(K_1, \cdots, K_n)$ 中的 $K_2, \cdots, K_n$ 换成具体的凸体,就可以得到凸体 K_1 的种种性质,包括其体积、表面积,其主曲率的初等对称函数的曲面积分(在 C^2 光滑体的情形下),及其向 j 维平面($0 < j < n$)的投影的相应特征. 例如,当 $n = 3$ 时,从(3.50)得到 R^3 中平行凸体体积的 Steiner 公式:

$$V(\varepsilon) = V + S\varepsilon + \pi\rho\varepsilon^2 + \frac{4}{3}\pi\varepsilon^3, \tag{3.51}$$

式中 $V(\varepsilon)$ 是 V 的 ε 邻域的体积,V 是平行凸体的体积,S 是其表面积,ρ 是原凸体的全平均曲率. n 个凸体 $K_1, \cdots, K_n$ 的混合体积可用积分表示:

$$V(K_1, \cdots, K_n) = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} K_1(u) \mathrm{d}\mu. \tag{3.52}$$

式中 $K_1(u)$ 是凸体 K_1 的支撑函数,$\mu(\omega) = \mu(K_2, \cdots, K_n, \omega)$ 是依赖于 $K_2, \cdots, K_n$ 的测度,称为 $K_2, \cdots, K_n$ 的混合曲面函数.

不同混合体积间的不等式构成了混合体积理论的主要内容,它们包括:

(1) **Minkowski 不等式**:

$$[V(K, L, \cdots, L)]^n \geqslant V(K)[V(L)]^{n-1}; \tag{3.53}$$

(2) **二次 Minkowski 不等式**:

$$[V(K, L, \cdots, L)]^2 \geqslant V(L) V(K, K, L, \cdots, L), \tag{3.54}$$

它可简记为

$$[V(K, 1; L, n-1)]^2 \geqslant V(L) V(K, 2; L, n-2).$$

(3) **Aleksandrov-Fenchel 不等式(AF 不等式)**:

$$[V(K_1, \cdots, K_m, L_1, \cdots L_{n-m})]^m \geqslant \prod_{j=1}^{m} V(K_j, \cdots, K_j, L_1, \cdots, L_{n-m}). \tag{3.55}$$

特别地,有

$$[V(K_1,\cdots,K_n)]^n \geqslant \prod_{j=1}^{n} V(K_j). \tag{3.56}$$

许多几何不等式,例如经典等周不等式及其改进和推广都是凸体混合体积不等式的特例,混合体积理论与代数几何学有着深刻的联系.(以上不等式的证明见[15]第4章.136 ~ 207)

(4) **Diskant 不等式**:设 A,B 为 R^n 中凸紧集.

$$q(A,B) = \sup\{\lambda : \exists x \in R^n, \lambda B + x \subset A\}$$

称为 B 在 A 中的容度系数(content coefficient),$Q(A,B) = \frac{1}{q(A,B)}$ 称为 B 在 A 中的围长系数(girth coefficient).当 B 为单位球时,$q = r, Q = R$,式中 r,R 分别是凸集 A 的内接最大圆半径和外切最小圆的半径,则

$$[V(A,n-1;B,1)]^{\frac{n}{n-1}} - V(A)[V(B)]^{\frac{1}{n-1}} \geqslant \{[V(A,n-1;B,1)]^{\frac{1}{n-1}} - q[V(B)]^{\frac{1}{n-1}}\}^n; \tag{3.57}$$

$$[V(A,1;B,n-1)]^{\frac{n}{n-1}} - [V(A)]^{\frac{1}{n-1}}V(B) \geqslant \left\{[V(A,1;B,n-1)]^{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{Q}[V(A)]^{\frac{1}{n-1}}\right\}^n; \tag{3.58}$$

我们在[15]中还可找到大量的等周不等式的种种改进和推广.

6. **Riemann 几何学中的等周不等式**:设 V^n 为 n 维 Riemann 空间.(n 维连通微分流形),D 是 V^n 中完全单连通区域,它的边界的 $n-1$ 维面积记为 S,则

$$V^{\frac{n-1}{n}} \leqslant c(n)S. \tag{3.59}$$

但 $c(n)$ 的精确值还不知道.(Cheeger,J.[310]1970,92,1:61 ~ 74)

7. **图论中的离散等周不等式**:给定图 G 及其顶点的集 A,对于 $t \geqslant 1$,以 A_t 表示 A 的 t 邻域与 A 距离不超过 t 的顶点的集合,若对每个具有 a 个顶点的 $A \subset V(G)$,有

$$|A_t| \geqslant f(a), \tag{3.60}$$

则称上式为一个等周不等式.特别地,若 A 是离散方体图的 $\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}$ 个顶点,则

$$|A_t| \geqslant \sum_{k=0}^{m+t}\binom{n}{k} \quad \text{(Harper 不等式)} \tag{3.61}$$

(Bollobas,B. 等,J,Combinatorial Theory (A) 1991,56:47 ~ 74.)我们除了知道极少数重要的图类的最好的等周不等式外,还不知道大多数图的等周不等式.

此外,代数曲面和流形中的不等式,如代数曲面的 Noether 不等式;流形中的 Cohn-Vossen 不等式;Morse 理论中的 Morse 不等式:代数几何中的井草(Igusa)不等式等,因涉及较深的数学背景知识,读者可参考相应的专著.

8. Gage 等周不等式(1983):设平面闭凸曲线 C 的相对曲率为 δ,周长为 L,所围面积为 S,则

$$\int_C \delta^2 \mathrm{d}s \geqslant \frac{\pi L}{S} \tag{3.62}$$

仅当 C 为圆周时等号成立.([324]50(1983):1225 ~ 1229)

2008 年,潘生亮等将(3.62)加强为:设C为平面上严格凸C^2闭曲线,δ为其曲率,当C不是圆周时,(3.62)成立严格不等式。(3.62)的分析形式是:设f是2π周期的C^2函数,$f(t)>0$, $f(t)+f''(t)>0$,则

$$\left(\int_0^{2\pi} f(t)(f(t)+f''(t))\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^{2\pi}\frac{1}{f(t)+f''(t)}\mathrm{d}t\right)\geqslant 2\pi\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t \tag{3.63}$$

仅当存在实的常数a,b,c,其中$c>0$,使得$f(t)=a\cos t+b\sin t+c$时等号成立.但至今仍无分析的证明方法.([336]29(3)(2008):301 ~ 306)

2006 年,文家金、周步骏利用隐函数理论和微分几何理论建立了三维空间的等周不等式,并借助于数学软件给出了一些生动的实例.([351]2006(3):306 ~ 314)

第五章　初等超越函数不等式

§1　三角函数不等式

1.　**Jordan 不等式**:设 $0<|x|<\frac{\pi}{2}$,则

$$\frac{2}{\pi}\leqslant\frac{\sin x}{x}<1.$$

证　$f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 在 $(0,\frac{\pi}{2}]$ 上严格递减. 于是 $f(x)\geqslant f(\frac{\pi}{2})=\frac{2}{\pi}$ $(0<x<\frac{\pi}{2})$;若 $0<x<\frac{\pi}{4}$,则 $f(x)>f(\frac{\pi}{4})=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

注　Jordan 不等式已有许多推广,例如

(1)　设 $0<x\leqslant\frac{\pi}{2}$,则

$$0\leqslant\frac{\sin x}{x}-\frac{2}{\pi}-\frac{\pi^2-4x^2}{\pi^3}\leqslant\frac{\pi-3}{\pi^3}(\pi^2-4x^2).$$

([399]19(2006),240 ~ 243)

(2)　$x-\frac{1}{6}x^3<\sin x<x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5$,$(x\neq 0)$;

$$\left|\sin x-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}\right|\leqslant\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}\ (x\text{ 为实数}),$$

而且这个差具有 $(-1)^n$ 的符号.

提示:利用 Taylor 级数展开式.

(3)　1969 年,Redheffer,R. 证明对于所有实数 $x\neq 0$,有

$$\frac{\sin x}{x}\geqslant\frac{\pi^2-x^2}{\pi^2+x^2}.\text{([305]1969,76:422)}$$

注意这个不等式与 Jordan 不等式互不包含.

(4)　$\forall x\neq 0$,存在常数 $c>0$,使得

$$\frac{cx^2}{1+x^2}<1-\frac{\sin x}{x}<\frac{x^2}{6}.$$

(5)　设 $0<x\leqslant\frac{\pi}{2}$,则

$$\cos x<\frac{n\sin x}{x}-\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{kx}{n}<1.$$

(6)　存在常数 $a,b>0$,使得

$$1-\frac{\sin x}{x}\geqslant\begin{cases}a, & |x|>1,\\ bx^2, & |x|\leqslant 1.\end{cases}$$

(7) $\sin x\geqslant\begin{cases}\dfrac{x}{1+(x/5)}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 53x/(53+9x^2), & 0\leqslant x\leqslant 1/3,\\ (3\sqrt{3}/2\pi)x, & 0\leqslant x\leqslant \pi/3.\end{cases}$

(8) $\sin x\geqslant\dfrac{2x}{\pi-2x}$, $\left(0<x\leqslant\dfrac{\pi}{6}\right)$.

(9) [MCM]. $\dfrac{2\cos x}{1+\cos x}<\dfrac{\sin x}{x}<\dfrac{3}{4-\cos x}, 0<x<\dfrac{\pi}{2}$.

(10) $\left|\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right|\leqslant\begin{cases}1-(2/\pi), 0<|x|\leqslant\pi/2,\\ \sqrt{2}-(4/\pi), 0<|x|\leqslant\pi/4\end{cases}.$

([327]1988,53(2):145 ~ 154)

(11) 设 $0<x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$,则

① $\dfrac{(\pi-2)(\pi-2x)}{\pi^2}\leqslant\dfrac{\sin x}{x}-\dfrac{2}{\pi}\leqslant\dfrac{2}{\pi^2}(\pi-2x)$;

② $\dfrac{4(\pi-3)}{\pi^3}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^2\leqslant\dfrac{\sin x}{x}-\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{1}{\pi^3}(\pi^2-4x^2)\leqslant\dfrac{12-\pi^2}{\pi^3}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^2$;

③ $\dfrac{12-\pi^2}{16\pi^5}(\pi^2-4x^2)^2\leqslant\dfrac{\sin x}{x}-\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{1}{\pi^3}(\pi^2-4x^2)\leqslant\dfrac{\pi-3}{\pi^5}(\pi^2-4x^2)^2$;

④ $\dfrac{1}{n\pi^{n+1}}[\pi^n-(2x)^n]\leqslant\dfrac{\sin x}{x}-\dfrac{2}{\pi}\leqslant\dfrac{\pi-2}{\pi^{n+1}}[\pi^n-(2x)^n]$.

(祁锋,朱灵等,[399]19(2006),990 ~ 994,1378 ~ 1384 等)

(12) 设 $0<x\leqslant r<\dfrac{\pi}{2}$,则

$$\frac{\sin r-r\cos r}{2r^3}(r^2-x^2)\leqslant\frac{\sin x}{x}-\frac{\sin r}{r}\leqslant\frac{r-\sin r}{r^3}(r^2-x^2).$$

(朱灵,[303]9(1)(2006):103 ~ 106)

(13) 设 $0<x\leqslant\pi$,则

$$\left(\frac{\pi^2-x^2}{\sqrt{\pi^4+3x^4}}\right)^{\alpha}\leqslant\frac{\sin x}{x}\leqslant\left(\frac{\pi^2-x^2}{\sqrt{\pi^4+3x^4}}\right)^{\beta}\Leftrightarrow\alpha\geqslant\frac{\pi^2}{6},\ \beta\leqslant 1.$$

(朱灵,[399]22(2009),743 ~ 748)

(14) 设 $0<x<\pi$,则

$$\left(\frac{\pi^2-x^2}{\pi^2+x^2}\right)^{\beta}\leqslant\frac{\sin x}{x}\leqslant\left(\frac{\pi^2-x^2}{\pi^2+x^2}\right)^{\alpha}\Leftrightarrow\alpha\geqslant\frac{\pi^2}{12},\ \beta\geqslant 1.$$

(朱灵等,[394]56(2008),522 ~ 529)

(15) 设 $0<x<1$,则

$$\frac{1-x^2}{1+x^2}[1+x^3(1-x^3)]<\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\leqslant\frac{1-x^2}{(1+3x^4)^{\frac{1}{2}}}.$$

2. [MCU] 设 $0 < x \leqslant \pi/2$，则

$$(\sin x)^{-2} \leqslant x^{-2} + 1 - 4\pi^{-2}. \tag{1.1}$$

仅当 $x = \pi/2$ 时等号成立.

证 令 $f(x) = (\sin x)^{-2} - x^{-2}$，则 $f'(x) = -2(\sin x)^{-3}\cos x + 2x^{-3} > 0 \Leftrightarrow$

$$g(x) = \sin x(\cos x)^{-\frac{1}{3}} - x > 0.$$

但 $g''(x) = \frac{4}{9}(\cos x)^{-\frac{7}{3}}(\sin x)^3$，所以当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，$g''(x) > 0$，于是，$g'(x)$ 严格递增，从而 $g'(x) > g'(0) = 0 \Rightarrow g(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内严格递增，从而 $g(x) > g(0) = 0. \Rightarrow f'(x) > 0$，所以 f 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内严格递增，于是，$f(x) \leqslant f(\frac{\pi}{2}) = 1 - \frac{4}{\pi^2}$.

3. (1) 设 $|x| < \frac{\pi}{2}$，$1 < p \leqslant 2$，则存在正数 c_1, c_2，使得

$$|\sin x|^p \leqslant c_1|\cos x|^p - c_2\cos(px).\text{（证明[45]60）}$$

(2) 设 $|x| \leqslant \pi/2$，则

$$|\sin x|^p \leqslant \alpha\cos px + \beta(\cos x)^p.$$

式中 $p > 0$，并且不是奇整数，常数 α、β 只依赖于 p.（证明[57]Vol. 1 255）

4. [MCU] 设 $0 < |x| \leqslant \pi/2$，则

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 \geqslant \cos x. \tag{1.2}$$

证 1 不妨设 $0 < x < \pi/2$. 只要证 $f(x) = (\sin x)^3(\cos x)^{-1} - x^3 \geqslant 0$.

求四阶导数 $f^{(4)}(x)$ 并化简后变成要证 $3(\cos x)^{-5} - (\cos x)^{-3} - 2\cos x \geqslant 0$.

因为 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，$(\cos x)^{-5} > (\cos x)^{-3} > \cos x$，故不等式即可得证.

证 2 用 Taylor 级数. 因为 $x > 0$，所以

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 > \left(1 - \frac{x^2}{3!}\right)^3 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{216}，\text{且}\quad \cos x < 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!},$$

于是只要证明

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{216} > 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!},$$

即只要证

$$f(x) = \frac{1}{4!} + \left(-\frac{1}{216} + \frac{1}{720}\right)x^2 - \frac{1}{8!}x^4 > 0,$$

而 f 在 $(0, \infty)$ 内递减，所以 $f(x) > f(2) > 0$.

注 上述不等式可推广如下：设 $0 < x < \frac{\pi}{2}$，若 $\alpha \leqslant 3$，则

$$\cos x < \left(\frac{\sin x}{x}\right)^\alpha,$$

若 $a > 3$，则存在依赖于 a 的 $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$，满足

$\cos x_0 = \left(\frac{\sin x_0}{x_0}\right)^{\alpha}$，使得当 $0 < x < x_0$ 时，$\cos x > \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\alpha}$，而当 $x_0 < x < \pi/2$ 时，不等号反向.

关于这些不等式的证明及进一步推广：

$$(\cos x)^c < \frac{(\sin x)^a}{x^b}, (0 < x < \frac{\pi}{2}).$$

([4]323 ～ 326 及后面所附的参考文献)

5. 设 $0 < x < \frac{\pi}{2}$，则在不等式

$$\cos bx \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant \cos ax, \tag{1.3}$$

式中 a 的最大值为 $a = \frac{2}{\pi}\arccos\frac{2}{\pi}$，$b$ 的最小值为 $b = 1/\sqrt{3}$，同时还成立

$$\cos x \leqslant (\cos x)(1 - \frac{x^2}{3})^{-1} \leqslant \sqrt[3]{\cos x} \leqslant \cos\frac{x}{\sqrt{3}} \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant \cos ax \leqslant \cos\frac{x}{2} \leqslant 1.$$

注 $\cos x \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant 1$，对于 $0 < x \leqslant \pi$ 仍成立.

6. **Gronwall 不等式**：设 $x \in R^1$，

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, g(x) = \frac{1 - \cos x}{x}, \text{则}$$

(1) $|f^{(n)}(x)| \leqslant \frac{1}{n+1}$，仅当 n 为偶数且 $x = 0$ 时等号成立.

(2) $|g^{(n)}(x)| \leqslant \frac{1}{n+1}$，仅当 n 为奇数且 $x = 0$ 时等号成立.

提示：先证明恒等式：

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{x^{n+1}}\int_0^x t^n \sin(t + \frac{n+1}{2}\pi)\mathrm{d}t, \quad g^{(n)}(x) = \frac{1}{x^{n+1}}\int_0^x t^n \sin(t + \frac{n\pi}{2})\mathrm{d}t.$$

([305]1920,27:81 ～ 85)

7. (1) 设 $0 < x < \pi$，则 $\sin\frac{x}{2} + \cos x < (\sin x)^{-1}$.

(2) 若 $0 \leqslant x \leqslant \pi$，则

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{5}(\cos x + 4 - (x^3/3))\\&(4 - 4\cos x - x^2)x^{-2}\end{aligned}\right\} \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant \left\{\begin{aligned}&\frac{1}{3}(2 + \cos x),\\&2(1 - \cos x)x^{-2}.\end{aligned}\right. \tag{1.4}$$

(3) 设 $0 < x < \frac{\pi}{2}$，$f(\alpha) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\alpha}$.

① 若 $\alpha \geqslant 1$，则

$$(1 - \lambda) + \lambda(\cos x)^{\alpha} < f(\alpha) < (1 - \eta) + \eta(\cos\alpha)^{\alpha} \tag{1.5}$$

成立的充要条件是 $\eta \leqslant \frac{1}{3}$ 和 $\lambda \geqslant 1 - \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\alpha}$.

② 若 $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{4}{5}$,则(1.5) 式成立的充要条件是 $\lambda \geqslant \frac{1}{3}$ 和 $\eta \leqslant 1 - \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\alpha}$.

③ 若 $\alpha < 0$,则 $f(\alpha) < (1-\eta) + \eta(\cos x)^{\alpha}$ 成立的充要条件是 $\eta \geqslant \frac{1}{3}$.

④ 设 $\alpha \geqslant 1$,则

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\alpha}\left\{1+\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha}-1\right](\cos x)^{\alpha}\right\} < f(\alpha) < \frac{2}{3}\left[1+\frac{1}{2}(\cos)^{\alpha}\right]. \tag{1.6}$$

若 $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{4}{5}$,则(1.6) 中两个不等号均反向. 若 $\alpha < 0$,则(1.6) 中右边不等式成立.(朱灵[164]32 ～ 41) 朱还提出问题:使(1.6) 式右边成立的 α 的最大范围是什么?

(4) 设 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $\alpha > 0$, 则

$$\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\alpha} < \left(\frac{1}{\cos \alpha}\right)^{\alpha} + 1 \quad ([164]33).$$

8. (1) 设 $0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}$,则

$$\left(\frac{\pi^2-4x^2}{\sqrt{\pi^4+48x^4}}\right)^{\frac{\pi^2}{6}} \leqslant \cos x \leqslant \left(\frac{\pi^2-4x^2}{\sqrt{\pi^4+48x^4}}\right)^{\frac{3}{4}}.$$

(2) 设 $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$,则

$$\left(\frac{\pi^2-4x^2}{\pi^2+4x^2}\right)^{\beta} \leqslant \cos x \leqslant \left(\frac{\pi^2-4x^2}{\pi^2+4x^2}\right)^{\alpha} \Leftrightarrow \alpha \leqslant \frac{\pi^2}{16},\ \beta \geqslant 1.$$

(朱灵等,[394]56(2008)522 ～ 529)

(3) 若 $x \neq 0$,则

$$1-\frac{1}{2}x^2 < \cos x < 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{x^4}{24},$$

若 $0 \leqslant x \leqslant \pi$,有 $\cos x < 1 - \frac{2}{\pi^2}x^2$;一般地,对于实数 x 有

$$\left|\cos x - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right| \leqslant \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!},$$

并且这个差具有 $(-1)^{n+1}$ 的符号.

(4) 设 a 为正数,$y \neq 0$,则

$$(a\cos x - y)^2 + (a\sin x - b^2/y)^2 \geqslant (\sqrt{2}\,|b| - a)^2.$$

提示:用复数证法. 令 $z_1 = a(\cos x + i\sin x)$,$z_2 = y + i\frac{b^2}{y}$.

再利用 $|z_1 - z_2| \geqslant |z_2| - |z_1|$.

9. 设 $0 < x < \pi/2$,则

(1) $1 < \cos^2 x + x\sin x < 2$;

(2) $\cos x + x\sin x > 1$;

(3) $1 < \sin x + \cos x \leqslant \sqrt{2}$.

注 $x>0$ 时,有 $\sin x+\cos x>1+x-x^2$.

(4) $\sin x \operatorname{tg} x>2(1-\cos x)$.

(5) [MCM] $\left(|a|+\frac{|b|}{\sin x}\right)\left(|b|+\frac{|a|}{\cos x}\right)\geqslant|a|^2+|b|^2+3|ab|$.

(6) 设 $0<p<1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,a,b>0$,则

$$a(\sin x)^{2/q}+b(\cos x)^{2/q}\geqslant(a^p+b^p)^{1/p},$$

仅当 $x=\operatorname{arctg}(\frac{a}{b})^{p/2}$ 时等号成立.

10. $-4\leqslant\cos 2x+3\sin x\leqslant 17/8$; $4\sin^2x-x\sin(2x)\leqslant 2x$. $(x\in R^1)$.

11. 设 $0<x<y<\pi/2$,则

(1) $\frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}y}<\frac{x}{y}<\frac{\sin x}{\sin y}<\frac{\pi}{2}(\frac{x}{y})$;

(2) $1-\left(\frac{\sin x}{\sin y}\right)^2<1-\left(\frac{x}{y}\right)^2<(\sec^2x)\left[1-\left(\frac{\sin x}{\sin y}\right)^2\right]$.

12. [MCM]. 设 $0\leqslant a\leqslant 1,0\leqslant x\leqslant\pi$,则

$$(2a-1)\sin x+(1-a)\sin(1-a)x\geqslant 0. \tag{1.7}$$

证 若 $a=0,1$ 及 $x=0,\pi$,(1.7) 式显然成立. 因此不妨设 $0<a<1,0<x<\pi$,而(1.7) 式可改写成

$$(1-2a)\sin x\leqslant(1-a)\sin(1-a)x.$$

此式很难用初等方法化简,可适当放大:

$$(1-2a)\sin x\leqslant(1-2a+a^2)\sin x=(1-a)^2\sin x.$$

问题变成要证

$$\frac{\sin x}{x}\leqslant\frac{\sin(1-a)x}{(1-a)x}.$$

因为 $(1-a)x<x$,所以,只要证 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 在 $(0,\pi)$ 内递减.

13. $|(1+\cos x)\sin x|\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

14. $\sqrt{3}|\sin x|\leqslant 2+\cos x$.

15. $|\sin x+(2/\sin x)|\geqslant 3$.

提示:令 $f(x)=\sin x+(2/\sin x)$,因为 $|f(x)|$ 为偶函数,所以可考虑 $0<x<\pi$,再令 $t=\sin x$,然后考虑 $g(t)=t+(2/t)$ 的单调性.

16. [MCU]. $x>0$ 时,$x^2+\pi x+(15/2)\pi\sin x>0$. (1988 年莫斯科大学入学试题)

17. [MCM]. 若对于已知数 a,b,不等式 $a\cos x+b\cos 3x>1$ 无解,则 $|b|\leqslant 1$.

18. $[\cos(\alpha+x)+\beta\cos x]^2\leqslant 1+2\beta\cos\alpha+\beta^2$.

19. $|\cos x|+|\cos 2x|\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$,仅当 $|\cos x|=\frac{1}{\sqrt{2}}$,即 $x=k\pi\pm\frac{\pi}{4}$ 时等号成立.

提示:令 $t=|\cos x|$,求 $f(t)=t+|2t^2-1|$ 的极值.

20.　$(x+1)\cos\dfrac{\pi}{x+1}-x\cos\dfrac{\pi}{x}>1\quad(x\geqslant\sqrt{3})$.

提示:$f(t)=\cos t$ 在原点附近作 Taylor 级数展开,变成要证

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\pi^{2k}}{(2k)!}\left(\frac{1}{x^{2k-1}}-\frac{1}{(x+1)^{2k-1}}\right)>0.$$

这只要证 $f_k(x)=x^{-(2k-1)}-x^{-(2k+1)}$ 当 $x\geqslant\sqrt{3}$ 时递减.

21.　若 $0\leqslant x^2+y^2\leqslant\pi$,则　$\cos x+\cos y\leqslant 1+\cos xy$.

证　由于 $\cos a=\cos(-a)$,所以不妨设 $x\geqslant 0,y\geqslant 0$. 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,$0\leqslant xy\leqslant y\leqslant\sqrt{\pi}<\pi$,$\cos y\leqslant\cos xy$,从而 $\cos x+\cos y\leqslant 1+\cos xy$;

当 $x>1,y>1$ 时,用反证法,即设

$$\cos x+\cos y>1+\cos xy,\tag{1.8}$$

由于 $0\leqslant xy\leqslant(x^2+y^2)/2\leqslant\pi/2$,故 $\cos(xy)\geqslant 0$. 从而 $\cos x+\cos y>1$,即 $\cos x>1-\cos y>1-\cos 1>0.45$, 所以,$x<\arccos 0.45<1.2$. 同理可证 $y<1.2$. 于是 $xy<1.44$. 从而　$1+\cos xy>1+\cos 1.44>1.13>2\cos 1>\cos x+\cos y$. 这与(1.8)矛盾,证毕.

22.　[MCU]. 设 α,β 为实数,且 $\cos\alpha\neq\cos\beta$,则对于所有 $n>1$,有

$$\left|\frac{\cos n\beta\cos\alpha-\cos n\alpha\cos\beta}{\cos\beta-\cos\alpha}\right|<n^2-1.$$

提示:令 $x=\dfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$,$y=\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$,则不等式左边可化为

$$\left|\frac{\sin(n-1)x\sin(n+1)y+\sin(n+1)x\sin(n-1)y}{2\sin x\sin y}\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left\{\left|\frac{\sin(n-1)x}{\sin x}\right|\cdot\left|\frac{\sin(n+1)y}{\sin y}\right|+\left|\frac{\sin(n+1)x}{\sin x}\right|\cdot\left|\frac{\sin(n-1)y}{\sin y}\right|\right\},$$

再利用 $|\sin nx|\leqslant n|\sin x|$.

23.　设 α,β 为实数,m,n 为自然数,则

$$\left|\frac{\cos m\alpha\cos n\beta-\cos m\beta\cos n\alpha}{\cos\beta-\cos\alpha}\right|\leqslant|m^2-n^2|.$$

特别,取 $m=0$,即得 **Goodman 不等式**:

$$\left|\frac{\cos n\alpha-\cos n\beta}{\cos\alpha-\cos\beta}\right|\leqslant n^2.$$

24.　设 $0<|x|<\pi$,$|\alpha-\beta|<\dfrac{1}{2}$,则

$$\left|\frac{\sin\alpha x}{2\sin(x/2)}-\frac{\sin\beta x}{x}\right|<1.$$

25.　设 $\dfrac{\pi}{n}\leqslant x\leqslant\pi-\dfrac{\pi}{n}$,$n\geqslant 3$,则

$$\frac{1}{3}\sin x+\frac{1}{2n}\sin nx>0.$$

26.　(1)　若 $x\geqslant 1$,则

$$\sin\frac{1}{x-1}-2\sin\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x+1}>0.$$

(2)　设 $x>0$,则

$$x^2+\pi x+\frac{15}{2}\pi\sin x>0.$$

提示:利用 $f(x)=\sin(1/x)$ 在$[1,\infty)$上的凸性,从而可用 Jensen 不等式.

27.　设 $0<x<\sqrt{\pi/2}$,则　$(\sin x)^2<\sin x^2$.

28.　设 $0<x\leqslant 1$,则　$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2<\frac{\sin x}{x}\leqslant\frac{\sin(x^2)}{x^2}$.

提示:左边不等式从 $0<\sin x/x<1$ 两边乘 $\sin x/x$ 得到,右边不等式利用 $f(x)=(\sin x)/x$ 的递减性,从 $x^2<x$ 得出 $f(x)\leqslant f(x^2)$.

29.　对于所有实数 x,有$(\cos x)^2\geqslant 1-x^2$.

30.　设 $|x|<\sqrt{2n}$,则$(\cos\frac{x}{n})^n>1-\frac{x^2}{2n-x^2}$.

31.　设当 $0\leqslant\alpha\leqslant 2^n x$ 时,$\cos\alpha>0$,则 $\cos(2^{n+1}x)<2^n(\cos x-1)+1$.

32.　[MCM] 对所有实数 x,y,有 $\cos(x+y)+2(\cos x+\cos y)+3\geqslant 0$.

提示:令 $\alpha=(x+y)/2,\beta=(x-y)/2$,不等式左边 $=[(1+\cos\alpha)^2+(1-\cos\alpha)^2](1-\cos\beta)$.

33.　设 $0<x<\pi/2$,则 $\sqrt{\cos x}<\cos\frac{x}{\sqrt{2}}$.

34.　**Kober 不等式**:若 $0<x<\pi/2$,则

$1-\frac{2}{\pi}x<\cos x<1-\frac{x^2}{\pi}$. 若 $\pi/2<x<\pi$,则左边不等号反向.([309]1944,56:22)

祁锋改进为

$1-\frac{4-\pi}{\pi}x-\frac{2(\pi-2)}{\pi^2}x^2\leqslant\cos x\leqslant 1-\left(\frac{2x}{\pi}\right)^2$.(工科数学,12(1996),98～101)

35.　[MCM]. 设 $f(x)=(1+r^2+2r\cos x)^{p/2}+(1+r^2-2r\cos x)^{p/2}$,则当 $r>0$,$p\geqslant 2$ 时,对所有实数 x,成立 $f(x)\leqslant f(0)$.([345]1987,1:35)

36.　$5+8\cos x+4\cos 2x+\cos 3x\geqslant 0$.

提示:左边可配方得$(1+\cos x)(1+2\cos x)^2$.

37.　$3+4\cos x+\cos 2x\geqslant 0$.

提示:除了求 $f(x)=3+4\cos x+\cos 2x$ 的极值外,还可用复数的指数形式证明.

38.　[MCM]. 设 $0<x<\frac{\pi}{2}$,则

$[1+(\sin x)^{-1}][1+(\cos x)^{-1}]\geqslant 3+2\sqrt{2}>5$. 仅当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时等号成立.

提示:只要证$(\sin x)^{-1}+(\cos x)^{-1}\geqslant 2\sqrt{2}$.([38]1 364)

39.　$[(\sin x)^{-2n}-1][(\cos x)^{-2n}-1]\geqslant(2^n-1)^2$.

40.　[MCM]. 若 $0<x<\pi/2$,则

$$\sin(\cos x) < \cos x < \cos(\sin x).$$

证　因为 $0 < x < \pi/2$，所以，$0 < \sin x < x < \pi/2$，又 $\cos x$ 在 $(0,\pi/2)$ 上递减，所以，$\cos x < \cos(\sin x)$. 而由　$0 < \cos x < 1$，又得 $\sin(\cos x) < \cos x$.

41.　对于所有实数 x，有

(1)　$1-(x^2/2) < \sin(\cos x) < \cos(\sin x)$.

(2)　$2\sin^2(\pi/4-(\sqrt{2}/2)) \leqslant \cos(\sin x)-\sin(\cos x) \leqslant 2\sin^2(\pi/4+(\sqrt{2}/2))$.

(3)　$\cos(\cos x) > 0$.

(4)　对于任意实数 $x_k(1 \leqslant k \leqslant n)$，有 $\sin(\prod \sin x_k) < \cos(\prod \cos x_k)$.（数学教学，1990,3:38）

42.　[MCM]. $|\sin nx| \leqslant n|\sin x| \leqslant n|x|$，
左边不等式仅当 $n=1$ 或 $\sin x=0$ 时等号成立.

提示：左边不等式可用数学归纳法证明. 而 $|\sin x| \leqslant |x|$ 对所有实数 x 均成立.

注　当 n 不是自然数时，左边不等式不一定成立. 例如，$n=1/2$，$x=\pi$ 时，有

$$|\sin(1/2)\pi| > (1/2)|\sin\pi|.$$

43.　若 $0 < x < 1$，$x \neq \frac{1}{2}$，则　$\pi < \frac{\sin\pi x}{x(1-x)} < 4$.

44.　设 $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin\pi x}{\pi x}, & x \neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$

若 $a>1$，$0<\lambda<\ln a$，n_0 满足 $a^{n_0} > \frac{1}{2(\ln a-\lambda)}$，整数 m_k 满足 $m_k-\frac{1}{2} \leqslant a^k < m_k+\frac{1}{2}$ $(k>n_0)$，则

$$|f(a^n-m_k)| < \begin{cases}\frac{1}{\pi}(a^k\ln a-\frac{1}{2})^{-1}, (n>k)\\ \frac{1}{\pi\lambda a^n}. \qquad (n_0 \leqslant n < k)\end{cases}$$ （证明见[73]510 ～ 513）

45.　若 $0<\alpha<\pi/2$，$0<\beta<\pi/2$，则

(1)　[MCM] $(\cos\alpha)^{-2}+(\sin\alpha\sin\beta\cos\beta)^{-2} \geqslant 9$.

仅当 $\beta=\pi/4$，$\alpha=\operatorname{arctg}\sqrt{2}$ 时等号成立.

证　不等式左边 $=(\cos\alpha)^{-2}+4(\sin\alpha\sin2\beta)^{-2} \geqslant (\cos\alpha)^{-2}+4(\sin\alpha)^{-2}=1+\operatorname{tg}^2\alpha+4(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)=5+\operatorname{tg}^2\alpha+4\operatorname{ctg}^2\alpha=5+2(\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\alpha+\frac{2}{\operatorname{tg}^2\alpha}) \geqslant 5+2\times2\times\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\operatorname{tg}\alpha}=5+4=9$.

上式可推广为：设 $0<\alpha_k<\pi/2$，$1 \leqslant k \leqslant n$，则

$$(\cos\alpha_1)^{-2}+\left[(\sin\alpha_1)\prod_{k=2}^{n}\sin\alpha_k\cos\alpha_k\right]^{-2} \geqslant (2n-1)^2.$$

(2)　$\frac{(\sin\alpha)^{p+2}}{(\sin\beta)^p}+\frac{(\cos\alpha)^{p+2}}{(\cos\beta)^p} \geqslant 1$，仅当 $\alpha=\beta$ 时等号成立，式中 $p>0$.

(3) $\sin^3\alpha + (\cos\alpha\cos\beta)^3 + (\cos\alpha\sin\beta)^3 \geqslant \sqrt{3}/3$,

$\cos^3\alpha + (\sin\alpha\sin\beta)^3 + (\sin\alpha\cos\beta)^3 \geqslant \sqrt{3}/3$.

(4) [MCM]. $\cos(\alpha+\beta) < \cos\alpha + \cos\beta$; $\sin(\alpha+\beta) < \sin\alpha + \sin\beta$.

实际上这两个不等式对所有实数 α,β 均成立. 而当 α,β 为非负数且 $\alpha+\beta \leqslant 2\pi$ 时,则有

$$0 \leqslant \sin\alpha + \sin\beta - \sin(\alpha+\beta) \leqslant 3\sqrt{3}/2.$$

(5) $\dfrac{\cos\alpha - 1}{\cos\alpha + 1} < \dfrac{\cos\alpha - \cos\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} < \dfrac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}$.

证 左边不等式可从 $\cos\alpha - 1 < \cos\alpha - \cos\beta, \cos\alpha + 1 > \cos\alpha + \cos\beta > 0$ 推出,而右边不等式可利用 $\cos\alpha - 1 < 1 - \cos\alpha$ 和 $\cos\beta > 0 \Rightarrow (\cos\alpha - 1)\cos\beta < (1-\cos\alpha)\cos\beta$. 两边各加上 $\cos\alpha - \cos^2\beta$ 即可得证.

46. 设 $0 < x < \pi/4$,则

$$\frac{\cos x}{8\sin^2 x(\cos x - \sin x)} > 1.$$

提示:左边可化为 $(1/8)[\mathrm{tg}x + (\mathrm{tg}x)^{-1}] \cdot [\mathrm{tg}x(1-\mathrm{tg}x)]^{-1}$,
再对这两个因式分别用几何一算术平均不等式.

47. 设 $0 < \alpha < \pi/2, 0 < \beta < \pi$,则 $\cos\alpha\sin\dfrac{\beta}{2} < \sin(\dfrac{\beta}{2}\cos\alpha)$.

提示:利用 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ 在$(0,\dfrac{\pi}{2}]$ 内严格递减.

48. 设 $|x| \leqslant \pi$,则

$$-1 \leqslant \sin x + \cos x + \sin x\cos x \leqslant \frac{1}{2}(1+2\sqrt{2}).$$

49. [MCM]. $\sin^2\alpha + \sin^2\beta \geqslant \sin\alpha\sin\beta + \sin\alpha + \sin\beta - 1$.

证 将以下三个不等式: $\sin^2\alpha + \sin^2\beta \geqslant 2\sin\alpha\sin\beta, \sin^2\alpha + 1 \geqslant 2\sin\alpha, \sin^2\beta + 1 \geqslant 2\sin\beta$,相加即可得证.

50. $\sin^2\alpha + \sin^2\beta \geqslant 2(\sin\alpha + \sin\beta - 1)$.

提示:左边减去右边得 $(\sin\alpha - 1)^2 + (\sin\beta - 1)^2 \geqslant 0$.

51. $\cos 2\alpha + \cos 2\beta \leqslant \cos^2\alpha + \cos^2\beta < 3 + \cos(\alpha\beta)$.

提示: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta - (\cos 2\alpha + \cos 2\beta) = \sin^2\alpha + \sin^2\beta \geqslant 0$

第二个不等式可用反证法.

52. $\cos\alpha\cos\beta \leqslant 1 + \sin\alpha\sin\beta$.

53. [MCM]. 若 $0 \leqslant x \leqslant \pi/2, 0 < p < 1$,则 $p\cos x \leqslant \cos(px)$.

54. $\sin x + \sin y + \sin(x+y) \leqslant 3\sqrt{3}/2$.

仅当 $\sin x = \sin y = \sin(x+y) = \sqrt{3}/2$ 时等号成立.

55. (1) 设 $f(x) = \dfrac{6\cos x + \sin x - 5}{2\cos x - 3\sin x - 5}$,则 $-\dfrac{1}{3} \leqslant f(x) \leqslant 3$.

证 作万能代换 $t = \mathrm{tg}(x/2)$,则 $y = f(x)$ 化为代数方程

$$y = g(t) = (11t^2 - 2t - 1)/(7t^2 + 6t + 3),$$

即 $(7y-11)t^2+2(3y+1)t+(3y+1)=0$.
因为 t 为实数,所以判别式 $\Delta\geqslant 0$,解之得 $-1/3\leqslant y\leqslant 3$.

类似地,可以证明以下常见的不等式:

(2) $\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}\leqslant\dfrac{2-\sin x}{2-\cos x}\leqslant\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}$.

(3) $\dfrac{1+a}{1-a}\leqslant\dfrac{\cos x+a}{\cos x-a}<\dfrac{1-a}{1+a}$,$(a>0)$.

(4) $\dfrac{b-a}{b+a}\leqslant\dfrac{b+a\sin\theta}{b-a\sin\theta}<\dfrac{b+a}{b-a}$,$(0<a<b)$.

(5) $0\leqslant\dfrac{1+\sin x}{2-\cos x}\leqslant\dfrac{4}{3}$.

(6) $f(x)=\dfrac{a\cos x+b\sin x+c}{p\cos x+q\sin x+r}$ 等可作类似讨论.

56. 设 $x,y>0$,$x+y\leqslant\pi$,$-1\leqslant a\leqslant 1$,则

$$(\sin a\pi)^2\leqslant\cos^2ax+\cos^2ay-2\cos ax\cos ay\cos a\pi\leqslant 4\left(\sin(\frac{a\pi}{2})\right)^2.$$

([344]33(10)(2003),110 ~ 115)

注　左边不等式杨乐、华罗庚等给出了不同的证明.

57. 设 $f(x,y)=\dfrac{\sin(x+y)-4\sin x+\sin(x-y)}{\cos(x+y)-4\cos x+\cos(x-y)}$,$0<x<\dfrac{\pi}{4}$.
则对于任何实数 y,有 $0<f(x,y)<1$.

提示:运用三角恒等变换,得 $f(x,y)=\mathrm{tg}x$.

58. 设 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$,$0<x\leqslant\pi/3$,$f(x,\alpha)=1-2\alpha\cos x+\alpha^2$,则

(1) $\sin^2x\leqslant f(x,\alpha)\leqslant 1$.

(2) $\dfrac{3}{4}\leqslant\dfrac{f(x,\alpha)}{2(1-\cos x)}\leqslant(\sin x)^{-2}$.

59. 设 $0\leqslant x<1$,则

$\dfrac{(1+x^2)\cos\alpha-2x}{1-x^2}\leqslant\dfrac{(1-x^2)\cos\alpha+2x\sin\alpha\sin\beta}{1-2x\cos\beta+x^2}$.([308]1965,16:847 ~ 852)

60. 设 $0<\alpha\leqslant\dfrac{1}{2}$,$0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$,令 $f(x,\alpha)=\dfrac{x(1+\alpha\cos x)}{\sin x}$,则

$$\alpha+1\leqslant f(x,\alpha)\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

61. (1) 设 $0\leqslant x\leqslant\pi/4$,$0\leqslant y\leqslant\pi/4$,则

$$0\leqslant\sin x+\sin y+\cos(x+y)\leqslant 3/2.$$

仅当 $x=y=\pi/6$ 时等号成立.

(2) 设 $x,y>0$,$x+y<\pi$,$\alpha\in R^1$,则 $\sin x\sin y\sin(x+y)\leqslant 3\sqrt{3}/8$;

$$\alpha(\alpha-1)\sin(x+y)+\alpha[(\sin x)^2-\sin y]+\sin y>0.$$

(3) 设 $x_k=\dfrac{2k-1}{2n}\pi$,$1\leqslant k\leqslant n$. $0<x<\pi$,则

$$\left|\frac{\cos nx}{\cos x - \cos x_k}\right| \sin x_k \leqslant 2n.\ (\text{Fejer. }1916)$$

提示：因为 $\cos nx_k = 0$，所以，$|\cos nx| = |\cos nx - \cos nx_k| \leqslant 2\left|\sin\frac{n(x_k - x)}{2}\right|$，再利用 $|\cos x - \cos x_k| = 2\left|\sin\frac{x_k + x}{2}\sin\frac{x_k - x}{2}\right|$ 和 $|\sin nx| \leqslant n|\sin x|$ 即可得证.

62. [IMO]. 设 $f(x) = 1 - a\cos x - b\sin x - A\cos 2x - B\sin 2x \geqslant 0$，则

$$a^2 + b^2 \leqslant 2, A^2 + B^2 \leqslant 1.$$

证 1 令 $r = \sqrt{a^2 + b^2}, R = \sqrt{A^2 + B^2}$，

$$\cos\alpha = \frac{a}{r}, \sin\alpha = \frac{b}{r}, \cos 2\beta = \frac{A}{R}, \sin 2\beta = \frac{B}{R}, \text{则}$$

$$f(x) = 1 - r\cos(x - a) - R\cos 2(x - \beta).$$

考虑 $f(a + (\pi/4))$ 和 $f(\alpha - (\pi/4))$，可证 $a^2 + b^2 \leqslant 2$；考虑 $f(\beta + \pi)$ 和 $f(\beta)$，可证 $A^2 + B^2 \leqslant 1$.

证 2 用反证法：设 $a^2 + b^2 > 2$，取一个特殊的 x_0，使 $f(x_0) < 0$，这只要当 $\sin 2(\alpha - \beta) \geqslant 0$ 时，取 $x_0 = \alpha - (\pi/4)$ 而当 $\sin 2(\alpha - \beta) < 0$ 时，取 $x_0 = \alpha + (\pi/4)$. 同理，设 $A^2 + B^2 > 1$，取 $x_0 = \beta$ 或 $\pi + \beta$ 使 $f(x_0) < 0$. 这些都与假设矛盾.

63. 设 $f(x) = a\cos^2 x + 2b\cos x\sin x + c\sin^2 x$，则

$$\frac{1}{2}(a + c) - \sqrt{b^2 + \left(\frac{a - c}{2}\right)^2} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2}(a + c) + \sqrt{b^2 + \left(\frac{a - c}{2}\right)^2}.$$

记 $\cos\beta = \dfrac{a - c}{\sqrt{4b^2 + (a - c)^2}}$，$\sin\beta = \dfrac{2b}{\sqrt{4b^2 + (a - c)^2}}$，

则仅当 $2x = \beta$ 时. 右边的等号成立，而仅当 $2x = \beta + \pi$ 时，左边的等号成立（除去 $b = 0$，$a = c$ 的情形）.

提示：将 $f(x)$ 变形为 $f(x) = \frac{1}{2}(a + c) + b\sin 2x + \frac{1}{2}(a - c)\cos 2x$.

64. **Makouski 不等式：**若 x, y, α 为实数，$c > 0$，则

$$(x - y)^2\sin\alpha + (x + y)^2\cos\alpha \leqslant (1 + c|\cos 2\alpha|)x^2 + \left(1 + \frac{1}{c}|\cos 2\alpha|\right)y^2$$

$$\leqslant (1 + c)x^2 + (1 + c^{-1})y^2.$$

65. $|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|$，$|\cos x - \cos y| \leqslant |x - y|$.

66. 设 $0 \leqslant x, y \leqslant \pi$，则 $|\cos x - \cos y| \geqslant |x - y|\sqrt{\sin x\sin y}$.

67. (1) 设 $a, b, c > 0$ 且 $a\cos^2 x + b\sin^2 x < c$，则 $\sqrt{a}\cos^2 x + \sqrt{b}\sin^2 x < \sqrt{c}$.

(2) $|a\cos\beta x + b\sin\beta x| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}$.

68. $0 < (\sin x)^8 + (\cos x)^{14} \leqslant 1$.

69. $\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant (\sin x)^3 + (\cos x)^3 \leqslant 1$，$\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$.

提示：令 $t = \sin x + \cos x$，则 $1 \leqslant t \leqslant \sqrt{2}$.

$$f(x)=(\sin x)^3+(\cos x)^3=t\left[1-\frac{1}{2}(t^2-1)\right]=g(t),$$

求 $g(t)$ 在 $[1,\sqrt{2}]$ 上的最大最小值，

70.　$2^{1-n}\leqslant(\sin x)^{2n}+(\cos x)^{2n}\leqslant 1,\ n\in N$:

提示：用数学归纳法证明.

71.　当 x 为锐角，$n>2$ 时，有 $(\sin x)^n+(\cos x)^n<1$.

72.　$(\sin x\cos x)^4\leqslant(\sin x)^{10}+(\cos x)^{10}$.

73.　设 $0\leqslant x_k\leqslant\pi(1\leqslant k\leqslant n)$ 且 $\sum x_k=\pi$，则

$$\sum(\sin x_k)^2\leqslant\begin{cases}0, & n=1,\\ 2, & n=2,\\ 9/4, & n\geqslant 3.\end{cases}$$

提示：令 $y_k=2x_k$，则 $\sum y_k=2\pi,0\leqslant y_k\leqslant 2\pi$，问题转化为求 $(n-\sum\cos y_k)/2$ 的最大值. 当 $n\geqslant 4$ 时，由条件知，不妨设 $y_1+y_2\leqslant\pi$，于是，

$$\begin{aligned}\cos y_1+\cos y_2&=2\cos\frac{y_1+y_2}{2}\cos\frac{y_1-y_2}{2}\\&\geqslant 2\left[\cos\frac{y_1+y_2}{2}\right]^2=\cos 0+\cos(y_1+y_2).\end{aligned}$$

于是总可设 $y_1=0$，由逐步调整原理，转化为 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 中至多只有三个不为零.

74.　$(\sin x)^m(\cos x)^n\leqslant\frac{1}{2}$.

提示：利用几何 — 算术平均不等式.

75.　设 $p>0,q>0,0<x\leqslant\pi/2$，则

$$0\leqslant(\sin x)^p(\cos x)^q\leqslant\left(\frac{p^pq^q}{(p+q)^{p+q}}\right)^{1/2}.$$

提示：令 $\alpha=\frac{p}{p+q},\beta=\frac{q}{p+q}$，则 $\alpha+\beta=1.0<\alpha,\beta<1$，利用 $f(x)=\ln x$ 在 $(0,\infty)$ 内的凸性，令 $x_1=\frac{1}{p}\sin^2x,x_2=\frac{1}{q}\cos^2x$，代入 Jensen 不等式：$\alpha f(x_1)+\beta f(x_2)\leqslant f(\alpha x_1+\beta x_2)$. 即可得证. 不等式右边的等号仅当 $x_1=x_2$ 时成立.

76.　[MCM]. 设 x,y 为正数. α 为实数，则

$$x^{(\sin\alpha)^2}y^{(\cos\alpha)^2}<x+y.$$

77.　设 $0<A,B,C<\frac{\pi}{2}$，则

(1)　[MCM]. 若 $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=1$，则

$$\frac{\pi}{2}<A+B+C\leqslant 3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant\frac{3\pi}{4}.\ ([38]1360)$$

(2)　若 $\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=1$，则　$\frac{3\pi}{4}<A+B+C<\pi$.

提示：为证(1)，可作一长方体，利用三面角中两个面角之和大于第三个面角. (2) 的

证明与(1)类似.([350]1983,2:30 ~ 31)

78. [MCM].设 $0<x<\pi/2$,则

$$(2n+1)(\sin x)^n(1-\sin x)<1-(\sin x)^{2n+1}.$$

提示:因为 $0<\sin x<1$,所以,当 $k\leqslant n$ 时,有 $(\sin x)^{2n-k}+(\sin x)^k>2(\sin x)^n$,依次令 $k=0,1,\cdots,n-1$,然后相加即得.

79. 设 $0<\alpha_k<\pi,k=1,\cdots,n$,则

(1) $|\sin(\sum\alpha_k)|<\sum\sin\alpha_k\leqslant n\sin(\frac{1}{n}\sum\alpha_k)$.

(2) $\sum\cos\alpha_k\leqslant n\cos(\frac{1}{n}\sum\alpha_k)$.

(3) [MCM]. $(\prod\sin\alpha_k)^{1/n}\leqslant\sin(\frac{1}{n}\sum\alpha_k)$.

(4) $(\prod\cos\alpha_k)^{1/n}\leqslant\cos(\frac{1}{n}\sum\alpha_k)$.

(5) [MCU] $\left(\prod(\frac{\sin\alpha_k}{\alpha_k})\right)^{1/n}\leqslant\dfrac{\sin(\frac{1}{n}\sum\alpha_k)}{\frac{1}{n}(\sum\alpha_k)}$.

以上均仅当 $a_1=\cdots=a_n$ 时等号成立.

提示:用数学归纳法或用凸函数 Jensen 不等式.例如为证(5),可考虑 $g(x)=\ln\frac{\sin x}{x}$ 在 $(0,\pi)$ 上的凸性,也可用逐步调整法.

注 $\alpha_k=\frac{1}{k}$ 时,有 $\prod_{k=2}^{n}\cos\frac{1}{k}>\frac{2}{3}$.

80. 设 $0<x<\pi/2$,则 $(\sin x)^{1-\cos 2x}+(\cos x)^{1+\cos 2x}\geqslant\sqrt{2}$.

提示:考虑 $f(x)=x^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上的凸性,有

$$(\sin^2x)^{\sin^2x}+(\cos^2x)^{\cos^2x}\geqslant 2A^A,\text{式中 } A=\frac{\sin^2x+\cos^2x}{2}.$$

81. 若 $0<x<\pi/4$,则

$$(\sin x)^{\cos x}<(\cos x)^{\sin x}.$$

当 $\pi/4<x<\pi/2$ 时,不等号反向,即 $(\cos x)^{\sin x}<(\cos x)^{\cos x}<(\sin x)^{\cos x}$.

提示:$f(x)=(\sin x)^{\cos x}$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上递增.

82. $(\sin x)^{\sin x}<(\cos x)^{\cos x},0<x<\frac{\pi}{4}$.([305]1992,9:873)

83. 设 $0<x<\pi/4$,则 $\sin x<\cos x<\operatorname{ctg}x$.

84. 当 $0<x<\pi/4$,有

$$\sin x+\cos x<\operatorname{tg}x+\cos x<\operatorname{ctg}x+\sin x<\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x;$$

而当 $\pi/4<x<\pi/2$ 时,有

$$\sin x+\cos x<\operatorname{ctg}x+\sin x<\operatorname{tg}x+\cos x<\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x.$$

85. [MCM]. 设非负数 α,β,γ 之和为 $\pi/2$，则

$$1 \leqslant \cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma) \leqslant 3(\sqrt{3}-1)/2.$$

提示：利用 $\cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{2}\cos(\alpha+(\pi/4))$，将中间表达式化为

$$\sqrt{2}[\cos(\alpha+\pi/4)+2\sin(\alpha/2)\cos((\beta-\gamma)/2)].$$

或者由于 α,β,γ 的对称性，用局部固定法求中间表达式的极值，将中间表达式记为 y. 则

$$y=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\cos\gamma-\sin\gamma.$$

从 $0 \leqslant (\alpha+\beta)/2 \leqslant \pi/4$，知 $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \geqslant 0$.

所以固定 γ，当 $\alpha=\beta$ 时，$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=1$，$y$ 有最大值，由 α,β,γ 的对称性，当 $\alpha=\beta=\gamma=\pi/6$ 时，y 有最大值 $3(\sqrt{3}-1)/2$. 同理可证 $y \geqslant 1$.

86. $2\sqrt{3} \leqslant 3^{\sin 2x}+3^{\cos 2x}<4,\quad 0<x<\pi/2.$

87. [MCM]. $|\sin x|+|\sin(x+1)|+|\sin(x+2)|>8/5.$
从而可以证明

$$\sum_{k=1}^{3n}|\sin k|>8n/5.$$

88. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sin kx}{k}\right)^2<3x,(x>0).$

证 $\forall x>0$，取 n 满足 $n-1<\frac{1}{x} \leqslant n$. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sin kx}{k}\right)^2=\sum_{k=1}^{n-1}+\sum_{k=n}^{\infty}=I_1+I_2$，
利用 $|\sin x| \leqslant |x|$，得到

$$I_1 \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{kx}{k}\right)^2=(n-1)x^2<x;\quad I_2 \leqslant \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2}<\frac{2}{n} \leqslant 2x.$$

89. 若 $b_0 \geqslant b_1 \geqslant \cdots \geqslant b_n$，则对于 $0<x<\pi$，及所有实数 α,β，有

$$-b_0\sin^2\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{x}{2} \leqslant \left(\sin\frac{\beta}{2}x\right)\sum_{k=0}^{n}b_k\sin(k\alpha+\beta)x \leqslant b_0\cos^2\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{x}{2}.$$

90. $\sum_{j<k}^{n}\cos(a_j-a_k) \geqslant -\frac{n}{2}.$

实际上，我们可以证明更一般的不等式：设 $a_k,x_k(1 \leqslant k \leqslant n)$ 都是任意实数，则

(1) $\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\cos(a_k-a_j) \geqslant 0$，

(2) $\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_kx_j\cos(a_k-a_j)=\left(\sum x_k\cos a_k\right)^2+\left(\sum x_k\sin a_k\right)^2 \geqslant 0.$

91. [MCU]. (1) 设 $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$，则

$$\prod_{k=0}^{n}(\sin 2^k x)^2 \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

提示：用归纳法证明

$f(x)=|(\sin x)^2(\prod_{k=1}^{n-1}\sin 2^k x)^3\sin(2^n x)|$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处有极大值.([66]432)

92. (1) 设 $\alpha(k)=(2/3)[1-\frac{1}{2}^k]$, $\beta(k)=1-\alpha(k)/2$, $g(x)=\sin x(\sin 2x)^{1/2}$,

$$f(x)=\prod_{k=1}^{n-1}[g(2^{k-1}x)]^{\alpha(k)}[\sin(2^n x)]^{\beta(k)}. \tag{1.9}$$

则

$$|f(x)|\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}f(\frac{\pi}{3}). \tag{1.10}$$

由此推出,当(1.9)式中 $f(x)$ 换成 $f(x)=\prod_{k=0}^{n}\sin(2^k x)$ 时,(1.10)式仍成立.

(2) 设 $x_k, y_k\in[0,\frac{1}{2}]$,则

$$|\prod_{k=1}^{n}\sin x_k-\prod_{k=1}^{n}\sin y_k|\leqslant 1-(\frac{1}{2})^n;\ |\prod_{k=1}^{n}\cos x_k-\prod_{k=1}^{n}\cos y_k|\leqslant 1-(\frac{3}{4})^n.$$

([345]1993,12:49)

(3) 设 $x,y,z\in R^1$,则

$(\sin x)^2\cos y+(\sin y)^2\cos z+(\sin z)^2\cos x<\frac{3}{2}$.(1993 年全俄 19 届数学竞赛试题)

陈计将上界改进为$\frac{5}{4}$,仅当$(\cos x,\cos y,\cos z)=(1,0,\frac{1}{2})$,或$(0,\frac{1}{2},1)$,或$(\frac{1}{2},1,0)$时等号成立,并推广为:$\forall x_k\in R^1$. $n\geqslant 2$,下式成立

$$\sum_{k=1}^{n}(\sin x_k)^2\cos x_{k+1}\leqslant\frac{n}{2}.$$

式中 $x_{n+1}=x_1$,且当 n 为奇数时不等号是严格的.([345]1995,9:28 ~ 29)

(4) 设 $x,y\geqslant 0$, $x+y=\alpha$, $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$. $f(x,y)=(\sin x)^2+(\sin y)^2+2C\sin x\sin y$. 则当 $C\geqslant\cos\alpha$ 时,

$$(\sin\alpha)^2\leqslant f(x,y)\leqslant(1+C)(1-\cos\alpha).$$

而当 $C<\cos\alpha$ 时,以上不等号全部反向.

提示:$f(x,y)$ 的表达式可变形为

$f(x,y)=(\sin\alpha)^2+2(C-\cos\alpha)\sin x\sin y=(\sin\alpha)^2+(C-\cos\alpha)[\cos(x-y)-\cos(x+y)]$.([371]1992,65(5):349,354)

93. 设 $0<\beta-\alpha<\pi$,则

$$\max_{\alpha\leqslant x\leqslant\beta}|1+\alpha\cos x+\beta\sin x|\geqslant(\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{4})^2.$$

94. [MCM].若 $0<x<\pi/6$,则 $\sum_{k=1}^{n}(\sin x)^{2k-1}+\sum_{k=1}^{n}(\operatorname{tg}x)^{2k}<\frac{7}{6}$.

95. 设 $0<x_1<\cdots<x_n<\pi/2$,则

$$\operatorname{tg}x_1<\frac{\sum\sin x_k}{\sum\cos x_k}<\operatorname{tg}x_n.$$

提示：利用在$(0,\frac{\pi}{2})$内 $\sin x$ 严格递增和 $\cos x$ 严格递减，有

$n\sin x_1 < \sum\sin x_k < n\sin x_n$；$n\cos x_1 > \sum\cos x_k > n\cos x_n$.

96.　若 $\prod_{k=1}^{n}\mathrm{tg}\alpha_k = 1$，则　$\prod_{k=1}^{n}\sin\alpha_k \leqslant 2^{-n/2}$，

仅当 $\alpha_k = \frac{\pi}{4}$　$(k = 1,\cdots,n)$ 时等号成立.

证　从假设，$\prod\sin\alpha_k = \prod\cos\alpha_k$. 所以，$(\prod\sin\alpha_k)^2 = \prod(\sin\alpha_k\cos\alpha_k) = 2^{-n}(\prod\sin 2\alpha_k) \leqslant 2^{-n}$.

97.　设 $0 < \alpha,\beta,\gamma < \pi/2$，则

(1)　$\mathrm{tg}\alpha(\mathrm{ctg}\beta+\mathrm{ctg}\gamma)+\mathrm{tg}\beta(\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\gamma)+\mathrm{tg}\gamma(\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta) \geqslant 6$.

提示：不等式左边 $= (\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{tg}\beta}+\frac{\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}\alpha})+(\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{tg}\gamma}+\frac{\mathrm{tg}\gamma}{\mathrm{tg}\alpha})+(\frac{\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}\gamma}+\frac{\mathrm{tg}\gamma}{\mathrm{tg}\beta}) \geqslant 3\times 2 = 6$.

(2)　$\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^2\beta+\mathrm{tg}^2\gamma \geqslant \mathrm{tg}\beta\mathrm{tg}\gamma+\mathrm{tg}\gamma\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta$.

(3)　若加上条件 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 1$，则

$$\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\gamma > \mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta+\mathrm{ctg}\gamma,$$

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma < \cos(\alpha-\beta)+\cos(\beta-\gamma)+\cos(\gamma-\alpha).$$

([345]1989,6:32)

(4)　若加上条件$(\sin\alpha)^3+(\sin\beta)^3+(\sin\gamma)^3 = 1$，则

$$\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^2\beta+\mathrm{tg}^2\gamma \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

98.　若 $0 < \alpha_k \leqslant \pi/2, 1 \leqslant k \leqslant n, n \geqslant 3$，且 $\sum_{k=1}^{n}\cos^2\alpha_k = 1$，则

$$\sum\mathrm{tg}\alpha_k \geqslant (n-1)\sum\mathrm{ctg}\alpha_k.$$ ([305]1982,89:601)

99.　[MCM]. 设 $0 < x < \pi$，则　$2\sin 2x \leqslant \mathrm{ctg}(x/2)$.

仅当 $x = \pi/3$ 时等号成立.

100.　**Djokovic 不等式**：设 $0 < x < \pi/6$，则

$$x+\frac{1}{3}x^3 < \mathrm{tg}x < x+\frac{4}{9}x^3.$$

注　左边的不等式对于$0<x<\pi/2$也成立，而右边的不等式可推广为：若$0<x<\alpha<\pi/2$，则 $\mathrm{tg}x < x+f(\alpha)x^3$，式中 $f(\alpha)$ 的最佳值为 $f(\alpha) = \frac{\mathrm{tg}\alpha-\alpha}{\alpha^3}$. 特别，当 $\alpha = \frac{\pi}{6}$ 时，$f(\alpha) < \frac{4}{9}$.

101.　设 $0 < x < 1$，则

$$x < \mathrm{tg}x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

102.　**Becker-Stark 不等式**：设 $0 < x < 1$，则

$$\frac{4}{\pi}\cdot\frac{x}{1-x^2}<\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2}x)<\frac{\pi}{2}\cdot\frac{x}{1-x^2}.$$ (证明见[8]171)

103. 设 $0<x<\pi$,则

(1) [MCM]. $\mathrm{ctg}\,\frac{x}{2}\geqslant 1+\mathrm{ctg}x$,仅当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时等号成立.

提示:$\mathrm{ctg}\,\frac{x}{2}-(1+\mathrm{ctg}x)=\frac{1}{\sin x}-1\geqslant 0$.

(2) $\mathrm{ctg}\,\frac{x}{2^n}-\mathrm{ctg}x>n$.

注 利用电子计算机每隔 1° 求函数

$f(x)=\mathrm{ctg}\,\frac{x}{4}-\mathrm{ctg}x=\frac{1}{\sin(x/2)}+\frac{1}{\sin x}$ 的值,得到 $f(x)\geqslant 2.2845514=f(111^\circ)$.

([345]1991,7:44 ~ 47,50)

(3) 设 $f(x)=\mathrm{ctg}x-\frac{1}{x}$,则 $f^{(k)}(x)<0,k=0,1,2,\cdots$.

提示:利用 $\mathrm{ctg}x=\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k\pi+x}-\frac{1}{k\pi-x})$,$\sin x=x\prod_{k=1}^{\infty}[1-(\frac{x}{k\pi})^2]$.

(详细证明见[305]1989,96(7):576 ~ 589)

104. 设 $0<x<\pi/2$,则

(1) **Huygens 不等式**:$\mathrm{tg}x+2\sin x>3x$, $\mathrm{tg}x+\sin x>2x$;

(2) $\log_{\cos x}\sin x>\log_{\cos x}\mathrm{tg}x$;

(3) $\ln\sec x<\frac{1}{2}\sin x\,\mathrm{tg}x$;

(4) $\mathrm{ctg}^2x<x^{-2}<1+\mathrm{ctg}^2x$;

(5) **Wilker 不等式**:

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2+\frac{\mathrm{tg}x}{x}>2;\quad c_1x^3\mathrm{tg}x<\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2+\frac{\mathrm{tg}x}{x}-2<c_2x^3\mathrm{tg}x.$$

式中,$c_1=\frac{16}{\pi^4}$,$c_2=\frac{8}{45}$ 是最佳常数.([305]98(3)(1991):264 ~ 267)

(6) 令 $f(\alpha)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{2\alpha}+\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\alpha}-2,\alpha>0$.朱灵证明 $f(\alpha)>0$.([164]37)

我们问,使

$$C_1x^{3\alpha}\tan x<f(\alpha)<C_2x^{3\alpha}\tan x \tag{1.11}$$

成立的 C_1,C_2 的最佳值是什么?

(7) 设 $q>0$ 或 $q\leqslant\min\{-1,-(\frac{\lambda}{\mu})\}$,$\lambda,\mu>0$,$p\leqslant\frac{2q\mu}{\lambda}$,则

$$\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^p+\frac{\mu}{\mu+\lambda}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^q>1. \tag{1.12}$$

(8) 令 $g(\alpha)=\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{2\alpha}+\left(\frac{x}{\tan x}\right)^{\alpha}-2$,则

① $\frac{2}{45}x^3\sin x < g(1) < \left(\frac{2}{\pi}-\frac{16}{\pi^3}\right)x^3\sin x.$ (1.13)

(王梓华、张小明[351]2006(3):272 ~ 274)

② $\alpha \geqslant 1$ 时，$g(\alpha) > 0$ （朱灵,[164]37）

我们问:使得

$$c_1x^{3\alpha}\sin x < g(\alpha) < c_2x^{3\alpha}\sin x \tag{1.14}$$

成立的 C_1, C_2 的最佳值是什么？

(9) 设 $0 < x_k < \frac{\pi}{2}, 1 \leqslant a_k < \infty$,则

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k}{\sin x_k}\right)^{2a_k} + \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k}{\tan x_k}\right)^{a_k} > 2.$$ ([305]116(2)(2009) 问题 11308)

(10) 令 $f(\alpha,p) = (1-\alpha)\left(\frac{x}{\sin x}\right)^p + \alpha\left(\frac{x}{\tan x}\right)^p.$

① 若 $p \geqslant 1$,则

$$f(\alpha,p) < 1 < f(\lambda,p) \tag{1.15}$$

成立的充要条件是 $\lambda \leqslant \frac{1}{3}$, $\alpha \geqslant \left[1-\left(\frac{2}{\pi}\right)^p\right]$;

② 若 $0 \leqslant p \leqslant \frac{4}{5}$,则(1.15) 成立的充要条件是 $\alpha \geqslant \frac{1}{3}$, $\lambda \leqslant 1-\left(\frac{2}{\pi}\right)^p$;

③ 若 $p < 0$,则 $f(\alpha,p) > 1$ 成立的充要条件是 $\alpha \geqslant \frac{1}{3}$.（朱灵,[164]36 ~ 37）

(11) $2\mathrm{tg}(x/2) \leqslant \cos 2x$. 仅当 $x = \pi/3$ 时等号成立.

提示:用万能代换 $t = \mathrm{tg}(x/2)$ 化为代数不等式.

(12) $\sum_{k=1}^{n}\sec(x/k) - \sum_{k=1}^{n}\mathrm{tg}(x/k) < n.$

105. 设 $0 < \alpha,\beta < \pi/2, 0 < \alpha+\beta < \pi/2$,则 $\mathrm{tg}(\alpha+\beta) > \mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta$.

提示:$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) - (\mathrm{tg}\alpha + tg\beta) = \mathrm{tg}(\alpha+\beta)\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta$.

106. (1) 设 $0 < x < \pi/3$,则

$$\frac{\sin x}{2+\cos x} < \mathrm{tg}\,\frac{x}{3}.$$

(2) 设 $0 < x < \pi$,则

① $\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi x}{\pi^2-x^2}\right) < \frac{1}{x} - \cot x < \frac{\pi}{3}\left(\frac{\pi x}{\pi^2-x^2}\right)$;

② $\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{\pi x}{\pi^2-x^2}\right) < \sec x - 1 < \frac{4}{\pi}\left(\frac{\pi x}{\pi^2-x^2}\right)$;

③ $\frac{\pi}{6}\left(\frac{\pi x}{\pi^2-x^2}\right) < \csc x - \frac{1}{x} < \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi x}{\pi^2-x^2}\right)$.

(祁锋等,Internat. J. Math. Ed. Sci. Tech. 39(2008),384 ~ 389)

(3) 设 x 为锐角,$a,b > 0$，则

① $a(\sec x)^n + b(\csc x)^n \geqslant 2\left[\left(\frac{a}{2}\right)^p + \left(\frac{b}{2}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}$，式中 $p = \frac{2}{n+2}$.

② $a(\sec x)^{\frac{n}{2}} + b(\csc x)^{\frac{n}{2}} \geqslant 2n\left[\left(\frac{a}{2n}\right)^q + \left(\frac{b}{2n}\right)^q\right]^{\frac{1}{q}}$，式中 $q = \frac{2n}{2n+1}$.

(证明见李兵，数学金刊，2008(10)：24)

(4) 设 $x_k > 0$，$\sum_{k=1}^{n} x_k = x$，$0 < x \leqslant \pi$，则

① $\frac{\sin x}{x} + n - 1 < \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin x_k}{x_k} \leqslant \frac{n^2}{x}\sin\frac{x}{n}$.

② $\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin x_k}{x - x_k} > \frac{1}{n-1}\left(\frac{\sin x}{x}\right) + 1$.

(吴善和等，[399]22(2009)，130 ～ 135)

(5) 设 $0 < x \leqslant y < \frac{\pi}{2}$，则

$$\left(\frac{\cos x \sin y}{\sin x \cos y}\right)^{\sin x \sin y} \leqslant \exp\left[\sqrt{\cos(x-y)}\left(\sqrt{\frac{\cos x}{\cos y}} - \sqrt{\frac{\cos y}{\cos x}}\right)\right].$$

([305]113(7)(2006)，660. 问题 11127)

107. (1) $\frac{2n}{\pi} < \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) < n$； (2) $\left(\frac{n}{2} - \frac{n}{\pi}\right) < \sum_{k=1}^{n}\left[\sin\left(\frac{k\pi}{4n}\right)\right]^2 < \frac{n}{2}$.

((1)(2) 匡继昌[325]1999，83：126)

(3) $\left(\sum_{k=1}^{n} \operatorname{tg}\frac{\pi}{3k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \operatorname{ctg}\frac{\pi}{3k}\right) \geqslant n^2$.

108. 设 $A_n^0 = 1, A_n^p = \sum_{k=0}^{n} A_k^{p-1}, n = 0,1,2,\cdots, p = 1,2,\cdots$，则当 $0 < t < \pi, m = 3, 4,\cdots$，时有

$$A_n^{-m}\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{m-1}\left(\sum_{j=0}^{k} \sin jt\right) \leqslant \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}.$$

109. 设 $0 < x < \pi/2$，则

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sec\frac{x}{k}\csc\frac{x}{k}\right) < \sum_{k=1}^{n}\left(\sec\frac{x}{k} + \csc\frac{x}{k}\right).$$

110. 设 $0 < x < \pi/2$，则

$$\sin x + \cos x + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + \sec x + \csc x > 6.$$

111. [MCM]. 设 $0 < x < \pi/4$，则

$$\frac{1 - \sin x}{1 - \cos x} > \operatorname{ctg} x，若 \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}，则不等号反向.$$

112. (1) 若 $0 < x < \frac{\pi}{2}$，则 $\operatorname{tg} x - \frac{1}{2}(\operatorname{tg} x)^3 < \sin x < x < \operatorname{tg} x$.

若 $\frac{\pi}{2} < x < \frac{2}{3}\pi$，则左边不等式反向.

(2) $\operatorname{tg} x > 2\operatorname{tg}\frac{x}{2} > \operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}\right)$.

(3)　若 $\pi/4 \leqslant x \leqslant \pi/2$，则 $\csc x - \operatorname{ctg} x \geqslant \sqrt{2} - 1$.

113.　设 $0 < x < \pi/2$，则

(1)　$(\operatorname{tg} x)^p + (\operatorname{ctg} x)^q \geqslant \frac{p+q}{pq}(p^q \cdot q^p)^t, p, q > 0, t = \frac{1}{p+q}$.

仅当 $x = \operatorname{arctg}(\frac{q}{p})^t$ 时等号成立.

(2)　$\sum_{k=1}^{n} 2^{-k} \operatorname{tg}(\frac{x}{2^k}) < 2^{-n} \operatorname{ctg}(\frac{x}{2^n})$.

(3)　$\sec x + \csc x \geqslant 2\sqrt{2}$.

114.　设 $0 < \alpha < \beta < \pi/2$，则

(1)　$\sin\beta - \sin\alpha < \beta - \alpha < \operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha$.

提示：利用 $\cos x < 1 < \sec^2 x (0 < x < \pi/2)$，从 α 到 β 积分，也可用单位圆证.

(2)　$\sec^2\alpha < \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{\beta - \alpha} < \sec^2\beta$.

115.　$0 < \alpha < \pi/2, 0 < x < y$，则 $y\sec\alpha - x\operatorname{tg}\alpha \geqslant \sqrt{y^2 - x^2}$

116.　设 $\operatorname{tg} x = \alpha \operatorname{tg} y, \alpha > 0$，则

$$\operatorname{tg}^2(x - y) \leqslant \frac{(\alpha - 1)^2}{4\alpha}.$$

117.　设 $(\cos\alpha\cos\beta)^{-1} + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\gamma$，则 $\cos 2\gamma \leqslant 0$.

提示：因为 $\cos^2\gamma = \frac{1 - (\operatorname{tg}\gamma)^2}{1 + (\operatorname{tg}\gamma)^2}$，所以，只要证 $1 - (\operatorname{tg}\gamma)^2 \leqslant 0$. 再利用条件，归结为证明 $\cos\alpha\cos\beta \leqslant 1 + \sin\alpha\sin\beta$.

118.　设 $0 \leqslant \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$，且 $\alpha + \beta + \gamma = \pi/2$，则

$$\sqrt{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta + 5} + \sqrt{\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma + 5} + \sqrt{\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha + 5} \leqslant 4\sqrt{3}.$$

119.　(1)　$\frac{1}{3} \leqslant \frac{\sec^2 x - \operatorname{tg} x}{\sec^2 x + \operatorname{tg} x} \leqslant 3$；　(2)　$\frac{1}{3} \leqslant \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x} \leqslant 3$.

120.　$(a\operatorname{tg} x)^2 + (b\operatorname{ctg} x)^2 \geqslant 2ab$.

提示：$(a\operatorname{tg} x)^2 + (b\operatorname{ctg} x)^2 - 2ab = (a\operatorname{tg} x - b\operatorname{ctg} x)^2$.

121.　设 $0 < \alpha_k \leqslant \frac{\pi}{4}$，则 $\prod_{k=1}^{4} \tan\alpha_k \leqslant \left(\frac{\sum_{k=1}^{4} (\sin\alpha_k)^8}{\sum_{k=1}^{4} (\cos\alpha_k)^8}\right)^{\frac{1}{2}}$.

122.　设实数 $\alpha_k, \beta_k (1 \leqslant k \leqslant n)$ 满足 $\sum \alpha_k = \sum \beta_k = \pi$，则当 $\alpha_k > 0$ 时，有 $\sum \cos\beta_k / \sin\alpha_k \leqslant \sum \operatorname{ctg}\alpha_k \quad (n > 2)$.（第 29 届 IMO 备选题，见[109]1989，7：34 和 1991，6：41）

123.　若 $a > b > 0$，则　$a\sec x - b\operatorname{tg} x > \sqrt{a^2 - b^2}$.

提示：令 $y = a\sec x - b\operatorname{tg} x$，则

$$(a^2-b^2)\mathrm{tg}^2x-(2b\mathrm{tg}x)y+a^2-y^2=0$$，由判别式解 y.

124. 设 $0<x<\pi/2, a, b>1$，则

$$ab \leqslant (\sin x)^2 \cdot a^{(\csc x)^2}+(\cos x)^2 b^{(\sec x)^2}.$$

仅当 $x=\mathrm{arctg}\sqrt{\log a/\log b}$ 时等号成立.([348]1989,3:7 ~ 8)

125. 设 $0<x<\pi/2, a, b, p$ 为正数，则

$$a(\csc x)^p+b(\sec x)^p \geqslant (a^q+b^q)^{1/q},$$

式中 $q=2/(p+2)$，仅当 $x=\mathrm{arctg}(a/b)^{p+2}$ 时等号成立.

126. **Lenhard 不等式**：设 $0\leqslant \alpha_k\leqslant \pi/2, 1\leqslant k\leqslant n, n\geqslant 3, \sum\alpha_k=\pi$，则对于所有 $x_k\geqslant 0$ $(1\leqslant k\leqslant n)$，有

$$\sum x_k^2 \geqslant \left(\sec\frac{\pi}{n}\right)\sum x_k x_{k+1}\cos\alpha_k, (x_{n+1}=x_1).$$（证明见中学数学教学，1985，1:27）

1988 年，王振、陈计作了指数推广：设 $0\leqslant\alpha_k\leqslant\pi/2, 1\leqslant k\leqslant n, n\geqslant 3, \sum\alpha_k=\pi$，则对任意 $x_k\geqslant 0, 1\leqslant k\leqslant n, x_{n+1}=x_1, 0<q\leqslant 1$，有

$$\sum x_k^2 \geqslant [\sec(\pi/n)]^q\sum x_k x_{k+1}(\cos\alpha_k)^q.$$（[348]1988,12:7）

1990 年，叶军证明：设 n 个实数 β_k 满足 $\sum\beta_k=(2m+1)\pi$ $(m\in Z, n\geqslant 3)$，n 个正数 α_k 满足 $\sum\alpha_k=\pi$，则对任意实数 $x_k(1\leqslant k\leqslant n)$. $x_{n+1}=x_1$，有

$$\sum(x_k^2+x_{k+1}^2)\mathrm{ctg}\alpha_k \geqslant 2\sum x_k x_{k+1}\cos\beta_k\csc\alpha_k,$$

仅当所有 $x_k x_{k+1}\cos\beta_k\cos\alpha_k$ 相等时等号成立，作者还由此证明了其他三角、几何不等式.（[350]1990,1:32 ~ 35）

127. **Ozeki 不等式**：对任意 n 个实数 $x_k(1\leqslant k\leqslant n)$，都有

$$\sum_{k=1}^{n-1}x_k x_{k+1}-x_n x_1 \leqslant [\cos(\pi/n)]\sum_{k=1}^{n}x_k^2.$$

1988 年，Mitrinovic, D. S. 证明：设 $A_1,\cdots,A_{n+1}$ 是 R^3 中 $n+1$ 个点，O 为 $\overline{A_1A_{n+1}}$ 的中点，记 $x_k=\overline{OA}_k, \alpha_k=\angle A_kOA_{k+1}, \varepsilon_k=\pm 1, (1\leqslant k\leqslant n), \varepsilon_{n+1}=\varepsilon_1$，则

$$\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\varepsilon_{k+1}x_k x_{k+1}\cos\alpha_k \leqslant \left(\cos\frac{\pi}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}x_k^2.$$

(J. College Arts Sci, Chiba Univ. B. 1988, 21:19 ~ 21)

128. 当 $0<x<\pi/2$ 时，有 $\sec x+\csc x+\sec x\csc x\geqslant 2(\sqrt{2}+1)$.

129. $\log\sec x<(1/2)\sin x\,\mathrm{tg}x$ $(0<x<1/2)$.

130. 设 $x_k(1\leqslant k\leqslant 3)$ 为任意实数，记 $x_4=x_1, x_5=x_2$，则

$$\sum_{k=1}^{3}\cos^2 x_k\csc^2(x_{k+1}-x_k)\geqslant 2.$$（[305]1988,95,E3074）

131. 设 $|x|\leqslant\pi/2$，则 $\csc^2 x-\dfrac{1}{2n+1}<\displaystyle\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{(x-k\pi)^2}<\csc^2 x$.

132. 若 $0<x\leqslant\pi/2$，则 $\csc x-\dfrac{x}{4n+1}<\displaystyle\sum_{k=-2n}^{2n}\frac{(-1)^k}{x-k\pi}<\csc x+\frac{x}{4n+2}$.

注 这两个不等式可用于计算积分$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$.

133. [MCM] 设$\alpha_1,\cdots,\alpha_n \in (0,\frac{\pi}{2})$,使得$\sum_{k=1}^n \mathrm{tg}(\alpha_k-\frac{\pi}{4}) \geqslant n-2$,

则 $\prod_{k=1}^n \mathrm{tg}\alpha_k \geqslant (n-1)^n$.([348]1999.1:44 ~ 45)

134. $[(\sec x)^4-1][(\csc x)^4-1] \geqslant 9$.

135. 设$0<x_k<1,1\leqslant k\leqslant n,x_{n+1}=x_1$,则

$$\sum_{k=1}^n x_k(1-x_{k+1}) < \frac{n}{4}[\sec\frac{(n-2)\pi}{2n})]^2.$$

提示:作边长为 1 的正 n 边形.(数学教学,1993.5:39)

136. 设$0\leqslant x<\frac{\pi}{2}$,则 $x(\sec x)^2-\mathrm{tg}x \leqslant \frac{8\pi^2x^3}{(\pi^2-4x^2)^2}$.

证 令 $a_n=[(2n+1)\pi]^2-4x^2$,则

$$\mathrm{tg}x=\sum_{n=0}^\infty \frac{8x}{a_n},\quad (\sec x)^2=(\mathrm{tg}x)'=\sum_{n=0}^\infty \frac{8}{a_n}+\sum_{n=0}^\infty \frac{64x^2}{a_n^2}.$$

于是,

$$x(\sec x)^2-\mathrm{tg}x=\sum_{n=0}^\infty \frac{64x^3}{a_n^2} \leqslant \frac{64x^3}{(\pi^2-4x^2)^2}\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+1)^4}$$

$=\frac{2\pi^4x^3}{3(\pi^2-4x^2)^2}<\frac{8\pi^2x^3}{(\pi^2-4x^2)^2}$.([305]1980,87(1):62)

Ruehr-Shafer 改进为: $x(\sec x)^2-\mathrm{tg}x \leqslant \frac{2\pi^2(\mathrm{tg}x-x)}{\pi^2-4x^2}$.

§2 反三角函数不等式

1. 若$0<x<1$,则$x<\arcsin x<\frac{x}{1-x^2}$.

提示:利用 $\arcsin x$ 的 Taylor 级数展开式.

2. 若$-1\leqslant x<\sqrt{2}/2$,则 $\arcsin x<\arccos x$;若$\sqrt{2}/2<x\leqslant 1$,则不等号反向.

3. 若$0\leqslant x<1/2$,则 $\arcsin x<\arcsin(1-x)$.

4. 若$-1\leqslant x<0$,则 $\arccos x^2<\arccos x$.

5. 若$0<x<\pi$,则 $\arcsin(x/6)+\arcsin[(2/3)\sin(x/4)]<x/3$.([305]1991,98(1))

6. 若$0<x<1$,则 $\sin(\arccos x)<\arcsin(\cos x)$.

提示:利用三角恒等式 $\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$,

$\arcsin(\cos x)=\arcsin[\sin(\pi/2-x)]=\pi/2-x$,只要证$\sqrt{1-x^2}<\pi/2-x$.

7. 当$0\leqslant x\leqslant 1$时,有 $\cos(\arcsin x)<\arcsin(\cos x)$.

提示：令 $x=\cos\alpha$，则 $\arcsin(\cos x)-\cos(\arcsin x)=\frac{\pi}{2}-x-\sqrt{1-x^2}=\frac{\pi}{2}-(\cos\alpha+\sin\alpha)=\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})>\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}>0$.

8. **Shafer-Fink 不等式：**

$$\frac{3x}{2+\sqrt{1-x^2}}\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{\pi x}{2+(\pi-2)\sqrt{1-x^2}},\ (0\leqslant x\leqslant 1). \tag{2.1}$$

改进：(1) 设 $0\leqslant x\leqslant 1$，则

$$6f(x)\leqslant\arcsin x\leqslant\pi\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right)f(x). \tag{2.2}$$

式中 $f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{4+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$，6 与 $\pi\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right)$ 是最佳常数.（朱灵，[303]8(2005)：749～750）

(2) 设 $0<x<1$，若 $p\geqslant 1$，记 $g(x)=(1-x^2)^{\frac{p}{2}}$，则

$$\frac{3x^p}{2+g(x)}<(\arcsin x)^p<\frac{(\pi x)^p}{2^p+(\pi^p-2^p)g(x)}. \tag{2.3}$$

若 $0\leqslant p\leqslant\frac{4}{5}$，则(2.3)中两个不等号均反向；若 $p<0$，则(2.3)式中左边不等式成立.（朱灵，[164]38）

(3) 设 $0<x<1$，令

$$f(x)=(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})^p,\quad g(x)=(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^p,$$

则当 $p\geqslant 1$ 时，下式成立

$$\frac{3\times 2^p f(x)}{2^{p+1}+g(x)}<(\arcsin x)^p<\frac{(2\pi)^p f(x)}{4^p+(\pi^p-2^p)g(x)} \tag{2.4}$$

若 $0\leqslant p\leqslant\frac{4}{5}$，则(2.4)中两个不等号均反向；若 $p<0$，则(2.4)式中左边不等式成立.（朱灵，[164]39）

9. (1) 设 $0\leqslant x\leqslant 1$，令 $f(x)=\frac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{2}+\sqrt{1+x}}$，则

$$6f(x)\leqslant\arccos x<\pi\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right)f(x). \tag{2.5}$$

（姜卫东、华云，[402]2007(4)：152～154 和 2009(2)：212～214，另见[344]2009(2)：212～214）

(2) 设 $0<x<1$，令 $g(x)=(1-x)^{\frac{p}{2}}$，$f(x)=(1+x)^{\frac{p}{2}}$，则当 $p\geqslant 1$ 时，

$$\frac{3\times 2^p g(x)}{(2\sqrt{2})^p+f(x)}<(\arccos x)^p<\frac{(2\pi)^p g(x)}{(2\sqrt{2})^p+(\pi^p-2^p)f(x)}. \tag{2.6}$$

若 $0\leqslant p\leqslant\frac{4}{5}$，则(2.6)式中两个不等号均反向；若 $p<0$，则(2.6)式中左边不等式成立.（朱灵，[164]38）

(3)　**Carlson 不等式**：当 $0 \leqslant x < 1$ 时，有

$$\frac{6\sqrt{1-x}}{2\sqrt{2}+\sqrt{1+x}} < \arccos x < \frac{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{1-x}}{(1+x)^{1/6}}. \tag{2.7}$$

10.　$|\operatorname{arctg} x| < \dfrac{2|x|}{1+\sqrt{1+x^2}} < 2.$

11.　$|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \leqslant 2\left|\operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{2}\right| \leqslant |x-y|.$

12.　**Rangarajan 不等式**：设 $x<y, xy>-1$，则

$$\operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}\cdot\frac{y-x}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}.\ ([4]462)$$

13.　设 $x>0$，则

(1)　$\dfrac{x}{1+x^2} < \operatorname{arctg} x < x.$　　(2)　$x - x^3/3 < \operatorname{arctg} x < x.$

(3)　$\dfrac{8x}{3+\sqrt{25+(\frac{80}{3})x^2}} < \operatorname{arctg} x < \dfrac{8x}{3+\sqrt{25+(\frac{256}{\pi^2})x^2}}.$

(朱灵，[302]12(2008)，571 ～ 574)

(4)　设 $0<a<b, c\geqslant 0$，则

$$(a+b+2c)\operatorname{arctg}\left(\frac{a+c}{b+c}\right)^{\frac{1}{2}} - (a+b)\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant \frac{c\pi}{2}.$$

(李大矛等，[351]2007(2)：168 ～ 172)

(5)　$(x+x^{-1})\operatorname{arctg} x > 1.$　$(x>0)$

(6)　设 $x>0, \alpha>0$，则　$(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x^{-\alpha}) < x^{\alpha}.$

14.　设 $x>0$，则 $\dfrac{1}{2x}\ln(1+x^2) < \operatorname{arctg} x < (1+x)\ln(1+x)$；

而当　$\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$ 时，有 $\operatorname{arctg} x \geqslant \ln(1+x^2) - \ln 2 + (\pi/4).$

15.　[MCM]. 设 x,y,z 为正数，且　$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} z < \pi$. 则

$$xyz < x+y+z.$$

16.　设 $0<\alpha_k<\dfrac{\pi}{2}$. $\sum\limits_{k=1}^{n}(\sin\alpha_k)^2 = 1$，则 $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k \leqslant n\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.(程若礼，[348]2000，5：25 ～ 26)

§ 3　指数与对数函数不等式

1.　设 $x \neq 0$，则 $e^x > 1+x$.

一般地，当 n 为奇数时，对于所有 $x\neq 0$，不等式 $e^x > 1+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{x^k}{k!}$ 成立.

当 n 为偶数时，此式仅对于 $x>0$ 成立，而当 $x<0$ 时，不等号反向，可由此证明方程 $\sum_{k=0}^{2n}\frac{x^k}{k!}=0$ 没有实根.

2. 设 $0<x\leqslant 1$，则 $e^x>(1-\frac{x}{2})^{-1}>\frac{1}{2-x}$.

3. 若 $x<1, x\neq 0$，则

(1) $e^x<(1-x)^{-1}$； (2) $x<e^x-1<x/(1-x)$.

4. 设 $0<x\leqslant 1.5936$，则 $e^{-x}<1-(x/2)$.

5. 设 $x>0$，则 $\frac{1-x}{1+x}<e^{-2x}$.

6. 利用连分式理论，容易求出：

$$f_1(x)=\frac{2+x}{2-x},\quad f_2(x)=\frac{12+6x+x^2}{12-6x+x^2},$$

$$f_3(x)=\frac{120+60x+12x^2+x^3}{120-60x+12x^2-x^3}, f_4(x)=\frac{1680+840x+180x^2+20x^3+x^4}{1680-840x+180x^2-20x^3+x^4},\cdots$$

都是 e^x 的越来越精确的有理逼近式.

7. $|e^x-1|\leqslant|x|e^{|x|}, x\in R^1$.

8. 令 $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(x^k/k!), x\geqslant 0$，则

(1) **Sewell 不等式**：$0\leqslant e^x-S_n(x)\leqslant(x/n)e^x$.

(2) $0\leqslant e^x-(1+x/n)^n\leqslant(x^2/n)e^x,(|x|\leqslant n)$.

(3) $|(1+\frac{x}{n})^n-S_n(x)|\leqslant\frac{x(1+x)}{n}e^x,(0\leqslant x\leqslant n)$.

(4) 若 $0<x\leqslant c$，则

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\leqslant e^x-S_n(x)\leqslant e^c\cdot\frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

特别，当 $x=1$ 时，有

$$\frac{1}{(n+1)!}\leqslant e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}<\frac{3}{(n+1)!}$$

注 左边不等式对于所有正数 x 成立，而当 $0<x<n+1$ 时，右边不等式可改进为

$$e^x-S_n(x)<\frac{x^{n+1}}{(n-x+1)n!}.$$

特别，当 $n=1$ 时，有 $e^x<\frac{2+x}{2-x}\ (0\leqslant x<2)$，而当 $n=2$ 时，有

$$1+x+\frac{x^2}{2}\leqslant e^x\leqslant 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2(3-x)}\ (0\leqslant x<3).$$

(5) 若 $0\leqslant x<\infty, \alpha_n\to 0(n\to\infty)$，则

$$\left|e^{-x}-\frac{1}{S_n(x)}\right|\leqslant\frac{1+\alpha_n}{\sqrt{2n\pi}\cdot 2^n}(1-e^{-x}).$$

(6) **祁锋不等式**：设 $0\leqslant x\leqslant c$，则

$$\frac{[(n+1)!\alpha_n - e^c](c-x)x^{n+1}}{c(n+1)(n+1)!} \leqslant e^x - S_n(x) - \alpha_n x^{n+1} \leqslant 0.$$

式中 α_n 由递推公式决定：$\alpha_{-1} = e^c, \alpha_n = \dfrac{\alpha_{n-1} - (1/n!)}{c}, n \geqslant 0$.　([331]1997.8:16 ～ 23)

(7)　令 $f_n(x) = e^x - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}$,

$g_{n,k}(x) = \Gamma(n-k+2)\Gamma(n+k+2)f_{n-k}(x)f_{n+k}(x) - [\Gamma(n+2)f_n(x)]^2, x > 0$，则当 $n \geqslant k > 0$ 时，$0 < g_{n,k}(x) < g_{n,(k+1)}(x)$；当 $n > k \geqslant 0$ 时，$g_{n,(k+1)}(x) < \dfrac{1}{2}[g_{n,k}(x) + g_{n,(k+2)}(x)]$；

当 $n \geqslant k-1 \geqslant 0$ 时，$[g_{(n+1),k}(x)]^2 < g_{n,k}(x)g_{(n+2),k}(x)$.

证明上述不等式的基本工具是 $f_n(x)$ 的积分表示：

$f_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}[1 + x\int_0^1 t^{n+1}e^{x(1-t)}\,dt]$. ([301]1993,179(2):500 ～ 506)

(8)　设 $x \geqslant 0, 0 \leqslant p \leqslant 1$，则

$$\sum_{k=0}^{2n} \frac{(-x)^k}{k!} - \frac{x^{p+2n}}{\Gamma(p+2n+1)} \leqslant e^{-x} \leqslant \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-x)^k}{k!} + \frac{x^{p+2n+1}}{\Gamma(p+2n+2)}.$$

式中 $\Gamma(p+n)$ 为 Gamma 函数，特别地，当 $p = 0$ 时，得到

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-x)^k}{k!} \leqslant e^{-x} \leqslant \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-x)^k}{k!}.$$ ([305]1980,87:290 ～ 292)

(9)　令 $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}$,　$Q_n(x) = (1+\dfrac{x}{n})^n$，则

$\lim\limits_{n\to\infty}\{\max\limits_{0\leqslant x<\infty} |e^{-x} - [P_n(x)]^{-1}|\}^{1/n} = 1/2$;　$\lim\limits_{n\to\infty}\{n\max\limits_{0\leqslant x<\infty} |e^{-x} - [Q_n(x)]^{-1}|\} = 2/e^2$.（张宝林，[345]1983,7:26 ～ 28)

9.　设　$P_n(x) = \dfrac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(2n-k)!\dbinom{n}{k}x^k$.

x_n 是 $P_n(-x)$ 的最小正零点，则 e^x 的有理逼近为：

$$\frac{P_{2k}(x)}{P_{2k}(-x)} \leqslant e^x \leqslant \frac{P_{2k+1}(x)}{P_{2k+1}(-x)} \quad (0 \leqslant x < x_n).$$

10.　[MCU]. $(1+\dfrac{x}{n})^{n+\alpha(x)} \leqslant e^x \leqslant (1+\dfrac{x}{n})^{n+\beta(x)}, 0 < x \leqslant 2$，式中 $\alpha(x)$ 的最大值为 $\alpha_0(x) = \dfrac{x}{\ln(1+x)} - 1$，$\beta(x)$ 的最小值为 $\beta_0(x) = x/2$.

11.　当 $0 < x < n$ 时，有

$$(1+\frac{x}{n})^n < e^x < (1-\frac{x}{n})^{-n}.$$

由此易求得　$2.5 < e < 2.99$.

注　当 $x > 0$ 时，$a_n(x) = (1+\dfrac{x}{n})^n$ 递增，而 $x > 2, n \geqslant \dfrac{x}{x-2} + 1$ 时，$b_n(x) = (1+\dfrac{x}{n})^{n+1}$ 递增，而 $0 < x \leqslant 2$ 时，$b_n(x)$ 递减.

提示：考虑 $g(t)=(1+\frac{x}{t})^t$ 和 $h(t)=(1+\frac{x}{t})^{t+1}$ 的导数.

12. (1) 对于所有实数 x，成立

$$e^x(1+\frac{x}{n})^{-x}\leqslant(1+\frac{x}{n})^n\leqslant e^x.$$

特别，取 $x=1$，得 $e(1+1/n)^{-1}<(1+1/n)^n<e<(1+1/n)^{n+1}$.

由此也可以证明

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n=e^x.$$

提示：考虑函数 $f_n(t)=t\ln(\frac{ne}{xt})$，当 $xt>0$ 时的极值.([305]1986,93(8):634 ~ 640 和 1989,96(4):354)

(2) 设 $x,a>0$，令 $f(x)=[a(x+a)]^{1/2}$，$g(x)=[a(x+a)+\frac{1}{4}x^2]^{1/2}$，则

$$\left(1+\frac{x}{a}\right)^{f(x)}<e^x<\left(1+\frac{x}{a}\right)^{g(x)}.$$

13. (1) 设 $x>0$，令 $f(x)=\frac{1}{12x^2+12x+3}+1$，$g(x)=\frac{1}{12x(x+1)}+1$，则 $e^{f(x)}<(1+\frac{1}{x})^{x+\frac{1}{2}}<e^{g(x)}$.(Sandor,J.,Debnath,L.[301]2000,249(2):569 ~ 582)

(2) $x>0$ 时，$e(1-\frac{1}{2x+1})<(1+\frac{1}{x})^x<e(1-\frac{1}{2(x+1)})$.

证 令 $g(x)=\frac{2(x+1)}{2(x+1)-1}(1+\frac{1}{x})^x$，证明 $g'(x)>0$.(杨必成,[301]1999,234:717 ~ 722)

(3) $\frac{6e}{12x+11}<e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\frac{7e}{14x+12}$ $(x>0)$.([301]252(2000),994 ~ 998)

(4) 设 $x>0$，$c>\frac{\sqrt{6}}{4}$，则

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e\left(1-\frac{1}{2cx+\frac{4c}{3}+\frac{1}{2}}\right)^c$$

式中，$\frac{4c}{3}+\frac{1}{2}$ 是最佳常数.(朱灵,[302]2007:ID84104)

(5) 设 x 为实数，$\alpha\geqslant 2$. 则
$e^{\alpha x}+e^{-\alpha x}-2\leqslant(e^x+e^{-x})^\alpha-2^\alpha$.([305]115(2008),问题 11369)

(6) 设 $x>0$，B_k 为 Bernoulli 数. 则
$\sum_{k=1}^{2m}\frac{B_{2k}}{(2k)!}x^{2k}<\frac{x}{e^x-1}-\left(1-\frac{x}{2}\right)<\sum_{k=1}^{2m-1}\frac{B_{2k}}{(2k)!}x^{2k}$([301]324(2)(2006):1 458 ~ 1 461)

(7) Hölder 不等式：设$\{\alpha_k\}$为非负数列，且$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k=1$，$x_k\in R'$，则

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k x_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\exp(x_k).$$

14. 设$x>0$，则

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\left(1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{(1+x)^k}\right).$$

式中$b_1=\frac{1}{2}$，$b_{n+1}=\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{n+2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{n+2-k}\right)$，$n=1,2,\cdots$.

证 令 $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$，$y=\frac{1}{1+x}$.

则 $f(x)=(1-y)^{1-\frac{1}{y}}$，令 $g(y)=\begin{cases}(1-y)^{1-\frac{1}{y}}, & 0<y<1,\\ e, & y=0.\end{cases}$

$\varphi(y)=\ln g(y)=\left(1-\frac{1}{y}\right)\ln(1-y)$. 由 Taylor 公式：$\ln(1-y)=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}y^k$.

于是$\varphi'(y)=\frac{1}{y^2}\ln(1-y)+\frac{1}{y}=-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}y^{k-2}$，

$$\varphi^{(m)}(y)=-\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{(k-2)(k-3)\cdots(k-m)}{k}y^{k-(m+1)},m=2,3,\cdots$$

$\varphi^{(m)}(0)=\lim_{y\to0}\varphi^{(m)}(y)=-\frac{(m-1)!}{m+1}$. 从 $\varphi(y)=\ln g(y)$，

$g'(y)=g(y)\varphi'(y)$，$g^{(m+1)}=(g\varphi')^{(m)}=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}g^{(k)}\varphi^{(m+1-k)}$.

由 Taylor 公式：$g(y)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}y^k$. 另一方面，

$$g(y)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\left(1-\sum_{k=1}^{\infty}b_ky^k\right)=e+\sum_{k=1}^{\infty}(-eb_k)y^k,$$

比较以上两式，得 $g(0)=b_0=e$，$b_k=-\frac{g^{(k)}(0)}{k!e}$. 于是$-(n+1)!eb_{n+1}=g^{(n+1)}(0)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}g^{(k)}(0)\varphi^{(n+1-k)}(0)$，由此即得所需的结果.

推论 $x>0$ 时

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e\left[1-\frac{1}{2(1+x)}-\frac{1}{24(1+x)^2}-\frac{1}{48(1+x)^3}\right].$$

15. (1) 当$x>0$时，$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$严格递增，而$g(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$严格递减，并且

$$f(x)<e<g(x).$$

(2) 记 $f_a(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+a}$.

① 设 $x>0$，则 $f_\alpha(x)$ 递增 $\Leftrightarrow \alpha\leqslant 0$，$f_\alpha(x)$ 递减的充要条件是 $\alpha\geqslant\frac{1}{2}$.

② 设 $x<-1$，则 $f_\alpha(x)$ 递减 $\Leftrightarrow \alpha\geqslant 1$，$f_\alpha(x)$ 递增 $\Leftrightarrow \alpha\leqslant\frac{1}{2}$.（[351]2006(4)：355～364）

16. [MCU]. 对任意实数 x,a，有 $(1-x+a)e^x\leqslant e^a$.

提示：令 $f(x)=(1-x+a)e^x$，$f'(a)=0$，$f''(a)<0$.（[66]301～302）

17. 对于任意实数 x，有：(1) $|e^x-1-x|\leqslant (x^2/2)e^{|x|}$.

(2) $|e^x(x^2-6x+12)-(x^2+6x+12)|\leqslant (1/60)|x|^5e^{|x|}$.

18. 设 $a>0,x>0$，则

$$e^x\geqslant\left(\frac{ex}{a}\right)^a.$$

特别，取 $a=1$，得 $e^x\geqslant e\cdot x$，仅当 $x=1$ 时等号成立.

19. 设 $x>0$，则 $x^e\leqslant e^x\leqslant e\cdot x^x$，

左边不等式仅当 $x=e$ 时等号成立，右边不等式仅当 $x=1$ 时等号成立.

20. 设 $0<x<e$，则 $(e-x)^{e+x}<(e+x)^{e-x}$.

21. 设 x,y 为正数，则

$$\exp\left(\frac{xy}{x+y}\right)<\left(1+\frac{x}{y}\right)^y<e^x.$$

特别，当 $y=1$ 时，有 $\exp\left(\frac{x}{1+x}\right)<1+x$，注意此不等式对于 $x>-1,x\neq 0$ 仍成立.

22. $\exp\left(\frac{-x}{1-x}\right)<1-x\,(x<1,x\neq 0)$.

23. 设 $p,q>0$，$1/p+1/q=1$，则 $\frac{1}{p}e^{px}+\frac{1}{q}e^{-qx}\leqslant e^{\frac{(pqx)^2}{8}}\,(x\in R^1)$.

提示：令 $f(x)=\ln(\frac{1}{p}e^{px}+\frac{1}{q}e^{-qx})-\frac{(pqx)^2}{8}$.

只要证明，当 $x\geqslant 0$ 时，二阶导数 $f''(x)\leqslant 0$，从而推出 $f'(x)\leqslant 0$.

24. 设 $0<p<1,p+q=1,x,y>1$，则 $(1-p^x)^y+(1-q^y)^x>1$.

25. $e^{-k}\left(\frac{k^k}{k!}\right)\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi k}}$.

26. [MCU]. $x>-1,x\neq 0$ 时，有 $e^x>1+\ln(1+x)$，

而当 $x>0$ 时，有 $e^x>1+(1+x)\ln(1+x)$.

27. [MCU]. 对于所有实数 x，

$$\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\leqslant e^{cx^2} \tag{3.1}$$

成立的充要条件是 $c\geqslant 1/2$.

证 设(3.1)式成立，则利用指数函数的幂级数展开式，有

$0\leqslant e^{cx^2}-\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=\sum_{n=1}^{\infty}(c^n-\frac{1}{2^n})\frac{x^{2n}}{n!}$. 由此可推出 $c\geqslant\frac{1}{2}$.

反之，若 $c \geqslant 1/2$，则

$$\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n \cdot n!} = \exp(x^2/2) \leqslant \exp(cx^2).$$

([305]1981,88(8):605 ～ 612)

28.　设 $x > 0$，则

$$\frac{3x}{e^{3x}-1} \leqslant \frac{1+e^x}{e^{3x}+e^x}.$$

29.　设 $x \neq y$，则

(1)　[MCU]. $\exp(\frac{x+y}{2}) < \frac{e^x - e^y}{x-y} < \frac{1}{2}(e^x + e^y)$.

提示：利用第七章 § 1 的 Hadamard 不等式.

(2)　设 $0 < x < y < 1$，$f(x) = [e^{-x} - x\exp(-1/x)]/(1-x)$，则

$1 < f(x) < f(y) < 3/e$(Mond,B. 等,[404](5)2000,1(1):57 ～ 58)

30.　**Toader 不等式：**

$$\frac{x+y}{2} < \frac{(x-1)e^x - (y-1)e^y}{e^x - e^y}.$$

式中 x,y 是不相等的实数.

31.　$2/e < a^{\frac{a}{1-a}} + a^{\frac{1}{1-a}} < 1, (0 < a < 1)$.

证　令 $f(x) = (1+x)x^{\frac{x}{1-x}}, 0 < x < 1$，用取对数法证明 $f'(x) < 0$，从而 $2/e = \lim\limits_{x\to 1-0} f(x) < f(x) < \lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 1$.

32.　设 $a > e^{1/e}$，则 $a^x > x, (a > 0, a \neq 1)$.

33.　设 $a \geqslant 2, x > 0$，则 $a^x + a^{\frac{1}{x}} \leqslant a^{x+\frac{1}{x}}$，仅当 $a = 2$ 及 $x = 1$ 时等号成立.

证　令 $f(x,a) = (a^x + a^{1/x})a^{-(x+1/x)}$. 注意到 $f(x,a) = f(1/x,a)$，因此，只要证 $x \geqslant 1$ 时，$f(x,a) \leqslant 1$. 再注意到对于每个 x，$f(x,a)$ 是 a 的严格递减函数，从而只要证对于 $x > 1$，有 $f(x,2) < 1$. 为此，只要证 $x > 1$ 时，$F(x) = 2^x f(x,2) - 2^x < 0$，由 $F'(x) = 2^{x-\frac{1}{x}}(\ln 2)g(1/x)$，只要证 $x > 1$ 时，$g(1/x) < 0$，问题归结为证 $0 < t < 1$ 时，$g(t)$ 是严格的凸函数，而这可由 $g''(t) > 0$ 得证.

34.　设 $x \geqslant 1$，$[x]$ 是不超过 x 的最大整数，则

$$\left(1 + \frac{x}{[x]}\right)^{[x]} \leqslant 2^x \leqslant \left(1 + \frac{x}{[x+1]}\right)^{[x+1]}.$$

提示：用 Bernoulli 不等式.

35.　设 $x > 1, a \geqslant 1/3$，则

$$a\sqrt{x} + (1-a)(\frac{x+1}{2}) < e^{-1}x^{\frac{x}{x-1}}. \text{([305]1993,100(2))}$$

36.　令 $f(x) = e^{-x} - (1 - \frac{x}{a})^a$，

(1)　若 $a \geqslant 1$，$|x| \leqslant a$，则

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{x^2 e^{-x}}{a}. \text{特别}, 0 \leqslant e^{-x} - (1 - \frac{x}{n})^n \leqslant \frac{x^2}{n}e^{-x}.$$

(2) 若 $0 \leqslant x \leqslant a, a \geqslant 2$，则

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{x^2(1+x)e^{-x}}{2a}.$$

(3) 若 $0 \leqslant x \leqslant a, a > 0$，则

$$0 \leqslant f(x) \leqslant x^2/(2a).$$

37. (1) **Hardy 不等式**，设 x, y 均为正数，则

$$\frac{1-e^{-x-y}}{(x+y)(1-e^{-x})(1-e^{-y})} - \frac{1}{xy} \leqslant \frac{1}{12}.$$

提示：令 $f(x) = \frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{x}{12}$，则所证不等式等价于 $f(x) + f(y) \leqslant 1$. 注意到 $f(x) \leqslant 1/2$，即可得证.（[317]1936,11:167 ~ 170）

(2) 设 $0 < x < 1$，则存在正数 c，使得

$$\frac{1}{x^2} - c < \frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} < \frac{1}{x^2}.$$

提示：利用

$$e^{x/2} - e^{-x/2} = x + \frac{2}{3!}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{2}{5!}\left(\frac{x}{2}\right)^5 + \cdots.\ ([76]217)$$

在本书第三版中，我们问：c 的最佳值是多少？

2006 年，谢子填、刘幸东证明 $c = \frac{1}{12}$ 是最佳值，并进一步证明：

$$-\frac{x^4}{6048} < \frac{e^{-x}}{(1-e^{x})^2} - \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{12} + \frac{x^2}{240}\right) < 0.$$（华南师范大学学报，2006(4)：36 ~ 38）

令 $f(x) = \frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}$，求出 f 的渐近展开式 $f(x) = x^{-2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k}$，

谢子填证明上述数列 $\{a_k\}$ 是交错级数，且 $|a_n|$ 严格递减趋于零.

$$a_k = -\frac{(2k+1)B_{2k+2}}{(2k+2)!},$$

式中 B_k 是 Bernoulli 数，从而

$$\frac{2(2k+1)}{(2\pi)^{2k+2}} < |a_k| < \frac{2k+1}{3(2\pi)^k}.\ ([164]60 \sim 62)$$

(3) 利用 Pode 逼近方法，可以证明当 $x > 0$ 时，成立

$$\frac{2x}{2+x} < \frac{6x+3x^2}{6+6x+x^2} < \log(1+x) < \frac{x(30+21x+x^2)}{30+36x+9x^2} < \frac{x(6+x)}{6+4x},$$

而当 $x > -1$ 时，成立

$$\frac{|x|}{\sqrt{1+x+\frac{x^2}{12}}} < |\log(1+x)| < \frac{|x|\left(1+x+\frac{1}{20}x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left[(1+x)\left(1+x+\frac{2}{15}x^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}}.\quad ([22]667)$$

(4) 设 $0 < x < 1$，则

$$\frac{2x}{2+x} \leqslant \log(1+x) \leqslant \frac{2x}{2+x-x^2}.$$（[305]114(2007)(1) 问题 11149）

(5) 设 $0 < x < \infty$，则

$$\log(1+x) > \frac{x^2+2x}{\sqrt{2(1+x)^4+2-x^2}}.$$ ([371]80(5)(2007),397)

(6) $\dfrac{1}{\log 2} - 1 < \dfrac{1}{\log(1+x)} - \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{2}$.

(7) 设 $a, x > 0$，则使不等式 $\log(px) \leqslant ax^2 + bx + c$ 成立的 p 的最大值是

$$p_0 = \frac{b+\sqrt{b^2+8a}}{2}\exp\left(\frac{b\sqrt{b^2+8a} - b^2 + 4a(1+2c)}{8a}x\right),$$

而且仅当 $x = \dfrac{-b+\sqrt{b^2+8a}}{4a}$ 时等号成立.（匡继昌，Starc. J. Math. Info. Quar, 11(4)(2001),176 ~ 177)

(8) [MCU]. 设 $0 < x < 1$，则

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} < \frac{\ln(1+x)}{\arcsin x}.$$

38. [MCU]. **Young 不等式**

$$xy \leqslant \begin{cases} e^{x-1} + y\ln y, & x \in R^1, y > 0, \\ e^y + x\ln x - x, & x \geqslant 1, y \geqslant 0, \\ e^y + x\ln(1+x) - 1, & x \geqslant 0, y \geqslant 0. \end{cases}$$

注 由第 3 章 No. 27，Young 不等式的积分形式：$ab \leqslant \int_0^a f(x)\mathrm{d}x + \int_0^b f^{-1}(x)\mathrm{d}x$. 令 $f(x) = \ln(1+x)$，$a = x-1$，$b = y$，即可得出 $xy \leqslant e^y + x\ln x - x$，$(x \geqslant 1, y \geqslant 0)$. 仅当 $y = \ln x$ 时等号成立. 从 Young 不等式还可推出：

(1) 设 $x, y \geqslant 0$，$p, q > 1$，$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$，$a, b > 0$，且 $(pa)^q(qb)^p \geqslant 1$，则

$$xy \leqslant ax^p + by^q;$$

(2) 设 $x, y > 0$，则

$$2xy \leqslant e^{x-1} + e^{y-1} + x\ln x + y\ln y.$$

39. 设 $a > 1$，$x > 0$，则

$$-\ln[1-(1-e^{-x})^a] < x^a.$$

证 令 $y = 1 - e^{-x}$，则 $0 < y < 1$. $-\ln[1-(1-e^{-x})^a] = -\ln(1-y^a)$ $< y^a \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{y^{na}}{n+1} < y^a\left(\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{y^n}{n+1}\right)^a = [-\ln(1-y)]^a = x^a$.

40. 设 $x > -1$，$x \neq 0$，则

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

注意这个不等式的几种常用变形：

(1) 将 $1+x$ 换成 x，得到

$$1 - (1/x) < \ln x < x - 1 \quad (x > 0, x \neq 1);$$

(2) 将 x 换成 $-x$,得到 当 $x<1, x\neq 0$ 时,

$$x<-\ln(1-x)<\frac{x}{1-x};\frac{1}{x}+\frac{1}{\ln(1-x)}<1.$$

41. 设 $x>0$,则

$$x-(x^2/2)<\ln(1+x)<x.$$

上式可改进为

$$\frac{2x}{2+x}<\ln(1+x)<\frac{x}{\sqrt{1+x}}. \tag{3.2}$$

(3.2) 式等价于下式:

$$\frac{2}{2x+1}<\ln(1+\frac{1}{x})<\frac{1}{\sqrt{x^2+x}}. \tag{3.3}$$

上式还可改进为

$$\frac{2}{2x+1}<\ln(1+\frac{1}{x})<\frac{2}{2x+1}(1+\frac{1}{12x}-\frac{1}{12(x+1)}).$$

提示:利用 Taylor 展开式:

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{y^{2k-1}}{2k-1}(|y|<1).\text{令 } y=\frac{1}{2x+1}, g(x)=(x+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{x})-1$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)(2x+1)^{2k}}\leqslant\frac{1}{3(2x+1)^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2x+1)^{2(k-1)}}=\frac{1}{12}(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}).$$

42. (1) **$\ln(1+x)$ 的多项式逼近**:设 $0\leqslant x\leqslant 1$,则

$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{5}a_kx^k+R_5(x)$. 式中 $|R_5(x)|\leqslant 1\times 10^{-5}$.

$a_1=0.99949556, a_2=-0.49190896$, $a_3=0.28947478, a_4=-0.13606275$, $a_5=0.03215845$. 进一步的结果见[101]68 ~ 69.

(2) $\ln(1+\frac{1}{x})$ 的多项式逼近:设 $x>0$,则

$$\ln(1+\frac{1}{x})=\sum_{k=0}^{n}\frac{2}{2k+1}\left(\frac{1}{2x+1}\right)^{2k+1}+R_n(x).$$

式中,$\frac{2}{(2n+3)}\cdot\frac{1}{(2x+1)^{2n+3}}<R_n(x)<\frac{2}{(2n+3)}\cdot\frac{1}{(2x+1)^{2n+1}[(2x+1)^2-1]}$.(曹家鼎,[384]1992,4:106 ~ 108)

43. 设 $0<x<1$,则

$$0<\ln(1+x)-\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}<\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

44. 设 $0<x<1$,则

$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{2k-1}}{2k-1}+R_n(x)$.

式中,$\frac{x^{2n+1}}{2n+1}<R_n(x)<(\frac{2-x}{1-x})\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

特别,$x=1/3, n=2$,得 $0.6921<\ln 2<0.6935$.

45.　设 $x>1$,则

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+(k+1)(x-1)}<\frac{\ln x}{x-1}<\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+k(x-1)}.$$

46.　设 $0<x\leqslant 0.5828$,则　$|\ln(1-x)|<3x/2$.([101]68)

47.　设 $|x|\leqslant 1/2$,则 $-x(x+1)<\ln(1-x)<x(x-1)$.

48.　设 $x>0,x\neq e$,则 $\frac{\ln x}{x}<\frac{1}{e}$.

49.　设 $x>0,x\neq 1,p>0$,则

$$1-\frac{1}{x}<2(1-\frac{1}{\sqrt{x}})<\ln x<p(x^{1/p}-1).$$

当 $x>1$ 时,下界可改进为　$\ln x>\frac{2(x-1)}{1+x}$.

50.　设 $p>0$,则当 x 充分大时,(1)　$\ln x<x^p$;(2)　$\ln x<\frac{x-3}{8}$.

51.　设 $x>1,T=\{a_0=1<a_1<\cdots<a_n=x\}$ 是$[1,x]$的任一分划,则

$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k-a_{k-1}}{a_k}<\ln x<\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k-a_{k-1}}{a_{k-1}}$;特别地,$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}<\ln n<\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$.

52. (1)　设 $x>0,x\neq 1$,则　$0\leqslant\frac{x\ln x}{x^2-1}\leqslant\frac{1}{2}$;

(2)　设 $x>0$,则　$\frac{-2}{e\sqrt{x}}\leqslant\log x\leqslant\frac{2}{e}\sqrt{x}$.

53.　[MCU]. 设 $x>0,x\neq 1$,则

(1)　$\frac{\ln x}{x-1}\leqslant\frac{1}{\sqrt{x}}$.　(2)　$\frac{2}{x+1}\leqslant\frac{\ln x}{x-1}\leqslant\frac{x+1}{2x}$

54.　**Karamata 不等式**:设 $x>0,x\neq 1$,则

$$\frac{\ln x}{x-1}\leqslant\frac{1+\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[3]{x}}.$$

证　令 $x=\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^3,0<|t|<1$,并利用 $\ln\frac{1+t}{1-t}$ 的 Taylor 级数展开式(No. 44),则所证不等式变成下述显然成立的不等式:

$$3\sum_{k=0}^{\infty}(1-\frac{1}{4k+1})t^{4k}+\sum_{k=0}^{\infty}(1-\frac{3}{4k+3})t^{4k+2}\geqslant 0.\ ([4]372\sim 373,527\sim 528)$$

注　令 $f(n)=1+\frac{1}{2}(\frac{e}{n})^n n!-\frac{n!}{n^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}$. 利用 Karamata 不等式证明 $\frac{1}{3}<f(n)<\frac{1}{2}$,更确切地,当 n 从 0 增到 ∞ 时,$f(n)$ 从$\frac{1}{2}$ 递减地趋于$\frac{1}{3}$.

55.　[MCU]. 设 $e<x<y$,则

$$\frac{x}{y}<\frac{\ln x}{\ln y}<\frac{y}{x}.$$

提示:考虑 $f(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$ 的单调性.

56. 设 $x > y > 0$,则 $\sqrt{xy} < \dfrac{x-y}{\ln x - \ln y} < \dfrac{1}{2}(x+y)$.

注 设 $f(t) = \left(\dfrac{x^t - y^t}{t(\ln x - \ln y)}\right)^{1/t}$,则当 t 从 0 递增且趋于 ∞ 时,$f(t)$ 从 $\sqrt{xy}$ 严格递增到 $\max\{x,y\}$.([301]1994,183(1):155 ~ 156)

57. 设 x,y 为正数,则 $x\ln(x^2+y^2) \leqslant 2x\ln x + y$.

58. 设 x,y,a,b 均为正数,则

$x\ln\dfrac{x}{a} + y\ln\dfrac{y}{b} \geqslant (x+y)\ln\dfrac{x+y}{a+b}$,仅当 $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b}$ 时,等号成立.

提示:考虑 $(x\ln x)'' > 0$.

特别,取 $a = b = 1$,有 $x\ln x + y\ln y \geqslant (x+y)\ln\dfrac{x+y}{2}$.

59. 设 $a > 1, b > c > 0$,则

$$\log_a\left(\frac{c}{b}\right) < \log_a\left(\frac{1+c}{1+b}\right).$$

60. **不同底的对数的比较:**

(1) 设 $a > b > 1$,则 $\log_a b < \log_b a$.

(2) 设 $0 < a < 1 < b$,则当 $ab > 1$ 时,$\log_a b < \log_b a$.

当 $0 < ab < 1$ 时,不等号反向;当 $ab = 1$ 时,$\log_a b = \log_b a$.

(3) 设 $a > b > c > 1$,则 $\log_a c < \log_a b < \log_c b$.

(4) $x > 1$ 时,$f(x) = \dfrac{\ln x}{\ln(x+1)}$ 严格递增,即 $\dfrac{\ln(x-1)}{\ln x} < \dfrac{\ln x}{\ln(x+1)} < 1 + \dfrac{1}{x}$.

由此推出:$\ln(n-1)\ln(n+1) < (\ln n)^2$; $\log_n(n+2) < [\log_n(n+1)]^2$.

(5) 若 $a > 2$,则 $\log_a(a-1)\log_a(a+1) < 1$.

61. 设 a,b,c,d 为正数,$a \neq c$.

(1) 设 $a > c > 1$,若 $c > d$,$bc - ad \geqslant 0$,则 $\log_a b > \log_c d$;若 $c < d$,$bc - ad \leqslant 0$ 时,不等号反向.

(2) 设 $a > c > 1$,$d \geqslant b > 1$,则 $\log_a b < \log_c d$.

(3) 设 $a > b > 0$,$c > 0$,$a > 1$,则

$\log_a b < \log_{(a+c)}(b+c)$,特别地,$\log_{(n+1)} n > \log_n(n-1)$.([348]1989,4:25 ~ 26)

(4) 设 $b > a > 1$,$c > 0$,则 $\log_a b > \log_{(a+c)}(b+c)$.

62. 设 $x + a > 0$,$x + b > 1$,$x < y$,则当 $a > b$ 时

$$\log_{(x+b)}(x+a) > \log_{(y+b)}(y+a).$$

若 $a < b$,则不等号反向.特别地,当 $1 < x < y$ 时,$\log_x(x+1) > \log_y(y+1)$ 成立.

63. **Lefort 不等式:**设 $a > 1$,$p > 0$,$0 < x < 1$,则

$0 < \log_a(p+x) - \log_a p - x[\log_a(p+1) - \log_a p] < \dfrac{x(1-x)}{2p^2}\log_a e \leqslant \dfrac{\log_a e}{8p^2}$.

([4]375)

64. 设 $x > 0$,$n \geqslant 2$,则

$(x+n-1)\ln(x+n-1) - x\ln x < n - 1 + \sum\limits_{k=1}^{n-1}\ln(x+k)$

$< (x+n)\ln(x+n)-(x+1)\ln(x+1)$.　([4]376 ~ 377)

65.　设 $x>0$,则 $0<(x+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{x})-1<\frac{1}{12x(x+1)}$.

66.　设 $x,y\geqslant 0$,则 $\ln(e+x\times 2^y)\leqslant(x+1)(y+1)$.

67.　设 a,b 为任意实数,则

$$\log_2(2^a+2^b)\geqslant\frac{1}{2}(a+b)+1.$$

68.　利用记号

$$\log^+|z|=\begin{cases}\log|z|, & |z|\geqslant 1,\\ 0, & 0<|z|<1,\end{cases}$$

则当 $a,b>0$ 时,有

$$\log^+(a+b)\leqslant\log 2+\log^+ a+\log^+ b,$$

$$\log^+\log^+(a+b)\leqslant\log 2+\log^+\log^+ a+\log^+\log^+ b,$$

而对任意两个复数 z_1,z_2,有 $|\log^+|z_1|-\log^+|z_2||\leqslant\log 2+\log^+|z_1\pm z_2|$.([364]1984.4:301 ~ 312)

69.　设 $u>e$,则方程 $x\ln x=u$ 的根 $x(u)$ 满足

$$\frac{u}{\ln u}<x(u)\leqslant(1+e^{-1})\frac{u}{\ln u}.$$

70.　设 $a_k>1,1\leqslant k\leqslant n,a_{n+1}=a_1$,则

$$\sum_{k=1}^{n}\log_{a_k}a_{k+1}\geqslant n.$$

仅当所有 a_k 相等时等号成立.

71.　**伪几何不等式**:设 x_k 为实数,$y_k\geqslant 0$,当 $y_k=0$ 时,$y_k\ln y_k$ 定义为 0,则

$\sum_{k=1}^{n}x_ky_k\leqslant\sum_{k=1}^{n}[e^{x_k}+y_k(\ln y_k-1)]$. (Eugenia, D. Anal. Numer. Theor Approx. 1987, 16(2):127 ~ 132)

72.　$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})\geqslant\sqrt{1+x^2}$,$(x\in R^1)$.

73.　设 $1\leqslant x\leqslant y$,则 $x(1+y)\ln x\geqslant(x+y)(x-1)$.

§4　双曲函数不等式

1.　$1+\mathrm{sh}x\leqslant\mathrm{ch}x$.

2.　设 $x>0,a\geqslant\sqrt{2}$,则 $a\cdot\mathrm{th}x>\sin(ax)$.　(证明[305]1986,93(5))

3.　设 $x>0$,则 $\sin x\cos x<\mathrm{th}x<x<(1/3)(2\mathrm{sh}x+\mathrm{th}x)$.

4.　设 $x>0$,则

$\frac{\mathrm{sh}x}{\sqrt{\mathrm{ch}(2x)}}<\mathrm{th}x<(\mathrm{sh}x)\exp(1-x\mathrm{cth}x)<2\mathrm{th}(x/2)<x<\mathrm{sh}x<(1/2)\mathrm{sh}(2x)$.

([345]1987,7:18;[305]1985,92(1))

5.　设 $x\geqslant 0$ 时,$0\leqslant\ln\mathrm{ch}x\leqslant x\mathrm{th}(x/2)$.

6.　$3x\leqslant\mathrm{sh}3x\leqslant x\mathrm{ch}3x+2x\leqslant 3x\mathrm{ch}3x$.

7.　设 $x>0$,则 $\frac{1}{x}\ln(\frac{\mathrm{sh}x}{x})\leqslant \mathrm{cth}x-\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{x}\ln\mathrm{ch}x\leqslant \mathrm{cth}\frac{3x}{2}-\frac{2}{3x}$

$$\leqslant \mathrm{th}\frac{x}{2}\leqslant \mathrm{th}x\leqslant \mathrm{cth}(\frac{3x}{2})-\frac{3x/2}{[\mathrm{sh}(3x/2)]^2}.$$

No. 5 ～ 7 见 Stolarsky,K. B. [301]1996,202(3):810 ～ 818. 该文还提出了四个未解决的问题.

8.　设 $x,y\geqslant 0$,则

$|\mathrm{ch}x-\mathrm{ch}y|\geqslant|x-y|(\mathrm{sh}x\mathrm{sh}y)^{1/2}$.

9.　**Lazarevic 不等式**: $\mathrm{ch}x<(\frac{\mathrm{sh}x}{x})^3\quad(x\neq 0)$.　　(4.1)

其中 3 是最佳指数.

证明:令 $f(x)=x-\mathrm{sh}x(\mathrm{ch}x)^{(-1/3)}$,　　(4.2)

注意(4.1) 式两端都是偶函数,所以,不妨设 x 是正数. 因为

$$f(0)=f'(0)=0,f''(x)=-\frac{4}{9}(\mathrm{sh}x)^3(\mathrm{ch}x)^{-7/3},$$

所以 $f(x)$ 是$(0,\infty)$ 上的凹函数,并且它的曲线在原点与 x 轴相切,从而在$(0,\infty)$ 上,$f(x)<0$,于是(4.1) 式得证.

为了证明使

$$\mathrm{ch}x<(\frac{\mathrm{sh}x}{x})^a,(x\neq 0)\tag{4.3}$$

成立的 a 的最小值是 3,只要比较(4.3) 式两边在原点的 Taylor 级数展开式:

$$\mathrm{ch}x=1+x^2/2!+\cdots.\qquad (\frac{\mathrm{sh}x}{x})^a=1+\frac{a}{3}\cdot\frac{x^2}{2}+\cdots.$$

另证:不妨设 $x>0$,利用 $\mathrm{sh}^3x=\frac{1}{4}\mathrm{sh}3x-\frac{3}{4}\mathrm{sh}x$,两边作 Taylor 级数展开,比较两边 x^{2n+1} 的系数,并利用 $4(2n-1)2n(2n+1)+3\leqslant 3^{2n+1}$.

10.　**Garnir 不等式**:$\mathrm{arctg}x\leqslant\frac{\pi}{2}\mathrm{th}x(x\geqslant 0)$. ([4]369 ～ 370)

11.　设 $0<x<5$,则

$\frac{(3+(x^2/11))\mathrm{sh}x}{2+\mathrm{ch}x+(x^2/11)}<x<\frac{[3+(x^2/10)]\mathrm{sh}x}{2+\mathrm{ch}x+(x^2/10)}$. ([305]1954,61:623 ～ 62[illegible])

12.　**Frame 不等式**. 设 $x>0$,则当 $r>1$ 时,有

$$(\mathrm{sh}rx)^{r+1}+(\mathrm{ch}rx)^{r+1}\leqslant(\mathrm{ch}(r+1)x)^r;$$

当 $0<r<1$ 时,不等号反向,当 $x=0$ 或 $r=0$ 或 $r=1$ 时等号成立. ([305]1938,45:54 ～ 56)

13.　$\int_0^1\mathrm{th}\left(\frac{1}{ax}\right)\mathrm{d}x<\begin{cases}1, & 0<a\leqslant 1,\\ (1+\ln a)/a, & a>1.\end{cases}$

证　利用 $\mathrm{th}x<1$ 及 $\mathrm{th}x<x\ (x>0)$,得到 $\mathrm{th}\frac{1}{ax}<\min\{1,\frac{1}{ax}\},(a,x>0)$.

积分得

$$\int_0^1\mathrm{th}(\frac{1}{ax})\mathrm{d}x<\int_0^1\min\{1,\frac{1}{ax}\}\mathrm{d}x,(a>0).$$

14. 设 $x>0$,则 $\mathrm{sh}x<x\mathrm{ch}x$.

提示:对于要证的不等式两边作 Taylor 级数展开,然后比较两边 x^{2n+1} 的系数.([301]1988,131:271 ~ 281)

15. 若 $0<x<\pi/2$,则

$$\sqrt{\sin x\cdot \mathrm{sh}x}<x<(\sin x+\mathrm{sh}x)/2.$$

提示:令 $f(x)=x^2-\sin x\cdot\mathrm{sh}x$,求 f 的四阶导数:$f^{(4)}(x)=4\sin x\mathrm{sh}x>0$.

16. [MCU]. 设 $x,y\geqslant 0,p,q\geqslant 0,p+q=1,0\leqslant t\leqslant\left|\ln\left(\frac{x}{y}\right)\right|$.则

$$x^py^q\leqslant x\frac{\mathrm{sh}(tp)}{\mathrm{sh}t}+y\frac{\mathrm{sh}(tq)}{\mathrm{sh}t}.$$

([301]1996,202(3):810 ~ 818,52 届普特南数学竞赛)

17. (1) 设 $x>0$,则

$$\mathrm{th}x\leqslant\mathrm{sh}(\mathrm{th}x)\leqslant x\leqslant\mathrm{sh}x\leqslant\mathrm{sh}(\mathrm{sh}x).$$

(2) 设 $x,y>0$,则

$$\sqrt{\mathrm{th}x}\cdot\sqrt{\mathrm{th}y}\leqslant\mathrm{th}\sqrt{xy};\quad \sqrt{\mathrm{sh}(\mathrm{th}x)}\cdot\sqrt{\mathrm{sh}(\mathrm{th}y)}\leqslant\mathrm{sh}(\mathrm{th}\sqrt{xy}).$$

(李大矛,石焕南,[344]2006(4):278 ~ 283)

18. $$\frac{3x}{3+x^2}<\mathrm{th}x<\frac{3x}{3+x^2-\frac{1}{15}x^4}.$$

左边不等式对 $x>0$ 成立,右边不等式对 $0\leqslant x<\left[\frac{1}{2}(15+\sqrt{405})\right]^{\frac{1}{2}}$ 成立.([21]553)

19. 设 $x,y>0$,则

(1) $$\mathrm{ch}(\sqrt{xy})\leqslant\sqrt{(\mathrm{ch}x)(\mathrm{ch}y)}\leqslant\mathrm{ch}\left[\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\leqslant\frac{1}{2}(\mathrm{ch}x+\mathrm{ch}y),$$

(2) $$\frac{\mathrm{sh}(\sqrt{xy})}{\sqrt{xy}}\leqslant\left\{\left(\frac{\mathrm{sh}x}{x}\right)\left(\frac{\mathrm{sh}y}{y}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{\mathrm{sh}\left[\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]}{\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

以上仅当 $x=y$ 时等号成立.([301]335(2007):1294 ~ 1308)

20. 设 $x>0$,则 $\mathrm{th}x+2\mathrm{sh}x>3x$.

21. 设 $x>0$,则

(1) $$\frac{3\mathrm{ch}x}{1+2\mathrm{ch}x}<\frac{1+2\mathrm{ch}x}{2+\mathrm{ch}x}<\frac{\mathrm{sh}x}{x}<\frac{1+\mathrm{ch}x}{2}.$$

(2) $$\frac{1}{\mathrm{ch}x}<\frac{\sin x}{x}<\frac{x}{\mathrm{sh}x}.$$

(3) $\alpha\mathrm{ch}x+(1-\alpha)<\frac{\mathrm{sh}x}{x}<\beta\mathrm{ch}x+(1-\beta)$ 成立的充要条件是 $\alpha\leqslant 0,\beta\geqslant\frac{1}{3}$.

(朱灵,[303]11(2)(2008),229 ~ 235)

22. 设 $x>0$, $\alpha\geqslant 1$,则

$$2\left(\frac{x}{\mathrm{sh}x}\right)^{\alpha}+\left(\frac{x}{\mathrm{th}x}\right)^{\alpha}>3\quad 或 \left(\frac{\mathrm{sh}x}{x}\right)^{\alpha}<\frac{2}{3}+\frac{1}{3}(\mathrm{ch}x)^{\alpha}.$$

(朱灵,Abstract and Appl. Anal. 2009:485842)

23.　设 $0 < x < \frac{\pi}{2}$,则

$$\left(\frac{\operatorname{sh}x}{x}\right)^2 + \frac{\operatorname{th}x}{x} > 2 + \frac{8}{45}x^3\operatorname{th}x.$$

(朱灵,[303]10(4)(2007),727 ~ 731)

24.　设 $x \neq 0$, $\frac{7}{5} \leqslant \lambda \leqslant 3$,则

$$\operatorname{ch}x \leqslant \left(1 - \frac{\lambda}{3} + \frac{\lambda}{3}\operatorname{ch}x\right)^{\frac{3}{\lambda}} < \left(\frac{\operatorname{sh}x}{x}\right)^3.$$

25.　设 $x \neq 0$, $p \geqslant 1$,则

$$2 < \left(\frac{x}{\operatorname{sh}x}\right)^{2p} + \left(\frac{x}{\operatorname{th}x}\right)^p < \left(\frac{\operatorname{sh}x}{x}\right)^{2p} + \left(\frac{\operatorname{th}x}{x}\right)^p.$$

(朱灵,同 No. 22).

26.　设 $0 < x < r$,令 $f(\alpha) = \left(\frac{r^2 + x^2}{r^2 - x^2}\right)^\alpha$,则

① $f(\alpha) \leqslant \frac{\operatorname{sh}x}{x} \leqslant f(\beta) \Leftrightarrow \alpha \leqslant 0$, $\beta \geqslant \frac{r^2}{12}$;

② $f(\alpha) \leqslant \operatorname{ch}x \leqslant f(\beta) \Leftrightarrow \alpha \leqslant 0, \beta \geqslant \frac{r^2}{4}$;

③ $\frac{1}{f(\beta)} \leqslant \frac{\operatorname{th}x}{x} \leqslant \frac{1}{f(\alpha)} \Leftrightarrow \alpha \leqslant 0$, $\beta \geqslant \frac{r^2}{6}$. (朱灵,[394]56(2008),522 ~ 529)

第六章　多项式不等式

本章所讨论的多项式,包括代数多项式(记为 $P_n(x)$)和三角多项式(记为 $T_n(x)$).它们可通过下述换元和周期延拓的方式相互转化:设 f 是$[a,b]$上的连续函数,称为原始函数.令

$$x=\frac{1}{2}[(b-a)t+(b+a)],\varphi(t)=f\left\{\frac{1}{2}[(b-a)t+(b+a)]\right\}.$$

则 φ 是$[-1,1]$上的连续函数,再令 $t=\cos\theta,g(\theta)=\varphi(\cos\theta)$,于是按 $g(\theta)=g(-\theta),g(\theta)=g(\theta+2\pi)$,就可将 $g(\theta)$ 延拓成$(-\infty,\infty)$上的以 2π 为周期的偶函数,$g(\theta)$ 称为 f 的**诱导函数**.从而代数多项式不等式可以转化为相应的三角多项式不等式,反之亦然.但为了读者查阅和使用的方便,我们还是将它们分别论述.本章介绍的经典正交多项式,在数学物理方程、特殊函数理论、数值分析以至工程技术上都占有十分重要的地位.

本章还包括多项式的导数和积分不等式、多项式逼近不等式等.

§1　一般代数多项式不等式

1.　[MCM].设对于任意实数 $x,P_2(x)=ax^2+2bx+c\geqslant 0,Q_2(x)=px^2+2qx+r\geqslant 0$,其中 a,b,c,p,q,r 都是实数,则对任何实数 x,都有

$$apx^2+2bqx+cr\geqslant 0.\tag{1.1}$$

提示:在证明中用到以下定理:

对于所有实数 $x,P_2(x)=ax^2+2bx+c\geqslant 0$ 的充要条件是 $a\geqslant 0,c\geqslant 0,ac-b^2\geqslant 0$,从而可推出 $ap\cdot cr-(bq)^2\geqslant 0$,于是(1.1)式可得证.

推广:设 $P_2(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f$,则对于所有实数 $x,y,P_2(x,y)>0$ 的充要条件是:

(1)　$a>0,\begin{vmatrix}a&b\\b&c\end{vmatrix}>0,\begin{vmatrix}a&b&d\\b&c&e\\d&e&f\end{vmatrix}>0;$

或(2)　$a>0,\begin{vmatrix}a&b\\b&c\end{vmatrix}=0,\begin{vmatrix}a&b\\d&e\end{vmatrix}=0,\begin{vmatrix}a&d\\d&f\end{vmatrix}>0;$

或(3)　$a=b=d=0,c>0,\begin{vmatrix}c&e\\e&f\end{vmatrix}>0;$

或(4)　$a=b=c=d=e=0,f>0.$

2.　**抛物线不等式**:设 $P_2(x)=ax^2+bx+c$,记 $M=(4ac-b^2)/(4b)$.则当 $a>0$ 时,$P_2(x)\geqslant M$;当 $a<0$ 时,不等号反向,仅当 $x=-b/(2a)$ 时等号成立.

若把 $P_2(x)$ 限制在有限区间$[\alpha,\beta]$上，则 $a>0$ 时，$M\leqslant P_2(x)\leqslant\max\{P_2(\alpha),P_2(\beta)\}$，而当 $a<0$ 时，$\min\{P_2(\alpha),P_2(\beta)\}\leqslant P_2(x)\leqslant M$.

设 f 是$[\alpha,\beta]$上的连续函数，$f(\alpha)=f(\beta)=0$，$f(x_0)>0(a<x_0<b)$，则存在抛物线 $P_2(x)=ax^2+bx+c(a<0)$ 和 $y\in(\alpha,\beta)$，使得对于$[\alpha,\beta]$中所有 x，都有 $P_2(x)\geqslant f(x)$，$P_2(y)=f(y)$.

这些抛物线不等式看来简单，却很有用. 不但可用于证明较难的初等不等式，包括数学竞赛题，还是函数逼近论中著名的抛物线技巧. 下面是一道数学奥林匹克试题：

(1) 设 $f(x)=ax^2+bx+c$，$g(x)=a+bx+cx^2$，若当 $|x|\leqslant1$ 时 $|f(x)|\leqslant1$，则 $|g(x)|\leqslant2$.

证 因为 $f(1)=g(1)$，$f(-1)=g(-1)$，则

$$|g(1)|\leqslant1,\ |g(-1)|\leqslant1,\ |c|=|f(0)|\leqslant1.$$

为证 $|g(x)|\leqslant2$，我们用反证法，设存在 x_0，$|x_0|\leqslant1$，使得 $|g(x_0)|>2$. 则抛物线 $y=g(x)$ 的顶点坐标为$(x_0,g(x_0))$，于是 $g(x)=c(x-x_0)^2+g(x_0)$. 但由于 $|1-x_0|\leqslant1$，从而，$|g(x_0)|=|g(1)-c(1-x_0)^2|\leqslant|g(1)|+|c|\leqslant2$，与假设矛盾. 证毕.

(2) 设 $f(x)=ax^2+bx+c$ 中，系数 a,b,c 都为正数且 $a+b+c=1$，则对于任意 n 个正数 x_k 满足 $\prod_{k=1}^{n}x_k=1$ 时，都有 $\prod_{k=1}^{n}f(x_k)\geqslant1$.

提示：先证对于任意正数 x_1,x_2，有 $f(x_1)f(x_2)\geqslant(f(\sqrt{x_1x_2}))^2$.

若 $n=2^m$，则逐次利用上式得到

$$\prod_{k=1}^{n}f(x_k)\geqslant[f(\sqrt{x_1x_2})f(\sqrt{x_3x_4})\cdots f(\sqrt{x_{n-1}x_n})]^2\geqslant\cdots\geqslant(f(\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}))^n$$
$$=[f(1)]^n=1.$$

若 $n\neq2^m$，则在$\{x_1,\cdots,x_n\}$中补入若干个数 1，使得数组中数的个数恰好为 2^m，注意利用 $f(1)=1$ 即可得证.

抛物线技巧可作如下推广：设 $f\in C[a,b]$，$f(a)=f(b)=0$，若 $\exists x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)>0$，则存在 $g(x)=c_2u_2(x)+c_0(c_0<0)$ 和某个 $y\in(a,b)$，使得 $g(y)=f(y)$，且 $g(x)\geqslant f(x)$，$x\in[a,b]$. 式中 $u_2(x)$ 定义如下：设 $q_1(t)$，$q_2(t)$ 是$[a,b]$上严格正值的连续可微函数，令 $Q_2(x)=\int_a^x q_2(t)\mathrm{d}t$，$u_1(x)=\int_a^x q_1(t)\mathrm{d}t$，$u_2(x)=\int_a^x q_1(t)Q_2(t)\mathrm{d}t$，于是可用$\{1,u_1(x),u_2(x)\}$代替$\{1,x,x^2\}$.（[81]350～353）

3. (1) [MCM]. **三次抛物线不等式**：设 $P_3(x)=\sum_{k=0}^{3}a_kx^k$，$Q_3(x)=\sum_{k=0}^{3}b_kx^k$，若 $P_3(-1)=-1$，$P_3(1)=1$，$P_3(x)$ 在开区间$(-1,1)$上取得最小值 -1 和最大值 1，而 $|Q_3(x)|<1$，$\forall x\in(-1,1)$，则对所有 $|x|>1$，有 $|Q_3(x)|<|P_3(x)|$.（[348]1991，9:35）

(2) **杨路判别定理**：设 $x>0$，$a_3>0$，则 $P_3(x)=\sum_{k=0}^{3}a_kx^k\geqslant0$ 的充要条件是下面

三组条件之一成立：

① $a_0, a_1, a_2 \geqslant 0$； ② $a_0 = 0, a_2^2 - 4a_1a_3 \leqslant 0$； ③ $a_0 > 0, D_3 \leqslant 0$.

式中 $D_3 = -27(a_0a_3)^2 + 18a_0a_1a_2a_3 + (a_1a_2)^2 - 4a_2^3a_0 - 4a_1^3a_3$.

杨路在[170]中还系统地论述了多项式的判别系统. 刘保乾利用符号运算软件 Maple，将差分代换用于多项式的降次，得到了一系列有用的结果. ([351]2009(1):16～21 及所引用的文献)

注 设 $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ 为 n 次代数多项式，$f \in L[a,b]$，则卷积 $Q_n(x) = \int_a^b f(t)p_n(x-t)\mathrm{d}t$ 也是 n 次代数多项式.

若核 $K_n(t) = \sum_{k=0}^{n}(a_k\cos kt + b_k\sin kt)$ 为 n 阶三角多项式，则 $\forall f \in L[0,2\pi]$，卷积 $T_n(x) = \int_0^{2\pi} f(t)K_n(x-t)\mathrm{d}t$ 也是 n 阶三角多项式. ([82]106～107)

4. 设 $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad (x \in [a,b])$ 为 n 次实系数多项式. 令

$\| P_n \| = \max\{| P_n(x) | : a \leqslant x \leqslant b\}, L(P_n) = \sum_{k=0}^{n} | a_k |, H(P_n) = \max\{| a_0 |, | a_1 |, \cdots, | a_n |\}, G(P_n) = \max\{1, \sum_{j=0}^{n-1} | a_j |\}$，则：

(1) 存在正常数 C_1, C_2，使得对所有 $P_n(x)$，

$$\| P_n \| \leqslant C_1 L(P_n), \quad L(P_n) \leqslant C_2 \| P_n \| \text{ 成立.}$$

证 令 $C_1 = \max\{1, | x |, | x |^2, \cdots, | x |^n\}$，则对于所有 $x \in [a,b]$，有

$| P_n(x) | \leqslant \sum | a_k | \cdot | x |^k \leqslant C_1 L(P_n)$，从而 $\| P_n \| \leqslant C_1 L(P_n)$.

在区间$[a,b]$上任意固定 $n+1$ 个点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，则方程组 $\sum_{k=0}^{n} a_k x_j^k = P_n(x_j)(j = 0,1,\cdots,n)$ 的系数行列式 D 是 Vandermonde 行列式，$D \neq 0$，所以 $a_k = D_k/D(k = 0,1,\cdots,n)$. 式中 D_k 是把 D 中第 k 列换成常数项 $P_n(x_j)(j = 0,1,\cdots,n)$ 的行列式. 将行列式 D_k 展开后，上式可写成 $a_k = \sum_{j=0}^{n} \beta_{x_j}^{(k)} P_n(x_j)$，从而 $| a_k | \leqslant \sum_{j=0}^{n} | \beta_{x_j}^{(k)} | \times \| P_n \|$，上式对 k 求和，并令 $C_2 = \sum_{k=0}^{n}(\sum_{j=0}^{n} | \beta_{x_j}^{(k)} |)$，即可证得 $L(P_n) \leqslant C_2 \| P_n \|$.

(2) 当 $a \geqslant 3$ 时，$| a^k - P_n(k) | \ (k = 0,1,\cdots,n+1)$ 中至少有一个不小于 1.

提示：用数学归纳法. ([345]1982,3:33～34)

(3) 设$[a,b] = [-1,1]$，$a_k = 1 \quad (k \leqslant n)$，则

$$① \quad \| P_n \| \geqslant \begin{cases} 2^{-(k-1)} \dfrac{k!}{n} \dfrac{\left(\dfrac{n-k}{2}\right)!}{\left(\dfrac{n+k}{2}-1\right)!} & (\text{若 } n \text{ 与 } k \text{ 的奇偶性相同}), \\ 2^{-(k-1)} \dfrac{k!}{(n-1)} \dfrac{\left(\dfrac{n-k-1}{2}\right)!}{\left(\dfrac{n+k-3}{2}\right)!} & (\text{若 } n \text{ 与 } k \text{ 的奇偶性相反}). \end{cases}$$

特别，若 $k=n$，则得 **Chebyshev 不等式：**

$$\| P_n \| \geqslant \frac{|a_n|}{2^{n-1}}.$$

注 上述不等式可改进为

$$\max_{x\in[-1,1]} |P_n(x)|^2 - \min_{x\in[-1,1]} |P_n(x)|^2 \geqslant \frac{|a_n|^2}{2^{n-2}}.$$

② **Markov 不等式：**

$$|a_k| \leqslant \begin{cases} 2^{(k-1)} \cdot \dfrac{n}{k!} \cdot \dfrac{\left(\dfrac{n+k}{2}-1\right)!}{\left(\dfrac{n-k}{2}\right)!} \| P_n \| & (n-k \text{ 为偶数}), \\ 2^{(k-1)} \cdot \dfrac{(n-1)}{k!} \cdot \dfrac{\left(\dfrac{n+k-3}{2}\right)!}{\left(\dfrac{n-k-1}{2}\right)!} \| P_n \| & (n-k \text{ 为奇数}). \end{cases}$$

证明见[60]上册第 60 页. 特别地，$|a_n| \leqslant 2^{n-1} \| P_n \|$；$|a_{n-1}| \leqslant 2^{n-2} \| P_n \|$.

1978 年，Reimer, M. 将 Markov 不等式推广到多元多项式：

$P_m^r(x) = \sum_{|k|\leqslant m} b_k x^k$，$b_k \in R^1$，$x=(x_1,\cdots,x_r) \in R^r$. $k=(k_1,\cdots,k_r)$ 为非负整数组，$x^k = x_1^{k_1}\cdots x_r^{k_r}$，$|k| = k_1 + \cdots + k_r$，$D=[-1,1]$，令 $\| P_m^r \| = \max\{|P_m^r(x)| : x \in D^r\}$.

(i) 若 $|k| = m$，且 $\| P_m^r \| \leqslant 1$，则 $|b_k| \leqslant 2^{m-\bar{r}}$. 式中 $\bar{r}$ 表示 k 的非零分量的数目. ([327]1978, 23(1): 65 ~ 69)

(ii) $\left| \sum_{|k|=m} b_k \right| \leqslant 2^{m-1} \| P_m^r \|$，$\left| \sum_{|k|=m-1} b_k \right| \leqslant 2^{m-2} \| P_m^r \|$ $(m \geqslant 2)$. ([327]1982, 35(1): 94)

(4) 若 $|P_{n-1}(x)| \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} (-1 \leqslant x \leqslant 1)$，则 $|P_{n-1}(x)| \leqslant n$.

提示：利用 Lagrange 插值公式.

(5) 设 n 为奇数，$a_n = 1$，则当 $x > G(P_n)$ 时，$P_n(x) > 0$，而当 $x < -G(P_n)$ 时，$P_n(x) < 0$.

证 1 当 $x > G(P_n)$ 时，$P_n(x) \geqslant x^n - \left(\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| x^k\right) \geqslant x^{n-1}\left(x - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\right) > 0$，将 x 换成 $-x$，可类似证明第二个不等式.

证 2 $P_n(x)$ 在区间 $[-G(P_n), G(P_n)]$ 上连续，又 n 为奇数，所以 $P_n(x)$ 的实根必全

部位于区间$[-G(P_n),G(P_n)]$之内.

(6)　令$[P_n(x)]^2=\sum_{k=0}^{2n}b_kx^k$，且$0\leqslant a_k\leqslant a_0,k=1,\cdots,n$，则

$$b_{n+1}\leqslant\frac{1}{2}[P_n(1)]^2.$$

证　由多项式乘法，得$b_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}a_ka_{n-k+1}$，$P_n(1)=\sum_{k=0}^{n}a_k$. 从条件得

$$\frac{1}{2}[P_n(1)]^2=\frac{1}{2}\Big(\sum_{k=0}^{n}a_k^2+2\sum_{0\leqslant k<j\leqslant n}a_ka_j\Big)\geqslant\sum_{0\leqslant k<j\leqslant n}a_ka_j\geqslant a_0\Big(\sum_{k=1}^{n}a_k\Big)\geqslant b_{n+1}.$$

(7)　设$[a,b]=[0,1]$，$b_k=\sum_{j=1}^{n}a_j\binom{k}{j}\binom{n}{j}^{-1}$，$k=0,1,\cdots,n$，则

$\min\{b_k:0\leqslant k\leqslant n\}\leqslant P_n(x)\leqslant\max\{b_k:0\leqslant k\leqslant n\}$(**Cargo 不等式**,1966).

(8)　设$P_n(x)$的所有根x_k都满足$|x_k|<1,k=1,2,\cdots,n,a_n\neq0$，则

$$\sum_{k=0}^{n}k|a_k|^2>(n/2)\sum_{k=0}^{n}|a_k|^2.\ ([305]1962,69:670)$$

5.　设$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^{n-k}$，$a_0=1$，若$P_n(x)=0$的根为$x_1,\cdots,x_n$，则有

(1)　**Walsh 不等式**：$|x_j|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|a_k|^{1/k}$，$j=1,\cdots,n$.

(2)　$|x_j|<(1+\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2)^{1/2}$；$\prod(1+|x_j|)\leqslant2^n\cdot\sqrt{n+1}H(P_n)$，

式中$H(P_n)=\max\{|a_0|,|a_1|,\cdots,|a_n|\}$.

(3)　$|x_j|<(1+|a_1-1|^2+|a_2-a_1|^2+\cdots+|a_n-a_{n-1}|^2+|a_n|^2)^{1/2}$，

(4)　若$x_k>0,k=1,\cdots,n$，则

$$\frac{a_1a_{n-1}}{a_0a_n}\geqslant n^2.$$

(5)　设$R=\Big(\Big(\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|\Big)/|a_n|\Big)$，$a_n\neq0$，则方程$P_n(x)=0$的所有根都满足

$|x_k|\leqslant\max\{R,\sqrt[n]{R}\}$，$k=1,\cdots,n$.

6.　设$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$　$(x\in[-1,1])$为n次实系数多项式.

(1)　若$\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2\mathrm{d}x=1$，　则对于$-1\leqslant x\leqslant1$，有$|P_n(x)|\leqslant(n+1)/\sqrt{2}$.

仅当$P_n(x)=\pm\frac{\sqrt{2}}{n+1}S_n(x)$，且$x=1$；或$P_n(x)=\pm\frac{\sqrt{2}}{n+1}S_n(-x)$，且$x=-1\ (n>0)$时等号成立. $S_n(x)$可表为 Legendre 多项式的线性组合.([56]Vol. 2:110)

(2)　设$P_n(x)$在$[-1,1]$上非负且$\int_{-1}^{1}P_n(x)\mathrm{d}x=1$，则

$$P_n(1)\leqslant\begin{cases}k(k+1)/2, & 若\ n=2k-1,\\(k+1)^2/2, & 若\ n=2k.\end{cases}$$

$P_n(-1)$ 有同样的估计. 这些上界不能再改进. ([56]Vol. 2:111)

(3) 设 $P_n(x)$ 在 $[-1,1]$ 上非负, 且

$\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1-x)^{\beta}P_n(x)\mathrm{d}x = 1,\quad \alpha,\beta > -1,$ 则

$$P_n(1) \leqslant \begin{cases} 2^{-(\alpha+\beta+1)}\dfrac{\Gamma(k+\alpha+1)\Gamma(k+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+2)\Gamma(k)\Gamma(k+\beta+1)}, & n = 2k-1, \\ 2^{-(\alpha+\beta+1)}\dfrac{\Gamma(k+\alpha+2)\Gamma(k+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+2)\Gamma(k+1)\Gamma(k+\beta+1)}, & n = 2k. \end{cases}$$

交换 α,β 的位置, 得到 $P_n(-1)$ 的上界. 这些上界都不能再改进. ([56]Vol. 2:111 ~ 112)

(4) 设 $\alpha,\beta > -1$, 且 $\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}[P_n(x)]^2\mathrm{d}x = 1$, 则

$$[P_n(1)]^2 \leqslant \frac{1}{2^{\alpha+\beta+1}}\frac{\Gamma(n+\alpha+2)\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+2)\Gamma(n+1)\Gamma(n+\beta+1)};$$

$$[P_n(-1)]^2 \leqslant \frac{1}{2^{\alpha+\beta+1}}\frac{\Gamma(n+\beta+2)\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\beta+2)\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+1)}.$$

特别当 $\alpha = 1,\beta = 0$ 时, 即 $\int_{-1}^{1}(1-x)[P_n(x)]^2\mathrm{d}x = 1$ 时, 有

$$P_n(1) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{n+2}{2};\quad |P_n(-1)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{n+2}{2}^{1/2}$$ 成立.

这些上界都是最好的. ([56]Vol. 2:110 ~ 111)

7. 设 m,M 分别是 n 次多项式 $P_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值. 记

$$a_n = \begin{cases} k(k+1), 若\ n = 2k-1, \\ (k+1)^2, 若\ n = 2k, \end{cases}$$ 则

$$m + (M-m)/a_n \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b P_n(x)\mathrm{d}x \leqslant M - (M-m)/a_n$$ 成立.

这是积分第一中值定理关于 n 次多项式 $P_n(x)$ 的加强形式. ([56]Vol. 2:111)

提示: 不妨设 $m = 0$, 若 $a < \xi < b$, 则

$$P_n(\xi) \leqslant \frac{a_n}{\xi-a}\int_a^{\xi}P_n(x)\mathrm{d}x;\ P_n(\xi) \leqslant \frac{a_n}{b-\xi}\int_{\xi}^{b}P_n(x)\mathrm{d}x,$$

从而 $$P_n(\xi) \leqslant \frac{a_n}{b-a}\int_a^b P_n(x)\mathrm{d}x;\ M \leqslant \frac{a_n}{b-a}\int_a^b P_n(x)\mathrm{d}x.$$

8. 设 $\alpha > -1$, $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n}a_kx^k$ 为 n 次实系数多项式. 当 $x \geqslant 0$ 时 $P_n(x) \geqslant 0$, 且 $\int_0^{\infty}e^{-x}x^{\alpha}P_n(x)\mathrm{d}x = 1$. 令 $k = [\frac{n}{2}]$, 则

$$P_n(0) \leqslant \frac{\Gamma(k+\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+2)\Gamma(k+1)}.$$

这一上界不能再改进. 特别当 $\alpha = 0$ 时, $P_n(0) \leqslant k+1 = [\frac{n}{2}]+1$; 而对于 $x \geqslant 0$, 有 $P_n(x) \leqslant ([\frac{n}{2}]+1)e^x$. ([56]Vol. 2:112)

9. 设 $\alpha > -1$，$P_n(x)$ 为 n 次实系数多项式，若 $\int_0^{\infty} e^{-x}x^{\alpha}[P_n(x)]^2\mathrm{d}x = 1$，则

$$|P_n(0)|^2 \leqslant \frac{\Gamma(n+\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+2)\Gamma(n+1)}.$$ ([56]Vol. 2:111)

10. 设 n 次多项式 $P_n(x)$ 满足条件：

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}[P_n(x)]^2\mathrm{d}x = 1$，则 $P_n(0)^2 \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{(2k+1)!!}{(2k)!!}$，式中 $k = [\frac{n}{2}]$.

([56]Vol. 2:111)

11. **马—斯不等式(马勒尔—斯普林茹克不等式)**:1932 年，马勒尔提出猜想：$\forall n, \forall \varepsilon > 0$，至多存在有限多个 n 次整系数多项式 $P_n(x)$，使得 $|P_n(x)| \leqslant [H(P_n)]^{-(n+\varepsilon)}$ a.e. x 成立. $H(P_n)$ 的定义见 No. 4.

1965 年，斯普林茹克证明了上述猜想(Baker, A., Transcendental Number Theory, Cambridge Univ. Press, 1975).

12. 对于所有实数 x 和任意偶数 n，有 $P_n(x) = x^n - nx + n - 1 \geqslant 0$. 仅当 $x = 1$ 时等号成立.

证 根据笛卡儿符号原则，多项式 $P_n(x)$ 的正零点不能多于两个，且不能有负零点. $P_n(x)$ 在 $x = 1$ 处有一个重零点，而且它是唯一的实零点，从而不等式得证.

当 n 为奇数时，$P_n(x) = 0$ 仅有一个根 $x_n \neq 1$，使得

$$-2 \leqslant x_n < -\left(1 + \frac{1}{n}\right), \qquad x_n < x_{n+2} \quad (n = 3, 5, 7, \cdots),$$

于是当 $x > x_n$，$x \neq 1$ 时，$P_n(x) > 0$，而当 $x < x_k$ 时，$P_n(x) < 0$.

若将上述 n 换成实数 p，令 $f(p) = x^p - px + p - 1$，$x \geqslant 0$. 则当 $0 < p < 1$ 时，$f(p) \leqslant 0$，而当 $p < 0$ 或 $p \geqslant 1$ 时，$f(p) \geqslant 0$. ([22]74)

注 这是一个基本不等式. 在许多情况下，用于寻找其他不等式的出发点，例如，[4]§2.19 中的 Benson 方法.

13. [MCM]. 设 $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ 为整系数多项式，于是

(1) 若 $W(P_n)$ 表示 $P_n(x)$ 中系数为奇数的个数，考虑多项式 $Q_k(x) = (1+x)^k$，$k = 0, 1, 2, \cdots$，若 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 都是整数，且 $0 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_n$，则

$$W(Q_{i_1} + \cdots + Q_{i_n}) \geqslant W(Q_{i_1});$$

(2) 若 r 为 $P_n^2(x) = m^2$ 的不同整数根的个数 (m 为自然数)，则 $r \leqslant n + 2m$.

([345]1984, 11:34)

14. 设 $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(k - nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$，则 $\forall x \in R^1$，$P_n(x) \leqslant \frac{n}{4}$.

证 先证恒等式 $P_n(x) = nx(1-x)$，再从 $4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2 \geqslant 0$，得 $x(1-x) \leqslant 1/4$.

15. **Chebyshev 不等式**:设 $0 \leqslant x \leqslant 1$，$\delta > 0$，令 $\Delta_n(x) = \{k : |\frac{k}{n} - x| \geqslant \delta\}$，则

$$\sum_{k\in\Delta_n(x)}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\leqslant\frac{x(1-x)}{n\delta^2}\leqslant\frac{1}{4n\delta^2}.$$

证　利用上一个不等式和 $k\in\Delta_n(x)$ 时，$(\frac{k-nx}{n\delta})^2\geqslant 1$，有

$$\sum_{k\in\Delta_n(x)}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\leqslant\frac{1}{n^2\delta^2}\sum_{k\in\Delta_n(x)}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$
$$\leqslant\frac{1}{n^2\delta^2}\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\frac{x(1-x)}{n\delta^2}\leqslant\frac{1}{4n\delta^2}.$$

16.　**Lorentz 不等式**：设 $a_k\geqslant 0,0\leqslant x\leqslant 1$，则 $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k(1-x)^{n-k}$ 称为 Lorentz 多项式．1963 年，Lorentz，G. G. 证明，对于任意自然数 r，存在与 r 有关的常数 C，使得 $\|P_n^{(r)}\|\leqslant Cn^r\|P_n\|$，式中，$\|P_n\|=\max\{|P_n(x)|,0\leqslant x\leqslant 1\}$．

1972 年，Scheick，J. T. 对于 $r=1,2$，将这个不等式改进为：

设 $t_n(x)=\begin{cases}1/2, & 若\ n=1,\\ x+\dfrac{1-2x}{n}, & 若\ n\geqslant 2.\end{cases}$

则对于 $0\leqslant x\leqslant 1/2$，有

(1)　$-2P_n(x)\leqslant P'_n(x)\leqslant e\cdot n\cdot P_n[t_n(x)]$．

(2)　$|P''_n(x)|\leqslant 2en(n-1)P_n[t_n(x)]$．

1985 年，周颂平又进一步推广为：

$$\|P_n^{(r)}\|_q\leqslant\begin{cases}c_rn^r\|P_n\|_q, & 1\leqslant q\leqslant\infty,\\ c_rn^{rq}\|P_n\|_q, & 0<q<1.\end{cases}$$

式中 $\|P_n\|_q=\begin{cases}(\int_0^1|P_n(x)|^q\mathrm{d}x)^{1/q}, & 1\leqslant q<\infty,\\ \int_0^1|P_n(x)|^q\mathrm{d}x, & 0<q<1.\end{cases}$　([352]1985，12(2)：157 ~ 160)

17.　**Bernstein 第二不等式**：设 $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$ 为 n 次代数多项式，则

$$|P'_n(x)|\leqslant\frac{n}{\sqrt{1-x^2}}\|P_n\|_{C[-1,1]},(-1<x<1).$$

提示：令 $x=\cos\theta$，归结为 n 阶三角多项式：$P_n(\cos\theta)=T_n(\theta)$．见本章 §3.

推论 1　设 $a<x<b$，则

$$|P'_n(x)|\leqslant\frac{n}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}\|P_n\|_{C[a,b]}.$$

推论 2　设 $a<a_1<b_1<b$，则 $\forall x\in[a_1,b_1]$，有

$$|P'_n(x)|\leqslant Mn\|P_n\|_{C[a,b]};\ |P_n^{(k)}(x)|\leqslant(Mkn)^k\|P_n\|_{C[a,b]}.$$

式中 $M=\max\{\frac{1}{a_1-a},\frac{1}{b-b_1}\}$．而 n^k 可换成 $n(n-1)\cdots(n-k+1)$．

Bernstein 第二不等式给出了用代数多项式的大小来估计它的导数的大小，在逼近论

中是证明逆定理的基本工具.但对于区间端点,它便失去了意义,为了估计多项式导数在整个闭区间上的大小,有下述与之类似的 Markov 不等式.

1994 年,Borwein 等证明了实有理函数的 Bernstein 型不等式:设 $P(x)$ 为 (n,n) 型实有理函数,其极点为 $a_k \in R^1 - [-1,1]$,则

$$|P'(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{a_k^2-1}}{|a_k - x|} \| P \|_c, x \in [-1,1].$$

([317]1994,50(2):501 ~ 519)

18. **Markov 不等式**(1889):设 $P_n(x)$ 是 $[a,b]$ 上 n 次实系数代数多项式,则

(1) $$\| P'_n \|_c \leqslant \frac{2n^2}{b-a} \| P_n \|_c. \tag{1.2}$$

式中系数 $\frac{2n^2}{b-a}$ 是最佳的,由此推出 k 阶导数 $P_n^{(k)}(x)(k \leqslant n)$ 的不等式:

$$\| P_n^{(k)} \|_c \leqslant \frac{2^k}{(b-a)^k} n^2 \cdots (n-k+1)^2 \| P_n \|_c. \tag{1.3}$$

但当 $k \geqslant 2$ 时系数不是最佳的,它的最佳形式是

$$\| P_n^{(k)} \|_c \leqslant \frac{2^k n^2 (n^2-1) \cdots (n^2-(k-1)^2)}{(b-a)^k (2k-1)!!} \| P_n \|_c. \tag{1.4}$$

([321]1916,77:213 ~ 258)

注 设 $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ 为第一类 Chebyshev 多项式.取 $[a,b] = [-1,1]$,则

$$T_n^{(k)}(1) = \frac{n^2(n^2-1)\cdots(n^2-(k-1)^2)}{(2k-1)!!}.$$

于是(1.4)式可写成

$$\| T_n^{(k)} \|_{C[-1,1]} \leqslant T_n^{(k)}(1) \| P_n \|_{C[-1,1]}. \tag{1.5}$$

1982年,Bojanov 证明上述不等式中 $C[-1,1]$ 范数可改为 $L^p[-1,1]$ 范数,$1 \leqslant p < \infty$. ([327]1982,35:181 ~ 190)

设 n 阶多项式 $Q_n(x)$ 在 $[-1,1]$ 内有 n 个不同的零点,令

$$D = \{-1\} \cup \{1\} \cup \{x_j : Q'_n(x_j) = 0, 1 \leqslant j \leqslant n-1\}.$$

若 $P_n(x)$ 满足 $|P_n(x_j)| \leqslant |Q_n(x_j)|, x_j \in D$,则

$$|P_n^{(k)}(x)| \leqslant \max\left\{ |Q_n^{(k)}(x)|; \left| \left(\frac{x^2-1}{k}\right) Q_n^{(k+1)}(x) + x Q_n^{(k)}(x) \right| \right\}, 1 \leqslant k \leqslant n,$$

$x \in [-1,1]$.

推论 设 $|P_n(\cos \frac{j\pi}{n})| \leqslant 1, 0 \leqslant j \leqslant n$,则 $\| P_n^{(k)} \|_C \leqslant \| T_n^{(k)} \|_C$.式中 $T_n(x)$ 为第一类 Chebyshev 多项式,C 范数在 $[-1,1]$ 上取.([332]1992,8(3):51 ~ 61)

若在 $T_{n-1}(x)$ 的零点 x 处,$|P_n(\pm 1)| \leqslant 1$ 成立,且 $|P_n(x)| \leqslant \sqrt{1-x^2}$,则成立 **D-S 型不等式(Dyffin-Schaeffer 型不等式)**:

$\| P_n^{(k)} \|_C \leqslant T_n^{(k)}(1)$,仅当 $P_n = \pm T_n$ 时等号成立.([327]1998,93(1):157 ~ 176)

(2) 取 $[a,b] = [-1,1]$,则

$$\| P'_n \|_{C[-1,1]} \leqslant n \min\left\{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, n\right\} \| P_n \|_{C[-1,1]}.$$

特别地，若 $|x| \leqslant 1$，$|P_n(x)| \leqslant 1$，则 $|P'_n(x)| \leqslant n^2$.

例如，$P_2(x) = ax^2 + bx + c$，若 $|x| < 1$，$|P_2(x)| \leqslant 1$，则

$$|P'_2(x)| = |2ax + b| \leqslant 4.$$

此题曾两次作为数学竞赛试题.（[66]80 ~ 83）

(3)　1980 年，Podkorytov-Dynkin 证明：设 $x \geqslant 1, 1 \leqslant p \leqslant \infty$，则

$$|P_n^{(k)}(x)| \leqslant c(p,k)n^k(x + \sqrt{x^2-1})^{n+\frac{2}{p}}\left(\frac{1}{n} + \sqrt{x^2-1}\right)^{-k-\frac{2}{p}} \| P_n \|_p,$$

若 $1 \leqslant p < \infty$，则与 p, k 有关的常数 $c(p,k)$ 有以下估计式：

$c(p,k) \leqslant M^{k+1}k!(p-1)^{1-\frac{1}{p}}$，其中 M 为绝对常数.

(4)　$\| P'_n \|_{C[-1,1]} \leqslant (n^2/2)[\max P_n(x) - \min P_n(x)]$，$-1 \leqslant x \leqslant 1$，特别当 $P_n(x) > 0$ 时，有

$$\| P'_n \|_{C[-1,1]} \leqslant n^2/2 \| P_n \|_{C[-1,1]}.$$

(5)　$\| P'_n \|_\infty \leqslant \dfrac{2(n+1)^2}{b-a} \| P_n \|_\infty$；

$$\| P_n \|_q \leqslant \left[\frac{2(p+1)(n+1)^2}{b-a}\right]^r \| P_n \|_p,$$

式中 $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$，$r = (1/p) - (1/q)$，$\| \cdot \|_p$ 在 $L^p[a,b]$ 上取.（[55]85）

(6)　**广义 Markov 不等式**：设 f' 在 $[0,\infty)$ 上递增，则

$$\int_{-1}^{1} f(|P'_n(x)|)\mathrm{d}x \leqslant \int_{-1}^{1} f[\| P_n \|_{C[-1,1]} |T'_n(x)|]\mathrm{d}x.$$

式中 $T_n(x)$ 为第一类 Chebyshev 多项式.（[339]1999，19(4)：673 ~ 679）

19.　1937 年，Hille，Szegö 等将 Markov 不等式推广到 $L^p[-1,1]$ 空间. 证明

$$\| P'_n \|_p \leqslant c(n,p)n^2 \| P_n \|_p. \tag{1.6}$$

式中 $c(n,p) = \begin{cases} 2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}, & p = 1, \\ 2(p-1)^{\frac{1}{p}-1}\left(p+\dfrac{1}{n}\right)\left[1+\dfrac{p}{np-p+1}\right]^{n-1+\frac{1}{p}}, & p > 1. \end{cases}$

$c(n,p) \leqslant 6\exp\left(1+\dfrac{1}{e}\right)$. $(n > 0, p \geqslant 1)$；　$\lim\limits_{p\to\infty} c(n,p) = 2\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1} < 2e$；

$$\lim_{n\to\infty} c(n,p) = \begin{cases} 2e, & p = 1, \\ 2ep(p-1)^{\frac{1}{p}-1}, & p > 1. \end{cases}$$

特别当 $p = 2$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} c(n,2) = 1/\pi$.（Hille. 1937）

$$c(n,2) = \frac{[n+(3/2)]^2}{n^2\pi\left[1 - \dfrac{\pi^2-3}{12\left(n+\frac{3}{2}\right)^2} + \dfrac{R}{\left(n+\frac{3}{2}\right)^4}\right]} \quad (n \geqslant 5),$$

式中 $-6 < R < 13$.（Schmidt，1943）

$$c(n,2)\leqslant\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})(1+\frac{3}{n})\right]^{1/2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}};$$

$c(n,2)$ 关于 n 递减，且当 $n>64$ 时，$1/\pi<c(n,2)<1/3$.

问题：当 $p\neq 2$ 时，$c(n,p)$ 是否也关于 n 递减？若它递减，则可推出

$\|P'_n\|_p\leqslant n^2(1+p)^{1/p}\|P_n\|_p$.

([327]1990,62(2):197 ~ 205)

1990 年，Goetgheluck. P. 将(1.6)式改进为：

$\|P'_n\|_1\leqslant(8/\pi)^{1/2}[n+(3/4)]^2\|P_n\|_1$；　$\|P'_n\|_p\leqslant cn^2\|P_n\|_p,(p>1)$.

式中 $c=\left[\frac{(2p+1)^{2+\frac{1}{p}}}{p(p+1)}\right]^{\frac{p-1}{p+1}}\left(2p\frac{p+1}{p-1}\right)^{1/p}\left(\frac{p-1}{2}\right)^{\frac{2}{p(p+1)}}\left[\left(1-\frac{3}{5n}\right)\left(1+\frac{1}{np}\right)\right]^{1-\frac{1}{p}}$.

当 $p\to\infty$ 时，$c\to 4(1-\frac{3}{5n})$.

Markov 不等式的另一推广是

$\|P'_n\|_p\leqslant\|T'_n\|_p\|P_n\|_\infty,1\leqslant p\leqslant\infty$，式中 T_n 是第一类 Chebyshev 多项式(本章 §2). $C(n,p)=\|T'_n\|_p$ 是最佳常数. 特别地，$C(n,1)=2n,C(n,\infty)=n^2$.

Ciesielski, Zbigniew 提出猜想：当 $p>2$ 时，

$$\|T'_n\|_p\leqslant n^{2/q}\sigma_{n,p}^{1/p}. \tag{1.7}$$

式中 $1<p<\infty,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\sigma_{n,p}=2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^{p-1}}$，而当 $1<p<2$ 时，(1.7)式右边还要乘上因子 1.033……. 见《Approx. Theory》Memphis，TN，1991,257 ~ 262. 另见[327]1999,101(1):148 ~ 155.

Dzjadyk 不等式：设 $\omega(t)$ 为连续模(第 12 章)，$\Delta_n(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}+\frac{1}{n^2}$，$r$ 为整数，若 $|P_n(x)|\leqslant\Delta_n^r(x)\omega(\Delta_n(x)),\forall x\in[-1,1]$，则

$$|P'_n(x)|\leqslant C_r\Delta_n^{r-1}(x)\omega(\Delta_n(x)),x\in[-1,1].$$

([71]163 ~ 173)

20.　1989 年，周颂平证明：设 $P_n(x)$ 是具有正系数的 n 阶代数多项式，则

$$\|P_n^{(k)}(x)(\sqrt{1-x^2})^k\|_p\leqslant c_kn^\alpha\|P_n\|_q,$$

式中 $1\leqslant p,q\leqslant\infty,\alpha=\frac{k}{2}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$.

1980 年，Taberski 证明：当 $0<p<1$ 时，$\|P'_n\|_p\leqslant c_pn^2\|P_n\|_p$；

若 $-1<\alpha<\beta<1$，则 $\|P'_n\|_{L^p[\alpha,\beta]}\leqslant c(\alpha,\beta,p)n\|P_n\|_p$.

1987 年，周颂平将上述结果推广为：

$$\int_{-1}^{1}|P_n^{(k)}(x)\Delta_n^k(x)|^p\mathrm{d}x\leqslant c_{r,p}\int_{-1}^{1}|f(x)|^p\mathrm{d}x,$$

式中，$\Delta_n(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}+\frac{1}{n^2}$. 而 Timan 则证明

$$|P_n^{(k)}(x)|\leqslant c_k[\Delta_n(x)]^{-k}\|f\|_c,x\in(-1,1).$$

上述范数除指明以外，均在[－1,1]上取.([352]1987,14(1):25～28;1989,16(3):245～247)

21. 设 $u_m(x)$ 是 m 阶第二类 Chebyshev 多项式：

$u_m(x)=\sin(m\arccos x)$, $Q_n(x)=(x^2-1)u_{n-2}(x)$,

$P_n(x)$ 是[－1,1]上 n 次代数多项式，若 $\|P_n\|_c\leqslant\sqrt{1-x^2}$，则

(1) $\|P_n^{(k)}\|_c\leqslant Q_n^{(k)}(1)$.([309]1988,310(2):693～702)

(2) 令 $\omega(x)=(1-x^2)^t$，式中 $t=k-(5/2)$, $k\geqslant 2$，则

$\|P_n^{(k)}\|_{2,\omega}\leqslant\|Q_n^{(k)}\|_{2,\omega}$.(Guessab, A 等,[327]1997,90(2):255～282)

22. Markov 不等式可推广到多元多项式：在 R^n 中，设 $P_m(x)=\sum_{|\beta|\leqslant m}a_\beta(x-x_0)^\beta$ 是次数不超过 m 的多项式，$B=B(x_0,r)$ 是以 x_0 为中心、r 为半径的闭球，$0<r\leqslant 1$，则

$$\max_B|\mathrm{grad}P_m|\leqslant cr^{-1}\max_B|P_m|.\quad([329]1984,80:141\sim 166)$$

1989 年，Nadzhmiddinov, D. 等证明了三角形中多项式的 Markov 不等式：

$$\frac{2n^2}{h}\leqslant\sup_{\zeta}\sup_{P_n\neq 0}\|D_\zeta P_n\|\cdot\|P_n\|^{-1}\leqslant\frac{4n^2}{h}.$$

式中 Δ 为 R^2 中三角形，$\|\cdot\|$ 为 $C(\Delta)$ 上的范数，D_ζ 表示沿 ζ 的方向导数，h 是三角形的最小高.([405],1989,46(2):76～82,159)

1992 年，Ditzian, Z. 证明：设 D 为 R^n 中有界凸集，则

$$\left\|\frac{\partial}{\partial\zeta}P_n\right\|_p\leqslant Cn^2\|P_n\|_p;\tag{1.8}$$

$$\|\sqrt{1-x^2}P'_n(x)\|_p\leqslant Cn\|P_n\|_p;\tag{1.9}$$

$$\|P'_n\|_p\leqslant Cn^2\|P_n\|_p.\tag{1.10}$$

(1.8)式中的 p 范数在 D 上取，而(1.9)～(1.10)式中 p 范数在[－1,1]上取，$1<p\leqslant\infty$.([327]1992,70(3):273～283)

1996 年，Skalyga, V. I. 考虑了 R^n 中的方体

$Q=\{x=(x_1,\cdots,x_n)\in R^n:-1\leqslant x_k\leqslant 1,1\leqslant k\leqslant n\}$ 上的多项式

$P_m(x)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha x^\alpha$，式中 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 为 n 重指标，若 $|P_m(x)|\leqslant 1$, $x\in Q$，则

$$\max_{x\in Q}\Big(\sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha P_m(x)|^2\Big)^{1/2}\leqslant m;$$

$$\max_{x\in Q}\max_{|\alpha|=2}|D^\alpha P_m(x)|\leqslant m^2(m^2-1)/3.$$

([405],1996,60(5):783～787)

23. 设 $P_n(x)=\sum_{k=0}^n a_kx^k$ 中所有系数 a_k 都是非负的，则当 $x\geqslant 0$ 时，

$$x[P'_n(x)^2-P_n(x)P''_n(x)]\leqslant P'_n(x)P_n(x)\text{ 成立.}$$

由此推出，设 $P_n(x)=\sum_{k=0}^n a_k(1-x)^k(1+x)^{n-k}$ 中所有 $a_k\geqslant 0$，则

$$(1-x^2)[P'_n(x)^2-P''_n(x)P_n(x)]\leqslant nP_n(x)^2-2xP_n(x)P'_n(x).$$

([308]1988,102(2):284)

24.　**Schur 不等式:**

(1)　设 $P_{n-1}(x)$ 是 $n-1$ 次代数多项式,若 $-1<x<1$ 时,有

$$|P_{n-1}(x)|\leqslant\frac{M}{\sqrt{1-x^2}},$$

则在 $[-1,1]$ 上,有 $|P'_{n-1}(x)|\leqslant Mn$. ([60] 第一册 214 ~ 216)

注　从 Schur 不等式可直接证明前面的 Bernstein 不等式和 Markov 不等式.

(2)　若 $P_n(a)=P_n(b)=0, n\geqslant 2$,则

$$\|P'_n\|_{C[a,b]}\leqslant\frac{2n}{b-a}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}\|P_n\|_{C[a,b]}.$$

25.　**Love 不等式:**若 n 次代数多项式 $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$ 的所有零点都是实的,则

$$(n-1)[P'_n(x)]^2-nP_n(x)P''_n(x)\geqslant 0.$$ ([305]1962,69:668)

26.　**Erdös 不等式:**若 n 次代数多项式 $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$ 的所有零点都是实的,但不在 $[-1,1]$ 内,则

$$\|P'_n\|_{C[-1,1]}<\frac{1}{2}en\|P_n\|_{C[-1,1]}.$$

注　若区间 $[-1,1]$ 改为 $[a,b]$,则不等式右端分母 2 应改为 $b-a$.

27.　**Turán 不等式:**若 $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$ 的所有零点都是实的,但都在 $[-1,1]$ 内,C 范数与 L^p 范数都在 $[-1,1]$ 上取,则

(1)　$\|P'_n\|_C\geqslant\frac{\sqrt{n}}{6}\|P_n\|_C$.

(2)　1976 年,Varma, A. K. 证明了下述最好的结果:

$$\frac{\|P'_n\|_C}{\|P_n\|_C}\geqslant\begin{cases}n/2, & \text{若 } n=2,3;\\ \dfrac{n}{\sqrt{n-1}}\left(1-\dfrac{1}{n-1}\right)^{\frac{n-2}{2}}, & \text{若 } n\geqslant 4 \text{ 且为偶数};\\ \dfrac{n^2}{(n-1)\sqrt{n+1}}\left(1-\dfrac{\sqrt{n+1}}{n-1}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)^{\frac{n-1}{2}}, & \text{若 } n\geqslant 5 \text{ 且为奇数}.\end{cases}$$

(3)　在 L^p 空间中,Turan 不等式也有相应的结果:

$$\|P'_n\|_p\geqslant c\sqrt{n}\|P_n\|_p, (1\leqslant p<\infty).$$

若 $P_n(x)$ 至多有 k 个零点位于 $[-1,1]$ 之外,则当 $n>k$ 时,有

$$\|P'_n\|_p\geqslant c_k\sqrt{n}\|P_n\|_p, (1\leqslant p\leqslant\infty).$$

其中 c_k 是只与 k 有关的正常数.

([110]877 ~ 878,[352]1984,11(1):28 ~ 33)

(4)　1992 年,周颂平证明:存在正常数 C,使得

$$\|P'_n\|_p\leqslant Cn^r\|P_n\|_q, \tag{1.11}$$

式中 $0 < p \leqslant q \leqslant \infty, r = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}) \geqslant 0$.

作者还证明了两个类似的不等式([327]1992,68(1):45 ~ 48),作者提出,若取消 $P_n(x)$ 的零点都在$[-1,1]$内的限制,(1.11)式是否仍成立?又在什么条件下,成立相应的加权不等式 $\| P'_n \|_{p,w} \leqslant Cn^r \| P_n \|_{q,\omega}$.([71]:198;[158]:473 ~ 481)

(5) 设 $P_n(x)$ 在 $|x| < 1$ 内至多有 k 个零点,则存在绝对常数 $C > 0$,使得 $\forall x \in [-1,1]$,有下式成立

$$|P'_n(x)| \leqslant C\min\{(k+1)n, \left(\frac{(k+1)n}{1-x^2}\right)^{1/2}\} \| P_n \|_C.\text{([71]:174)}$$

28. 设 $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ 是圆 $|z| \leqslant 1$ 上的复系数多项式,记

$\| P_n \| = \max\{|P_n(z)|: |z| = 1\}, \| P_n \|_i = \min\{|P_n(z)|: |z| = 1\}$,则

(1) $\| P'_n \| \leqslant n \| P_n \|$,

仅当 $P_n(z) = mz^n \exp(i\alpha) \quad (m > 0)$ 时等号成立.

(2) **Erdös-Lax 不等式**:若 $P_n(z)$ 在 $|z| = 1$ 内部没有零点,则

$$\| P'_n \| \leqslant (n/2) \| P_n \|.$$

仅当 $P_n(z)$ 的所有零点都位于 $|z| = 1$ 上时等号成立.1969 年 Govil,N. K. 将上式推广为:若 $P_n(z)$ 在 $|z| \leqslant R$ 内无零点,$R \geqslant 1$,则对于 $|z| \leqslant R$,有

$$\| P'_n \| \leqslant \frac{n}{1+R} \| P_n \|.$$

(3) 1939 年,Turan 证明:若 $P_n(z)$ 的所有零点都在 $|z| \leqslant 1$ 内,则

$$\| P'_n \| \geqslant (n/2) \| P_n \|.$$

1969 年,Malik 证明:若 $P_n(z)$ 的所有零点都在 $|z| \leqslant R \leqslant 1$ 内,则上式可换成 $\| P'_n \| \geqslant \frac{n}{1+R} \| P_n \|$,仅当 $P_n(z) = (z+R)^n$ 时等号成立.

([327]1990,63(1):65 ~ 71,推广见[301]1992,166:319 ~ 324)

(4) 1988 年,Aziz,A. Dawood,Q. M. 将上述结果推广为:若 $P_n(z)$ 的所有零点都在 $|z| \leqslant 1$ 内,则

$$\| P'_n \|_i \geqslant n \| P \|_i;$$

$$\min_{|z|=R>1} |P_n(z)| \geqslant R^n \| P_n \|_i;$$

$$\max_{|z|=R>1} |P_n(z)| \leqslant R^n \| P_n \|, \tag{1.12}$$

仅当 $P_n(z) = mz^n \exp(i\alpha) \quad (m > 0)$ 时等号成立.(从极大模原理可直接证明(1.12)式)

$$\| P'_n \| \geqslant (n/2)(\| P_n \| + \| P_n \|_i),$$

仅当 $P_n(z) = \alpha z^n + \beta(|\beta| \leqslant |\alpha|)$ 时等号成立.

若 $P_n(z)$ 在 $|z| < 1$ 内没有零点,则

$$\| P'_n \| \leqslant (n/2)(\| P_n \| - \| P_n \|_i);$$

$$\max_{|z|=R>1} |P_n(z)| \leqslant (\frac{R^n+1}{2}) \| P_n \| - (\frac{R^n-1}{2}) \| P_n \|_i.$$

仅当 $P_n(z)=\alpha z^n+\beta\ \ (|\beta|\geqslant|\alpha|)$ 时等号成立.([327]1988,54(3):306 ~ 313)

1991 年 Govil,N. N. 又进一步推广为:设

$\|P_n\|=\max\{|P_n(z)|:|z|=R\},\ \|P_n\|_i=\min\{|P_n(z)|:|z|=R\}$,

若 $P_n(z)$ 在 $|z|<R(R\geqslant 1)$ 内无零点,则

$$\|P_n^{(m)}\|\leqslant n(n-1)\cdots(n-m+1)(1+R^m)^{-1}(\|P_n\|-\|P_n\|_i);$$

若 $P_n(z)$ 的零点都在 $|z|\leqslant R$ 内,则当 $R\leqslant 1$ 时,有

$$\|P'_n\|\geqslant(\frac{n}{1+R})\|P_n\|+\frac{n}{(1+R)R^{n-1}}\|P_n\|_i,$$

仅当 $P_n(z)=(z+R)^n$ 时等号成立;而当 $R\geqslant 1$ 时,

$$\|P'_n\|\geqslant\left(\frac{n}{1+R^n}\right)(\|P_n\|+\|P_n\|_i),$$

仅当 $P_n(z)=z^n+R^n$ 时等号成立.([327]1991,66:39 ~ 35;[301]2002,269(2):489 ~ 499)

(5)　若 $P_n(z)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kz^k=a_n\prod\limits_{k=1}^{n}(z-z_k),a_n\neq 0,n\geqslant 2,|z_k|\leqslant R_k,1\leqslant k\leqslant n$,令 $R=\max\{R_1,\cdots,R_n\},S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{R}{R+R_k}$,若 $R\geqslant 1$,则

$$\|P'_n\|\geqslant\frac{2S_n}{1+R^n}\|P_n\|+|a_1|(1-\frac{1}{R^2})+\frac{2|a_{n-1}|S_n}{R(1+R^n)}(\frac{R^n-1}{n}-\frac{R^{n-2}-1}{n-2}),(n>2);$$

$$\|P'_n\|\geqslant\frac{2S_n}{1+R^n}\|P_n\|+|a_1|(1-\frac{1}{R})+\frac{|a_1|(R-1)^nS_n}{R(1+R^n)},(n=2).$$

以上二式均仅当 $P_n(z)=z^n+R^n$ 时等号成立.([327]1990,63:65 ~ 71)

(6)　设 $P_n(z)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kz^{n-k}=\prod\limits_{k=1}^{n}(z-z_k)$,式中 $a_0=1,a_1=0,n\geqslant 2$. $P_n(z)$ 的零点 z_k 满足 $\sum\limits_{k=1}^{n}z_k=0$. 它的导数 $P'_n(z)=n\prod\limits_{k=1}^{n-1}(z-\omega_k)$ 的零点 ω_k 满足 $\sum\limits_{k=1}^{n-1}\omega_k=0$. 于是复平面 C 的原点 O 是集 $\{z_k;\omega_k\}$ 的形心. $R=\{z_k;\omega_k\}$ 称为 $P_n(z)$ 的复 Rolle 集. Schoenberg, I. J. 猜想 $\sum\limits_{k=1}^{n-1}|\omega_k|^2\leqslant[1-(2/n)]\sum\limits_{k=1}^{n}|z_k|^2$,仅当复 Rolle 集 R 为直线时等号成立. 已证以下三种特殊情况时成立:(1)$n=3$;(2)$P_n(z)=z^n+a_kz^{n-k}$ 为二项式;(3) 所有 ω_k 为实数.([305],1986,93:8 ~ 13)

(7)　设 $P_n(z)$ 满足 $P_n(z)=z^nP_n(1/z)$. Rahman 于 1983 年提出,是否成立 $\|P'_n\|\leqslant\frac{n}{\sqrt{2}}\|P_n\|$?已知 $n=1,2$ 时成立,相关不等式见[308]1983,89(2):259 ~ 266.

29.　设 $P_n(z)=a_n\prod\limits_{k=1}^{n}(z-z_k)\ (a_n\neq 0)$ 为 n 次多项式,令

$\|P_n\|=\max\{|P_n(z)|:|z|=1\}$.

(1)　若 $|z_k|\geqslant M_k\geqslant 1\ (1\leqslant k\leqslant n)$,则

$$\|P'_n\|\leqslant c\cdot n\cdot\|P_n\|.$$

式中 $c = (\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{M_k - 1})(\sum_{k=1}^{n}\frac{M_k+1}{M_k-1})^{-1}$，仅当 $P_n(z) = (z+M_k)^n \quad (M_k \geqslant 1)$ 时等号成立.

(2) 若 $a_n = 1$，$|z_k| \leqslant M_k \leqslant 1, 1 \leqslant k \leqslant n$，则

$$\| P'_n \| \geqslant \frac{n}{2}\left\{1 + \frac{1}{1+(2/n)}\sum_{k=1}^{n}\frac{M_k}{1-M_k}\right\}\| P_n \|.$$

更多结果见[400]1997,107(2):189 ~ 196 和[301]2002,269(2):489 ~ 499.

30. 设 $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ 为 n 次复多项式.

令 $M_p(R) = \max\{|P_n(z)| : |z| = R\}$，$\| P_n \| = M_p(1)$，则

(1) $\| P'_n \| + \varepsilon_n | P_n(0) | \leqslant n \| P_n \|$，

式中 $\varepsilon_1 = 1$，$n \geqslant 2$ 时，$\varepsilon_n = \dfrac{2n}{2n+2}$，对于每个 n，$|P_n(0)|$ 的系数是最佳系数.

(2) 对于所有 $R > 1$，有

$$M_p(R) + (R^n - R^{n-2}) | P_n(0) | \leqslant R^n \| P_n \|,$$

其中 $|P_n(0)|$ 的系数是最佳系数.

(3) **Frappier 不等式**：$\| P'_n \| + c_n | P'_n(0) | \leqslant n \| P_n \|$.

式中 $c_1 = 0$，$c_2 = \sqrt{2} - 1$，$c_3 = \sqrt{2}/2$，而 $n \geqslant 4$，c_n 是方程

$$(n+4)x^4 - 16x^3 - 8(3n+2)x^2 + 16n = 0$$

在(0,1)内的唯一根，对于每个 n，$|P'_n(0)|$ 的系数是最佳系数.

1989 年，Abdul, A. 将上述结果推广为：

$$\| P'_n \| \leqslant (n/2)(M_\alpha + M_{\alpha+\pi}).$$

式中 $M_\alpha = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} | P_n \cdot \exp[i(\alpha + 2k\pi)/n] |$，$\alpha \in R^1$，当 $P_n(z) = z^n + re^{i\alpha}(|r| \leqslant 1)$ 时等号成立.([301]1989,144(1):226 ~ 235)

31. **Colucci 不等式**：若复系数多项式 $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^{n-k}$ 的每一个根的模不超过正数 M，则

$$| P_n^{(k)}(z) | \leqslant k! \binom{n}{k} | a_0 | (|z| + M)^{n-k},$$

其中 $P_n^{(0)}(z) = P_n(z)$，$k = 0,1,2,\cdots,n$.

32. 设 $P_n(x)$ 为实系数多项式，并且对于所有实数 x，$P_n(x) \geqslant 0$，则

$$\sum_{k=0}^{n} P_n^{(k)}(x) \geqslant 0，式中\ P_n^{(0)}(x) = P_n(x).$$

33. **Newman 不等式**：

(1) 设 $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$，$Q_m(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^{m-k}$，$R_n(x) = P_k(x)/Q_j(x)$，$0 \leqslant k, j \leqslant n$，$a_0 \neq 0$，$b_0 \neq 0$，则当 $n \geqslant 5$ 时，有

$$\inf_{R_n}\max_{x} ||x| - R_n(x)| \leqslant 3\exp(-\sqrt{n}),\quad \inf_{P_n}|\max_{x}|x| - P_n(x)| \geqslant \frac{c}{n}, (c > 0).$$

([82]149)

(2)　$Q_n(x)=\prod_{k=0}^{n-1}[x+\exp(-\frac{k}{\sqrt{n}})]$ 称为 n 次 Newman 多项式，

则 $\forall x\in[\exp(-\sqrt{n}),1],n\geqslant 5$，有

$$\left|\frac{Q_n(-x)}{Q_n(x)}\right|\leqslant \exp(-\sqrt{n}).$$

(3)　令 $R_n(x)=x\frac{Q_n(x)-Q_n(-x)}{Q_n(x)+Q_n(-x)}$，式中 $Q_n(x)$ 是 n 次 Newman 多项式，则当 $n\geqslant 5$ 时，有

$$||x|-R_n(x)|\leqslant 3\exp(-\sqrt{5}).$$

(4)　设 $Q_n(x)$ 为 n 次 Newman 多项式，令

$$K_n(x)=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{Q_n(x)-Q_n(-x)}{Q_n(x)+Q_n(-x)}\right]=\frac{Q_n(x)Q'_n(-x)+Q_n(-x)Q'_n(x)}{[Q_n(x)+Q_n(-x)]^2},$$

则
$$K_n(0)\sim\frac{\sqrt{n}}{2}e^{\sqrt{n}};$$

$$\int_{\exp(-\sqrt{n})}^1|K_n(x)|\mathrm{d}x\leqslant 3\exp(-\sqrt{n});\quad \int_{-\exp(-\sqrt{n})}^{\exp(-\sqrt{n})}|K_n(x)|\mathrm{d}x\leqslant 1+6e^{-\sqrt{n}};$$

([83]149 ~ 154)

34.　**Totik 不等式**：设 $P_n(x)=\prod_{k=1}^n(x-\alpha_k)$ 为 n 次多项式. $\omega(x)=(\frac{1}{\pi})\sqrt{1-x^2}$，则

$$\prod_{|\alpha_k|\geqslant 1}(|\alpha_k|+\sqrt{|\alpha_k|^2-1})\leqslant 2^n\|P_n\|_{p,\omega}.$$ ([327]1990,63:121 ~ 122)

35.　设 $P_n(x)$ 是 n 次实系数多项式，记 $\|P_n\|=\int_0^\infty P_n(x)e^{-x}\mathrm{d}x$，若 $\forall x\geqslant 0,P_n(x)\geqslant 0$，则

$$-\left[\frac{n}{2}\right]\|P_n\|\leqslant\|P'_n\|\leqslant\|P_n\|.$$ ([305]1968,75:511 ~ 512)

36.　设 n 次代数多项式 $P_n(x)$ 的所有零点均为实的且都位于区间 $[-1,1]$ 之外，记 $\|P_n\|_2=\left(\int_{-1}^1|P_n(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}$，则

(1)　$\int_{-1}^1(1-x)^2[P'_n(x)]^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{n}{2}\|P_n\|_2^2$，

仅当 $P_n(x)=c(1+x)^p(1-x)^q,(p+q\neq n)$ 时等号成立；

(2)　若 $P_n(x)$ 还满足 $P_n(-1)=P_n(1)=0$，则

$$\|P'_n\|_2^2\leqslant\frac{n(2n+1)(n-1)}{4(2n-3)}\|P_n\|_2^2,$$

仅当 $P_n(x)=c(1+x)(1-x)^{n-1}$ 或 $P_n(x)=c(1+x)^{n-1}(1-x)(c\neq 0)$ 时，等号成立；特别地，若 $P_n(x)$ 的所有零点都位于 $(-\infty,-1)$ 或 $(1,\infty)$ 内，则

$$\|P'_n\|_2\leqslant\frac{n}{2}\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{1/2}\|P_n\|_2,$$

仅当 $P_n(x)=c(1+x)^n$ 或 $P_n(x)=c(1-x)^n$ 时等号成立.([110]879 ~ 890)

37. 设 $P_n(x)$ 的所有零点都是实的且都位于$[-1,1]$之内,记 $\omega_1(x)=1-x^2$,$\omega_2(x)=(1-x^2)^{-1/2}$,$\|P_n\|_2=\left(\int_{-1}^{1}|P_n(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}$,$\|P_n\|_{2,\omega}=\left(\int_{-1}^{1}|P_n(x)|^2\omega(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}$,则

(1) $\|P'_n\|_{2,\omega_1}\geqslant(n/2)^{1/2}\|P_n\|_2$,仅当 $P_n(x)=C(1+x)^p(1-x)^q$,$(p+q=n)$ 时等号成立;

(2) $\|P'_n\|_2>\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}+\frac{3}{n^2}\right)^{1/2}\|P_n\|_2$;

(3) 若 $|x_k|\leqslant 1/3$,令 $P_n(x)=\prod_{k=1}^{n}(x-x_k)$,则

$$\|P'_n\|_2\geqslant\left(\frac{n}{2}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2n}\right)^{1/2}\|P_n\|_2;$$

(4) 若 $|T_n(x)|\leqslant 1$,$x\in[-1,1]$,$T_n(x)=\cos(n\arccos x)$,则

$$\|P'_n\|_{2,\omega_1}\leqslant n\left(1+\frac{1}{4n^2-1}\right)^{1/2}\|T'_n\|_{2,\omega_1};\quad \|P''_n\|_{2,\omega_2}\leqslant\|T''_n\|_{2,\omega_2}.$$

(Varma,A. K. [327]1992,69(1):48 ~ 54)

38. 设 P_n,Q_n 均为$[-1,1]$上 n 次代数多项式,$x\in(-1,1)$ 时,$P_n(x)>0$,L^p,C 范数均在$[-1,1]$上取.

(1) 若 P_n 的所有零点都是实的,则

$$\|P_n\|_1>\frac{2}{n+1}\|P_n\|_c.$$

若 P_n 还满足 $P_n(-1)=P_n(1)=0$,则

$$\|P_n\|_1\geqslant\frac{2}{n+1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\|P_n\|_c.$$

注 若将只有实零点的条件换成在开圆 $|z|<1$ 内没有零点的条件,上述结论仍成立.

(2) 令 $C(n,p)=\sup\left\{\int_{-1}^{1}(P_nQ_n):\|P_n\|_p\leqslant 1,\|Q_n\|_q\leqslant 1\right\}$,$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,$1\leqslant p\leqslant\infty$,则存在正数 M 和 $0<\alpha<1$,使得 $1-\frac{M\alpha^n}{n!}\leqslant C(n,p)\leqslant 1$,特别地,当 p 为自然数 m 时,$C(n,m)=1$.([352]1988,15:267 ~ 269)

(3) 若实多项式 $P_n(x)$ 的导数 $P'_n(x)$ 只有实零点,且 $P'_n(x)$ 在$(-1,1)$内只有一个零点,设 $-1,1$ 是 $P_n(x)$ 的两个单零点,则

$$\|P_n\|_1\geqslant\frac{4}{3}\frac{P'_n(-1)\cdot P'_n(1)}{P'_n(1)-P'_n(-1)};$$

若 $-1,1$ 是 $P_n(x)$ 的两个零点,则 $\|P_n\|_1\leqslant(4/3)P_n(x_0)$,式中 x_0 是 $P'_n(x)$ 在$(-1,1)$中的零点,均仅当 $P_n(x)=c(1-x^2)$ 时等号成立. 1966 年,Kuhn,H. 将上述结果作了推广,见[4]312 ~ 313.

39. 设 $P_n(x)$ 是$[a,b]$上 n 次代数多项式,L^p 与 C 范数在$[a,b]$上取,则

(1)　$\| P'_n \|_1 \leqslant 2n \| P_n \|_c$；　(1.13)

(2)　**Schmidt 不等式**：$\| P'_n \|_2 \leqslant \dfrac{2c_n^{1/2}}{b-a} \| P_n \|_2$.　(1.14)

式中 $c_1 = 3, c_2 = 15, c_3 = (45 + \sqrt{1605})/2 \approx 42.6$.

我们问：$n > 3$ 时(1.14)式是否仍成立？c_n 的估计式是多少？见 Schultz, M. H., Spline analysis(中译本)，上海科学技术出版社，1979，8 ～ 9.

40.　**Zygmund 不等式**：设 $P_n(z)$ 为 n 次复代数多项式，且 $q \geqslant 1$，则

$$\int_0^{2\pi} | P'_n(e^{i\theta}) |^q \mathrm{d}\theta \leqslant \sqrt{\pi} \frac{\Gamma((q/2)+1)}{\Gamma((q+1)/2)} n^q \int_0^{2\pi} | \mathrm{Re} P_n(e^{i\theta}) |^q \mathrm{d}\theta,$$

仅当 $P_n(z) = cz^n$ 时等号成立.(J. Math. and Phys. 1942, 21:117 ～ 123)

41.　设实多项式 $P_n(x)$ 由下述递归关系定义：

$P_0(x) = 1, P_n(x) = 1 + \int_0^x P_{n-1}(t - t^2)\mathrm{d}t$，则

$0 \leqslant P_n(x) - P_{n-1}(x) \leqslant \dfrac{x^n}{n!}$,　$x \in [0,1]$.([4]398 ～ 399)

42.　(1) $\int_{-1}^1 (1-x^2)^n \mathrm{d}x > \left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)^{1/2} > \dfrac{1}{\sqrt{n}}$; (2) $\int_{-1}^1 \left| \sum_{k=1}^{2n} \dfrac{(-1)^k (k+1)x^k}{2^k} \right| \mathrm{d}x < 2$.

43.　若 $a < 0 < b$，则

$$\int_a^b | \sum_{k=1}^{2n} a_k x^k | \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{2n} | a_k | \left(\frac{b^{k+1} + | a |^{k+1}}{k+1}\right).$$

证明见[345]1987，1:37.

44.　**Swamy 不等式**：Fibonacci 多项式序列 $\{F_n(x)\}$ 定义为：$F_1(x) = 1, F_2(x) = x$, $F_n(x) = xF_{n-1}(x) + F_{n-2}(x), n \geqslant 3$，则当 $n \geqslant 3$ 时，有下式成立

$$\{F_n(x)\}^2 \leqslant (x^2+1)^2 (x^2+2)^{n-3}.$$

证明见[305]1966，73:81.

45.　**Bruijn 不等式**：$P_n(z)$ 在 $| z | \leqslant R$ $(R \geqslant 1)$ 内无零点，$p > 0$，记 $\| P_n \|_p = \left(\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} | P(e^{i\theta}) |^p \mathrm{d}\theta\right)^{1/p}$，则

$$\| P_n^{(k)} \|_p \leqslant n(n-1)\cdots(n-k+1) B_p \| P_n \|_p.$$

式中 $B_p = \left\{\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} | R^k + e^{i\alpha} |^p \mathrm{d}\alpha\right\}^{-1/p}$. 推广见[400]1998，108(1):63 ～ 68.

46.　设 $P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ 为 n 阶复多项式，

$$\| P_n \|_q = \left\{\int_0^{2\pi} | P_n(e^{it}) |^q \mathrm{d}t\right\}^{1/q}, q > 0,$$

(1)　$\| P'_n \|_q \leqslant n \| P_n \|_q$；

若 $| \alpha | \leqslant 1$(α 为实数或复数)，$r \geqslant 1$，则

$$\left(\int_0^{2\pi} | P_n(re^{it}) - \alpha P_n(e^{it}) |^q \mathrm{d}t\right)^{1/q} \leqslant | r^n - \alpha | \ \| P_n \|_q,$$

仅当 $P_n(z)=\beta z^n(\beta\in C^1-\{0\})$ 时等号成立.(Aziz,A. 等,Nonlinear Stud. 1999,6(2):241 ~ 255)

(2) 若 $P_n(z)$ 在 $D=\{z:|z|<1\}$ 内无根,则

$$\|P'_n\|_p\leqslant c_p n\|P_n\|_p,0<p<1,$$

式中 $c_p=\dfrac{(2\pi)^{1/p}}{\left(\int_0^{2\pi}|1+e^{it}|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}}=(\dfrac{1}{2})\left[\dfrac{\pi^{1/2}\Gamma\left(\dfrac{p}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\dfrac{p}{2}+\dfrac{1}{2}\right)}\right]^{1/p}$.

(Rubinstein,[305]1992,99(8):E10255)

(3) 设 $0<p<q$, $r=(1/p)-(1/q)$, 记 $\|P_n\|_p=\left(\dfrac{1}{2\pi}\int_{|z|=1}|p_n(z)|^p|\mathrm{d}z|\right)^{\frac{1}{p}}$. 则 $\|P_n\|_q\leqslant C(p,q)n^r\|P_n\|_p$. 我们问:$c(p,q)$ 的最佳值是多少?([22]579)

47. 设 $P_n(z)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kz^k$ 为 n 次复多项式:

(1) 若 $a_0=0,a_1\neq 0$,则存在一个临界点 $\theta\in C$,即 $P'_n(\theta)=0$,使得

$$\left|\frac{a_k}{a_1}\right|^{\frac{1}{k-1}}|P_n(\theta)|\leqslant\beta_k|a_1|,\quad\forall k\in N.$$

式中常数 β_k 满足 $1\leqslant\beta_k\leqslant 4$,已知 $\beta_2=2,\beta_3=\sqrt{5},\beta_4=14^{1/3}$,1981 年 Smale,S. 猜测 β_k 可取到 1.

(2) 若 $P_n(t)$ 在单位圆内无临界值 $P_n(\theta)$(即若 $P'_n(\theta)=0$,则 $|P_n(\theta)|\geqslant 1$),则 $|a_2|\leqslant 2$,猜测 $|a_2|<1/2$.([376]1981,4(1):1 ~ 36)

(3) 设 Γ_n 是 $P_n(z)$ 的最大零点的模,Kakeya 证明:$\liminf\limits_{n\to\infty}\Gamma_n\leqslant c,c=2$,而 Clunie 和 Erdös 证明:$\sqrt{2}<c<2$,问 c 的最佳值是多少?([106]49)

(4) 若 $a_0=1,a_k=\dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}$, $|z|\leqslant 1,z\neq 1$,则

$$|P_n(z)|\leqslant\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{|1-z|}}.$$

48. 设 $P(x,y)$ 是二元复系数多项式,并且 x 的最高次数为 m, y 的最高次数为 n,若 $\forall x,y$: $|x|\leqslant 1$, $|y|\leqslant 1$,有 $|P(x,y)|\leqslant M$,则 $\forall x,y$: $|x|\geqslant 1$, $|y|\geqslant 1$,有

$$|P(x,y)|\leqslant M(|x|+\sqrt{x^2-1})^m(|y|+\sqrt{y^2-1})^n.$$

([74]237)

49. **带 ±1 系数的多项式不等式**:设 $P_n(z)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kz^k,a_k=\pm 1$,令

$$\|P_n\|_q=\begin{cases}\left\{\int_0^1|P_n[\exp(2\pi it)]|^q\mathrm{d}t\right\}^{1/q}, & 1\leqslant q<\infty,\\ \max|P_n[\exp(2\pi it)]|, & q=\infty.\end{cases}$$

$$N_q(P_n,m)=\left\{\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}|P_n[\exp(\frac{2\pi ki}{m})]|^q\right\}^{1/q}.$$

(1)　**S-B 猜想**：若 $m \geqslant (1+\lambda)n, \lambda > 0$，则存在与 m 有关的常数 $c(m)$，使得

$$N_q(P_n, m) \geqslant [1 + c(m)] \sqrt{n+1}.$$

若 P_n 是自反多项式，即其系数 a_k 满足 $|a_k| = 1, a_{n-k} = \overline{a_k}$，则 Erdös 猜想以更强的形式成立：

$$\| P_n \|_4 \geqslant (1+c) \sqrt{n+1}, c > 0.$$

特别地，若 $a_k = \pm 1$，则可取 $c = (3/2)^{1/4} - 1$.（[406]1990，310(7)：541 ～ 544）

(2)　$\| P_n \|_1 < \sqrt{n+0.97}$.

Newman 猜想：$\| P_n \|_1 \leqslant c\sqrt{n+1}, 0 < c < 1$.（[305]1960，671：778 ～ 779）

Laurent，H. 则证明：

$\| P_n \|_1 \leqslant n + 2(\sqrt{2}-1) + \dfrac{0.18}{n+1}$，

$\| P_n \|_1 \leqslant n + 0.8250041$（当 n 充分大时）.

（[406]1997.324(7)：765 ～ 769）

50.　**Nikolskii 型不等式**：令 $Q_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k e^{\lambda_k x}, a_k, \lambda_k \in R^1, 0 < p \leqslant \frac{1}{2}, A = \{x \in [-1,1] : |Q_n(x)| \leqslant 1\}$. 若存在两个正数 c_1, c_2，使得 $\mu(A) \geqslant 2 - p$，且

$\exp(c_1 np) \leqslant \sup\limits_{Q_n} |Q_n(0)| \leqslant \exp(c_2 np)$，则

$$\left(\frac{c_1(1+qn)}{r}\right)^{1/q} \leqslant \sup_{Q_n} \frac{|Q_n(y)|}{\| Q_n \|_q} \leqslant \left(\frac{c_2(1+qn)}{r}\right)^{1/q},$$

式中 $r = \min\{y-a, b-y\}, a < y < b, q > 0$. L^q 范数在 $[a,b]$ 上取.（Peter，B. 等[321]2000，316(2)：39 ～ 60）

注　$Q_n(x)$ 与实系数代数多项式 $P_n(x)$ 的性质类似.

51.　**E-G 不等式(Erdös-Grunwald 不等式)**：设 $f(x) = \prod_{k=1}^{n}(1-x_k^2)\varphi(x)$，$|\varphi|$ 是 $A = (-1,1)^n$ 上对数凹函数，$c = \left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} |1-x^2|^p \mathrm{d}x\right)^{n/p}$，记 $\| f \|_{p,A} = \left(\frac{1}{\mu(A)}\int_A |f|^p\right)^{1/p}$，$\| f \|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in A\}$，则 $\| f \|_{p,A} \leqslant c \| f \|_\infty$.（Dryanov，D. 等，[302]1999，3(3)：215 ～ 231）

52.　**B-W 不等式(Bernstein-Walsh 不等式)**：设 A 为 C^m 中非多极紧集，$P_n(z)$ 为 C^m 中 n 次复代数多项式，$V_A(z)$ 是 A 上的极值函数，例如当 $A = \{z = (z_1, \cdots, z_m) : |z_k| \leqslant 1, 1 \leqslant k \leqslant m\}$ 时，$V_A(z) = \max\{\log^+|z_1|, \cdots, \log^+|z_m|\}$，则

$$|P_n(z)| \leqslant \| P_n \|_A \exp[nV_A(z)]. \tag{1.15}$$

式中 $\| P_n \|_A$ 是 P_n 是在 A 上的一致范数. 2003 年，Dan Coman 等对(1.15)式作了进一步的改进和推广.（[308]2003，131(3)：879 ～ 887）

53.　设 $P_n(x)$ 是 n 次多项式，它的范数定义为

$\| P_n \| = \left(\int_{-\infty}^{\infty} [P_n(t)]^2 e^{-t^2} \mathrm{d}t\right)^{1/2}$，则

$$\| P'_n \|^2 \leqslant \frac{1}{2(2n-1)} \| P''_n \|^2 + \frac{2n^2}{2n-1} \| P_n \|^2,$$

仅当 $P_n(x) = cH_n(x)$ 时等号成立，式中 $H_n(x)$ 为 Hermite 多项式(本章 §2，三).

证明见[391]1987,49(1 ~ 2):169 ~ 172.

54.　设 $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$ 的复根为 z_k，令 $\alpha_n = n+1-\sum_{k=1}^{n} e^{-z_k}$，则 $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 2-e, \alpha_3 = 3-2e\cos 1$，当 $0 < \beta < 1-\ln 2 = 0.3068\cdots$ 时，对于充分大的 n，有 $|\alpha_n| \leqslant e^{-\beta n}$. (Conrey, B., Ghosh, A., [305]1988, 95:528 ~ 533)

55.　设 $P_n(z) = z^n + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n$ 为复系数多项式，$z_k(1 \leqslant k \leqslant n)$ 为 $P_n(z)$ 的零点，则

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 \geqslant 2|a_2| \quad (\text{注意} \sum z_k = 0);$$

若 $w_k(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ 为 $P_n(z)$ 的导函数 $P'_n(z)$ 的零点，则

$$\sum_{k=1}^{n-1} |w_k|^2 \leqslant \frac{n-2}{n} \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2.$$

两个不等式中的等号仅当所有 z_k 都位于复平面上过原点的一条直线上时成立. ([305]1987,94,(7):689)

56.　设 $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ 为 n 次复多项式，定义范数

$$\| P_n \|_q = \begin{cases} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |P_n(e^{i\theta})|^q \mathrm{d}\theta\right)^{1/q}, & 0 < q < \infty, \\ \max\{|P_n(z)| : |z| = 1\}, & q = \infty, \\ \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log |P_n(e^{i\theta})| \mathrm{d}\theta\right), & q = 0. \end{cases}$$

则：(1)　**Zygmund 不等式：** $\| P'_n \|_q \leqslant n \| P_n \|_q$，仅当 $P_n(z) = cz^n$ 时等号成立.

(2)　设 $|z| < 1$ 时，$P_n(z) \neq 0$，则对于 $0 \leqslant q \leqslant \infty$，有

$$\| P'_n \|_q \leqslant n \| P_n \|_q / \| 1 + z^n \|_q. \text{([327]1988,53:26 ~ 32)}$$

(3)　**Aziz 不等式：**

设 $z_k = \exp(\frac{2k+1}{n}\pi i)$　$(0 \leqslant k \leqslant n-1)$ 是 $z^n + 1 = 0$ 的全部根，记

$$M(P_n) = \max\{|P_n(z_k)| : 0 \leqslant k \leqslant n-1\}.$$

①　若 $P_n(1) = 0$，则

$$\max_{|z|=1} \left| \frac{P_n(z)}{z-1} \right| \leqslant \frac{n}{2} M(P_n) \leqslant \frac{n}{2} \| P_n \|_\infty; \quad |P'_n(1)| \leqslant \frac{n}{2} M(P_n) \leqslant \frac{n}{2} \| P_n \|_\infty.$$

仅当 $P_n(z) = 1 - z^n$ 时等号成立.

②　若 $\beta \geqslant 0, P_n(\beta) = 0$，则

$$\max_{|z|=\beta} \left| \frac{P_n(z)}{z-\beta} \right| \leqslant \frac{1-\beta^n}{1-\beta^2} M(P_n) \leqslant \frac{1-\beta^n}{1-\beta^2} \| P_n \|_\infty;$$

$$|P'_n(\beta)| \leqslant \frac{1-\beta^n}{1-\beta^2} M(P_n) \leqslant \frac{1-\beta^n}{1-\beta^2} \| P_n \|_\infty.$$

仅当 $P_n(z)=\left(\frac{z-\beta}{1-\beta z}\right)(1-\beta^n z^n)=(z-\beta)(1+\beta z+\beta^2 z^2+\cdots+\beta^{n-1}z^{n-1})$ 时等号成立. 上述不等式均不能再改进. ([327]1984,41:15 ~ 20;[339]1988,8(4):555 ~ 557)

(4) 设 $0<r\leqslant 1$,则 $\|P_n\|_\infty\leqslant r^{-n}\max_{|z|=r}|P_n(z)|$.

(5) $\|P_n\|_\infty\leqslant\frac{1}{2}\left[(3+2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^n\right]\max_{0\leqslant\delta\leqslant 1}\left\{\min_{|z|=\delta}|P_n(z)|\right\}$.

(6) $\|P_n\|_q\leqslant\|(1+z)^n\|_q\|P_n\|_0,0\leqslant q<\infty$.

(7) $\|P_n\|_\infty\leqslant 2n^{\frac{1}{q}}\dfrac{\|P_n\|_q}{\|(1+z)\|_q}\leqslant\left\{n\left(1+\frac{q\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{q}}\|P_n\|_q,0<q<\infty$.

(8) $\|P_n\|_\infty\leqslant\left\{\dfrac{(2+qn)^2}{4(1+qn)}\right\}^{\frac{1}{q}}\left(1+\dfrac{1}{1+qn}\right)^n\|P_n\|_q$;

$\|P_n\|_\infty\leqslant(1+qn)^{\frac{1}{q}}\|P_n\|_q,0<q<\infty$.

下面令 $H(P_n)=\max_{0\leqslant k\leqslant n}\{|a_k|\}$, $L(P_n)=\sum_{k=0}^{n}|a_k|$.

(9) 若 $0<q\leqslant 2$, 则 $\|P_n\|_q\leqslant(n+1)^{\frac{1}{2}}H(P_n)$;

若 $q\geqslant 2$, 则 $\|P_n\|_q\leqslant(n+1)^{1-\frac{1}{q}}H(P_n)$.

(10) $\|P_n\|_2\leqslant\binom{2n}{n}^{\frac{1}{2}}\|P_n\|_0$; $H(P_n)\leqslant\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}\|P_n\|_0$.

(11) $L(P_n)\leqslant 2^{n-2}(|a_n|+\|P_n\|_0)\left(1+\dfrac{|a_0|}{\|P_n\|_0}\right)\leqslant 2^n\|P_n\|_0$.

(12) $\|P_n\|_0^2+\left(\dfrac{|a_0a_n|}{\|P_n\|_0}\right)^2\leqslant\|P_n\|_2^2$.

(13) 设 $p_n(\delta)=0$, $\delta\neq 0$,则 $\|P_n\|_2\leqslant(1-c)^{\frac{1}{2}}\|P_n\|_\infty$,式中,$c=4|\delta|^n\left\{\sum_{k=0}^{n}(|\delta|^k+|\delta|^{n-k})^2\right\}^{-1}$.

以上(4) ~ (13) 见[22]581 ~ 582.

57. 设 $P_n(z)=\sum_{k=0}^{n}a_kz^k$, $|z|\leqslant 1$, $\|P_n\|_\infty=\max\{|P_n(z)|:|z|\leqslant 1\}$.

则 $|a_0|+|a_k|\leqslant\|P_n\|_\infty$, 式中 $\frac{n}{2}<k\leqslant n$. ([301]351(2009),163 ~ 169)

58. 设 $T_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}c_ke^{ikx}$, $x_1,\cdots,x_m(m\geqslant 2)$ 是 $(-\pi,\pi)$ 中不同点, 使得 $\min_{j\neq k}|x_i-x_k|=2\delta$. 记

$$\|T_n\|_p=\left[\sum_{k=1}^{m}|T_n(x_k)|^p\right]^{\frac{1}{p}},\quad\|C\|_p=\left(\sum_{k=-n}^{n}|C_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

则

(1) $\|T_n\|_2\leqslant 4\left(\max\left\{n,\frac{\pi}{2\delta}\right\}\right)^{\frac{1}{2}}\|C\|_2$.

(2)　若$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$p\geqslant 2$，则存在常数 A，使得

$$\| T_n \|_p \leqslant A\cdot p^{\frac{1}{2p}}\left(\max\left\{n,\frac{\pi}{2\delta}\right\}\right)^{\frac{1}{p}}\| C\|_q. \tag{1.15}$$

我们问：常数 A 的最佳值是多少？

我们已知当 $m=n$ 时，对于 $\forall\varepsilon>0$ 和充分小的 $\delta>0$，有

$$\| T_n \|_p \leqslant A_0(1+\varepsilon)^{\frac{1}{p}}\left(n+\frac{\pi}{\delta}\right)^{\frac{1}{p}}\| C\|_q,$$

式中，

$$A_0=\frac{2^{1-\frac{2}{p}}}{\pi(q+1)^{\frac{1}{q}}}\left[\int_0^{\infty}\left(\frac{|\sin t|}{t}\right)^q \mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{q}}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\mathrm{d}t\right]^{-1}.$$ ([22]579 ~ 580)

59.　设 $P_n(z)=z^m\sum_{k=m}^{n}a_k z^{k-m}$，　$a_m\neq 0$ $(0\leqslant m<n, n\geqslant 1)$，则

$$2|a_m a_n|+\| P_n\|_2^2\leqslant \| P_n\|_\infty^2.$$ ([22]582)

60.　1964 年，Szëgo 证明：设 $P_n(x)$ 是$(0,\infty)$ 上 n 次代数多项式，$\omega(x)=e^{-x}$. 则

$$\| P_n'\|_{c,\omega}\leqslant (8n+2)\| P_n\|_{c,\omega}. \tag{1.16}$$

2005 年，章仁江将系数 $C(n)=8n+2$ 改进为 $6.3n+1$.（[339]25(2)(2005),347）

我们问：$C(n)$ 的最佳值是多少？

61.　Bernstein 不等式：设 $P_n(x)$ 是首项系数为 1 的 n 次代数多项式，记

$$\| P_n\|_\infty=\max\{|P_n(x)|:|x|\leqslant\lambda\}\quad(0<\lambda<1).$$

则 $\| P_n\|_\infty\geqslant\lambda^n$，仅当 $p_n(x)=x^n$ 时等号成立.（[22]587）

62.　令 $g(\alpha)=\sum_{j=1}^{n}b_j z_j^{\alpha}$，$b_j,z_j$ 均为复数.

$$G_n(z)=\max\{|g(\alpha)|:\alpha=m+1,\cdots,m+n\}.$$

(1)　Turan 第一不等式：设$\min\limits_k|z_k|=1$，则

$$G_n(z)\geqslant C(m,n)\left|\sum_{j=1}^{n}b_j\right|.$$

式中，$C(m,n)=\left(\frac{n}{2e(m+n)}\right)^n$，它的最佳系数是

$$C(m,n)=\left[\sum_{j=0}^{n-1}\binom{m+j}{j}2^j\right]^{-1}.$$

其中的 m 还可以不是整数，$C(0,n)=(2^n-1)^{-1}$.

推论：$\max\limits_{\alpha=1,\cdots,n}\left|\sum_{k=1}^{n}z_k^{\alpha}\right|\geqslant\min\limits_k|z_k|$，仅当 z_k 是中心在原点的圆周上正多边形的顶点时等号成立.

(2)　Turan 第二不等式：设 $1=|z_1|\geqslant|z_2|\geqslant\cdots\geqslant|z_n|$，则

$$G_n(z)>2\left(\frac{n}{4e(m+n)}\right)^n\min_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{j=1}^{k}b_j\right|,$$

式中 $4e$ 是最佳常数.

(3)　Turan 第三不等式：令 $\Delta=\max_k|z_k|$，$\delta=\min_{k\neq j}|z_k-z_j|$，设 $\forall z_k\neq 0,\delta>0$，$m\geqslant 0$，则

$$\max\frac{|g(\alpha)|}{\sum_{k=1}^{n}|b_k|\cdot|z_k|^{\alpha}}\geqslant\frac{1}{n}\left(\frac{\delta}{2\Delta}\right)^{n-1}.$$

若加上条件 $\max_k|z_k|=1$，则上式右边也可改进为 $\frac{1}{n2^{n-1}}\min_j\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}|z_k-z_j|$. ([22]651 ～ 654) 当 $\forall b_k=1$ 时，还有以下结果：

记 $S_\alpha=\sum_{j=1}^{n}z_j^{\alpha}$，　$G_n(z)=\max\{|S_\alpha|^{1/\alpha}:\alpha=1,\cdots,n\}$，　$R_n=\min_{z_k}\{\max|S_\alpha|:\alpha=1,\cdots,n\}$. 则

(4)　$G_n(z)\geqslant\min_k|z_k|$；

(5)　$G_{2n-1}(z)\geqslant\max_k|z_k|$；

(6)　若 $\max_k|z_k|=1$，则 $\max_{\alpha=1,\cdots,n}\left(\frac{|S_\alpha|}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\geqslant\frac{\sqrt{2}-1}{2}$，右边的常数是最佳的.

(7)　$R_n>\frac{\log 2}{\sigma_n}$，式中 $\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

(8)　$R_n>\frac{1}{3}$；若 $n<1.6\times10^3$，则 $R_n\geqslant\frac{\pi}{8}$.

Biro 还用初等方法证明 $R_n\geqslant\frac{1}{2}$. ([22]655 ～ 657)

我们问：R_n 的最优上下界是多少？

63.　Turan 型不等式：设 $a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}$ 是复数，$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是多项式 $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k(a_n=1)$ 的根并满足 $\min_k Re(\alpha_k)\geqslant 0$，$f$ 是线性微分方程 $\sum_{k=0}^{n}a_kf^{(k)}(x)=0$（其中 $f^{(0)}(x)=f(x)$，$a_n=1$）的解，则

$$|f(0)|\leqslant cn^5\int_0^1|f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

2008 年 G. Kos 将上述指数 5 改进到最佳值. ([391]119(3)(2008)，219 ～ 226)

64.　Markov 不等式：在 $L^p[a,b]$ 上，$1\leqslant p<\infty$，

$$\|P_n'\|_p\leqslant\frac{cn^2}{b-a}\|P_n\|_p,\tag{1.17}$$

式中 $c<\frac{4}{\sqrt{3}}(2+16\pi^2)^{2-\frac{1}{p}}$. ([172]112) 吴学谋在[172]中利用泛对称转化方法（$B\rightarrow Q$ 方法）讨论了一系列多元代数多项式的相应不等式.

我们问：上述不等式中常数 c 的最佳值是多少？

§2　正交多项式不等式

一、 Chebyshev 多项式不等式

第一类 Chebyshev 多项式是在区间[−1,1]上的加权正交多项式，其权函数为

$$\omega_1(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1,1).$$

第一类 Chebyshev 多项式的标准化形式是：

$$T_n(x) = \begin{cases} \cos(n\arccos x), & |x| \leqslant 1, \\ \operatorname{ch}(n\operatorname{ch}^{-1}x), & |x| > 1. \end{cases}$$

第二类 Chebyshev 多项式也是[−1,1]上的加权正交多项式，只不过其权函数为 $\omega_2(x) = \sqrt{1-x^2}, x \in [-1,1]$. 它的标准化形式是：

$$u_n(x) = \begin{cases} \sin(n\arccos x), & |x| < 1, \\ \operatorname{sh}(n\operatorname{ch}^{-1}x), & |x| > 1. \end{cases}$$

下面均在[−1,1]上讨论 $T_n(x), u_n(x)$. 利用 $T_n(x) = \cos(n\arccos x)$ 和递推公式：

$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$，可以得出 $T_0(x) = 1, T_1(x) = x, T_2(x) = 2x^2 - 1$, $T_3(x) = 4x^3 - 3x, T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1, \cdots$,

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^k \frac{n(n-k-1)!}{2(k!)(n-2k)!}(2x)^{n-2k}, u_n(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^k \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k}.$$

将 $\{T_n(x)\}$ 标准正交化，记为

$$\hat{T}_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}T_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \hat{T}_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}T_n(x) \quad (n \geqslant 1).$$

当 $n \geqslant 1$ 时，$T_n(x)$ 的首项系数为 2^{n-1}，因此，首项系数为 1 的 Chebyshev 多项式记为 $\tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$, $\hat{u}_n(x), \tilde{u}_n(x)$ 作类似定义.

注　在[−1,1]上也可用 $T_{n+1}(x)$ 的导数来定义 $u_n(x)$，即

$$u_n(x) = \frac{1}{n+1}T'_{n+1}(x) = \sin[(n+1)\arccos x]\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

下面仍记 $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ 为[−1,1]上的 n 次代数多项式，$T_n(x)$ 的零点 $x_{k,n} = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi$. 它们经常用做求积公式中的扦值结点.

1.　$|T_n(x)| \leqslant 1, |u_n(x)| \leqslant n+1, x \in [-1,1], n = 1,2,\cdots$,
仅当 x 为 $u_{n-1}(x)$ 的零点和 ±1 时，$|T_n(x)| = 1$，而仅当 $x = \pm1$ 时，$|u_n(x)| = n+1$.

证　令 $x = \cos t$，则 $T_n(x) = \cos(nt)$. 从而 $|T_n(x)| \leqslant 1$，仅当 nt 为 π 的倍数时等号成立，再利用恒等式 $\frac{\sin(n+1)t}{\sin t} = \cos(nt) + \cos t\frac{\sin nt}{\sin t}$ 和数学归纳法即可推出 $|u_n(x)|$

$\leqslant n+1$,仅当 $|\cos t|=1$ 时等号成立.

2. $|x|>1$ 时,$|T_n(x)|\leqslant(|x|+\sqrt{x^2-1})^n$.

3. $|x_0|>1$ 时,有

$$|P_n(x_0)|\leqslant\begin{cases}\|P_n\|_c\cdot|T_n(x_0)|,\\\|P_n\|_c\cdot(|x_0|+\sqrt{x_0^2-1}|)^n.\end{cases}$$

证明见[60]上册 50 ~ 51,56 ~ 57.

4. **Remez 不等式:**令 $E=\{x\in[-1,1]:|P_n(x)|\leqslant 1\}$,设 $\mu(E)\geqslant 2-\alpha$,式中 $0<\alpha<2$,则 $\|P_n\|_c\leqslant T_n(\frac{4}{2-\alpha}-1)$.([327]1990,63(3):335)

5. 设 $a_2,\cdots,a_n$ 为任意实数,令 $P_n(x)=\sum_{k=1}^{n}a_kx^k$,式中 $a_1=1$,则 $\exists x\in(0,1)$,使得 $|P_n(x)|\geqslant\frac{1}{n}\text{tg}(\frac{\pi}{4n})$.

提示:考虑多项式:

$$Q_n(x)=(-1)^{n+1}\frac{1}{n}(\text{tg}\frac{\pi}{4n})T_n[x(1+\cos\frac{\pi}{2n})-\cos\frac{\pi}{2n}].$$

式中 $T_n(y)$ 为第一类 Chebyshev 多项式.

$$令\ y=x(1+\cos\frac{\pi}{2n})-\cos\frac{\pi}{2n},\quad x_k=\frac{\cos\frac{\pi}{2n}-\cos\frac{k\pi}{2n}}{1+\cos\frac{\pi}{2n}},\ k=1,2,\cdots,n,$$

则 $0<x_1<x_2<\cdots<x_n=1$,而且 $|Q_n(0)|\leqslant\frac{1}{n}\text{tg}(\frac{\pi}{4n})$,$Q_n(x_k)=(-1)^k\frac{1}{n}\text{tg}(\frac{\pi}{4n})$.

证 用反证法.若 $\forall x\in(0,1)$,$|P_n(x)|<\frac{1}{n}\text{tg}(\frac{\pi}{4\pi})$,则 $G_n(x)=Q_n(x)-P_n(x)$ 至少有 $n+1$ 个实根,但 $G_n(x)$ 又是次数不超过 n 的多项式,所以 $Q_n(x)\equiv P_n(x)$.这与 a_2,$a_3\cdots,a_n$ 为一组任意实数相矛盾.([305]1964:14)

6. $\tilde{T}_n(x)$ 在 $[-1,1]$ 上与零的最大误差为最小,即对于首项系数为 1 的所有 n 次多项式 $P_n(x)$,成立 $\|P_n\|_c\geqslant\|\tilde{T}_n\|_c=\frac{1}{2^{n-1}}$.

7. **$T_n(x)$ 的导数不等式:** $|x|\leqslant 1$ 时,有下式成立

(1) $|T_n^{(k)}(x)|\leqslant T_n^{(k)}(1)$,$0\leqslant k\leqslant n$,特别,$|T'_n(x)|\leqslant n^2$.

证 令 $t=\arccos x$,则 $T_n(x)=\cos nt$.

$T'_n(x)=\frac{n\sin nt}{\sin t}=2n[\cos(n-1)t+\cos(n-3)t+\cdots]$,用归纳法得到 $T_n^{(k)}(x)=\sum_{j=1}^{n-k}\lambda_j\cos jt$,其中所有 $\lambda_j=\lambda_j(k)\geqslant 0$,从而有 $|T_n^{(k)}(x)|\leqslant\sum_{j=1}^{n-k}\lambda_j=T_n^{(k)}(1)$.

(2) **Markov 不等式:** $\|(x^2-1)T_n^{(k+1)}(x)+kxT_n^{(k)}(x)\|_c\leqslant\|kT_n^{(k)}(x)\|_c$.([332]1992,3:58)

8. 将 $T_n(x)$ 的零点简记为 $x_k=\cos t_k$，式中 $t_k=\dfrac{2k-1}{2n}\pi$. $[-1,1]$ 上的连续函数 f 在 x_k 上的 n 次扦值多项式为

$$P_n(f,x)=\sum_{k=1}^{n}f(x_k)[T'_n(t_k)]^{-1}\frac{T_n(x)}{x-x_k}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}f(x_k)\frac{\cos nt}{\cos t-\cos t_k}\sin t_k,$$

式中 $x=\cos t$，它的范数定义为 $\|P_n\|=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant\pi}\left\{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left|\dfrac{\cos nt}{\cos t-\cos t_k}\right|\sin t_k\right\}$.

于是 $\|P_n\|=\dfrac{2}{\pi}\ln n+1-R_n$，式中 $0\leqslant R_n<\dfrac{1}{4}$. ([82]122)

若 $f\in C^n[-1,1]$，$P_n(x)$ 是以 $T_n(x)$ 的零点为结点的 Lagrange 扦值多项式，则

$$|f(x)-P_n(x)|\leqslant\frac{1}{n!2^{n-1}}\|f^{(n)}\|_c.$$

9. 设 f 在$[-1,1]$ 上连续，f 的连续模 $\omega(f,\delta)$（见第十四章 §1）满足 Dini 条件：

$$\lim_{\delta\to0}\omega(f,\delta)\ln\frac{1}{\delta}=0,$$

则 f 可开展成 Fourier-Chebyshev 级数：$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\hat{T}_n(x)$，$x\in[-1,1]$，且该级数在$[-1,1]$ 上一致收敛，它的系数为 $a_n=\displaystyle\int_{-1}^{1}f(t)\hat{T}_n(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

若 f 在$[-1,1]$ 上的 p 阶导数满足 α 阶 Lipshitz 条件，即 $f^{(p)}\in \mathrm{Lip}\alpha$ 且连续，则存在与 n，x 无关的常数 c，使得 $\left|f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n}a_k\hat{T}_k(x)\right|\leqslant\dfrac{c\ln n}{n^{p+\alpha}}$，$x\in[-1,1]$.

10. **Zolotareff 多项式不等式**：$[-1,1]$ 上 n 阶 Zolotareff 多项式：$z_\sigma(x)=x^n-n\sigma x^{n-1}+\cdots$，$(\sigma\geqslant0)$ 是 Chebyshev 多项式的推广，$\sigma=0$ 时，$z_\sigma(x)$ 就是 $T_n(x)$ 的倍数，当 $0\leqslant\sigma\leqslant[\mathrm{tg}(\dfrac{\pi}{2n})]^2$ 时，$z_\sigma(x)=\dfrac{1}{2^{n-1}\lambda^n}T_n[\lambda(x+1)-1]=x^n-n(\dfrac{1}{\lambda}-1)x^{n-1}+\cdots$，

这时 $\sigma=\dfrac{1}{\lambda}-1$，$\dfrac{1}{1+(\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi}{2n})^2}\leqslant\lambda\leqslant1$. 于是

$$\frac{1}{2^{n-1}}\leqslant\|z_\sigma\|_\infty\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}\left[1+(\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2n})^2\right]^n.$$ ([301]1986,18(1):97～106)

11. 设 $K_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^k$ 是某个 n 次多项式，称为多项式核，通过 $K_n(x)$ 与$[a,b]$ 上任一可积函数 f 作卷积 $P_n(x)=\displaystyle\int_a^b f(t)K_n(x-t)\mathrm{d}t$，得到一个新的 n 次多项式. 下面令

$$c_n=\int_{-1}^{1}\left(\frac{T_{2n+1}(x)}{x}\right)^2\mathrm{d}x,\quad K_n(x)=\frac{1}{c_n}\left(\frac{T_{2n+1}(x)}{x}\right)^2.$$

则：

(1) $c_n>n$；

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1}K_n(x)\mathrm{d}x=1$；　而 $\forall\delta\in(0,1)$，$\displaystyle\int_\delta^1K_n(x)\mathrm{d}x<\frac{1}{n\delta}$.

通过 $P_n(x)=\int_{-\frac{2-x}{3}}^{\frac{2-x}{3}} f(3t+x)K_n(t)\mathrm{d}t\quad (x\in[-1,1])$ 可以证明著名的 Weierstrass 逼近定理，细节参看[82]106 ~ 111.

二、 Legendre 多项式不等式

Legendre 多项式 $P_n(x)$ 是 $[-1,1]$ 上以 $\omega(x)=1$ 为权函数的正交多项式，它由 Rodrigues 公式定义：

$P_n(x)=\dfrac{1}{n!2^n}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n, n=0,1,2,\cdots, P_n(x)$ 有表示式：

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}.$$

它是 Legendre 方程

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+n(n+1)y=0$$

限制于 $[-1,1]$ 的解，$P_n(x)$ 的标准正交化形式是

$$\hat{P}_n(x)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(x), n=0,1,2,\cdots$$

$P_n(x)$ 的头几项是：$P_0(x)=1, P_1(x)=x, P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1), P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x), P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3), P_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x),\cdots$，下述不等式中，没有指明 x 的取值范围时，均指 $|x|\leqslant 1$.

1. $P_n(x)\leqslant P_n(1)=1$，对于 $n\geqslant 1$，仅当 $x=\pm 1$ 时等号成立.

提示：利用 Legendre 多项式的生成函数 $\dfrac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n$，它可写成：令 $x=\cos\theta$，

$$\frac{1}{\sqrt{1-2t\cos\theta+t^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-te^{i\theta}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-te^{-i\theta}}}$$
$$=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}t^ke^{ik\theta}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}t^me^{-im\theta}\right)$$

求出 $P_n(\cos\theta)$ 的系数，细节见[56]Vol. 2:107.

2. $x>1$ 时 $\{P_n(x)\}$ 关于 n 是严格递增的，即 $P_{n-1}(x)<P_n(x)$.

3. 令 $S_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}P_k(x)$，则 $\forall x\in[-1,1], S_n(x)\geqslant 0$，仅当 n 为奇数且 $x=-1$ 时等号成立.

4. **Bernstein 不等式**：设 $|x|<1$，则

$|P_n(x)|\leqslant\sqrt{\dfrac{2}{n\pi}}(1-x^2)^{-\frac{1}{4}}$，即 $|P_n(\cos\theta)|\leqslant\sqrt{\dfrac{2}{n\pi\sin\theta}}, 0<\theta<\pi$；

$$|P_n(x)|\leqslant\sqrt{\frac{2}{\pi}}[n(1-x^2)]^{-\frac{1}{2}}.$$

5. **Fejer 不等式**：$|P_n(x)-P_{n+2}(x)|\leqslant\dfrac{4}{\sqrt{\pi(n+2)}}$.

6. $|P_{n+1}(x)+P_n(x)|<\dfrac{6\sqrt{2}}{\sqrt{\pi n(1-x)}}$，$|x|<1$.

7. $x>1$ 时，$(n+1)(x-\sqrt{x^2-1})P_n(x)>nP_{n-1}(x)$.

8. 令 $G_n(x)=P_n^2(x)-P_{n-1}(x)P_{n+1}(x)$，则

(1) $\dfrac{1-P_n^2(x)}{(2n-1)(n+1)}\leqslant G_n(x)<\dfrac{2n+1}{3n(n+1)}$；

(2) 当 $\dfrac{1}{2n+1}\leqslant x\leqslant 1$ 时，$G_n(x)$ 严格递减.

(3) **Turan 不等式**：$G_n(x)\geqslant 0$.

9. 令 $M_n=(n+\dfrac{1}{2})^{1/2}\max\{(\sin x)^{1/2}|P_n(\cos x)|:0\leqslant x\leqslant\pi\}$，

则 M_{2k} 递增到 $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$ $(k\to\infty)$，且 $M_{2k-1}<M_{2k}<\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$.

证明见 Appl. Anal. 1982/83，3：237 ～ 240.

10. $|P'_n(x)|\leqslant\dfrac{1}{2}n(n+1)\leqslant n^2$；

$$|P_n^{(k)}(x)|\leqslant 2^{2n-2}(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1),2\leqslant k\leqslant n;$$

$$|P_n^{(k)}(x)|\leqslant P_n^{(k)}(1)=\frac{(n+k)!}{2^k\cdot k!(n-k)!};$$

当 $|x|<1$ 时，$|P'_n(x)|\leqslant\sqrt{\dfrac{n}{\pi}}\cdot\dfrac{2}{1-x^2}$.

11. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1-P_n(x)}{(1-x)^{5/4}}dx<2^{5/4}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k}\right)^{1/2}$.（[305]1980，4：E6227）

12. $\displaystyle\left|\int_{-1}^{1}P_n(t)dt\right|\leqslant\frac{4}{(2n+1)\sqrt{\pi(n+1)}}<\frac{2}{\sqrt{\pi}n^{3/2}}$.（[59]200）

13. **Bruns 不等式**：令 $x=\cos\theta$，则 $P_n(\cos\theta)$ 在 $(0,\pi)$ 中的 n 个零点 θ_k（均为单零点）满足：

$$\frac{k-(1/2)}{n+(1/2)}<\theta_k<\frac{k\pi}{n+(1/2)},1\leqslant k\leqslant n.$$

1935 年 Szegö 用 Strum 方法改进了 Bruns 不等式，证明 $P_n(\cos\theta)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 中的零点 θ_k 满足：$\dfrac{k-(1/4)}{n+(1/2)}\pi<\theta_k<\dfrac{k\pi}{n+1}$.

（莫叶，勒让得函数论，214. 230）

14. **Forsythe 不等式**：令

$$\Delta(n,k,j,x)=\begin{vmatrix}P_n(x) & P_{n+j}(x)\\ P_{n+k}(x) & P_{n+j+k}(x)\end{vmatrix}.$$

则当 $0<x<1$ 时，$\Delta(n,1,2,x)<0$； $\Delta(2n+1,2,2,x)<0$.

（莫叶，勒让得函数论，268.274）

15.　设 $f\in C^1[-1,1]$，则 f 的 Fourier-Legendre 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\hat{P}_n(x)$ 在 $[-1,1]$ 上一致收敛于 $f(x)$，其中 $a_n=\int_{-1}^{1}f(t)\hat{P}_n(t)\mathrm{d}t$. 记 $S_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n}a_k\hat{P}_k(x)$，则 $S_n(f,x)$ 可以写成积分形式：$S_n(f,x)=\int_{-1}^{1}f(t)K_n(x,t)\mathrm{d}t$.　$L_n(x)=\int_{-1}^{1}|K_n(x,t)|\mathrm{d}t$ 称为 Lebesgue 函数，则存在常数 c，使得

$$|K_n(x,t)|\leqslant\begin{cases}cn^2, & (|x|\leqslant 1,\ |t|\leqslant 1),\\ \dfrac{c}{\sqrt{1-x^2}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}, & (|x|<1,\ |t|\leqslant 1).\end{cases}$$

$$L_n(x)\leqslant\begin{cases}2cn^2, & |x|\leqslant 1,\\ \dfrac{2c}{\sqrt{1-x^2}}n^{3/2}, & |x|<1.\end{cases}$$ （[305]1986，93(4)：305）

16.　记 $Q(x)=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2k+1}{2}\right)\lambda_kP_k(x)$，式中 $\lambda_k=\int_{-1}^{1}Q(x)P_k(x)\mathrm{d}x$，则

$$\|Q\|_{\infty}^{2}=\left(\sup_{x\in[a,b]}|Q(x)|\right)^2\leqslant(n+1)^2\int_a^bQ^2(x)\mathrm{d}x.$$

（[305]112(8)(2005) 问题 11056）

三、 Hermite 多项式不等式

Hermite 多项式 $H_n(x)$ 是 $(-\infty,\infty)$ 上具有权函数 $\omega(x)=e^{-x^2}$ 的正交多项式，它可由 Rodrigues 公式定义：$H_n(x)=(-1)^ne^{x^2}(e^{-x^2})^{(n)}$.

它的前几项是：$H_0(x)=1$；$H_1(x)=2x$；$H_2(x)=4x^2-2$；$H_3(x)=8x^3-12x$；$H_4(x)=16x^4-48x^2+12$；$H_5(x)=32x^5-160x^3+120x$，….

$$H_n(x)=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-1)^kn!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k}.$$

$H_n(x)$ 满足微分方程：$y''-2xy'+2ny=0$.

$H_n(x)$ 的标准正交化形式是：$\hat{H}_n(x)=\dfrac{1}{\sqrt{n!2^n\sqrt{\pi}}}H_n(x)$.

首项系数为 1 的 Hermite 多项式为 $\widetilde{H}_n(x)=\dfrac{1}{2^n}H_n(x)$.

1.　$|H_n(x)|<n!\exp(|x|+(1/2))$.

证　在 $H_n(x)$ 的生成函数 $\exp(-t^2+2tx)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}H_n(x)$ 中，令 $t=e^{i\theta}$，由 Parseval 公式，$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\theta)|^2\mathrm{d}\theta=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{H_n(x)}{n}\right)^2$. 式中 $|f(\theta)|=\exp(-\cos2\theta+2x\cos\theta)$. 再注意到 $|f(\theta)|<\exp(1+2|x|)$，即可得证.

2. $|H_n(x)| < k \cdot 2^{n/2} \cdot \sqrt{n!}\exp(\frac{x^2}{2})$，式中 $k \approx 1.086435$；

3. $|H_{2m}(x)| \leqslant 2^{2m}m![2 - \frac{1}{2^{2m}}\binom{2m}{m}]\exp(\frac{x^2}{2})$；

$|H_{2m+1}(x)| \leqslant \frac{(2m+2)!}{(m+1)!} \cdot x \cdot \exp(\frac{x^2}{2})$，$(x \geqslant 0)$.

以上 No. 2 ～ 3 见[101]787.

四、 Jacobi 多项式不等式

Jacobi 多项式 $P_n(x;\alpha,\beta)$ 是$[-1,1]$上以 $\omega(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta, \alpha,\beta > -1, x \in [-1,1]$ 为权函数的正交多项式，它由 Rodrigues 公式定义：

$$P_n(x;\alpha,\beta) = \frac{(-1)^n}{n!2^n}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}[(1-x)^\alpha(1+x)^\beta(1-x^2)^n]^{(n)},$$

它的标准正交化形式是：

$$\hat{P}_n(x;\alpha,\beta) = \left(\frac{n!(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}\right)^{1/2} P_n(x;\alpha,\beta).$$

特别，当 $\alpha = \beta = 0$ 时，$P_n(x;0,0)$ 为 Legendre 多项式；

$\alpha = \beta = -1/2$ 时，$P_n(x;-1/2,-1/2)$ 为第一类 Chebyshev 多项式；

$\alpha = \beta = 1/2$ 时，$P_n(x;1/2,1/2)$ 为第二类 Chebyshev 多项式.

$$C_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1/2)\Gamma(2\alpha+n)}{\Gamma(2\alpha)\Gamma(\alpha+n+1/2)}P_n(x;\alpha-\frac{1}{2},\alpha-\frac{1}{2}), (\alpha \neq 0)$$

称为超球多项式(Ultraspherical polynomials).

1. 设 $q = \max\{\alpha,\beta\}, \alpha,\beta > -1$，则当 $q \geqslant -1/2$ 时，

$|P_n(x;\alpha,\beta)| \leqslant \binom{n+q}{n} \approx n^q$；当 $q < -\frac{1}{2}$ 时，$|P_n(x;\alpha,\beta)| \leqslant |P_n(x_0;\alpha,\beta)| \approx \sqrt{\frac{1}{n}}$，式中极大值点 x_0 接近$\frac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta+1}$.

2. 若 $\alpha > 0$，则 $|C_n^{(\alpha)}(x)| \leqslant \binom{n+2\alpha-1}{n}$；

若 $-1/2 < \alpha < 0$，则 $|C_n^{(\alpha)}(x)| \leqslant |C_n^{(\alpha)}(x_0)|$.

式中当 $n = 2m$ 时，$x_0 = 0$，当 $n = 2m+1$ 时，x_0 接近于 0.

3. 当 $0 < \alpha < 1, 0 < \theta < \pi$ 时，

$$|C_n^{(\alpha)}(\cos\theta)| \leqslant 2^{1-\alpha}\frac{n^{\alpha-1}}{(\sin\theta)^\alpha\Gamma(\alpha)}.$$

上述 No. 1 ～ 3 见[101]786.

4. 设 $q = \max\{\alpha,\beta\} > -\frac{1}{2}$， $m + r > q + \frac{1}{2}$，$f^{(m)} \in \mathrm{Lip}r$，则 f 的 Fourier-Jacobi 级数 $\sum_{k=0}^{\infty}a_k\hat{P}_k(x;\alpha,\beta)$ 在$[-1,1]$上一致收敛于 f，令 $S_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n}a_k\hat{P}_k(x;\alpha,\beta)$，则

$$|f(x)-S_n(f,x)| \leqslant \frac{c_1}{n^{m+r}}n^t, x \in [-1,1].$$

式中常数 c_1 与 n,x 无关，$t=(2q+1)/2$. 设 $\alpha,\beta \geqslant -1/2, n \geqslant 2, E_n(f)$ 是 f 的最佳一致逼近(第 14 章 §1)，则成立下述加权估计：

$$(1-x^2)^{1/4}\sqrt{\omega(x)}\,|f(x)-S_n(f,x)| \leqslant c_2(\ln n)E_n(f), x \in [-1,1].$$

式中常数 c_2 也与 n,x 无关.

(Szegö, G.. Orthogonal polynomials, Amer. Math, Soc. 1975)

5. 若 $|P_n(x)| \leqslant |P_n(x;\alpha,\alpha)|, x \in [-1,1]$，则

$\|P_n^{(k)}\|_c \leqslant \|(P_n(\alpha,\alpha))^{(k)}\|_c, 1 \leqslant k \leqslant n$. ([327]1996,84(2):129 ~ 138)

6. $P_n(x;\alpha,\beta)$ 的其他不等式见[153]34 ~ 40.

五、 Laguerre 多项式不等式

Laguerre 多项式 $L_n(x,\alpha)$ 是在区间 $(0,\infty)$ 上以 $\omega(x)=x^\alpha e^{-x}(\alpha>-1)$ 为权函数的正交多项式：$L_n(x,\alpha)=\frac{1}{n!}x^{-\alpha}e^x(x^{\alpha+n}e^{-x})^{(n)}$, $n=0,1,2,\cdots$.

它通过 Γ 函数表示成多项式的形式：

$$L_n(x,\alpha)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)}\frac{(-x)^k}{k!(n-k)!}.$$

它的标准正交化形式为

$$\hat{L}_n(x,\alpha)=(-1)^n\left(\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)}\right)^{1/2}L_n(x,\alpha).$$

$L_n(x,\alpha)$ 的头几项是：$L_0(x,\alpha)=1$; $L_1(x,\alpha)=(\alpha+1)-x$;

$L_2(x,\alpha)=\frac{1}{2}(\alpha+2)(\alpha+1)-(\alpha+2)x+\frac{1}{2}x^2$; $L_3(x,\alpha)=\frac{1}{6}(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)-\frac{1}{2}(\alpha+3)(\alpha+2)x+\frac{1}{2}(\alpha+3)x^2-\frac{1}{6}x^3$; ……

$L_n(x,0)$ 记为 $L_n(x)$，因此，$L_n(x,\alpha)$ 有时称为广义 Laguerre 多项式，$L_n(x,\alpha)$ 满足 Laguerre 方程：

$$xy''+(\alpha-x+1)y'+ny=0, n=1,2,\cdots$$

$L_n(x,\alpha)$ 的生成函数为：

$$\frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}}\exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}L_n(x,\alpha)t^n.$$

1. $|L_n(x)| \leqslant \exp\left(\frac{x}{2}\right), (x \geqslant 0)$;

2. $|L_n(x,\alpha)| \leqslant \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)}\exp\left(\frac{x}{2}\right)$, $(x \geqslant 0, \alpha \geqslant 0)$;

3. $|L_n(x,\alpha)| \leqslant \left(2-\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\exp\left(\frac{x}{2}\right)$, $(x \geqslant 0, -1<\alpha<0)$.

六、 Bernoulli 多项式不等式

Bernoulli 多项式 $B_n(x)$ 由它的生成函数定义：

$$\frac{te^{tx}}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x)\frac{t^n}{n!},\ |t|<2\pi.$$

$B_n=B_n(0)$ 称为 Bernoulli 数，$B_n(x)$ 可写成多项式形式：$B_0(x)=1$；$B_1(x)=x-\frac{1}{2}$；$B_2(x)=x^2-x+\frac{1}{6}$；$B_3(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x$；……

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}B_k=0,B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_kx^{n-k},n=2,\cdots.$$

$B_n(x)$ 可按下述递推公式来计算：$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}B_k(x)=nx^{n-1},n=2,3,\cdots.$

1. $|B_{2n}(x)|<|B_{2n}|,n=1,2,\cdots,0<x<1.$
2. $|B_{2n}-B_{2n}(x-[x])|\leqslant|B_{2n}|$，且 $B_{2n}-B_{2n}(x-[x])$ 与 B_{2n} 同号.
3. $0<(-1)^{n+1}B_{2n+1}(x)<\frac{2(2n+1)!}{(2\pi)^{2n+1}}\left(\frac{1}{1-2^{-2n}}\right),n=1,2,\cdots,0<x<\frac{1}{2}.$

七、 Euler 多项式不等式

Euler 多项式 $E_n(x)$ 由它的生成函数定义：

$$\frac{2e^{xt}}{e^t+1}=\sum_{n=0}^{\infty}E_n(x)\frac{t^n}{n!},\ |t|<\pi.$$

$E_n=2^nE_n(1/2)$ 称为 Euler 数，$E_n(x)$ 可按下述递推公式计算：

$$E_n(x)+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E_k(x)=2x^n.$$

特别，$E_0(x)=1,E_1(x)=x-\frac{1}{2},E_2(x)=x(x-1),\cdots,$

$$E_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{E_k}{2^k}(x-\frac{1}{2})^{n-k}.$$

$E_n(x)$ 具有 Fourier 展开式：

$$E_n(x)=\frac{n!}{\pi^{n+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos[(2k+1)\pi x+(n+1)\pi/2]}{(2k+1)^{n+1}},0\leqslant x\leqslant 1,n\geqslant 1.$$

1. $0<(-1)^nE_{2n}(x)<4^{-n}|E_{2n}|,\ 0<x<1/2,\ n=1,2,\cdots$
2. $0<(-1)^nE_{2n-1}(x)<\frac{4(2n-1)!}{\pi^{2n}}(1+\frac{1}{2^{2n}-2}),\ 0<x<\frac{1}{2},\ n=1,2,\cdots.$

§3 三角多项式不等式

n 阶三角多项式 $T_n(x)$ 的一般形式是：

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = C_n(x) + S_n(x),$$

式中 $a_0 = 2c_0, a_k = c_k + c_{-k}, b_k = i(c_k - c_{-k})$.

$C_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_n\cos kx$ 称为 n 阶余弦多项式，$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k\sin kx$ 称为 n 阶正弦多项式，$\tilde{T}_n(x) = -\sum_{k=1}^{n}(b_k\cos kx - a_k\sin kx) = -i\sum_{k=-n}^{n} c_k(\mathrm{sgn} k)e^{ikx}$ 称为 $T_n(x)$ 的共轭三角多项式. 记 $\| T_n \|_{C[\alpha,\beta]} = \max\{| T_n(x) | : x \in [\alpha,\beta]\}$. 特别地 $\| T_n \|_{C[-\pi,\pi]}$ 记为 $\| T_n \|_C$. $\| T_n \|_X$ 表示 $\| T_n \|_C$ 或 $\| T_n \|_p, 1 \leqslant p \leqslant \infty$.

因为 $\cos kx$ 与 $\frac{\sin(k+1)x}{\sin x}$ 都是 $\cos x$ 的 k 次代数多项式，因此，令 $t = \cos x$，余弦多项式 $C_n(x)$ 可写成 $P_n(\cos x) = P_n(t)$，即 n 次代数多项式的形式；同理，正弦多项式 $S_n(x)$ 可写成 $(\sin x)P_{n-1}(\cos x) = \sqrt{1-t^2}P_{n-1}(t)$ 的形式，其中 $P_{n-1}(t)$ 为 $n-1$ 次代数多项式，而一般形式 $T_n(x)$ 向 $P_n(x)$ 的转化见本章前言.

1. $\| T_n \|_C \leqslant (n+1)\max\limits_{-\pi\leqslant x\leqslant\pi} | T_n(x)\sin x |$.

2. 若 $\{a_k\}$ 为凸序列，且 $a_0 \geqslant a_1 \geqslant \cdots \geqslant a_n > 0$，则对于 $0 < x < 2\pi$，有

$$0 \leqslant C_n(x) \leqslant \frac{1}{2}(a_0 - a_1)\csc^2\left(\frac{x}{2}\right).$$

3. 若 $\{a_k\}$ 为严格递减的凸序列，且 $a_{n-1} \geqslant 2a_n \geqslant 0$，则对于所有实数 x，有

$$C_n(x) \geqslant 0.$$

4. 若 $\{a_k\}$ 递减，即 $a_0 \geqslant a_1 \geqslant \cdots \geqslant a_n > 0$，且 $a_{2k} \leqslant [(2k-1)/(2k)]a_{2k-1}$ $(1 \leqslant k \leqslant n/2)$，则对于 $0 < x < \pi$，有

(1) **Vietoris 不等式**：$C_n(x) > 0$, $\sum_{k=1}^{n} a_k\sin kx > 0$.

特别，取 $a_0 = 2, a_k = 1/k$, $k = 1,\cdots,n$，即得

(2) **Young 不等式**：$1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\cos kx > 0$.

(3) **Fejer-Jackson 不等式**：$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sin kx > 0$.

注 $0 < x < \pi$ 时，$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k} > 0$ 的证明值得注意. 因为它要综合运用数学归纳法、反证法、极值法. 当 $n = 1$ 时，不等式 $S_1(x) > 0$ 显然成立. 设 $n < m$ 时，$S_n(x) > 0$，要证 $S_m(x) > 0$. 用反证法，设 $S_m(x) > 0$ 不成立，则必存在 $\xi \in (0,\pi)$，使 $S_m(\xi) \leqslant 0$，考虑使 $S_m(\xi) \leqslant 0$ 达到极小值的点，不妨仍记为 ξ，这时 ξ 为 $(0,\pi)$ 的内点且 $S'_m(\xi) = 0$，即

$$\sum_{k=1}^{m}\cos k\xi = 0.$$

左边乘以 $2\sin(\xi/2)$ 并用积化和差公式，得 $\sin(m + (1/2))\xi = \sin(\xi/2) > 0$.
上式说明 $(m + 1/2)\xi$ 与 $\xi/2$ 相差 π 的整数倍；由 $0 < \xi < \pi$，得

$|\cos(m+1/2)\xi| = \cos(\xi/2) > 0$,从而 $\sin m\xi = \sin[m+(1/2)]\xi\cos(\xi/2) - \cos[m+(1/2)]\xi \cdot \sin(\xi/2) \geqslant 0$,于是 $S_m(\xi) - S_{m-1}(\xi) = (1/m)\sin m\xi \geqslant 0$,即 $S_{m-1}(\xi) \leqslant S_m(\xi) \leqslant 0$. 即 $S_{m-1}(\xi)$ 在$(0,\pi)$ 内能取到非正值,与归纳假设矛盾. 证毕.

从这个不等式出发,再用数学归纳法,可进一步证明:若 $x_j > 0$, $\sum_{j=1}^{m} x_j < \pi$,则

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{m}\frac{\sin kx_j}{k}\right) > 0.$$

([334]1960(35 ~ 37):1 ~ 4 和[22]612 ~ 613)

我们还要指出,$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n}(\sin kx)/k$ 在$[0,\pi]$ 内仅在 $x_k = (2k-1)\pi\pi/(n+1)$ $(1 \leqslant k \leqslant q)$ 取得极大值,而且这些极大值是递减的. 所以,$S_n(x)$ 在$[0,\pi)$ 上的最大值为 $S_n(\pi/(n+1))$,它是 n 的递增数列,且

$$\lim_{n\to\infty} S_n\left(\frac{\pi}{n+1}\right) = \int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = 1.8519\cdots.$$

$S_n(x)$ 仅在 $y_k = 2k\pi/n$ $(1 \leqslant k \leqslant q-1)$ 取得极小值. $C_n(x) = \sum_{k=1}^{n}(\cos kx)/k$ 在$[0,\pi]$ 内仅在 $x_k = 2\pi k/n$ $(0 \leqslant k \leqslant p)$ 取得极大值,仅在 $y_k = 2\pi k/(n+1)$ $(1 \leqslant k \leqslant q)$ 取得极小值,而在 $2\pi q/(n+1)$ 处为最小值,其中 $q = \left[\frac{n+1}{2}\right]$, $p = [n/2]$. ([6]Vol. 2:92 ~ 93)

5. **Bernstein 不等式及其推广:**

(1) $\| T_n^{(k)} \|_X \leqslant n^k \| T_n \|_X$. (3.1)

此式不能再改进,因为取 $T_n(x) = \cos n(x - x_0)$ 时,$\| T_n \|_c = 1$, $\| T_n^{(k)} \| = n^k$, $k = 1,2,\cdots$. (3.1) 式有多种证法,不同的证法往往和它的不同方向的推广相联系. 例如见[68]、[62] 等.

(2) $\| \widetilde{T}'_n \|_c \leqslant n \| T_n \|_c$.

(3) $\| T_n^{(k)} \|_p \leqslant n^k \| T_n \|_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

(4) $\| T'_n \|_c^2 + n^2 \| T_n^2 \|_c \leqslant n^2 \| T_n \|_c^2$.

(5) $\| \widetilde{T}'_n \|_c^2 + \| T'_n \|_c^2 \leqslant n \| T_n \|_c^2$.

(6) 设 φ 是$[0,\infty)$ 上递减的凸或凹函数,$\varphi(x) > 0$, $\varphi(0) = 0$. 令

$S_n(\varphi,x) = \sum_{k=-n}^{n}\varphi(|k|)c_k e^{ikx}$,则

$\| S_n(\varphi) \|_X \leqslant 2\varphi(n) \| T_n \|_X$, $X = C$ 或 $p(1 \leqslant p \leqslant \infty)$.

推论 1 设 $\varphi(x) = x^\alpha$, $\alpha > 0$,则 $\| S_n(\varphi) \|_X \leqslant 2n^\alpha \| T_n \|_X$.

推论 2 设 $\varphi(x) = e^{\alpha x} - 1$, $\alpha > 0$,则 $\| S_n(\varphi) \|_X \leqslant 2(e^{\alpha n} - 1) \| T_n \|_X$.

(证明见[126]325 ~ 337)

(7) 设 $0 < \delta < 2\pi/n$,则

$$\| T_n^{(k)} \|_c \leqslant \left(\frac{n}{2}\csc\frac{n\delta}{2}\right)^k \max_x\left|\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}T_n(x+j\delta)\right|,$$

仅当 $T_n(x) = a\cos nx + b\sin nx + c$ 时等号成立.([4]352 ~ 353)

(8)　**L^p 空间中的 Bernstein 不等式:**

$$\| T_n\cos\alpha + \frac{1}{n}T'_n\sin\alpha \|_p \leqslant \| T_n \|_p.$$

式中 $0 \leqslant p \leqslant \infty, \alpha \in R^1$.([401]1989,19(1):145 ~ 156)

(9)　$$\left| \sum_{k=1}^{n} kC_{-k}e^{-ikx} \right| + \left| \sum_{k=1}^{n} kC_k e^{ikx} \right| \leqslant n \| T_n \|_X.$$

类似的不等式及其证明见[373]1985,38(2):216 ~ 226.

(10)　**Turan 不等式:**设 $T_n(x)$ 的所有零点都是实的,则

$$\| T'_n \|_p \geqslant C\sqrt{n} \| T_n \|_p. (1 \leqslant p \leqslant \infty).$$

式中 n 的阶不能再改进,证明见[352]1984,11(1):28 ~ 33.

(11)　**尼科利斯基不等式:**设 $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty, r = (1/p) - (1/q)$,则

$$\| T_n \|_q \leqslant 2n^r \| T_n \|_p.$$

特别地,$\| T_n \|_c \leqslant \left(\frac{2n+1}{2\pi}\right)^{1/2} \| T_n \|_2$.

(12)　$$\| T'_n \|_\infty \leqslant \frac{n(n+1)}{2\pi} \| T_n \|_1.$$

(13)　$$\| T_n \|_1 \leqslant \left(\frac{8}{\pi}\right)^{1/2} \left\{ [(n+1)(n+2) + \frac{1}{3}]^{1/2} + \frac{1}{20n} \right\} \| T_n(x)\sin x \|_1 (n \geqslant 3).$$

(14)　取 $\omega(x) = |\sin x|$, $\| T_n \|_{p,\omega} = \left(\int_0^{2\pi} |T_n(x)|^p |\sin x| \mathrm{d}x\right)^{1/p}$. 则

$$\| T_n \|_p \leqslant C(n,p) \cdot n^{1/p} \| T_n \|_{p,\omega};$$

$$\| T_n \|_{p,\omega} \leqslant C(p)\left(n + \frac{2}{5}\right)^\alpha \| T_n(x)\sin x \|_p.$$

式中 $C(n,p) = (2p)^{1/p}\left(1 + \frac{1}{np}\right)^\beta$,

$$C(p) = \left(\frac{(2p+1)^{2+\frac{1}{p}}}{p(p+1)}\right)^{\frac{p-1}{p+1}} \left(\frac{p+1}{p-1}\right)^{1/p} \left(\frac{p-1}{2}\right)^{\frac{2}{p(p+1)}},$$

$\alpha = 1 - (1/p), \beta = n + (1/p), 1 \leqslant p < \infty$. 以上(12) ~ (14) 见[327]1990,62(2):197 ~ 205.

(15)　记 $\| T_n \|_{L^p[-\pi,\pi]} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |T_n(x)|^p |\sin x|^r \mathrm{d}x\right)^{1/p}$. 若 $0 < p < 1, r \geqslant 0$,则

$$\| T'_n \|_{L^p[-1,1]} \leqslant C(r,p)n \| T_n \|_{L^p[-\pi,\pi]}.$$ ([352]1987,14(1):25 ~ 28)

(16)　**Jackson 不等式:** $\| T_n \|_1 \geqslant \frac{1}{n} \| T_n \|_c$.

(17)　设 $T_n(\omega)$ 表示形如

$$t_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} c_k \left[\sin\left(\frac{\omega - x}{2}\right)\right]^k \left[\sin\left(\frac{x+\omega}{2}\right)\right]^{2n-k}$$

的特殊形式的多项式集,式中 $\forall c_k \geqslant 0$ 或 $c_k \leqslant 0, 0 < \omega \leqslant \pi$. 若 $t_n \in T_n(\omega), q_k \in T_k(x)$, $r = t_n q_k, n \geqslant 0, k \geqslant 0, m \geqslant 1$,则

$$\| r^{(m)} \|_c \leqslant C_m \left(\frac{(n+k)(k+1)}{\omega}\right)^m \| r \|_c.$$

$$\| t'_n \|_c \leqslant \{n + 16\pi n^2[(\pi/\omega) - 1]\} \| t_n \|_c.$$

式中 C 范数在$[-\omega,\omega]$上取.([391]1988,51(3～4):421～436)

(18)　设 $\omega \in L[0,2\pi]$, $1 \leqslant p < \infty$,记

$$\| T_n(0+y) \|_{p,w} = \left(\int_0^{2\pi} | T_n(x+y) |^p w(x)dx\right)^{1/p},$$

$$Y_{kn} = \{y = \frac{4m-1+(-1)^k\pi}{4n}; 1 \leqslant m \leqslant 2n\}, \text{则}$$

$$\| T_n^{(k)} \|_{p,\omega} \leqslant n^k \max_{y\in Y_{kn}} \| T_n(\cdot + y) \|_{p,\omega}.$$

(19)　设 $\| T_n \|_C \leqslant 1$,则 $\| T_n^{(k)} \|_{2r+2}^{2r+2} \leqslant \left(\frac{2r+1}{2r+2}\right) n^{2k} \| T_n^{(k)} \|_{2r}^{2r}$.

式中 $r \in N$, $r \geqslant 0$,仅当 $T_n(x) = \cos(nx+\alpha)$ 时等号成立.([327]1991,65(3):273～278)

6.　下面用 $\| C_n \|_{[-a,a]}$ 表示 $\sup\{| C_n(x) |: -a \leqslant x \leqslant a\}$.

(1)　设 $a_k = 1$, $0 < a \leqslant \pi$,则 $\| C_n \|_{[-a,a]} \geqslant (\sin \frac{a}{2})^{2n}$.(证明见[112]90)

(2)　若 $a_0 \geqslant a_1 \geqslant \cdots \geqslant a_n > 0$,则对于所有 $C_n(x)$,有

$$(1 - \frac{2}{\pi}) \frac{1}{n+1} \leqslant \inf_{C_n} \frac{\| C_n \|_{[\frac{\pi}{2},\pi]}}{\| C_n \|_{[0,2\pi]}} \leqslant (\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}) \frac{1}{n+1}.\text{(证明见[73]446～448)}$$

7.　若 $T_n(0) = 0$, $\left| T_n\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right) \right| \leqslant 1$, $k = 0,1,\cdots,2n-1$,则对于 $| x | \leqslant \frac{\pi}{2n}$,有 $| T_n(x) | \leqslant | \sin nx |$,仅当 $T_n(x) = c\sin nx$ 时等号成立.

8.　若 $0 < a < \pi$, $\| T_n \|_{[-a,a]} \leqslant 1$,则 $\| T_n \|_C \leqslant \frac{1}{2}\left[\left(\operatorname{tg} \frac{a}{4}\right)^{2n} + \left(\operatorname{tg} \frac{a}{4}\right)^{-2n}\right]$.

9.　**Erdös 不等式**:若 $a_0 = 1$,且 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{| a_k |, | b_k |\} = 1$, $\sum\limits_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) = An$,则存在只依赖于 A 的常数 $a > 0$,使得 $\lim\limits_{A\to 0} a(A) = 0$,而且

$$\| T_n \|_C > \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + a(A))\{\sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2)\}^{1/2}.\text{(Ann. Polon. Math. 1962,12:151～154)}$$

10.　[MCU].设 $| S_n(x) | \leqslant | \sin x |$,则 $| \sum\limits_{k=1}^n kb_k | \leqslant 1$.

证　不等式左边 $= | S'_n(0) | = \lim\limits_{x\to 0} | \frac{S_n(x) - S_n(0)}{x-0} | \leqslant \lim\limits_{x\to 0} | \frac{\sin x}{x} | = 1$.

11.　(1)　[MCU].设 $| S_n(x) | \leqslant | \sin x |$,且 $| \sum\limits_{k=1}^n b_{n-k+1} \sin kx | \leqslant | \sin x |$,则

$$| \sum_{k=1}^n b_k | \leqslant \frac{2}{n+1}.$$

证　令 $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^n b_{n-k+1} \sin kx$,则　$S'_n(0) + f'_n(0) = (n+1)(\sum\limits_{k=1}^n b_k)$.

再利用　$| S'_n(0) | \leqslant 1$, $| f'_n(0) | \leqslant 1$,即可得证.

(2)　若 $| S_n(x) | \leqslant | \sin x |$,则 $| S'_n(0) | = | \sum\limits_{k=1}^n kb_k | \leqslant 1$.

12.　(1)　若 $|S_n(x)|\leqslant 1$,则 $\sum_{k=1}^{n}|kb_k|\leqslant n$;

(2)　若 $\|S_n\|_c\leqslant 1$,则 $\left|\frac{S_n(x)}{\sin x}\right|\leqslant n$.

13.　设 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 不全为 0,而 $\sum_{k=1}^{n}a_k=0$, $\sum_{k=1}^{n}a_k\cos kx\geqslant 0$, $(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$,则当 $0<x<\pi$ 时,有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\Big(\sum_{j=0}^{k-1}a_j\Big)\sin kx>0.$$

14.　若 $b_k\geqslant b_{k+1}\geqslant 0$, $b_k\leqslant\frac{A}{k}$,则 $|S_n(x)|\leqslant 2A\sqrt{\pi}<A(\pi+1)$.

证　不妨设 $0<x<\pi$,令 m 满足 $1\leqslant m\leqslant n-1$,而且若 $1\leqslant\frac{\sqrt{\pi}}{x}<n$,则取 $m=\left[\frac{\sqrt{\pi}}{x}\right]$,若 $x>\sqrt{\pi}$,则取 $m=0$,若 $x\leqslant\frac{\sqrt{\pi}}{n}$,则取 $m=n$,于是

$|S_n(x)|\leqslant\left|\sum_{k=1}^{m}b_k\sin kx\right|+\left|\sum_{k=m+1}^{n}b_k\sin kx\right|=\sigma_1+\sigma_2$,估计 σ_1 用 $|\sin kx|\leqslant kx$,而估计 σ_2 用

$$\left|\sum_{k=p}^{q}\sin kx\right|\leqslant\frac{1}{\sin(x/2)}\leqslant\frac{\pi}{x}.\quad([73]484\sim 485)$$

15.　设 $\Delta b_k=b_k-b_{k+1}\geqslant 0$, $0<|x|\leqslant\pi$,则

$$\left|\sum_{k=n}^{m}b_k\sin kx\right|\leqslant\frac{\pi b_n}{|x|}.$$

提示:利用

$$\left|\sum_{k=n}^{m}b_k\sin kx\right|=\left|b_m\Big(\sum_{k=n}^{m}\sin kx\Big)+\sum_{k=n}^{m-1}\Delta b_k\Big(\sum_{j=n}^{k}\sin jx\Big)\right|\text{和}\left|\sum_{k=n}^{m}\sin kx\right|\leqslant\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\leqslant\frac{\pi}{|x|}.$$

16.　$\|T_n\|_C\leqslant\frac{1}{2}|a_0|+\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+|b_k|)\leqslant\sqrt{4n+2}\,\|T_n\|_C$.

提示:利用

$$\frac{1}{2}|a_0|+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|T_n(x)|^2\mathrm{d}x\leqslant 2\|T_n\|_C.\ ([60]\text{上册 }67)$$

17.　设 $|T_n(x)|\leqslant 1$,则当 $1\leqslant p\leqslant 2$ 时,存在常数 $c>0$,使得 $\left\{\frac{1}{2}|a_0|^p+\sum_{k=1}^{n}(|a_k|^p+|b_k|^p)\right\}^{1/p}\leqslant cn^r$,式中 $r=\frac{1}{p}-\frac{1}{2}$.

当 $p>2$ 时,上式不成立,特别当 $p=1$ 时,有

$$\frac{1}{2}|a_0|+\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+|b_k|)\leqslant cn^{1/2}.$$

提示:用 Hölder 不等式.([57]Vol. 1:245)

18.　设 $T_n(x_0)=\|T_n\|$,则对于 $|x|<\pi/n$,有

$$T_n(x_0+x) \geqslant T_n(x_0)\cos nx = \| T_n \| \cos nx.$$

证 不妨设 $x_0=0, x>0$，令 $A=\|T_n\|$. 用反证法，若存在 y，使 $0<y<\pi/n$，而且 $T_n(y)<A\cos ny$，对于 $\varepsilon>0$，令 $g_\varepsilon(x)=T_n(x)-(A+\varepsilon)\cos nx$，选取 $\varepsilon>0$ 充分小，使 $g_\varepsilon(x)<0$，而且若 $x_k=k\pi/n$，则

$$g_\varepsilon(x_k)\begin{cases}\geqslant \varepsilon, & \text{若 } k \text{ 为奇数},\\ \leqslant -\varepsilon, & \text{若 } k \text{ 为偶数},\end{cases}$$

从而对于 $\varepsilon>0$，g_ε 在每个区间 $[y,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{2n-2},x_{2n-1}]$ 内至少有一个零点. 于是令 $\varepsilon\to 0$，得出 g_0 在区间 $[y,2\pi]$ 内至少有 $2n-1$ 个零点，此外，$g_0(0)=g'_0(0)=0$，g_0 必为不超过 $2n$ 次的三角多项式，并且在区间 $[0,2\pi]$ 内至少有 $2n+1$ 个零点，然而这是不可能的(因为 $g_0(y)<0$，所以 $g_0\neq 0$).

推论 $\| T_n^{(k)} \|_C \leqslant \left(\dfrac{n}{2\sin nh}\right)^k \| \Delta_{2h}^k(T_n) \|_C.$

19. 设 $m>n$，$a=\min\left\{\dfrac{\pi}{2m},\dfrac{(m-n)\pi}{2mn}\right\}$，$0\leqslant\beta<a$，若对任意 $x_0\in R^1$，n 阶三角多项式 $T_n(x)$ 满足 $2m$ 个不等式：

$$|T_n(x_k)|\leqslant M, 0\leqslant k\leqslant 2m-1.$$

式中 $x_k=x_0+(k\pi/m)+\sigma_k$，$|\sigma_k|\leqslant\beta$，则

$$\|T_n\|\leqslant M\sec n((\pi/2m)+\beta).$$

上界不能再改进，当 $\beta=0$ 时得到 Bernstein 不等式(1931).

提示：用反证法，并考虑 n 阶三角多项式 $\varphi(x)=M\sec n((\pi/2m)+\beta)\cdot\cos nx-T_n(x)$ 的零点特征. ([82]244 ~ 246)

20. 设 $T_n(x)=\sum\limits_{k=-n}^{n}c_k\exp(ikx)$ 是正的三角多项式，$c_k=\bar{c}_{-k}$，则

$$|c_k|\leqslant c_0\cos\left(\frac{\pi}{[k/n]+2}\right).$$

21. **Abel 不等式**：若 $x\neq 2k\pi$，则

(1) $\left|\sum\limits_{k=m+1}^{m+n}\exp(ikx)\right|\leqslant\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|^{-1}$；

(2) $\left|\sum\limits_{k=m+1}^{m+n}\sin kx\right|\leqslant\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|^{-1}$； (3) $\left|\sum\limits_{k=m+1}^{m+n}\cos kx\right|\leqslant\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|^{-1}$.

证 $\left|\sum\limits_{k=m+1}^{m+n}\exp(ikx)\right|\leqslant\left|\exp[i(m+1)x]\dfrac{e^{inx}-1}{e^{ix}-1}\right|$

$=|\sin(nx/2)|\cdot|\sin(x/2)|^{-1}\leqslant|\sin(x/2)|^{-1}$.

(4) 若 a_n 是正的递减数列，则对于 $x\neq 2j\pi, j\in N$，有

$$\left|\sum_{k=n}^{m+n}a_k\exp(ikx)\right|\leqslant a_n/|\sin(x/2)|.$$

(5) 当 $0<x\leqslant\pi, m\geqslant n$ 时，有

$$\left|\sum_{k=n}^{m}\sin(k+(1/2))x\right|\leqslant\pi/x.$$

22. **指数和不等式：**

(1) 令 $S(n,m,q)=\sum_{k=0}^{m-1}\exp(2\pi ink^2/q), q\in N, (n,q)=1$. 高斯证明 $|S(n,q,q)|\leqslant\sqrt{q}$. 华罗庚将指数中的 k^2 推广到一般整系数多项式.（[76]196 ～ 201）若 $q\geqslant 60$, $2a$ 与 q 互为素数，自然数 p,m 满足 $m<m+p\leqslant q$，则

$$|S(a,m+p,q)-S(a,m,q)|\leqslant\sqrt{q}\ln q;$$

若 2 除不尽 q，则 $|S(1,m,q)-(m/q)S(1,q,q)|\leqslant\sqrt{q}\log q$.（[76]187）

(2) 令 $S(\alpha)=\sum_{k=1}^{m}\exp(2\pi i(\alpha+k)^2/n)$，则当 $m\leqslant(n/4)-\alpha$，$|\alpha|<1$ 时，$|S(\alpha)|\leqslant c\sqrt{n}$；当 $m\leqslant n-1$ 时，$|S(0)|\leqslant c\sqrt{n}$.

(3) 设 $\langle a\rangle=\min\{\alpha-[\alpha],[\alpha]+1-\alpha\}$，即 $\langle\alpha\rangle$ 表示 α 和它最靠近的整数间的距离. α 为实数. 记

$S(m,n)=\sum_{k=n}^{m}\exp(2\pi ik\alpha)$，则 $|S(m,1)|\leqslant\min\{m,|\sin\pi\alpha|^{-1}\}$，而且

$|S(m,n)|\leqslant\min\{m-n,\frac{1}{2\langle a\rangle}\}$.（[76]187）

(4) Vinogradov 三角和定义为 $S(m,n)=\sum_{k=1}^{m-1}(|\sin(\pi kn/m)|/\sin(\pi k/m))$. 1989 年，俞孔樾证明：$(\frac{1}{m})\sum_{n=1}^{m}S(m,n)<\frac{4m}{\pi^2}(\log m+c-\log\frac{\pi}{2})+\frac{2}{\pi}(2-\frac{1}{\pi})-\frac{\pi}{6m}(1-\frac{1}{m})$，式中 c 为 Euler 常数.（浙江师范大学学报，1989，12：4）

(5) **华罗庚不等式：**设 $N,n_1,\cdots,n_m$ 无公因子，$\varepsilon>0$，则

$$\left|\sum_{k=1}^{N}\exp\left\{2\pi i\left(\sum_{j=1}^{m}(k^j\cdot n_j)/N\right)\right\}\right|\leqslant cN^p,$$

式中 $p=1-(1/m)+\varepsilon$，c 只依赖于 m,ε.

(6) **华罗庚不等式：**令 $q=2^m-m+\varepsilon,\varepsilon>0$，则

$$\int_0^1\left|\sum_{k=1}^{N}\exp(2\pi itk^m)\right|^{2^m}dt\leqslant cN^q,$$

式中常数 c 只依赖于 m,ε.

(5)(6) 见 Selected papers of Loo-Keng Hua. Edited by H. Halberstam, Springer, 1983.

23. 若 $k\to\infty$ 时，α_k 递减趋于 0，$0<x<2\pi$，则

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\alpha_k\exp(ikx)\right|\leqslant\alpha_n/\sin(x/2).\quad([305]1957,64:47\sim 48)$$

24. 设 $a_{n,k}\geqslant 0$，$\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}=1$，令 $A_n(u)=\sum_{j=0}^{[u]}a_{n,n-j}$，$u\geqslant 0$，$0<t\leqslant\pi$，$0\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty$，则

$$\left|\sum_{k=p}^{q}a_{n,n-k}\exp i(n-k)t\right|\leqslant cA_n(\pi/t).$$

([324],1942,9:168 ~ 207)

25. 设$\{\lambda_n\}$为递增实数列,若$\lambda_{n+1}-\lambda_n\geqslant\alpha>1$,记$\|c\|_2=(\sum|c_n|^2)^{1/2}$.则存在只与$\alpha$有关的常数$A,B$,使得$A\|c\|_2\leqslant\|\sum c_n\exp(i\lambda_n t)\|_2\leqslant B\|c\|_2$.

注意α不能换成1.但对上界估计,条件可换成$\{\lambda_n\}$递增且$\{\exp(i\lambda_n t)\}$为$L^2(-\pi,\pi)$中的基本列(Ingham,A. E.).([308]1984,92(4):549 ~ 553)

26. 设$S(x)=\sum_{k=M+1}^{M+N}\alpha_k\exp(2\pi ikx)$,式中$\{\alpha_k\}$为复数列,若$0\leqslant x_0<x_1<\cdots<x_n\leqslant 1$,$x_{k+1}-x_k\geqslant\delta>0$,则

$$\sum_{k=1}^{n}|S(x_k)|^2\leqslant(N+\delta^{-1}-1)\sum_{k=M+1}^{M+N}|\alpha_k|^2.$$

这是1974年蒙哥马利-沃恩利用泛函分析的对偶原理得到的最佳估计.([154]560)

27. 对于任意实数x,有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right|\leqslant\begin{cases}2\sqrt{\pi}<1+\pi,\\ \int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx=1.8519\cdots<\frac{\pi}{2}+1.\end{cases}$$

证 因为$f(x)=\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right|$是以$2\pi$为周期的偶函数,又$x=0,\pi$时,不等式显然成立,所以只要对于$0<x<\pi$,证明不等式.取自然数$m$满足$m\leqslant\frac{\sqrt{\pi}}{x}<m+1$,则$f(x)\leqslant\sum_{k=1}^{m}\left|\frac{\sin kx}{k}\right|+\left|\sum_{k=m+1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right|=\sigma_1+\sigma_2$,若$m=0$,则$\sigma_1=0$,若$m\geqslant n$,则$\sigma_2=0$,利用$|\sin t|\leqslant|t|$,有$\sigma_1\leqslant\sum_{k=1}^{m}\frac{kx}{k}=mx\leqslant\sqrt{\pi}$.另一方面,从$\sin\frac{x}{2}>\frac{x}{\pi}$及Abel不等式,有

$$\sigma_2\leqslant\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\cdot\frac{1}{m+1}\leqslant\frac{1}{\frac{x}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{x}}=\sqrt{\pi}.$$

所以$f(x)\leqslant\sigma_1+\sigma_2\leqslant 2\sqrt{\pi}$.

注 当x充分小时,可取m满足$\frac{2n-1}{3}<m<\frac{1}{2x}$,这时不等式可改进为$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right|\leqslant 1$.

28. [MCM].$\sum_{k=n}^{3n-1}\frac{1}{k}|\sin k|>\frac{1}{9}$.

提示:先证对任意实数x,$|\sin x|$,$|\sin(x+1)|$中至少有一个大于1/3.

29. 设$f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}(|\sin kx|/k)$,$M_n=(\pi/2)\max\{f_n(x):x\in R\}$,$S_n=\sum_{k=1}^{n}(1/k)$,则$S_n<M_n<S_n+1$.

证 令$B_n(x)=\sum_{k=1}^{n}(\cos kx/k)$,则

$f_n(x)=(2/\pi)S_n-(4/\pi)\sum_{k=1}^{\infty}B_n(2kx)/(4k^2-1)\leqslant(2/\pi)S_n+(4/\pi)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}=$ $(2/\pi)(S_n+1)$，另一方面，有 $M_n>\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f_n(x)\mathrm{d}x=(2/\pi)S_n$.

30. $\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}\right|\leqslant\frac{\pi}{2}\ (x\in R^1)$；若 $0<x<\pi$，则 $0<\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}\leqslant 1$.

31. 若 $x\neq 2j\pi\quad(j\in Z)$，则

$\left|\sum_{k=m+1}^{m+n}\frac{\sin kx}{k}\right|\leqslant\left|\sin\frac{x}{2}\right|^{-1}$，$(m=0,1,\cdots)$；而当 $|x|>\frac{1}{n}$ 时，有

$$\left|\sum_{k=n^2+1}^{n^3}\frac{\sin kx}{k}\right|\leqslant\frac{2\pi}{n^2|x|}.\ ([327],1990,62(2):258)$$

32. 设 $0<x<2\pi$，则

$$\left|\sum_{k=m+1}^{m+n}\frac{\sin kx}{k}\right|\leqslant\frac{1}{(m+1)\sin(x/2)}.$$

提示：利用 Abel 恒等变换及 Abel 不等式.

33. 若 $0<x<\pi,n>1$，则

$$0<4(\sin\frac{x}{2})^2(\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\frac{\pi-x}{2})<\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}<\pi-x.$$

34. 设 $0<x\leqslant\pi,0<\alpha<1$，则

(1) $\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k^{\alpha}}\right|\leqslant C_{\alpha}x^{\alpha-1}$.　　(2) $\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos kx}{k^{\alpha}}\right|\leqslant C_{\alpha}x^{\alpha-1}$.

(3) $\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos kx}{k}\right|\leqslant\ln\frac{1}{x}+c$.　　(4) $\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos kx}{k}\leqslant-\ln\sin\frac{x}{2}+\frac{\pi-x}{2}$.

注意这几个不等式的证明技巧都有典型意义. 下面仅以(1) 的证明为例.

选取 γ,β，使 $0<\gamma<\alpha<\beta<\infty$，并使 γ 充分小，β 充分大，则

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}k^{-\alpha}\sin kx=\sum_{k<r/x}+\sum_{r/x\leqslant k\leqslant\beta/x}+\sum_{k>\beta/x}=S_1+S_2+S_3.$$

利用 $\sum_{k<M}k^{-\alpha}<\int_0^M t^{-\alpha}\mathrm{d}t=\frac{M^{1-\alpha}}{1-\alpha}=C_{\alpha}M^{1-\alpha}$ 可得

$$|S_1|\leqslant\sum_{k<r/x}k^{-\alpha}|\sin kx|\leqslant\sum_{k<r/x}k^{-\alpha}(kx)<r\sum_{k<r/x}k^{-\alpha}<C_{\alpha}(\frac{r}{x})^{1-\alpha}=C_{\alpha}r^{1-\alpha}x^{\alpha-1}.\tag{3.2}$$

再利用 Abel 不等式，有

$$\left|\sum_{k\geqslant M}k^{-\alpha}\sin kx\right|\leqslant M^{-\alpha}\max\left\{\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|:0<x\leqslant\pi\right\}\leqslant M^{-\alpha}\left|\sin\frac{\pi}{2}\right|^{-1}.$$

于是

$$|S_3|\leqslant(\frac{\beta}{x})^{-\alpha}(\frac{x}{\pi})^{-1}=C_{\alpha}\beta^{-\alpha}x^{\alpha-1}.\tag{3.3}$$

再利用

$\sum_{k=1}^{\infty}k^{-\alpha}\sin kx\approx x^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)\cos\frac{\pi}{2}\alpha$，$(x\to+0,0<\alpha<1)$，([57]Vol. 1:70)

对于固定的 $\varepsilon > 0$，有

$$(\beta-\varepsilon)x^{\alpha-1} \leqslant S_2 \leqslant (\beta+\varepsilon)x^{\alpha-1}. \tag{3.4}$$

从(3.2)，(3.3)，(3.4) 式即可推得

$$\left|\sum_{k=1}^{n} k^{-\alpha}\sin kx\right| \leqslant C_\alpha x^{\alpha-1}.$$ ([57]Vol. 1:187)

35. $\left|\sum_{k=0}^{n}\dfrac{\alpha_k}{n-k+1}\right| \leqslant A\int_0^{\pi} |C_n(x)|\,\mathrm{d}x$. 式中，$\dfrac{\pi}{2} \leqslant A < \int_0^{\pi}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = 1.85\cdots$.

特别地，若所有 α_k 同号，则 $A = \pi/2$.

36. 对于任意实数 $C_k, k = 0,1,\cdots,n$，有

$$\max\left||\cos x| - \sum_{k=0}^{n} C_k\cos^k x\right| > \frac{1}{2\pi(2n+1)}.$$

证明见[60]上册 177 ～ 178.

37. **Lebed 不等式**：记 $A_s = \{\{\alpha_k\}:\alpha_k \geqslant 0$ 且 $s \geqslant 0$ 时，$\alpha_k k^{-s}$ 递减$\}$，$A_{-s} = \{\{\alpha_k\}:\alpha_k \geqslant 0$ 且 $s < 0$ 时 $\alpha_k \cdot k^s$ 递增$\}$. 设 $f(x) = \cos x$ 或 $\sin x$，则当 $x \neq 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 时，有

$$\left|\sum_{k=n}^{m}\alpha_k f(kx)\right| \leqslant \begin{cases} \dfrac{a_n}{\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|}\left(\dfrac{m}{n}\right)^s, \text{当}\{a_k\} \in A_s, \\ \dfrac{a_m}{\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|}\left(\dfrac{m}{n}\right)^s, \text{当}\{a_k\} \in A_{-s}. \end{cases}$$

([4]361 ～ 362)

38. $\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\dfrac{\sin kx}{k}\right| \leqslant \sqrt{2}\,|x|$.

证 令 $f(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\dfrac{\sin kx}{k}$，及 $y = x - \pi$.

(1) 若 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$，则

$$|f'(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos kx\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}\cos ky\right| \leqslant \frac{1}{|\sin(y/2)|} \leqslant \sqrt{2},$$

从而 $|f(x)| \leqslant \sqrt{2}\,|x|$.

(2) 若 $x \geqslant \dfrac{\pi}{2}$，则

$$|f(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin ky}{k}\right| < \int_0^{\pi}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u < 2 < \sqrt{2}\,|x|.$$

(Gaier-Todd，Numer. Math. 1967，9:452 ～ 459)2004 年章仁江将系数 $\sqrt{2}$ 改进到 1.（中国计量学报，2004(1)）

39. (1) 设 $-\pi < x < \pi, m = 0,1,2,\cdots$，则

$$\sum_{k=m+1}^{m+n}(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k} \leqslant 2\left[(m+1)\cos\frac{x}{2}\right]^{-1}.$$

(2) 设 $0 < x < \pi$，则

$$0 < 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos kx}{k} < 1 - \log\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{\pi - x}{2}.$$ ([22]612,616)

40. 设 $0 < x < \frac{\pi}{n+1}$，$T_n(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k} - \frac{x}{2}$. 则 n 为奇数时，$T_n(x) > 0$，n 为偶数时，$T_n(x) < 0$.

一般地，有 **Sz-Nagy 不等式**：设数列 $\{\alpha_{n+m}\}$ 满足：$\alpha_{n+1} > 0$，而当 $k \geqslant n+1$ 时，$\{\alpha_k\}$ 为凸序列，即 $\alpha_k \geqslant 0, \Delta\alpha_k = \alpha_k - \alpha_{k+1} \geqslant 0, \Delta^2\alpha_k = \alpha_k - 2\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2} \geqslant 0$，并且 $\lim_{k\to\infty}\alpha_k = 0$，则当 $\frac{n}{n+1}\pi < x < \pi$ 时，有 $(-1)^n\sum_{k=n+1}^{\infty}\alpha_k \sin kx > 0$. ([4]339 ~ 340)

41. **Dirichlet 核不等式**：n 阶 Dirichlet 核定义为：

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kx = \begin{cases} \dfrac{\sin(n+(1/2))x}{2\sin(x/2)}, & x \neq 2m\pi \quad (m \in Z), \\ n + 1/2, & x = 2m\pi. \end{cases}$$

(1) $|D_n(x)| \leqslant (1/2)|\csc(x/2)|, x \neq 2k\pi, k \in Z.$

(2) $$|D_n(x)| \leqslant \begin{cases} n + (1/2), & (x \in R^1), \\ (1/2)|\csc(\sigma/2)| \leqslant \pi/(2\sigma), & (0 < \sigma \leqslant |x| < \pi). \end{cases}$$

(3) $\sum_{k=0}^{m} D_n(2\pi k/p) > 0, \quad (p \in N, m, n = 0,1,2,\cdots).$

(4) 若 $0 \leqslant n < p, 1 \leqslant m < p$，则

$$\sum_{k=1}^{m} D_n(2\pi k/p) < \frac{\pi}{2}, \quad \sum_{k=1}^{m} D_n(2\pi k/p) < \frac{p-n+m}{2}.$$

(5) 设 $0 < a \leqslant \frac{\pi}{2}$，则

$\frac{1}{2n-1}D_{n-1}\left(\frac{a}{n}\right)$ 关于 n 递减，$\frac{1}{2n+1}D_n\left(\frac{a}{n}\right)$ 关于 n 递增. ([301]2000,252:410 ~ 430)

(6) 设 $1 < p \leqslant 2, n > 1$，则

$$\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\left|\sum_{k=n}^{2n-1} C_k D_k(x)\right| dx \leqslant A_p\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}|C_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

式中 $A_p = \pi(2 + \frac{1}{2}(p-1)^{-\frac{1}{p}})$. ([22]584)

42. **Fejér 核不等式**：Fejér 核定义为：

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{n+1}\left(\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}x}{2\sin(x/2)}\right)^2, & x \neq 2m\pi, \\ (n+1)/2, & x = 2m\pi. \end{cases}$$

(1) $$0 \leqslant K_n(x) \leqslant \begin{cases} (n+1)/2 < n, & x \in R^1, \\ \dfrac{\pi^2}{2(n+1)x^2}, & 0 < |x| \leqslant \pi, \\ \dfrac{[\csc(\sigma/2)]^2}{2(n+1)} < \dfrac{\csc(\sigma/2)}{2}, & 0 < \sigma \leqslant |x| \leqslant \pi. \end{cases}$$

(2) $x^{\alpha}K_n(x) \leqslant \begin{cases} 2^{\alpha-2}\pi^2(n+1)^{1-\alpha}, & 0 < x < 1/n, 0 < \alpha \leqslant 1, \\ \dfrac{\pi^2 x^{\alpha-2}}{2(n+1)}, & 0 < x \leqslant \pi, 0 < \alpha \leqslant 2. \end{cases}$

43. (C,α) 核(**Fejér 核的推广**,如$(C,1)$ 核就是 Fejér 核):

$$K_n^{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^{\alpha}} D_k(t) \quad (\alpha > 0),$$

式中 $A_n^{\alpha} = \binom{n+\alpha}{n} = \dfrac{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}{n!}$,

$$K_n^{\alpha}(x) \leqslant \begin{cases} n+1 \leqslant 2n, & x \in R^1, \\ \dfrac{A_{\alpha}}{n^{\alpha}x^{\alpha+1}}, & 0 < x \leqslant \pi, 0 < \alpha < 1, \\ \dfrac{nA_{\alpha}}{(1+nx)[1+(nx)^{\alpha}]}, & 0 \leqslant x \leqslant \pi, 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

式中 A_{α} 是只依赖于 α 的常数. ([57]Vol. 1:94)

注 $D_n(x), K_n(x)$ 的积分不等式见第 13 章 No. 98,99.

44. **共轭 Dirichlet 核不等式**:共轭 Dirichlet 核定义为

$$\widetilde{D}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\cos(x/2) - \cos[n+(1/2)]x}{2\sin(x/2)}.$$

$$|\widetilde{D}_n(x)| \leqslant \begin{cases} n, & x \in R^1, \\ \dfrac{1}{|\sin(x/2)|} \leqslant \dfrac{\pi}{|x|}, & 0 < |x| < \pi. \end{cases}$$

45. **共轭 Fejer 核不等式**:共轭 Fejer 核定义为

$$\widetilde{K}_n(x) = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(k+(1/2))x}{2\sin(x/2)} = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \left(\frac{1}{n+1}\right)\frac{\sin(n+1)x}{[2\sin(x/2)]^2}.$$

(1) $|\widetilde{K}_n(x)| \leqslant n/2.$

(2) $\widetilde{K}_n(x) > 0, 0 < t < \pi.$

(3) $\widetilde{K}_n(x)\operatorname{sgn}x \geqslant 0, -\pi < x < \pi.$

(4) $\left|\widetilde{K}_n(x) - \dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}\right| \leqslant \dfrac{\pi^2}{4(n+1)x^2}, 0 < |x| < \pi.$

46. **共轭(C,α) 核定义为**:

$$\widetilde{K}_n^{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^{\alpha}} \widetilde{D}_k(x) = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}(x/2) - H_n^{\alpha}(x),$$

式中 $H_n^{\alpha}(x) = \dfrac{1}{2A_n^{\alpha}\sin(x/2)}\operatorname{Re}[\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1}\exp n(k+\frac{1}{2})x].$

$$|\widetilde{K}_n^{\alpha}(x)| \leqslant \begin{cases} n, & x \in R^1, 0 < \alpha < 1, \\ \dfrac{A_{\alpha}}{n^{\alpha}x^{\alpha+1}}, & 0 < x \leqslant \pi, 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

式中 A_{α} 是依赖于 α 的常数. ([57]Vol. 1:95;[87]60)

47. **Poisson 核不等式**:Poisson 核定义为

$$P(r,t)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cos nt=\frac{1-r^2}{2(1-2r\cos t+r^2)}\quad(0\leqslant r<1).$$

(1) $$P(r,t)\leqslant\begin{cases}\dfrac{1}{1-r}, & 0\leqslant r<1,\\ \dfrac{\pi^2}{2}\cdot\dfrac{(1-r)}{t^2}, & 1/2\leqslant r\leqslant 1,\ |t|<\pi.\end{cases}$$

(2) $$\frac{1-r}{2(1+r)}\leqslant P(r,t)\leqslant\frac{1+r}{2(1-r)},\quad 0\leqslant r<1.$$

(3) $$\frac{1}{\pi}\int_0^{1-r}t^{\alpha}P(r,t)\mathrm{d}t\leqslant(1-r)^{\alpha},\quad 0<\alpha\leqslant 1.$$

(4) $$\frac{1}{\pi}\int_{1-r}^{\pi}t^{\alpha}P(r,t)\mathrm{d}t\leqslant\begin{cases}\dfrac{\pi(1-r)^{\alpha}}{4r(1-\alpha)}, & 0<\alpha<1,\\ \dfrac{\pi(1-r)}{4r}\log\dfrac{\pi}{1-r}, & \alpha=1.\end{cases}$$

(5) $$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}t^{1+\alpha}P(r,t)\mathrm{d}t\leqslant\frac{\pi^{1+\alpha}}{4\alpha r}(1-r),\quad 0<\alpha\leqslant 1.$$

(6) $$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|P'(r,t)|\mathrm{d}t\leqslant\frac{2}{\pi(1-r)},\quad 0<r<1.$$

(7) $$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|P''(r,t)|\mathrm{d}t\leqslant\frac{4}{(1-r)^2},\quad 0<r<1.$$

式中 P 的导数是对 t 求的.

48. 若 $0\leqslant x\leqslant\pi$,则 $\sum_{k=1}^{n}\sin kx+\frac{1}{2}\sin(n+1)x\geqslant 0$. (Fejer)

49. 若 $0<x<\pi$, $|\lambda|\leqslant 1$, $m=n$ 或 $n-1$,则

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}+\lambda\sum_{k=1}^{m}\frac{\sin 2kx}{2k}>0.\quad([22]617)$$

50. $\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)|\sin kx|\leqslant\frac{(n+1)^2}{\pi}$.

51. $\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)\sin kx>0$, $0<x<\pi$. (Lukács)

52. 设 $T_n^{\alpha}(t)=\frac{1}{1+\alpha}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos kt}{k+\alpha}$,则当 $-1<\alpha\leqslant 1$ 时,$T_n^{\alpha}(t)\geqslant 0$. (**Young 不等式**)进一步推广见[4]342 ~ 343.

53. 记 $C_n(x,a)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k\cos kx$, $C_n(x,1)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx$,则

$$\frac{\int_0^{\pi}|C_n(x,a)|\mathrm{d}x}{\int_0^{\pi}|C_n(x,1)|\mathrm{d}x}\geqslant\min_{1\leqslant m\leqslant n+1}\left\{\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}a_{n+1-k}\right\},$$

仅当 $a_0=a_1=\cdots=a_n\geqslant 0$ 时等号成立. (Alzer, H., [301]1997, 208(2): 567 ~ 570)

54. 设 $|T_n(\frac{k\pi}{n})|\leqslant 1$, $k=0,1,\cdots,2n-1$, $T'_n(0)=0$,则

$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|T'_n(x)|^2}{1-\cos x}\mathrm{d}x\leqslant n^3$，仅当 $T_n(x)=e^{ia}\cos nx(a\in R^1)$ 时等号成立.

(Guessab, A. 等，[327]1997，90(2)：255 ～ 282)

55. 设 $\|T_n\|_C=\max\{|T_n(x)|:x\in[0,\pi]\}\leqslant 1$，$\omega_r(x)=(\sin x)^r$，

$\|T_n^{(k)}\|_{2,\omega_r}=\left(\int_0^{\pi}|T_n^{(k)}(x)|^2\omega_r(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}$. 则：

(1) $\|T_n^{(k)}\|_{2,\omega_4}\leqslant\frac{\sqrt{\pi}}{4}n^k\left(1-\frac{16}{n^2}\right)^{1/2}$，$k\geqslant 2$，$n\geqslant 4$.

仅当 $T_n(x)=\cos n(x-x_0)$ 时等号成立.

(2) $\|T_n^{(k)}\|_{2,\omega_1}\leqslant n^k\left(1+\frac{1}{4n^2-1}\right)^{1/2}$.

特别地，当 $T_n(x)$ 为奇函数或偶函数时，成立 $\|T_n^{(k)}\|_{2,\omega_1}\leqslant n^k\left(1-\frac{1}{4n^2-1}\right)^{1/2}$.

(3) $\|T_n^{(k)}\|_{2,\omega_2}\leqslant\frac{\sqrt{\pi}}{2}n^k$. 仅当 $T_n(x)=\cos n(x-x_0)$ 时等号成立.

(4) $\|T_n^{(k)}\|_{2,\omega_3}\leqslant\sqrt{\frac{2}{3}}n^k\left(1+\frac{9}{(4n^2-1)(4n^2-9)}\right)^{1/2}$.

$k\geqslant 2$，$n\geqslant 3$，仅当 $T_n^{(k-1)}(x)=\pm n^{k-1}\sin nx$ 时等号成立. 特别地，当 $T_n(x)$ 为偶或奇函数时，下式成立

$$\|T_n^{(k)}\|_{2,\omega_3}\leqslant\sqrt{\frac{2}{3}}n^k\left(1-\frac{9}{(4n^2-1)(4n^2-9)}\right)^{1/2}.$$

([309]1995，347(5)：1753 ～ 1761)

56. 设 $\|T_n\|_q=\left(\int_0^{2\pi}|T_n(x)|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}$，$2\leqslant q<\infty$，

$$\|T_n\|_c=\max\{|T_n(x)|:x\in[0,2\pi]\}\leqslant 1，则$$

(1) $$\|T_n^{(k)}\|_q\leqslant\left(1-\frac{1}{q}\right)^{1/q}n^{2k/q}\|T_n^{(k)}\|_{q-2}^{t}. \tag{3.5}$$

仅当 $T_n(x)=\cos(nx+a)$ 时等号成立. 式中 $t=1-(2/q)$.

(2) 若 q 为大于 2 的整数，则重复应用(3.5)式得出

$$\|T_n^{(k)}\|_q\leqslant\left(\frac{2\pi(q-1)!!}{q!!}\right)^{1/q}n^k.$$

(3) 设 $m\geqslant 2$，$a=(q-1)/2$，$b\neq 0$，$q>2$，$b\in R^1$，则

$(2a)^{k(k-3)}\|T_n^{(k)}\|_q^2\leqslant(2a)^{m(m-3)}b^{2(k-m)}\|T_n^{(m)}\|_q^2+\frac{1}{4}(m-k)b^{2k}\|T_n\|_q^2$.

$k=1,2,\cdots,m-1$. ([332]1997，13(2)：78 ～ 82)

57. 设 u 是 2π 周期的偶 A_p 权，则 $\forall k\in N$，下式成立

$$\|T_n^{(k)}\|_{p,u}\leqslant 3k(2n)^k\omega\left(T_n,\frac{\pi}{4n}\right)_{p,u}.$$

式中 $\omega(T_n,\delta)_{p,u}=\sup\limits_{|h-t|\leqslant\delta}\|T_n(\cdot+h)-T_n(\cdot+t)\|_{p,u}$.

(Kilgore, Theodone 等，Result. Math. 1996，30(1 ～ 2)：79 ～ 92)

58. 设 m,M 分别是 $T_n(x)$ 的极小极大值，则

$$m+\frac{M-m}{n+1}\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}T_n(x)\mathrm{d}x\leqslant M-\frac{M-m}{n+1}.$$

这是积分第一中值定理关于实值三角多项式的加强.([56]Vol. 2:99)

59. 令 $M(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f|$，$M_n(f)=\frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1}\left|f\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right)\right|$，

(1) 若 $1\leqslant p\leqslant\infty$，则 $M_n(T_n^p)\leqslant C_1^pM(T_n^p)$；

(2) 若 $1<p<\infty$，则 $M(T_n^p)\leqslant C_2^pM_n(T_n^p)$；

$M_n(\widetilde{T}_n^p)\leqslant C_3^pM(T_n^p)$；$M(\widetilde{T}_n^p)\leqslant C_4^pM_n(T_n^p)$.

(3) 若 $0<p<1$，则 $M(T_n^p)\leqslant C_5^p[M_n(T_n)]^p$；$M(\widetilde{T}_n^p)\leqslant C_6^p([M_n(T_n)]^p$.

(Fund. Math. 1936, 28: 131 ~ 166)

60. **Erdös 猜想**：设 $T_n(x)$ 的所有根都是实的，且 $\|T_n\|_C=1$，猜想：

$$\int_{-\pi}^{\pi}|T_n(x)|\mathrm{d}x\leqslant 4.$$

这个猜想至今仍未看到证明或否定.([376]1940, 46: 954 ~ 958)

61. **Arestov 不等式**(1981 年)：设 $\varphi,x\varphi'$ 都在 $(0,\infty)$ 上递增，则

$$\int_0^{2\pi}\varphi(|T'_n(t)|)\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{2\pi}\varphi(n|T_n(t)|)\mathrm{d}t.$$

62. 设 φ 是 $[0,\infty)$ 上递增的凸函数，$\varphi(0)=0$，$\|P_n\|_C=1$，$P_n(x)$ 在 $[-1,1]$ 上交错地通过 $m+1$ 个点 $\{x_k\}_{k=0}^m(1\leqslant m\leqslant n)$：$-1=x_0<\cdots<x_m=1$. 使得 $P_n(x_k)=(-1)^{m-k}$，$k=0,1,\cdots,m$. $P_n(x)$ 在 $[x_k,x_{k+1}]$ 上单调 $(0\leqslant k\leqslant m-1)$，则

$$\int_{-1}^1\varphi(P'_n(x)|)\mathrm{d}x\leqslant\int_{-1}^1\varphi(|T'_n(x)|)\mathrm{d}x,$$

仅当 $P_n=T_n$ 时等号成立.([327]1982, 35(2): 181)

63. (1) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|T_n(x)|\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{2}(a_m^2+b_m^2)^{\frac{1}{2}}$ 对 $\forall m$ 成立.

(2) 若 $3m>n$，则当 $T_n(x)=\sum_{k=1}^n(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ 时，

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|T_n(x)|\mathrm{d}x\geqslant\frac{2}{\pi}(a_m^2+b_m^2)^{\frac{1}{2}}$$

对 $\forall m$ 成立. 式中 $\frac{2}{\pi}$ 是最佳常数.([317]14(1938), 44 ~ 46)

64. 设 $P_n(x)=\sum_{k=-n}^n a_ke^{ikx}$，$M=\max_x|P_n(x)|$，$\|P_n\|_p=\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|P_n(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}$.

(1) 若 $k>\frac{n}{3}$，则 $2|a_k|\leqslant M$； $|a_{-k}|+|a_k|\leqslant M$；

$$|a_k|\leqslant\frac{\pi}{4}\|P_n\|_1;\qquad |a_{-k}|+|a_k|\leqslant\frac{\pi}{2}\|P_n\|_1.$$

(2) 若 $k>\frac{n}{2}$，则 $|a_0|+2|a_k|\leqslant M$； $|a_0|+|a_{-k}|+|a_k|\leqslant M$；

$$|a_0|+\frac{2}{3}|a_k|\leqslant\frac{\pi}{2}\|P_n\|_1.$$

(3)　$|a_k|\leqslant M\cos\left(\frac{\pi}{p+2}\right)$;　$|a_k|\leqslant\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{p+2}\right)\|P_n\|_1$.

式中 $k>0$,　$p=2\left[\frac{n-k}{2k}\right]+1$.

(4)　$|a_0|+|a_k|\sec\left(\frac{\pi}{\left[\frac{n}{k}\right]+2}\right)\leqslant M$,　$k>0$.

(5)　$|a_0|+\frac{2}{3}|a_k|\leqslant\left(1+\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\|P_n\|_1, k>\frac{n}{2}$.

(6)　$|a_0|+2|a_k|\leqslant\sqrt{3}\|P_n\|_2, k>\frac{n}{2}$.

(7)　$|a_0|+2\lambda|a_k|\leqslant 2\pi c_\lambda\|P_n\|_1$,　$k>\frac{n}{2}$.

式中 $c_\lambda=\frac{1}{2\pi-4\delta}$,而 δ 是方程 $\sin x=\frac{1}{2}\lambda(\pi-2x)$ 的最小正根.([22]583 ~ 584)

65.　设 $0<x<\pi$,则

(1)　$\sum_{j=1}^{n}\binom{n+k-j}{k}\sin jx>0$,　$k\geqslant 1$.　(Fejer)

(2)　$\sum_{j=1}^{n}\binom{n+k-j}{k}\frac{\sin ja\sin jx}{j}>0$,　$k\geqslant 1$,　$0<a<\pi$.

([317]10(3)(1935),278 ~ 279)

(3)　$\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos(kx)+\sin(kx)}{k}>-1$.

(4)　$\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos(kx)-\sin(kx)}{k}\geqslant-\frac{3}{2}$. ([365]31(2)(2005),75 ~ 84)

(5)　$\alpha\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sin(kx)}{n^2-k^2}\leqslant\frac{1}{3}$,　$n\geqslant 2$.

式中 $\alpha=\frac{15-\sqrt{2073}}{10240}\cdot\sqrt{1998-10\sqrt{2073}}=-0.1171\cdots$, α 与 $\frac{1}{3}$ 均为最佳常数.

(Colloq, Math. 105(1)(2006),127 ~ 134)

(6)　$\sum_{k=0}^{n}\binom{\lambda+1}{n-k}\binom{\lambda+1}{k}\frac{\sin(k+1)x}{k+1}>0$,　$-1<\lambda\leqslant 1$.

(7)　若 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant 0$, 则 $\sum_{k=1}^{n}a_k\left(\frac{\sin kx}{k}\right)>0$.　([22]611 ~ 616)

66.　设 $0<x<\pi$, $|y|<\pi$, $|y|\neq x$, 则

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sin kx}{k}\right)\left|\frac{\sin(k-\frac{1}{2})y}{2\sin(\frac{y}{2})}\right|>0.$$

67. 设 $0 < y < \pi$，$y \neq x$，$0 < x < \pi$，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sin kx}{k}\right)\left[\frac{\cos(\frac{y}{2}) - \cos(k+\frac{1}{2})y}{2\sin(\frac{y}{2})}\right] > 0.$$

68. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\left(\frac{\sin k\pi x}{k}\right)^{2m} \geqslant 0$， $x \in R^1$， $m \in N$.

69. 设 $0 < x_k < \pi$，$m = 4,5,\cdots$，则 $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}k^2\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{\sin kx_j}{k}\right) \geqslant 0$.

以上 No. 66 ～ 69 见[22]614 ～ 615.

70. 设 $a_0 \geqslant a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant 0$.

(1) 若 $x_j > 0$ 且 $\sum_{j=1}^{m}x_j < \pi$，则 $\sum_{k=1}^{n}a_k\left(\prod_{j=1}^{m}\frac{\sin kx_j}{k}\right) > 0$.

(2) $4a_1\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2\left(\cot\frac{x}{2} - \frac{\pi - x}{2}\right) < \sum_{k=1}^{n}a_k\frac{\sin kx}{k} < a_1(\pi - x)$.

(3) $a_0 + \sum_{k=1}^{n}a_k\frac{\cos kx}{k} \leqslant a_0\left[1 - \log\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{\pi - x}{2}\right]$ $0 < x < \pi$.（[22]616 ～ 617）

71. $\sum_{k=1}^{n-1}(n^2 - k^2)\sin kx > 0$，式中当 n 为偶数，$n \geqslant 2$ 时，$0 < x \leqslant \pi$；当 n 是奇数，$n \geqslant 3$ 时，$0 < x \leqslant \pi\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.（Colloq. Math. 105(1)(2006),127 ～ 134）

72. 设 $a_0 \geqslant a_1 \geqslant \cdots \geqslant a_n > 0$，$a_{2k} \leqslant \frac{2k-1}{2k}a_{2k-1}$，$1 \leqslant k \leqslant \frac{n}{2}$，$0 < x_k < \pi$，$\sum_{k=1}^{m}x_k < \pi$，则 $\sum_{k=1}^{n}\left(ka_k\prod_{j=1}^{m}\frac{\sin kx_j}{k}\right) > 0$.（[22]618）

73. 设 $a_0 \geqslant a_1 \geqslant \cdots \geqslant a_n$，$0 < x < \pi$，$p,q$ 为任意实数，即

$$-a_0\frac{\left[\sin\left(q - \frac{p}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]^2}{\sin\left(\frac{px}{2}\right)} \leqslant \sum_{k=0}^{n}a_k\sin(kp + q)x \leqslant a_0\frac{\left[\cos\left(q - \frac{p}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]^2}{\sin\left(\frac{px}{2}\right)}.$$

74. 设 $0 < a_n < \cdots < a_1 < a_0 < 0$，$r = \max_x\left\{\frac{a_{k+1}}{a_k}\right\}$，$0 \leqslant k \leqslant n-1$，$0 < r < 1$，则 $\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\exp(ikx)\right| \leqslant a_0\frac{1+r}{|1 + r\exp(ix)|}$， $0 \leqslant x \leqslant \pi$.（No. 73 ～ 74 见[22]618）

第七章　凸函数与变分不等式

§1　凸函数不等式

一、　基本概念

凸函数分为实变量的凸函数与复变量的凸函数.

(一)　实变量凸函数及其推广

下面设 D 是实线性空间中的凸集.

定义 1　设 $f(x)$ 是定义在实线性空间 X 中的凸集 D 上的实值函数，若 $\forall x,y\in D$，$0\leqslant\lambda\leqslant 1$，有

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y),\tag{1.1}$$

则称 f 为 D 上的**凸函数**. 若对于 $x\neq y$，$0<\lambda<1$，(1.1) 式中只成立不等号，则称 f 为 D 上**严格凸函数**，当 $-f$ 为凸函数时，称 f 为**凹函数**.

若(1.1) 式只当 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 时成立，即

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}[f(x)+f(y)],\tag{1.2}$$

这时称 f 为 D 上**中点凸函数**，又称 Jensen 意义下的凸函数，简称 **J 凸函数**. 一般地，凸必为中点凸，反之不一定成立. 但当 D 为拓扑线性空间，且 f 在 D 上连续时，从中点凸也可推出凸. 在开区间上可测的凸函数都是连续的，所以，不连续的凸函数在任意的内部区间上都无界而且是不可测的.

当 $D\subset R^n$ 或 D 为实轴上的区间时，定义 1 就是通常数学分析教材中凸函数的定义. 但我国现行分析教材中，凹凸性的含义比较混乱. 本书采用目前国际上通用的定义，即凸是指向下凸，凹实际上是向上凸，当 D 为实线性空间中的凸子集时，上述 f 实际上是凸泛函.

注 1　Fan Ky 在任意集合 X,Y(不一定有拓扑结构) 上定义函数的凸性：设 f 是定义在直积 $X\times Y$ 上的实值函数，若 $\forall x_1,x_2\in X$，$\forall\lambda_1,\lambda_2\geqslant 0$，$\lambda_1+\lambda_2=1$，$\exists x_0\in X$，使得 $f(x_0,y)\leqslant\lambda_1 f(x_1,y)+\lambda_2 f(x_2,y)$，$\forall y\in Y$，则称 f 是 X 上的凸函数. f 是 Y 上的凸函数可类似定义. (Proc. Nat. Acad. Sci. 1953. 39(1)：42 ～ 47)

函数的凸性是证明不等式的重要工具. 例如，在定义 1 中，适当地选取 x,y,λ 三个量中的几个或全部，就可以构造或证明一系列重要不等式，这在本书中有关部分已作了适当说明. 不仅如此，由凸函数理论发展起来的凸分析，还是逼近论、控制论、系统理论、运筹学的重要基础之一，现在已发展成为一门独立的数学分支. [113] 就是这方面的第一本经典

著作.

注 2 当 D 为 R^n 中的凸集时，$x=(x_1,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,\cdots,y_n)\in D$，$\lambda_1,\lambda_2\geqslant 0$，$\lambda_1+\lambda_2=1$，则(1.1)式可写成

$$f(\lambda_1 x+\lambda_2 y)\leqslant \lambda_1 f(x)+\lambda_2 f(y).$$

式中 $\lambda_1 x+\lambda_2 y=(\lambda_1 x_1+\lambda_2 y_1,\cdots,\lambda_1 x_n+\lambda_2 y_n)$.

杨镇杭曾提出多元函数的凸性可以用一元函数的凸性来定义，即若 $t\neq 0,x+ty\in D$. 令 $F(t)=f(x+ty)$，若 $f(t)$ 是 t 的凸函数，则称 f 是 D 上的凸函数.

杨的定义是 $n=2$ 的情形.([351]2004(2):236～242)杨的定义至少在形式上是与定义 1 不同的，我们可以研究：杨定义的多元凸性与定义 1 有什么不同的性质和相同的性质?

注 3 R^n 中的凸集可推广为 η 不变凸集，即若存在映射 $\eta:R^n\times R^n\to R^n$，使得 $\forall x,y\in D$，$\forall\lambda\in[0,1]$，有 $y+\lambda\eta(x,y)\in D$. 这时若 $f:D\to R$ 满足 $f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$，则称 f 是 η 预不变凸函数. 若上述改为 $f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant\lambda^s f(x)+(1-\lambda)^s f(y)$，$0<s\leqslant 1$，则称 f 是 $\eta-SB$ 预不变凸函数. 特别，当 $\eta(x,y)=x-y$ 时，D 归结为凸集，f 分别归结为凸集上的凸函数和 SB 凸函数.

下面列举几个常用的凸函数的例子：

(1) 设 f 为凸函数，$1\leqslant p<\infty$，则 f^p 也是凸函数.

(2) 设 α 为实数，则 $f(x)=e^{\alpha x}$ 是 $(-\infty,\infty)$ 上的凸函数.

(3) 当 $p\geqslant 1$ 或 $p<0$ 时，$f(x)=x^p$ 是 $(0,\infty)$ 上的凸函数，当 $0<p<1$ 时为凹函数.

(4) $x\ln x,x^x,\dfrac{1}{x},\operatorname{tg}x,\csc x$ 都是 $(0,\infty)$ 上的凸函数，而 $\ln x$ 是 $(0,\infty)$ 上的凹函数.

(5) $\sin x$ 是 $(0,\pi)$ 上的凹函数和 $(\pi,2\pi)$ 上的凸函数.

(6) 赋范线性空间 X 上有界线性泛函 f 的范数 $\|f\|$ 是 f 的凸函数.

(7) 设 $f\in L^p[0,1]$，$f\geqslant 0$，$p>0$，则 $\ln\left(\int_0^1 f^p\right)$ 是 p 的凸函数.(Lyapunov)

(8) 设 f 连续且下 Schwarz 导数非负，即

$$\liminf_{h\to+0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}\geqslant 0,$$

则 f 为凸函数.([308]1995,123(8):2473～2477)

(9) 设 X 为赋范线性空间，A 为 X 的 n 维子空间，$\{e_1,\cdots,e_n\}$ 为 A 的基，$\forall\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，$x\in X$，令 $f(\alpha)=\left\|x-\sum_{k=1}^n\alpha_k e_k\right\|$，则 f 是凸函数.

证 令 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，$\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$，$0\leqslant\lambda\leqslant 1$，则

$$f(\lambda\alpha+(1-\lambda)\beta)=\left\|x-\sum_{k=1}^n(\lambda\alpha_k+(1-\lambda)\beta_k)e_k\right\|\leqslant\lambda\left\|x-\sum_{k=1}^n\alpha_k e_k\right\|+(1-\lambda)\left\|x-\sum_{k=1}^n\beta_k e_k\right\|=\lambda f(\alpha)+(1-\lambda)f(\beta).$$

凸函数概念已有许多推广. 例如:

定义 2 若 f 在 D 上是正的, 且 $\ln f(x)$ 在 D 上是凸函数, 则称 f 是 D 上**对数凸函数**. 这时 $\ln f[\lambda x+(1-\lambda)y]\leqslant\lambda\ln f(x)+(1-\lambda)\ln f(y)=\ln[f(x)^{\lambda}f(y)^{1-\lambda}]$. 即 $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant f(x)^{\lambda}f(y)^{1-\lambda}$.

定义 3 设 f 在区间 D 上是正的并对 D 上任意两点 x_1,x_2, 有

$$\left[f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right]^2\leqslant f(x_1)f(x_2),\tag{1.3}$$

则称 f 是区间 D 上**弱对数凸函数**.

若 f,g 都是区间 D 上的弱对数凸函数, 则

$$\left[f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right]^2\leqslant[f(x_1)+g(x_1)][f(x_2)+g(x_2)].$$

注 4 当 x_1,x_2 为正数时, 利用 x_1,x_2 的算术平均 $A(x_1,x_2)=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$ 和几何平均 $G(x_1,x_2)=\sqrt{x_1x_2}$, (1.3) 式可写成

$$f(A(x_1,x_2))\leqslant G(f(x_1),f(x_2)).$$

由此启发我们可以利用正数 x,y 的其他平均来定义正函数 f 的不同凸性. 例如 x,y 的幂平均

$$M_p(x,y)=\left[\frac{1}{2}(x^p+y^p)\right]^{1/p},p\neq 0;$$

$$M_0(x,y)=\lim_{p\to 0}M_p(x,y)=\sqrt{xy}=G(x,y).$$

若
$$f(M_p(x,y))\leqslant M_p(f(x),f(y)).\tag{1.4}$$

则称 f 是 D 上的 **p 幂凸函数**. 特别, $p=-1$ 时, $M_{-1}(x,y)=H(x,y)$ 为 x,y 的调和平均, 相应的 f 称为调和凸函数. $p=0$ 时 $f(G(x,y))\leqslant G(f(x),f(y))$, f 称为几何凸函数(或乘性凸函数).

又如, 在第一章 §3, 我们定义了 x,y 的广义对数平均 $S_p(x,y)$, 若 $f(S_p(x,y))\leqslant S_p(f(x),f(y))$, 则称 f 是 D 上广义对数凸函数.

几何凸函数 f 又可推广为: 设 $c>0$, $D=(0,c]$ 或 $D=[c,\infty]$, $f:D\to(0,\infty)$ 满足:

$$f(x^{\lambda}y^{1-\lambda})\leqslant[f(x)]^{\lambda}[f(y)]^{1-\lambda},x,y\in D,0\leqslant\lambda\leqslant 1.\tag{1.5}$$

([367]2000,59(1 ~ 2):134 ~ 149)

若将(1.5)式改为: 若 $f:D\to R$ $(D\subset(0,\infty))$ 满足:

$$f(x^{\lambda}y^{1-\lambda})\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y),$$

则称 f 是几何平均凸函数, 简称为 GA 凸函数.

若 $D\subset(0,\infty)$, $f:D\to R$ 满足

$$f[(\lambda x^p+(1-\lambda)y^p)^{\frac{1}{p}}]\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y),0<\lambda<1,$$

式中 $p=2k+1$ 或 $p=\frac{n}{m}$, $n=2r+1$, $m=2s+1$, $k,r,s\in N$. 则称 f 是 D 上的 p 凸函数, $p=1$ 时就是通常的凸函数.

记 $D^p=(\inf\{x^p:x\in D\},\ \sup\{x^p:x\in D\})$, 则

(1) f 在 D 上为 p 凸 $\Leftrightarrow f(x^{\frac{1}{p}})$ 是 D^p 上的凸函数.

(2) 设 f 在 D 上二阶可导,则 f 在 D 上 p 凸 $\Leftrightarrow x^2 f''(x) + (1-p)xf'(x) \geqslant 0$.

(3) 设 f 为 D 上 p 凸函数,$x_k \in D$, $q_k > 0$, $Q_n = \sum_{k=1}^{n} q_k$, 则

$$f\left[\left(\frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n} q_k x_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] \leqslant \frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n} q_k f(x_k).$$

(4) 设 f 是 R^1 上连续的 p 凸函数,则存在 R^1 上实值递增函数 g,使得 $\forall x, y \in R^1$,下式成立 $f(y) - f(x) \geqslant g(x)[y^p - x^p]$. ([414]2007(1):130 ~ 133)

若 M_1, M_2 是两个正数 x, y 的平均值,$f:(0,\infty) \to (0,\infty)$ 满足:

$$f(M_1(x,y)) \leqslant M_2(f(x), f(y)), \quad x, y \in (0,\infty),$$

则称 f 是(M_1, M_2) 凸函数.

特别当 $M_1 = M_2 = M_p$,就得(1.4)式,即 f 是 p 幂凸函数,当 $m_1 = M_2 = G$ 时,就得到几何凸函数.

我们还可以考虑第一章 §3 定义的两个正数 x, y 的 r 阶加数幂平均,即

$$M_r(x,y,\lambda) = \begin{cases} [\lambda x^r + (1-\lambda)y^r]^{1/r}, & r \neq 0, \\ x^\lambda y^{1-\lambda}, & r = 0, \end{cases}$$ 式中 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$,若

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant M_r(f(x), f(y), \lambda), x, y \in [a,b], \tag{1.6}$$

则称正函数 f 为$[a,b]$ 上的 r **凸函数**. ([301]1997,215(2):461 ~ 470) 在第 1 章 §3.二.中,我们还定义了更一般的 M 凸函数.

注 5 1984 年,Toader,G. H. 定义了 t 凸的概念,即设 f 定义在$[0,b]$ 上,若 $\forall x, y \in [0,b], \lambda, t \in [0,1]$,使得

$$f(\lambda x + t(1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + t(1-\lambda)f(y).$$

则称 f 是 t 凸函数.(它的等价条件见[330]2002,33(1):55 ~ 65)

注 6 1986 年,Mititelu-Sàmboan 引入了 q **凸函数**的概念,这就是将定义 1 中(1.1)式改为

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant [\lambda f^q(x) + (1-\lambda)f^q(y)]^{1/q},$$

式中 q 为实数.(An Univ. Bucur. Mat. 1986,35:44 ~ 51)

若将定义 1 中(1.1)式改为

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y), \lambda, t \in (0,1),$$

则称 f 为(λ, t) **凸函数**. ([54]5:161 ~ 174)

若将定义 1 中(1.1)式改为

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda^s f(x) + (1-\lambda)^s f(y), 0 < s \leqslant 1,$$

则称 f 为 S-Breckner 凸函数,简称为 SB 凸函数. ([103]:212 和 Demonstratio Math. 2000. 33(1):43 ~ 49)

若将上式改为 $\forall \alpha, \beta \geqslant 0, \alpha^s + \beta^s = 1, x, y \in D, s > 0$

$$f(\alpha x + \beta y) \leqslant \alpha^s f(x) + \beta^s f(y).$$

则称 f 是 D 上 **s-Orlicz 凸函数**,其中 D 称为 s-Orlicz 凸集,它定义为实线性空间 X 中的一

个非空子集并满足：$\forall x,y\in D,\alpha,\beta\geqslant 0,s>0,\alpha^s+\beta^s=1$，可推出 $\alpha x+\beta y\in D$（[301]1997,210(2):419 ～ 439）

从数学分析熟知，若 f 定义在区间 D 上，则

(1) f 在 D 上是凸的充要条件是 $A=\{(x,y):f(x)\leqslant y,x\in D\}$ 是凸集，

(2) 设 $0<p<\infty$，$q\geqslant p$，$f\geqslant 0$，若 f^p 是凸函数，则 f^q 也是凸函数.

(3) f 在 D 上是凸的充要条件是对于 D 中所有 x_0，$\varphi(x)=[f(x)-f(x_0)]/(x-x_0)$ 是 D 上的递增函数.

(4) 可微函数 f 在 D 上是凸的充要条件是存在可数集 $A\subset D$，使得导函数 f' 在 $D-A$ 上递增.

(5) 二阶可微函数 f 在 D 上是凸的充要条件是二阶导数 $f''(x)\geqslant 0(x\in D)$. 注意：$f''(x)>0\Rightarrow f$ 严格凸，反之不成立.

(6) 正函数 f 是对数凸的充要条件是对于所有实数 a，$f(x)e^{ax}$ 是凸函数.

(7) f 在区间 $[a,b]$ 上为凸函数的充分必要条件是：对于 $[a,b]$ 中任意 $x_1<x_2<x_3$，有

$$\begin{vmatrix} x_1 & f(x_1) & 1 \\ x_2 & f(x_2) & 1 \\ x_3 & f(x_3) & 1 \end{vmatrix}\geqslant 0.$$

上式可改写为

$$[x_1,x_2,x_3;f]=\frac{f(x_1)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\frac{f(x_2)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+\frac{f(x_3)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\geqslant 0,$$

一般地，由下面的递归关系来定义 $[x_1,\cdots,x_n;f]$（$n-1$ 阶差商）：

$$[x_1,\cdots,x_n;f]=\frac{[x_2,\cdots,x_n;f]-[x_1,\cdots,x_{n-1};f]}{x_n-x_1},[x;f]=f(x).$$ 于是有

定义 4 若对于区间 $[a,b]$ 中所有不同的 $x_1,\cdots,x_{n+1}(n\geqslant 2)$，都有

$$[x_1,\cdots,x_{n+1};f]\geqslant 0,$$

则称 f 是 $[a,b]$ 上 n **阶凸函数**.

定义 5 设 f 是定义在凸集 $D\subset R^n$ 上的实值函数，若 $\forall x,y\in D,0\leqslant\lambda\leqslant 1$，有

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\max\{f(x),f(y)\},$$

则称 f 是 D 上的**拟(Quasi) 凸函数**.

f 在 D 上为拟凸的充要条件是，$\forall x,y\in D,0\leqslant\lambda\leqslant 1,z=\lambda x+(1-\lambda)y$，若 $f(x)\leqslant f(y)$，则 $f(z)\leqslant f(y)$.

特别，若对于 $x,y\in D,0<\lambda<1,z=\lambda x+(1-\lambda)y,f(x)<f(y)$，则 $f(z)<f(y)$，就称 f 是 D 上的**伪(Pseudo) 凸函数**.

注 7 Fan Ky 利用集合的凸性来定义函数的凸性，即：设 f 定义在凸集 D 上，若 $\forall t\in R^1$，$\{x\in D:f(x)>t\}$ 为凸集，则称 f 是拟凹函数.（[5]3:103 ～ 113）

拟凸函数 f 还有一个不同的定义：若存在凸函数 g 和常数 $c>1$，使得 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant cg(x)$，即 $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant c\{\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)\}$，则称 f 是**拟凸函数**.

([317]7(3)(1932),208 ～ 214)

定义 6　实值函数 f 在集 $A \subset R^n$ 上称为 **Schur 凸函数**(简称 **S 凸函数**),若在 A 上,$x \prec y$,有 $f(x) \leqslant f(y)$. 特别,$f(x) < f(y)$ 时,称 f 是严格 S 凸函数.

其中,$x \prec y$ 表示 $x = (x_1, \cdots, x_n)$ 被 $y = (y_1, \cdots, y_n)$ 所优超(或控制),即设 $\bar{x} = (\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n)$ 是 $x = (x_1, \cdots, x_n)$ 重新排序,使得 $\bar{x}_1 \geqslant \bar{x}_2 \geqslant \cdots \geqslant \bar{x}_n$. 而当 $k = 1, \cdots, n-1$ 时,$\sum_{j=1}^{k} \bar{x}_j \leqslant \sum_{j=1}^{k} \bar{y}_j$,且 $\sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{j=1}^{n} y_j$. (函数的优超见本节 No. 7)

若 f 为对称的拟凸函数,则 f 必为 S 凸函数,反之不一定成立;f 为伪凸时,也不一定是 S 凸函数. 例如,若 $a > 0$,则 $f(x) = \sum_{k=1}^{n} (x_k + x_k^{-1})^a$ 在 $D = \{x = (x_1, \cdots, x_n): 0 < x_k \leqslant 1, k = 1, \cdots, n\}$ 上是严格 S 凸的,可由此证明第 3 章中许多代数不等式. ([6]68 ～ 69) 设 f 在凸区域 D 上连续,则 f 是凸的充要条件是:$\forall x \in D$,存在线性函数 $g(y) = \sum_{k=1}^{n} a_k y_k + b$,使得 $f(x) = g(x)$,而且 $\forall y \in D, f(y) \geqslant g(y)$.　　(1.7)

由方程 $g(y) = 0$ 定义的超平面称为**支撑超平面**;

若 f 在凸区域上连续可微,(1.7) 式等价于

$$f(y) - f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_k}(y_k - x_k) \geqslant 0.$$

若 f 二次可微,则(1.7) 式又等价于

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_k \partial x_j} y_k y_j \geqslant 0.$$

上述 $x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n) \in D \subset R^n$.

定义 7　设 $D = (a, b), -\infty < a < b < \infty$. $C(D)$ 为 D 上连续函数空间,若对 D 的任一分划 $T: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b$ 和实数 $y_k (1 \leqslant k \leqslant n)$,存在唯一的函数 $g \in C(D)$,使得 $g(x_k) = y_k, 1 \leqslant k \leqslant n$. 满足上述条件的 g 的集合记为 G,称为 n 参数族($n \geqslant 2$). 若定义在 D 上的函数 f,和 D 的任一分划 T,存在 $g \in G$,使得 $g(x_k) = f(x_k), 1 \leqslant k \leqslant n$,而且

$(-1)^{n+k-1}[f(x) - g(x)] \geqslant 0, x \in (x_{k-1}, x_k),\ 2 \leqslant k \leqslant n$,

则称 f 是 D 上的 **G 凸函数**.

注意 G 凸不一定是凸函数,但若 g 为凸函数,则 G 凸也是凸函数. ([308]1992, 114(3):733 ～ 740)

定义 8　设 X 为 Banach 空间,若存在正常数 M,使得 $\forall x, y \in X, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$,下式成立 $0 \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leqslant M\lambda(1-\lambda) \| x - y \|^2$,则称 f 是**有界凸函数**.

定义 9　设 D 为拓扑线性空间 X 中的凸集,f 定义在 D 上,$g(f, \cdot, \cdot, \cdot): D \times D \times (0, 1) \to R^1$. 若 $\forall x, y \in D, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$,下式成立

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) + f(\lambda y + (1-\lambda) x) \leqslant g(f, x, y, \lambda) + g(f, x, y, 1-\lambda),$$

则称 f 是 **Wright g 凸函数**,简称 **Wg 凸函数**. 当 $\lambda = 1/2$ 时相应的 f 称为 Jensen g 凸函数.

简称为Jg凸函数. 当 $g(f,x,y,\lambda)=f(x)+f(y)$ 或 $g(f,x,y,\lambda)=\frac{1}{\lambda}f(x)+\frac{1}{1-\lambda}f(y)$ 时,Wg凸与Jg凸不等价,有的作者也将 Wg 凸称为 $\lambda-$ Wright 凸. 若 $g(f,x,y,\lambda)=\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$ 或 $\max\{f(x),f(y)\}$,且

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant g(f,x,y,\lambda),$$

则称 f 为 **g 凸函数**.

注 8 设 D 为 R^1 中的区间, $f:D\to[0,\infty)$, $x,y\in D$, $0<\lambda<1$, 若

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\frac{1}{\lambda}f(x)+\frac{1}{1-\lambda}f(y).$$

则称 f 是 $G-L$ 函数,记为 $f\in GL(D)$ 或 $f\in Q$. ([22]410)

若 $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant f(x)+f(y)$, 则称 f 是 P 函数,记为 $f\in P(D)$.

([301]240(1999),92 ~ 104 或[164]:161 ~ 166)

$G-L$ 函数有以下基本性质:

(1) 非负单调函数和非负凸函数都是 $G-L$ 函数.

(2) 设 x 是区间的内点,f 在 D 上非负. 记

$$p(x)=\inf\{f(t):t\leqslant x\},\qquad q(t)=\inf\{f(t):t\geqslant x\}.$$

若 $[f(x)]^{\frac{1}{2}}\leqslant[p(x)]^{\frac{1}{2}}+[q(x)]^{\frac{1}{2}}$,则 $f\in Q$.

(3) 设 $f\in Q$, $q_k>0$, $Q_n=\sum_{k=1}^{n}q_k$, $x=(x_1,\cdots,x_n)\in D^n$, $n\geqslant 2$,则

$$f\left(\frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n}q_kx_k\right)\leqslant Q_n\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_k)}{q_k}.$$

(更详细的性质见[22]:410 ~ 413 及其所引用的参考文献)

应注意的是,定义 9 中的 g 凸应与下面定义 10 和 11 的 g 凸加以区别.

定义 10 设 $f:[a,b]\to R^1$, $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, g 是包含 f 的值域的区间上的满单射的连续函数,若

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant g^{-1}[\lambda(g\circ f)(x)+(1-\lambda)(g\circ f)(y)].$$

则称 f 是 **g 凸函数(本书称为 1 − g 凸函数)**.

定义 11 设 $x,y\in D$(D 为 R^1 中的区间),$y>x$,若存在 $g(x,y)>0$, $g(y,x)=-g(x,y)$. 且 $\forall x_1,x_2,x_3\in D$, $x_1<x_2<x_3$,下式成立

$$g(x_2,x_3)f(x_1)+g(x_3,x_1)f(x_2)+g(x_1,x_2)f(x_3)\geqslant 0.$$

则称 $f:D\to R^1$ 为 **g 凸函数**.(本书称为 **2 − g 凸函数**).

定义 12 设 f 在区域 $D\subset R^n$ 上连续,若球 $B(x_0,r)=\{x\in R^n:|x-x_0|\leqslant r\}\subset D$ 时,有

$$f(x_0)\leqslant\frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{\sum_{n-1}}(x_0+rt')\mathrm{d}t', \tag{1.8}$$

则称 f 是 D 上的**次调和函数**,其中 ω_{n-1} 是 R^n 中单位球 $\sum_{n-1}=\{x\in R^n:|x|=1\}$ 的表面积.

次调和性的一个充分条件是：若 f 在 D 内有连续的二阶偏导数，且对所有 $x\in D$，有

$$(\Delta f)(x)=\sum_{k=1}^{n}\partial^2 f(x)/\partial x_k^2\geqslant 0,$$

则 f 在 D 内满足(1.8)式.

(上述结果的证明及次调和函数的性质见[65]76 ~ 77，[114]246 ~ 248)

定义 13 若 f 定义在区域 D 上，对于 D 中任意 α,β，引入广义插值：

$$u(x)=\frac{u_1(x)-u_1(\alpha)}{u_1(\beta)-u_1(\alpha)}f(\beta)+\frac{u_1(\beta)-u_1(x)}{u_1(\beta)-u_1(\alpha)}f(\alpha),$$

式中 $u_1(x)=\int_\alpha^x\omega(t)\mathrm{d}t$，$\omega$ 是 D 上正值可微函数. 若 $f(x)\leqslant u(x)$，则称 f 为广义凸函数. (广义凸函数的性质及其应用可见[81]350 ~ 351)

定义 14 设 D 是实线性空间 X 的凸子集，对于 $0\leqslant\lambda\leqslant 1,\delta>0,x,y\in D$，若

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)+\delta,$$

则称 f 是 D 上的 **δ 凸函数**；若

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)+f((1-\lambda)x+\lambda y)\leqslant f(x)+f(y)+2\delta,$$

则称 f 是 D 上 δ-Wright 凸函数；

若 $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)+\delta$ 在 D 上几乎处处成立，则称 f 是 D 上几乎 δ 凸函数，若 $\delta=0$，则称为几乎凸函数. ([308]1986,97(1):67)

定义 15 设 f 定义在实赋范线性空间的凸子集 D 上，若对所有 $x,y\in D$，所有 $\lambda\in[0,1]$，$\alpha>0$，有

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y]\leqslant\max\{f(x),f(y)\}-\lambda(1-\lambda)\alpha\|x-y\|^2,$$

则称 f 是 D 上**强拟凸函数**. (Optimization 1989, 20(2):163 ~ 165)

定义 16 设 f 定义在实赋范空间的凸子集 D 上，若对所有 $x,y\in D$，所有 $\lambda\in[0,1]$ 及实数 α，有

$$f[\lambda x+(1-\lambda)y]\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)+\alpha\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2,\tag{1.9}$$

则称 f 是 D 上的 **α 凸函数**. 当 $\alpha<0$ 时，f 称为强凸函数，$\alpha>0$ 时，f 称为弱凸函数，当 $\alpha=0$ 时，f 就是古典的凸函数(定义 1)，当 $\alpha=-1$ 时，f 称为一致凸函数.

若(1.9)式改为

$$f[\lambda x+(1-\lambda)y]\geqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)+\alpha\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2,\tag{1.10}$$

则称 f 是 D 上 **α 凹函数**.

若将(1.9)、(1.10)两式右边的 $\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$ 都改为

$(1/\omega)\log\{\lambda\exp[\omega f(x)]+(1-\lambda)\exp[\omega f(y)]\}$(式中 $\omega>0$)，则分别称 f 是 D 上**强 ω 凸函数**和**强 ω 凹函数**. 特别，当 $X=R^n$ 时，就是李玉泉引入的强 ω 凸(凹)的概念，他还定义了一致 ω 凸(凹)的概念并讨论了它们的性质. ([356]1985,5(1):94 ~ 105)

定义 17 设 X,Y 是两个 Hausdorff 拓扑线性空间，$D\subset X,E\subset Y$ 为两个非空凸集. $\overline{R}=R\cup\{\pm\infty\}$ 为广义实数集，$\varphi:D\times E\to\overline{R}$，若 $T:E\to D$，且对 E 的任何有限子集 $A=\{y_1,\cdots,y_n\}$ 及任何 $x_0=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k Ty_k$，$y_0=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k y_k$，$\lambda_k\geqslant 0$，$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k=1$，都有

$$\varphi(x_0,y_0)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\varphi(x_0,y_k).\tag{1.11}$$

则称 $\varphi(x,y)$ 为关于 $y\in E$ 是 T- 对角凸的，若(1.11) 式换成

$$\varphi(x_0,y_0)\leqslant\max\{\varphi(x_0,y_k):1\leqslant k\leqslant n\},\tag{1.12}$$

则称 φ 关于 y 是 T- 对角拟凸的.

若 $\gamma\in\overline{R}$ 满足 $\gamma\leqslant\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\varphi(x_0,y_k)$，　　(1.13)

则称 φ 关于 $y\in E$ 是 T-γ- 对角凸的. 若(1.13) 式换成

$$\gamma\leqslant\max\{\varphi(x_0,y_k):1\leqslant k\leqslant n\},\tag{1.14}$$

则称 φ 关于 y 是 T-γ- 对角拟凸的，若(1.13)、(1.14) 式中不等号反向，则分别称 φ 关于 $y\in E$ 是 T-γ- 对角凹和 T-γ- 对角拟凹的. ([340]1991,11(3):346 ～ 352)

利用这些概念可以证明：

(1)　变分不等式(见本章 §2)；(2)　极小极大不等式(第 14 章 §2. No. 54 和"应用数学与力学"1991,12(5):465 ～ 472 等).

定义 18　设 X 为实赋范线性空间，D 为 X 的紧凸子集，X^* 为 X 的共轭空间，$h:D\times D\to R^1$ 为连续函数并 $h(x,x)=0$，若存在 $g:D\to X^*$ 和实数 α 使得

$$g(y)(x-y)+\alpha h(x,y)\leqslant f(x)-f(y),x,y\in D,$$

则称 $f:D\to R^1$ 是 h **强凸函数**，若不等号反向，则称 f 为 h **强凹函数**. (Dorin, A., Approximation and optimization Vol Ⅱ. 1996, 9 ～ 12)

定义 19　设 X 为实 Hilbert 空间，E 为 X 中非空子集. 若存在算子 $T:X\to X$，使得 $\forall x,y\in E$，$\forall\lambda\in[0,1]$，有 $\lambda T(x)+(1-\lambda)T(y)\in E$，则称 E 为 T 凸集. 若 $f:E\to R$ 满足

$$f[\lambda T(x)+(1-\lambda)T(y)]\leqslant\lambda f(Tx)+(1-\lambda)f(Ty),$$

则称 f 是 T 凸函数，若

$$f[\lambda T(x)+(1-\lambda)T(y)]\leqslant\max\{f(Tx),f(Ty)\},$$

则称 f 是 E 上 T 拟凸函数.

算子凸函数的定义见第 14 章 §2. No. 51. 下面将定义 14,16 推广，得到

定义 20　设 D 是实赋范线性空间的凸子集，$f:D\to R^1$，若 $\forall x,y\in D$，$\lambda\in[0,1]$，$\delta>0$，$\alpha\geqslant 0$，

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)+\delta+\alpha\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2,$$

则称 f 是 D 上的 (α,δ) 凸函数.

$(\alpha,0)$ 凸函数就是定义 16 中的 α 凸，$(0,\delta)$ 凸就是定义 14 中的 δ 凸.

例如 $f(x)=-|x|$ 是 $\alpha=2$ 凸函数，但不是古典意义下的凸函数.

定义 21　设 D 是 R^2 中凸子集 $f:D\times D\to R^1$，若 $\forall x_k,y_k\in D$，

$$\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{f(x_k,y_j)}{u'(x_k)v'(y_j)}\geqslant 0,$$

式中 $u(x)=\prod_{k=1}^{3}(x-x_k)$，$v(y)=\prod_{j=1}^{3}(y-y_j)$，则称 f 是 $D\times D$ 上的 $(2,2)$ 阶凸函数.

当 $D=[a,b]$ 时，f 满足以下 Lupas 型不等式：

$$\int_a^b f(x,x)\mathrm{d}x-\frac{1}{b-a}\int_a^b\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\geqslant\frac{12}{(b-a)^3}\int_a^b\int_a^b\left[x-\frac{a+b}{2}\right]\left[y-\frac{a+b}{2}\right]f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\ ([22]277)$$

定义 22 设 u_1,u_2 是$[a,b]$上两个线性无关的函数，若对于 $a<x_1<x_2<x_3<b$，下式成立

$$\begin{vmatrix}u_1(x_1) & u_2(x_1) & f(x_1)\\ u_1(x_2) & u_2(x_2) & f(x_2)\\ u_1(x_3) & u_2(x_3) & f(x_3)\end{vmatrix}\geqslant 0,$$

则称 f 关于$\{u_1,u_2\}$ 是凸函数. 若上式改为严格不等号，则称 f 关于$\{u_1,u_2\}$ 是严格凸函数，记为 $C[u_1,u_2]$. ([22]678)

定义 23 设 g 是严格单调函数，若复合函数 $f\cdot g^{-1}=f[g^{-1}(\cdot)]$ 是严格凸函数，则称 f 是关于 g 的严格凸函数.

注意，此处 f 关于 g 严格凸应该与定义 9 中的 g 凸相区别. f 关于 g 是凸函数的充分条件是：设 f'',g'' 连续，且 f',g' 不为零. 若$\frac{g''}{g'}\geqslant\frac{f''}{f'}$，则 f 关于 g 是凸函数. ([22]3～4)

我们问：f 关于 g 为凸函数有哪些充要条件?

我们在定义 4 中用差商定义了高阶凸函数，零阶凸函数就是递增函数，一阶凸函数就是古典凸函数(定义 1). 若 f 是n 阶凸函数，当 $f^{(m)}$ 存在($m<n$)时，$f^{(m)}$ 就是 $n-m$ 阶凸函数. 特别 $f^{(n-1)}$ 就是古典凸函数. 若在定义 4 中限定分点$\{x_k\}$之间的距离相等，这时称 f 是 n 阶弱凸函数；若 $f^{(n)}$ 存在，则 f 是 n 阶凸函数的充要条件是 $f^{(n)}\geqslant 0$.

若 f 是$[a,b]$上 n 阶凸函数，则存在函数 g，使得

$$f(x)=P_{n-1}(x)+\int_a^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}g(t)\mathrm{d}t,$$

式中 $P_{n-1}(x)$ 是不超过 $n-1$ 次的多项式. (更多的性质见[22]4～5)

我们还可以用平移算子 τ_h 和差分算子 Δ_h 来定义高阶凸函数. 即

定义 24 设 D 是R^1 中的区间，$f:D\to R^1$，设 $x,x+h\in D$，定义

$$\tau_h f(x)=f(x+h),\qquad \Delta_h f(x)=f(x+h)-f(x).$$

(下面均设式中的自变量均在 D 内). 对于 $x,y\in D$，$x<y$，令 $h=\frac{y-x}{2}$，则定义 1 中的 J 凸(见(1.2) 式) 可写成 $\Delta_h^2 f(x)\geqslant 0\ (h>0)$.

若取 $h_1=\lambda(y-x)$，$h_2=(1-\lambda)(y-x)$，$0\leqslant\lambda\leqslant 1$，则定义 9 中 Wg 凸的条件

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)+f((1-\lambda)x+\lambda y)\leqslant f(x)+f(y)$$

可写成 $\Delta_{h_1}\Delta_{h_2}f(x)\geqslant 0$. 于是 n 阶 J 凸和 n 阶 Wg 凸可分别定义为

$$\Delta_h^{n+1}f(x)\geqslant 0\ (h>0)\quad 和\quad \Delta_{h_1}\cdots\Delta_{h_{n+1}}f(x)\geqslant 0.$$

f 为n 阶 Wg 凸的充要条件是 $f(x)=g(x)+P_n(x)$，$x\in D$. 式中，g 是n 阶凸的连续函数，P_n 是至多n 次的多项式，且 $P_n(Q)=\{0\}$. 此处 Q 为有理数集. ([301]359(2009)，

439 ～ 443)

定义 25(广义凸函数) 设 X 是定义在 R^1 上具有下述性质 P 的函数类：$\forall x_1x_2 \in (a, b)$，$\forall y_1, y_2 \in R^1$，在 X 中存在唯一的元素(函数) 通过点 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2).

若 $f:(a,b) \to R^1$，则 $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$. 在 X 中存在唯一的函数 $F(x) \triangleq F(x, x_1, x_2)$，使得 $f(x_1) = F(x_1)$，$f(x_2) = F(x_2)$，若 f 还满足 $f(x) \leqslant F(x)$，$\forall x \in (x_1, x_2)$，则称 f 是 X 凸函数.

若 f 满足 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant F\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$，则称 f 是 X 中间凸函数.

具有性质 P 的函数类 X 有：设 a, b, α, β 为实数

$$X_1 = \{ax+b\}, \quad X_2 = \{x^2+ax+b\}, \quad X_3 = \{\alpha\cos x + \beta\sin x\},$$

$$X_4 = \{ax+b+\varphi(x): \varphi \text{ 在 } (a,b) \text{ 上可微}\}.$$

定义 26(矩阵凸函数) 设 M_n 是 n 阶对称矩阵的集合. 在 M_n 上建立偏序 $\leqslant$：$A \leqslant B \Leftrightarrow B - A$ 是非负定矩阵.

设 $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_m\}$ 是 M_n 中矩阵 A 的谱(不相同的特征值的集合)，则 $A = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k E_k$. 式中 E_k 是正交幂等矩阵.

设 $f: D \to R^1$，A 的谱 $\{\lambda_k\} \in D$，则 $f(A) = \sum_{k=1}^{m} f(\lambda_k) E_k$ 称为 A 上的矩阵函数.

若 $\forall A, B \in M_n$，$\forall \lambda \in (0,1)$，下式成立

$$f(\lambda A + (1-\lambda)B) \leqslant \lambda f(A) + (1-\lambda) f(B),$$

则称 f 是 n 阶矩阵凸函数. 我们可以类似定义其他矩阵凸函数.

例如，若 $f(\lambda A + (1-\lambda)B) \leqslant t f(A) + (1-t) f(B)$，$\lambda, t \in (0,1)$，则称 f 是 (λ, t) 矩阵凸函数.

定义 27(向量值凸函数) 设 $f: R^n \to R^m$，S 是 R^m 中以零为顶点的闭凸点锥. S 在 R^m 上定义一个偏序 $<$，A 是 R^n 中的非空凸集. 设 $f: A \to R^m$，$\forall x_1, x_2 \in A$，$\lambda \in (0,1)$，下式成立

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2),$$

则称 f 是 A 上的 S 凸函数.

定义 28 设 $\omega: (0,\infty) \to (0,\infty)$，$\omega(0) = 0$. (X, d) 为距离空间，$x_0 \in X$，f 在 x_0 的次梯度记为 g_0(定义见[107]5:58). 若 $\forall x \in X$，下式成立

$$f(x) - f(x_0) \geqslant g_0(x) - g_0(x_0) + \omega(d(x, x_0)),$$

则称 f 是 X 上关于模 ω 的一致 g 凸函数. (Rolewicz, Stefan, Funct. Approx. Comnent. Math. 1998, 26:239 ～ 245)

(二) 复变量凸函数及其推广

定义 1 设函数 $w = f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ 在单位圆盘 $D = \{z: |z| < 1\}$ 内正则单叶且把单位圆盘映射成某个凸域，则称 $w = f(z)$ 为凸函数. 在几何上，它将 $|z| = r$，$(0 < r$

<1) 的像曲线在点 $f(z)$ 的切线随着 z 在该圆周上穿行而作同方向旋转(正则单叶的定义见本书第九章 § 2).

$f(z)$ 是凸函数的充要条件:

(1) $\operatorname{Re}\{1+\dfrac{zf''(z)}{f'(z)}\}>0, z\in D$;

或

(2) $f(z)$ 可表示成参数形式:

$$f(z)=c_0+c_1\int_0^z \exp[-2\int_{-\pi}^{\pi}\ln(1-te^{-i\theta})\mathrm{d}\mu(\theta)]\mathrm{d}t,$$

式中 $\mu(\theta)$ 是$[-\pi,\pi]$上的递增实值函数并满足$\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\mu(\theta)=1, c_0, c_1$ 为复常数,$c_1\neq 0$.

若 $f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_kz^k$ 在 D 内正则,且存在 D 上的凸函数 φ,满足 $\varphi(0)=0$ 和 $\operatorname{Re}\left(\dfrac{f'(z)}{\varphi'(z)}\right)>0, z\in D$,则称 f 是 D 上近于凸的,记为 $f\in K$.

定义 2 设 $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$ 是单位圆盘 $D=\{z:|z|<1\}$ 内的解析函数,且 $f(z)f'(z)/z\neq 0, \alpha>0$. 若在 D 上成立

$$\operatorname{Re}\left[(1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)}+\alpha(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)})\right]>0, \tag{1.15}$$

则称 $f(z)$ 是 D 上的 α 凸函数.

若(1.15)式改为

$$\operatorname{Re}\left[(1-\alpha)\frac{D^{n+1}f(z)}{D^nf(z)}+\alpha\frac{D^{n+2}f(z)}{D^{n+1}f(z)}\right]>\frac{1}{2},$$

则称 $f(x)$ 是 n 阶 α 凸函数.([323]1987,39(4):769 ~ 783;[326]1989,12(1):107 ~ 112)

定义 3 对于以复数为分量的 n 维向量 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 及 $p\geqslant 0$,令

$$N_p(x)=\begin{cases}\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^{1/p}\right)^p, & p>0,\\ \sup|x_j|, & p=0.\end{cases}$$

设(α_{jk})为 m 行 n 列的复数分量矩阵,$x=(x_1,\cdots,x_n), y=(y_1,\cdots,y_m), p,q\geqslant 0$. 定义

$$M(p,q)=\sup\left\{\left|\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}y_jx_k\right|: N_p(x)\leqslant 1, N_q(y)\leqslant 1\right\},$$

则 $\ln M(p,q)$ 在下述意义下成为(p,q)凸函数:若 $0\leqslant\alpha_i\leqslant 1, 0\leqslant\beta_i\leqslant 1$ 且 $\alpha_i+\beta_i\geqslant 1$, $i=1,2$,则 $\ln M((1-t)\alpha_1+t\alpha_2,(1-t)\beta_1+t\beta_2)$ 在 $0\leqslant t\leqslant 1$ 上成为 t 的凸函数,这称为 **Riesz 凸性定理**. 由这条定理也能导出 Hölder 不等式、Minkowski 不等式以及其他许多重要不等式.

定义 4 设 S 是开单位圆盘上形如 $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$ 的单叶解析函数类. 若 $f\in S$,且

$$\left|\arg\left\{(1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)}+\alpha\frac{(zf'(z))'}{f'(z)}\right\}\right|\leqslant\frac{\pi}{2}\beta,$$

式中 $\alpha\geqslant 0$，$0<\beta\leqslant 1$，$|z|<1$，则称 f 是 β 阶强 α 凸函数.

设 $f\in S$，若存在 S 中凸函数 g，使得

$$\left|\arg\left\{(1-\alpha)\frac{f'(z)}{g'(z)}+\alpha\frac{(zf'(z))'}{g'(z)}\right\}\right|\leqslant\frac{\pi}{2}\beta,$$

式中 $\alpha,\beta\geqslant 0$，$|z|<1$，则称 f 是 β 阶强 α 拟凸函数.

设 $f\in S$，若存在 S 中凸函数 g，使得

$$\left|\arg\frac{f'(z)}{g'(z)}\right|\leqslant\frac{\pi}{2}\beta,$$

式中 $\beta\geqslant 0$，$|z|<1$，则称 f 是 β 阶强闭凸函数.（[330]34(1)(2003),21 ～ 28）

此外，还有集合值凸函数、半局部对数凸性，$\lambda(n)$ 凸性、矩阵函数的半凸性、调和拟凸性、调和伪凸性等，这说明，凸函数概念的各种推广是与它在各方面的广泛应用相联系的，Toader 还研究了凸函数的各种推广之间的关系.（Anal. Numér, Théor. Approx. 1989, 18(2):183 ～ 189）

二、 凸函数不等式

1. Jensen 不等式：

(1) **Jensen 不等式**（离散形式）：设 φ 是$[a,b]$上的凸函数，则对于任意 $x_k\in[a,b]$，$p_k\geqslant 0,k=1,\cdots,n$，且 $\sum\limits_k p_k>0$，有

$$\varphi\left(\frac{\sum\limits_k p_kx_k}{\sum\limits_k p_k}\right)\leqslant\frac{\sum\limits_k p_k\varphi(x_k)}{\sum\limits_k p_k}. \tag{1.16}$$

令 $q_k=\dfrac{p_k}{\sum\limits_k p_k}$，则 $\sum\limits_k q_k=1$，这时(1.16)式化为标准形式：

$$\varphi(\sum_k q_kx_k)\leqslant\sum_k q_k\varphi(x_k). \tag{1.17}$$

提示：根据定义 1，用数学归纳法.

注 若 x_k 为 k 的递减函数，而 p_k 满足 $0\leqslant\sum\limits_{k=j}^n p_k\leqslant\sum\limits_{k=1}^n p_k,j=1,\cdots,n$，

且 $\sum\limits_{k=1}^n p_k>0$，这时(1.16)仍成立.注意 p_k 不一定都非负.

(2) **Jensen 不等式**（积分形式）：设 φ 是$[\alpha,\beta]$上的凸函数，f,p 在$[a,b]$上可积，$\alpha\leqslant f(x)\leqslant\beta,p(x)\geqslant 0,x\in[a,b]$，且$\int_a^b p(x)\mathrm{d}x>0$，则

$$\varphi\left(\frac{\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\mathrm{d}x}\right)\leqslant\frac{\int_a^b p(x)\varphi[f(x)]\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\mathrm{d}x}. \tag{1.18}$$

证 取 $x_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$，从(1.16)得

$$\varphi\left(\frac{\sum f(x_k)p(x_k)\Delta x_k}{\sum p(x_k)\Delta x_k}\right) \leqslant \frac{\sum \varphi[f(x_k)]p(x_k)\Delta x_k}{\sum p(x_k)\Delta x_k},$$

令 $n \to \infty$，得(1.18)式.

推论 若 $f(x) > 0, x \in [a,b]$，则

$$\exp\int_a^b \ln f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \ln\int_a^b \exp f(x)\mathrm{d}x.$$

注 若 f 在$[a,b]$上递减，$p(x)$ 满足 $0 \leqslant \int_t^b p(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b p(x)\mathrm{d}x, a \leqslant t \leqslant b$. 而且 $\int_a^b p(x)\mathrm{d}x > 0$，则(1.18)式仍成立. 注意这时 $p(x)$ 不一定非负.

注 (1.18)式可推广到 n 维欧氏空间 R^n 或抽象测度空间的子集 A 上. 设 μ 是 A 上的有限测度，f 在 A 上有界可测，φ 在包含 f 值域的区间上是凸的，则成立关于测度的 Jensen 不等式：

$$\varphi\left(\frac{\int_A f\mathrm{d}\mu}{\int_A \mathrm{d}\mu}\right) \leqslant \frac{\int_A \varphi(f)\mathrm{d}\mu}{\int_A \mathrm{d}\mu}. \tag{1.19}$$

它还可作加权推广：设 $p(x)$ 非负且$\int_A p(x)\mathrm{d}\mu(x) > 0$，则

$$\varphi\left(\frac{\int_A f(x)p(x)\mathrm{d}\mu(x)}{\int_A p(x)\mathrm{d}\mu(x)}\right) \leqslant \frac{\int_A \varphi[f(x)]p(x)d\mu(x)}{\int_A p(x)d\mu(x)}, \tag{1.20}$$

和指数推广：

$$\varphi\left(\frac{\int_A f\mathrm{d}\mu}{\int_A \mathrm{d}\mu}\right) \leqslant \frac{\int_A \varphi(f)\mathrm{d}\mu}{(\int_A \mathrm{d}\mu)^p} \cdot \frac{(\int_A f\mathrm{d}\mu)^p}{\int_A f^p\mathrm{d}\mu}, \tag{1.21}$$

式中 $p \geqslant 1$. ([367]1990,40(1):26 ~ 43)

(3) **Jensen 不等式的加细**：设 $f: D \to R^1$ 为凸函数，$x_k \in D, 1 \leqslant k \leqslant n$. 记

$$f_{k,n} = \frac{1}{\binom{n}{k}} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} f\left(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^k x_{i_j}\right), g_{k,n} = \frac{1}{\binom{n+k-1}{k}} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} f\left(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^k x_{i_j}\right),$$

则

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k\right) = f_{n,n} \leqslant \cdots \leqslant f_{(k+1),n} \leqslant f_{k,n} \leqslant \cdots \leqslant f_{1,n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(x_k);$$

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k\right) \leqslant \cdots \leqslant g_{(k+1),n} \leqslant g_{k,n} \leqslant \cdots \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(x_k), k = 1,2,\cdots,n.$$ ([301]1998, 222:365 ~ 373)1999 年，王挽澜给出了一个新的简洁证明. ([301]1999,238:567 ~ 579)

设 $a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant \cdots \leqslant b_1$，$a_1 + b_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n + b_n$，若

$$f: D \to R^1, \quad a = (a_1, \cdots, a_n), \quad b = (b_1, \cdots, b_n) \in D.$$

$$f(t) > 0, f'(t) > 0, f''(t) \geqslant 0, f'''(t) < 0, t \in D.$$

记 $A_n(a) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k$，则

$$\frac{f(A_n(a))}{f(A_n(b))} = \frac{f_{n,n}(a)}{f_{n,n}(b)} \leqslant \cdots \leqslant \frac{f_{(k+1),n}(a)}{f_{(k+1),n}(b)} \leqslant \frac{f_{k,n}(a)}{f_{k,n}(b)} \leqslant \cdots \leqslant \frac{f_{1,n}(a)}{f_{1,n}(b)} = \frac{A_n(f(a))}{A_n(f(b))}.$$

若 $f''(t) < 0$，$f^{(3)}(t) > 0$，$t \in D$，则不等号均反向.([304]9(3)(2008). 进一步的工作见[164]208 ~ 223)

在(1.20) 式中，取 $A = [a,b]$，$\int_a^b p(x)\mathrm{d}x = 1$，则(1.20) 式变成

$$\varphi\left(\int_a^b f(x)p(x)\mathrm{d}x\right) \leqslant \int_a^b (\varphi \circ f)(x)p(x)\mathrm{d}x.$$

它可以加细成多种形式. 例如，令 $I_k(f) = \int_a^b \cdots \int_a^b f(\cdot)p(x_1)\cdots p(x_k)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_k$，

$$G_k(p) = I_k\left\{\varphi\left(\sum_{j=1}^{k} p_j f(x_j)\right)\right\}, \qquad G_k = I_k\left\{\varphi\left(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} f(x_j)\right)\right\},$$

则

$$0 \leqslant I_1\{(\varphi \circ f)(x)\} - \varphi\{I_1(f(x))\}$$
$$\leqslant I_1\{(\varphi' \circ f)(x)f(x)\} - I_1\{(\varphi' \circ f)(x)\}I_1(f(x));$$
$$\varphi\{I_1 f(x)\} \leqslant G_k \leqslant G_k(p) \leqslant I_1\{(\varphi \circ f)(x)\}.$$

由此推出：设 φ 为$[a,b]$ 上的凸函数，则

$$\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{(b-a)^k}\int_a^b \cdots \int_a^b \varphi\left(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} x_j\right)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_k$$
$$\leqslant \frac{1}{(b-a)^k}\int_a^b \cdots \int_a^b \varphi\left(\sum_{j=1}^{k} p_j x_j\right)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_k \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x,$$

式中 $p = (p_1, \cdots, p_k)\left(p_j > 0,\ \sum_{j=1}^{k} p_j = 1\right)$称为概率权集.

进一步的加细和推广见[330]34(2)(2003),175 ~ 187.

设 X 为线性空间，A 为 X 的凸子集，$f: A \to R^1$ 为凸函数，$x_k \in A, \omega_k \geqslant 0, q_k \geqslant 0, G_n = \sum_{k=1}^{n} \omega_k > 0, Q_n = \sum_{k=1}^{n} q_k > 0$，Dragomir, S. S. 证明了以下几个结果：

① $$f\left(\frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n} q_k x_k\right) \leqslant \frac{1}{Q_n^k}\sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{n} q_{i_1}\cdots q_{i_k} f\left(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} x_{i_j}\right)$$
$$\leqslant \frac{1}{Q_n^k}\sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{n} q_{i_1}\cdots q_{i_k} f\left(\frac{1}{G_k}\sum_{j=1}^{k} \omega_j x_{i_j}\right) \leqslant \frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n} q_k f(x_k);$$
([330]1994,25(1):29 ~ 36;[301]1992,168(2):518 ~ 522;Mat. Bilten,1996,20:51 ~ 60)

② $$\frac{1}{Q_n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_k q_j f\left(\frac{x_k + x_j}{2}\right) \leqslant \frac{1}{Q_n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_k q_j \int_0^1 f(tx_k + (1-t)x_j)\mathrm{d}t$$
$$\leqslant \frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n} q_k f(x_k);$$
([307]758 ~ 26013)

③ $f\left(\frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n}q_kx_k\right)\leqslant\frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n}q_kf(tx_k+(1-t)\frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n}q_kx_k)$

$$\leqslant\frac{1}{Q_n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}q_kq_jf(tx_k+(1-t)x_j)\leqslant\frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n}q_kf(x_k),t\in[0,1].$$

(Mat. Bilten 1991,41(15):35 ~ 37)

1980 年,Vasic 等证明:设 $m\leqslant x_k\leqslant M$,令 $\bar{x}=\frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n}q_kx_k$,则

$$\frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n}q_kf(x_k)\leqslant\frac{1}{M-m}\{(M-\bar{x})f(m)+(\bar{x}-m)f(M)\};$$

若 $\frac{f(x)}{x-m}$ 在 $(m,M]$ 上递增,则 $\frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n}q_kf(x_k)\leqslant\frac{1}{M-m}(\bar{x}-m)f(M)$;

若 $\frac{f(x)}{M-x}$ 在 $[m,M)$ 上递减,则 $\frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n}q_kf(x_k)\leqslant\frac{1}{M-m}(M-\bar{x})f(m)$.

(An. Univ. Timisoara Ser. Stiint. Mat. 1980,18(1):95 ~ 104)

L-R 不等式(Lah-Ribaric 不等式):设 f 是 $[a,b]$ 上的凸函数,$q_k\geqslant0$, $\sum_{k=1}^{n}q_k=1$, $x_k\in[a,b]$,则

$$\sum_{k=1}^{n}q_kf(x_k)\leqslant\frac{b-\sum q_kx_k}{b-a}f(a)+\frac{\sum q_kx_k-a}{b-a}f(b).\ ([51]140)$$

D-I(Dragomir-Ionescu) 不等式:设 f 是 (a,b) 上可微的凸函数,$p_k\geqslant0$,$x_k\in(a,b)$,则

$$0\leqslant\sum_{k=1}^{n}p_kf(x_k)-f(\sum_{k=1}^{n}p_kx_k)\leqslant\sum_{k=1}^{n}p_kx_kf'(x_k)-(\sum_{k=1}^{n}p_kx_k)(\sum_{k=1}^{n}p_kf'(x_k)).$$

(Anal. Numer. Theor. Approx,1994,23:71 ~ 78)

若 f 是 $[a,b]$ 上可微的凸映射,$p_k\geqslant0$, $x_k\in(a,b)$, 则

$$0\leqslant\sum_{k=1}^{n}p_kf(x_k)-f\left(\sum_{k=1}^{n}p_kx_k\right)\leqslant\frac{1}{4}(b-a)[f'(b)-f'(a)];$$

若 f 是 $[a,b]$ 上的凸函数,则

$$\sum_{k=1}^{n}p_kf(x_k)-f\left(\sum_{k=1}^{n}p_kx_k\right)\leqslant f(a)+f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

([301]343(1)(2008),414 ~ 419)

设 $q_k>0$, $Q_n=\sum_{k=1}^{n}q_k=1$, $f,g:D\to R$ 为二次可微且

$$0\leqslant m_1\leqslant f''(x)\leqslant M_1,\quad 0<m_2\leqslant g''(x)\leqslant M_2,\quad x\in D,$$

则 $\frac{m_1}{M_2}\leqslant\frac{f(\sum_{k=1}^{n}q_kx_k)-\sum_{k=1}^{n}q_kf(x_k)}{g(\sum_{k=1}^{n}q_kx_k)-\sum_{k=1}^{n}q_kg(x_k)}\leqslant\frac{M_1}{m_2}$. ([22]9)

1985 年王炳安给出了(1.16) 式的一种加细:

设 φ 是区间 D 上的凸函数,则 $\forall x_k\in D,p_k>0,1\leqslant k\leqslant n$,下式成立

$$\varphi\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} p_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} p_k}\right) \leqslant \left(\frac{\sum_{j=1}^{k} p_j}{\sum_{j=1}^{n} p_j}\right)\varphi\left(\frac{\sum_{j=1}^{k} p_j x_j}{\sum_{j=1}^{k} p_j}\right) + \left(\frac{\sum_{j=k+1}^{n} p_j}{\sum_{j=1}^{n} p_j}\right)\varphi\left(\frac{\sum_{j=k+1}^{n} p_j x_j}{\sum_{j=k+1}^{n} p_j}\right) \leqslant \frac{\sum_{j=1}^{n} p_j f(x_j)}{\sum_{j=1}^{n} p_j},$$

且仅当所有 x_k 全相等时等号成立.([347]1985,4)

2000 年,Brnetic,I. 等给出了 Jensen 不等式的另一种加细:设 $f:[0,1]\to R^1$ 为凸函数,令 $h(t)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f[(1-t)x_k+tx_{k+1}]$,则 h 是$[0,1]$上凸函数,且

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \leqslant h(t) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k),$$

([330]2000,31(1):63 ~ 69;[301]1997,214(2):721 ~ 728 等)

(4) **反向 Jensen 不等式**:设 φ 是开区间(a,b)上的凸函数而且递增,则 $\forall x_k\in(a,b)$,$p_k\geqslant 0\ (1\leqslant k\leqslant n)$,$\sum_k p_k>0$,$\sum_k p_k\varphi'_+(x_k)>0$,恒有

$$\frac{\sum p_k\varphi(x_k)}{\sum p_k} \leqslant \varphi\left(\frac{\sum p_k\varphi'_+(x_k)x_k}{\sum p_k\varphi'_+(x_k)}\right),$$

式中 $\varphi'_+(x_k)$ 是 φ 在 x_k 的右导数.(Slater,M. L. 1980)

若 g 是$[a,b]$上有界变差函数,$\int_a^b \mathrm{d}g(t)=1$,$g(a)<g(b)$,$f$ 在$[a,b]$上递增连续,则对于$[a,b]$上的凸函数 φ,$\varphi\left(\int_a^b f(t)dg(t)\right)\geqslant\int_a^b \varphi(f(t))\mathrm{d}g(t)$ 成立的充要条件是:若 $f(x)\leqslant\int_a^b f(t)\mathrm{d}g(t)$,则 $\int_a^x (f(x)-f(t))\mathrm{d}g(t)\leqslant 0$,和从 $f(x)\geqslant\int_a^b f(t)\mathrm{d}g(t)$ 可推出 $\int_x^b [f(x)-f(t)]\mathrm{d}g(t)\geqslant 0$.(Pečarić,J. E,1983)

(5) **保序线性泛函的 Jensen 不等式**:设 L 是非空集 E 上的线性类,φ 是区间 $D\subset R$ 上的凸函数,A 为保序线性泛函,使 $A(1)=1$,或对所有 $g\in L$,使得 $\varphi(g)\in L$,则 $A(g)\in D$ 且

$$\varphi(A(g))\leqslant A(\varphi(g)). \tag{1.22}$$

这个不等式的证明用到下述引理:

设 φ 是区间$[m,M]$上的凸函数$(-\infty<m<M<\infty)$,L 是非空集 E 上满足第 1 章 §3 中(3.176)的线性类,A 是保序线性泛函且 $A(1)=1$.若对所有 $g\in L$,使得 $\varphi(g)\in L$(从而对所有 $t\in E$,$m\leqslant g(t)\leqslant M$),则

$$A(\varphi(g))\leqslant\{[M-A(g)]\varphi(m)+[A(g)-m]\varphi(M)\}/(M-m). \tag{1.23}$$

上式右边是 M 的递增函数和 m 的递减函数.

Jensen 不等式(1.22)式中的 φ 是凸函数的条件还可放宽.例如:设 L 是非空集 E 上的线性类,函数 $\varphi:D\to R$ 满足

$$\varphi(y)-\varphi(y_0)\geqslant c(y-y_0),\ y\in D, \tag{1.24}$$

式中 y_0 是区间 D 中一固定点,c 为常数.若 $A:L\to R$ 是保序线性泛函,使 $A(1)=1$.则对

所有 $g \in L$ 使得 $\varphi(g) \in L$，和 $A(g) = y_0$，不等式(1.22) 成立.

(有关(1.22) 式的证明及其推广见专题论文[301]1986,118(1):125 ~ 144 及 1985,110:536 ~ 552;1991,156(1):231 ~ 239)

从(1.22) 与(1.23) 式容易得出:设 φ 是区间 $D \supset [m,M]$ 上的凸函数，$-\infty < m < M < \infty$，$g: E \to R$ 满足 $m \leqslant g(t) \leqslant M \quad (t \in E)$ 且 $g \in L$，$\varphi(g) \in L$. $A: L \to R$ 是保序线性泛函，$A(1) = 1$，非负数 p,q 之和 $p+q > 0$ 且 $A(g) = (pm + qM)/(p+q)$，则

$$\varphi\left(\frac{pm + qM}{p+q}\right) \leqslant A(\varphi(g)) \leqslant \frac{p\varphi(m) + q\varphi(M)}{p+q}.$$

(6) 设 g 是$[0,1]$上正的递增函数，$\varphi \in BV[0,1]$，$\varphi > 0$，F 是$(0,\infty)$ 上递增可微的凸函数，且满足

$$F'(\lambda)\,\frac{\varphi(1) - \varphi(x)}{1-x} \leqslant [\varphi(1) - \varphi(0)]F'[\lambda(1-x)],$$

$0 < x < 1$，$0 < \lambda < \infty$，$\varphi(1) - \varphi(0) > 0$，$\omega$ 为非负权函数，则

$$\frac{\int_0^1 F(g)\omega d\varphi}{\int_0^1 \omega \mathrm{d}\varphi} \leqslant F\left(\frac{\int_0^1 g\omega}{\int_0^1 \omega}\right).$$

(Malamud, S. M. [308]2001,129(9):2671 ~ 2678)

2. [MCU]. **Hadamard 不等式**(1893)：设 φ 是区间$[a,b]$ 上的凸函数，则对于 $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$，有

$$\varphi\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant \frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}[\varphi(x_1) + \varphi(x_2)], \tag{1.25}$$

仅当 φ 为线性函数时等号成立. 它说明在 Jensen 不等式的两端之间可用积分的平均值插入.

证 由 φ 的凸性，对于 $x_1 < x < x_2$，有

$$\varphi(x) \leqslant \frac{\varphi(x_1)(x_2 - x) + \varphi(x_2)(x - x_1)}{x_2 - x_1}.$$

两边积分即得右边不等式. 为证左边不等式，令 $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + t$，则

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\mathrm{d}x &= \int_{-\frac{1}{2}(x_2 - x_1)}^{\frac{1}{2}(x_2 - x_1)} \varphi\left(\frac{x_1 + x_2}{2} + t\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}(x_2 - x_1)} \left[\varphi\left(\frac{x_1 + x_2}{2} + t\right) + \varphi\left(\frac{x_1 + x_2}{2} - t\right)\right]\mathrm{d}t \\ &\geqslant \int_0^{\frac{1}{2}(x_2 - x_1)} 2\varphi\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\mathrm{d}t = (x_2 - x_1)\varphi\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right).\end{aligned}$$

注 Hermite, C. 于 1883 年就发现了(1.25) 式. ([367]1985,28:225 ~ 232 和 [301]1992,167(1):49 ~ 56)

注 Hadamard 不等式已有许多推广. 例如：

(1) 设 φ 是$[a,b]$ 上连续的凸函数，则对于所有 $p_k > 0$，$x_k \in [a,b]$，$k = 1,\cdots,n$ 以及 $1 \geqslant \beta_1 > \alpha_1 \geqslant \cdots \geqslant \beta_{n-1} \geqslant \alpha_{n-1} \geqslant 0$，$\frac{1}{2}(\alpha_j + \beta_j) = 1 - \frac{p_1 + \cdots + p_j}{p_1 + \cdots + p_n}$，$j = 1,\cdots,$

$n-1$，有 $\varphi\left[\dfrac{\sum p_k x_k}{\sum p_k}\right] \leqslant \left(\prod_{j=1}^{n-1}(\beta_j-\alpha_j)\right)^{-1}\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\cdots\int_{\alpha_{n-1}}^{\beta_{n-1}}\varphi\left(x_1+\sum_{j=1}^{n-1}(x_{j+1}-x_j)t_j\right)\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_{n-1}$

$$\leqslant \frac{\sum p_k\varphi(x_k)}{\sum p_k}.$$（证明见[8]151 ~ 152）

（2） 设 φ 是$[a,b]$上的凸函数，$p_1,p_2>0$，$A=\dfrac{p_1a+p_2b}{p_1+p_2}$，则对于 $y\neq 0$，有

$$\varphi\left(\frac{p_1a+p_2b}{p_1+p_2}\right)\leqslant \frac{1}{2y}\int_{A-y}^{A+y}\varphi(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{p_1\varphi(a)+p_2\varphi(b)}{p_1+p_2},$$

仅当 $0<|y|\leqslant \dfrac{b-a}{p_1+p_2}\min\{p_1,p_2\}$ 时等号成立.（[331]1979，(634 ~ 677)：36 ~ 41）

1986 年 Pecaric, J. E. 和 Beesack, P. R. 将上述不等式改进为

$$\varphi\left(\frac{p_1a+p_2b}{p_1+p_2}\right)\leqslant \frac{1}{2y}\int_{A-y}^{A+y}\varphi(x)\mathrm{d}x \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}[\varphi(A-y)+\varphi(A+y)]\leqslant \frac{p_1\varphi(a)+p_2\varphi(b)}{p_1+p_2}.$$（[301]1986，118(1)：125 ~ 144）

（3） 1981 年王中烈、王兴华证明：设 φ 是区间$[a,b]$上连续的凸函数，则对于任何 $p_k>0$，$x_k\in[a,b]$，$k=0,1,\cdots,n$，以及 α_k,β_k 满足 $0\leqslant\alpha_k<\beta_k\leqslant 1$，$\dfrac{1}{2}(\alpha_k+\beta_k)=\left(\sum_{j=k}^{n}p_j\right)\left(\sum_{j=k-1}^{n}p_j\right)^{-1}$，$j=1,\cdots,n$，有

$$\varphi\left(\frac{\sum p_kx_k}{\sum p_k}\right)\leqslant \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega}\varphi(x(t))\mathrm{d}t\leqslant \frac{\sum p_k\varphi(x_k)}{\sum p_k},$$

其中 $t=(t_1,t_2,\cdots,t_n)$，$x(t)=\sum_{k=0}^{n-1}x_k(1-t_{k+1})\prod_{j=1}^{k}t_j+x_n\prod_{j=1}^{n}t_j$；

$$\Omega=[\alpha_1,\beta_1]\times[\alpha_2,\beta_2]\times\cdots\times[\alpha_n,\beta_n],\ |\Omega|=\prod_{k=1}^{n}(\beta_k-\alpha_k).$$

上述不等式中积分号右边的等号，仅当所有 x_k 皆相等，或 $\varphi(x)$ 在包含所有 x_k 的区间上为线性时出现；积分号左边的等号，仅当所有 x_k 皆相等或 $\varphi(x)$ 在区间$[\min_{t\in\Omega}x(t),\max_{t\in\Omega}x(t)]$上为线性时出现.（[333]1981，126(4)：254；王中烈、王兴华的结果另见[352]1988，15(1)：120 ~ 121）1985 年冯慈璜在 Pecaric, J. E. 证明的 Jensen-Steffensen 不等式两端之间插入重积分的平均值.（[336]1985，6A(4)：443 ~ 446）

（4） 1986 年胡克证明：设 φ 是$[a,b]$上连续的凸函数，且对于 $p_i>0$，$x_i\in[a,b]$，$[u_i,v_i]\subset[a,b]$，$Q_k=\sum_{i=0}^{k}p_i$，$\dfrac{1}{2}(u_k+v_k)=Q_k^{-1}\sum_{i=0}^{k}p_ix_i$，$k=0,1,2,\cdots$，

令 $F(x)=\int_a^x\varphi(t)\mathrm{d}t-(x-a)\varphi\left(\dfrac{x+a}{2}\right)$，$x\in[a,b]$，

$G(k)=\sum_{i=0}^{k}p_i\varphi(x_i)-\dfrac{Q_k}{v_k-u_k}\int_{u_k}^{v_k}\varphi(t)\mathrm{d}t$，$G(0)=0$，则 F 在$[a,b]$上严格递增，$G(k)$ 为

k 的递增函数.(证明见江西师范大学学报(自)1986,1:1 ~ 3)

(5) 设 f 是 n 维单形 $\sum(A)$ 上的凸函数,则

$$f\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}a_k\right)\leqslant\frac{1}{V(A)}\int_{\sum(A)}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}f(a_k).$$

式中 $V(A)$ 为 $\sum(A)$ 的体积. $\sum(A)=\mathrm{cov}(a_1\cdots,a_{n+1})$([340]1987,7(4):385 ~ 386) $\sum(A)$ 的定义见第 4 章 § 2. 七. ([305]115(4)(2008),339 ~ 345)

(6) 1989 年 Alzer. 证明:设 f 为 $2n$ 阶可微函数($n\geqslant 1$),$f^{(2n)}(x)\geqslant 0, x\in(a,b)$,则

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(2k+1)!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{2k}f^{(2k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n-2}\frac{(b-a)^k}{(k+1)!}[f^{(k)}(a)+(-1)^k f^{(k)}(b)].$$

(C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, 1989, 11(6):255 ~ 258)

Pecaric, J. E. 则进一步证明.

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2n}\left(f(x)+\sum_{k=1}^{2n-1}F_k\right).$$

当 $f^{(2n)}(x)>0$ 时,上述不等号是严格的,即"$<$". 式中

$$F_k=\left(\frac{2n-k}{k!}\right)\frac{f^{(k-1)}(a)(x-a)^k-f^{(k-1)}(b)(x-b)^k}{b-a}.$$ ([306]MR93h:26026)

(7) **Seiffert 不等式**:设 f 是 $[a,b]$ 上严格递增且有对数凸性的反函数. $S_1(a,b)$ 是 a,b 的指数平均(定义见第一章 § 3),$a>0$,则

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant f(S_1(a,b)).$$

当 f 严格递减时,不等号反向. (Elem. Math. 1989, 44(1):16 ~ 18)

(8) 设 f 是 $[a,b]$ 上 $1-g$ 凸函数(见本节定义 10),g 是包含 f 的值域的区间上满单射的连续函数,x,y 的广义对数平均定义为:

$$L_g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{g(y)-g(x)}\displaystyle\int_{g(x)}^{g(y)}g^{-1}(t)\,\mathrm{d}t, & x\neq y,\\ x, & x=y,\end{cases}$$

则 $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant L_g[f(x),f(y)]$;

若令 $M_g(x,y,\lambda)=g^{-1}(\lambda g(x)+(1-\lambda)g(y))^{1/\lambda}$,$\omega:[a,b]\to R^1$ 为正的可积函数,使得 $\omega(a+t)=\omega(b-t), 0\leqslant t\leqslant\dfrac{1}{2}(b-a)$,设 g^{-1} 为凸函数,则

$$M_g\left[f(a),f(b),\frac{1}{2}\right]\leqslant\frac{1}{\int_a^b\omega(x)\,\mathrm{d}x}\int_a^b f(x)\omega(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}[f(a)+f(b)].$$

([360]2000,71(1):30 ~ 39)

(9) 设 $f:[a,b]\to R^1$ 为凸函数,令

$$H(t)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left[tx+(1-t)\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\mathrm{d}x;$$

$$F(t)=\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f[tx+(1-t)y]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

则 H 是[0,1] 上严格递增的凸函数，而且

$$\inf\{H(t):t\in[0,1]\}=H(0)=f(\frac{a+b}{2});$$

$$\sup\{H(t):t\in[0,1]\}=H(1)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x;$$

$F(t)$ 是[0,1] 上凸函数，且在[0,1/2] 上严格递减，在[1/2,1] 上严格递增. $H(t)\leqslant F(t)$，而且

$$\inf\{F(t):t\in[0,1]\}=F(\frac{1}{2})=\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f(\frac{x+y}{2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

$$\sup\{F(t):t\in[0,1]\}=F(0)=F(1)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

利用 $H(t)$，$F(t)$，可对 Hadamard 不等式(1.25) 加细，例如：

$$0\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(\frac{2x+a+b}{4}\right)\mathrm{d}x-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-$$
$$-\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(\frac{2x+a+b}{4}\right)\mathrm{d}x.$$

由此还可推出两个正数的算术平均与幂平均不等式的加细([301]1992,167(1):49 ～ 56). 若令

$$G(t)=\frac{1}{2(b-a)}\int_a^b\left\{f[(\frac{1+t}{2})a+(\frac{1-t}{2})x]+f[(\frac{1+t}{2})b+(\frac{1-t}{2})x]\right\}\mathrm{d}x.$$

杨国胜等证明 G 是[0,1] 上严格递增的凸函数，而且

$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant G(t)\leqslant\frac{1}{2}[f(a)+f(b)]$. ([330]1997,28(1):33 ～ 37,2003,34(1):45 ～ 47)

(10) 设 f 是 $[a,b]$ 上的凸函数，实数 p,q 满足 $pq\geqslant 0$，$p+q>0$，则

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f\left(\frac{px+qy}{p+q}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

若 g 是 $[a,b]$ 上非负连续函数，则

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f\left(\frac{x+y}{2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$\leqslant\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b\left[f\left(\frac{xg(x)+yg(y)}{g(x)+g(y)}\right)+f\left(\frac{xg(y)+yg(x)}{g(x)+g(y)}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f.$$

(Dragomir, S. S., Zb. Rad. Prir,-Mat. Fak., Univ. Kragujevcu 1996,18:21 ～ 25)

1999 年，Adedayo, O. J. 进一步推广为：

$$f\left(\frac{n(a+b)}{2}\right)\leqslant\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f\left(\sum_{k=1}^n\frac{p_kx_k+q_ky_k}{p_k+q_k}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\frac{n}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

式中 $\prod_{k=1}^n(p_kq_k)\geqslant 0$，$\sum_{k=1}^n(p_k+q_k)>0$. (Zb. Rad. (Kragujevac)1999,21:49 ～ 53)

(11) 设 f 是区间 D 上 s-Brecker 凸函数，$D\subset[0,\infty)$，$0<s\leqslant 1$，则

$$2^{s-1}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{f(a)+f(b)}{s+1}.$$

(Dragomir, S. S., Demonstratio Math. 1999, 32(4): 687 ~ 696)

(12) 设 f 是区间 D 上非负对数凸函数(见定义 2)，$a,b\in D$，$a<b$，则

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b[f(x)f(a+b-x)]^{1/2}\mathrm{d}x\leqslant\sqrt{f(a)f(b)}.$$

(Drogomir, S. S., Demonstratio Math. 1998, 31(2): 355 ~ 364)

(13) 设 $B=B(x_0,r)$ 是平面上以 x_0 为中心、r 为半径的圆，L 是 B 的边界，其长度为 $2\pi r$，f 是 B 上的凸函数，则

$$f(x_0)\leqslant\frac{1}{\pi r^2}\iint_B f(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\leqslant\frac{1}{2\pi r}\int_L f(t)\mathrm{d}l(t).$$

(Dragomir, S. S., [304]2000, 1, 1; [303]2000, 3(2): 177 ~ 187)

(14) **保序线性泛函的 Hadamard 不等式**：设 X 为实线性空间，D 为 X 的凸子集，f 为 D 上凸函数，E 为非空集，L 为实值函数的线性类，$A:L\to R^1$ 为保序线性泛函，使得 $A(1)=1$(定义见第一章 §3)，$h:E\to R^1$，$0\leqslant h(t)\leqslant 1$，$t\in E$，$h\in L$ 使得 $f(hx+(1-h)y)$，$f((1-h)x+hy)\in L$，$(x,y\in D)$. 1991 年，Pecaric, J. E. 证明

$$f[A(h)x+(1-A(h))y]\leqslant A[f(hx+(1-h)y)]\leqslant A(h)f(x)+[1-A(h)]f(y).$$

(Rad. Mat. 1991, 7(1): 103 ~ 107)

1993 年，Dragomir, S. S. 进一步给出了 Hadamard 不等式的加细：

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}\{f[A(h)x+(1-A(h))y]+f[(1-A(h))x+A(h)y]\}$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\{A[f(hx+(1-h)y)]+A[f((1-h)x+hy)]\}\leqslant\frac{1}{2}[f(x)+f(y)].$$

([330]1993, 24(1): 101 ~ 106)

(15) 对于 t 凸函数 f，有一系列 Hermite-Hadamard 型不等式：

设 f 是 $[0,\infty)$ 上 t 凸函数，$0<t\leqslant 1$，$0\leqslant a<b<\infty$，若 $f\in L^1[a,b]$，则

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\min\left\{\frac{1}{2}[f(a)+tf(\frac{b}{t})],\frac{1}{2}[f(b)+tf(\frac{a}{t})]\right\};$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b\frac{1}{2}\left[f(x)+tf\left(\frac{x}{t}\right)\right]\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\frac{t+1}{4}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+t\frac{f(a/t)+f(b/t)}{2}\right];$$

若 $f\in L^1[ta,b]$，则

$$\frac{1}{t+1}\left[\int_a^{tb}f(x)\mathrm{d}x+\frac{tb-a}{b-ta}\int_{ta}^b f(x)\mathrm{d}x\right]\leqslant(tb-a)\frac{f(a)+f(b)}{2};$$

若 f 在 $(0,\infty)$ 上可微，则

$$\frac{f(tb)}{t}-\frac{b-a}{2}f'(tb)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{(b-ta)f(b)-(a-tb)f(a)}{2(b-a)}.$$

(Dragomir, S. S. [330]2002, 33(1): 55 ~ 65. 在该文后面还列出 74 篇有关文献)

(16) 设 f 是$[a,b]$ 上非负拟凸函数(见本节定义 5), 则 $\forall x \in (a,b)$, 下式成立

$$f(x) \leqslant \frac{1}{\min\{x-a, b-x\}}\int_a^b f(y)dy, \quad \text{特别地}, f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(Rubinov, A. M. 等, [301]2002, 270: 80 ~ 91)

(17) 设 $f:[a,b] \to R^1$, f 是非负递减函数且 $f^p(p \geqslant 1)$ 是凸函数, 则

$$\frac{1}{a+b}\int_a^b f \leqslant \frac{p}{p+1}f(a) + \frac{1}{p+1}f(b),$$

$p=1$ 时归结为(1.25)式. ([372]5)

(18) 设 $f:[a,b] \to R^1$ 为凸函数, $p, q \in (0,1)$, $p+q=1$, $\xi = pa+qb$, 则

$$f(pa+qb) \leqslant \frac{1}{b-a}\left\{\frac{p}{q}\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x + \frac{q}{p}\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x\right\} \leqslant pf(a) + qf(b).$$

([344]2002, 32(6): 1027 ~ 1030)

2005 年于永新、刘证作了进一步推广. ([399]25(3)(2005), 399 ~ 406)

(19) 设 f 是区间 D 上正的对数凸函数, $a, b \in D$, $a < b$, 则

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \log f(x)\mathrm{d}x\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b G(f(x), f(a+b-x))\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant S_0(f(a), f(b)) \leqslant \frac{1}{2}[f(a)+f(b)].$$

式中 $G(ab) = \sqrt{a,b}$, $S_0(a,b) = \dfrac{a-b}{\log a - \log b}$ $(a \neq 0)$ 分别是正数 a, b 的几何平均与对数平均. ([415]31(1998), 354 ~ 364)

(20) 设 D(区间) 的内部记为 $\dot{D}$, $f_k: D \to (0,\infty)$ 在 $\dot{D}$ 上是可微的对数凸函数, a, $b \in \dot{D}$, $a < b$. 记 $M = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{f_k'\left(\frac{a+b}{2}\right)}{f_k\left(\frac{a+b}{2}\right)}\left(\dfrac{b-a}{2}\right)$, 则

① $$\frac{\frac{1}{b-a}\int_a^b \left(\prod\limits_{k=1}^{n} f_k\right)}{\prod\limits_{k=1}^{n} f_k\left(\frac{a+b}{2}\right)} \geqslant S_0(\exp M, \exp(-M)) \geqslant 1.$$

② $$\frac{\int_a^b \prod\limits_{k=1}^{n} f_k(y)\left[\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{f_k'(y)}{f_k(y)}\left(\frac{a+b}{2}-y\right)\right]\mathrm{d}y}{\int_a^b \left(\prod\limits_{k=1}^{n} f_k(y)\right)\mathrm{d}y}$$

$$\leqslant \log \frac{\int_a^b \left(\prod\limits_{k=1}^{n} f_k(y)\right)\exp\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{f_k'(y)}{f_k(y)}\left(\frac{a+b}{2}-y\right)\right)\mathrm{d}y}{\int_a^b \left(\prod\limits_{k=1}^{n} f_k(y)\right)\mathrm{d}y} \leqslant \left|\frac{\prod\limits_{k=1}^{n} f_k\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\frac{1}{a-b}\int_a^b \left(\prod\limits_{k=1}^{n} f_k\right)}\right|.$$

([330]36(1)(2005), 43 ~ 47)

(21) 设 $f:[a,b] \to R$ 是凸函数, 定义

$$F(x,y,t)=\frac{1}{2}[f(tx+(1-t)y)+f((1-t)x+ty)],\quad x,y\in[a,b],\ t\in[0,1].$$

$$G(t)=\frac{1}{b-a}\int_a^b F\left(x,\frac{a+b}{2},t\right)\mathrm{d}x,\quad H(t)=\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b F(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

则

① G,H 是$[0,1]$上的凸函数,且 $G(t)\leqslant H(t)$;

② $\displaystyle\int_a^b F\left(x,\frac{a+b}{2},t\right)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f\leqslant\frac{2}{3}\int_a^b F\left(x,\frac{a+b}{2},t\right)\mathrm{d}x+\frac{b-a}{6}[f(a)+f(b)]$;

③ $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b\int_a^b F(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$\leqslant\int_a^b f\leqslant\frac{2}{3(b-a)}\int_a^b\int_a^b F(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{b-a}{6}[f(a)+f(b)].$$ ([330]34(2)(2003),163 ~ 167)

(22)　设 D 为 R^1 中的区间,$\omega:D\to R^+$ 是局部可积的权函数,a,b 的 ω 平均定义为

$$M_\omega(a,b)=\frac{\int_a^b x\omega(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b\omega(x)\mathrm{d}x}.$$

记 $E=(D-C)\cap(C-D)$,式中 $C\in D$.若 $f:D\to R$ 满足以下三个条件:

① $\omega(c-x)=\omega(c+x)$, $x\in E$,即 ω 是 c 的偶函数;

② $f(c-x)+f(c+x)=2f(c)$, $x\in E$, 即 f 是 c 的奇函数;

③ f 在 $D\cap(-\infty,c]$ 上是凸函数,f 在 $D\cap[c,\infty)$ 上是凹函数.

则称 f 是凸凹对称函数.在上述条件下,对于 D 的所有子区间$[a,b]$,若 $a+b\geqslant 2c$,则

$$\frac{b-M_\omega(a,b)}{b-a}f(a)+\frac{M_\omega(a,b)-a}{b-a}f(b)\leqslant\frac{1}{\int_a^b\omega(x)\mathrm{d}x}\int_a^b f(x)\omega(x)\mathrm{d}x\leqslant f(M_\omega(a,b)).$$

若 $a+b\leqslant 2c$,则以上不等号均反向.(Czinder, Peter, Publ, Math. 68(1 ~ 2)(2006),215 ~ 224)

3.　**Popoviciu 不等式**:设 φ 是$[a,b]$上连续的凸函数,则对于任意 $x_k\in[a,b]$, $k=1,\cdots,n$, 有

$$\sum_{1\leqslant k_1<\cdots<k_m\leqslant n}\varphi\left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^m x_{k_j}\right)\leqslant\frac{1}{m}\binom{n-2}{m-2}\left[\frac{n-m}{m-1}\sum_{k=1}^n\varphi(x_k)+n\varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k\right)\right],$$

其中 $n\geqslant 3, 2\leqslant m\leqslant n-1$.([4]232 ~ 233)

4.　**三角凸函数不等式**:设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数,且对某个 $p>0$ 及任意 $x_1<x_2<x_3, x_3-x_1<\pi/p$,下式成立

$$f(x_1)\sin p(x_2-x_3)+f(x_2)\sin p(x_3-x_1)+f(x_3)\sin p(x_1-x_2)\leqslant 0,$$

则称 $f(x)$ 是(关于 p 的)三角凸函数.它有类似于凸函数的一些性质,例如:

(1)　设 $x_3-x_1<\pi/p, x_1<x<x_3$,或 $x<x_1<x_3$,则

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{\sin p(x-x_1)}\leqslant\frac{f(x_3)-f(x_1)}{\sin p(x_3-x_1)}+f(x_1)\sin p\left(\frac{x_3-x}{2}\right)\sec p\left(\frac{x_3-x_1}{2}\right)\sec p\left(\frac{x-x_1}{2}\right),$$

当 $x_3 < x_1 < x$ 或 $x_3 < x < x_1$ 时，不等号反向；

(2) 设三角凸函数 $f(x)$ 在点 x_0 达到极大(或极小)值，则当 $|x-x_0| \leqslant \pi/p$ 时，有

$$f(x) \geqslant f(x_0)\cos p(x-x_0);$$

(3) 三角凸函数 $f(x)$ 在每点上都存在左导数 $f'_-(x)$ 和右导数 $f'_+(x)$ 且 $f'_-(x) \leqslant f'_+(x)$；

(4) 设 $f(x)$ 为三角凸函数，则对 $\alpha < \beta$，有 $f'_-(\beta) - f'_+(\alpha) + p^2\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$，仅当 $f(x) = c_1\cos px + c_2\sin px\ (\alpha \leqslant x \leqslant \beta)$ 时等号成立.(以上证明见沈燮昌等《数学分析纵横谈》，北京大学出版社(1991)255 ~ 262)

5. 设 $p_k > 0, a_k > 0, k = 1, \cdots, n$，且至少有一对 $i \neq j(1 \leqslant i, j \leqslant n)$，使得 $a_i \neq a_j$，则

$$\exp\left[\frac{\sum \frac{p_k}{a_k}\ln a_k}{\sum p_k/a_k}\right] < \frac{\sum p_k}{\sum p_k/a_k} < \exp\left[\frac{\sum p_k\ln a_k}{\sum p_k}\right] < \frac{\sum p_k a_k}{\sum p_k} < \exp\left[\frac{\sum p_k a_k\ln a_k}{\sum p_k a_k}\right],$$

相应的积分形式为：设 f, p 是 $[a,b]$ 上正的连续函数，f 为非常值函数，则

$$\exp\left[\frac{\int_a^b \frac{p(x)}{f(x)}\ln f(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b \frac{p(x)}{f(x)}\mathrm{d}x}\right] < \frac{\int_a^b p(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b \frac{p(x)}{f(x)}\mathrm{d}x}$$

$$< \exp\left[\frac{\int_a^b p(x)\ln f(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\mathrm{d}x}\right] < \frac{\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\mathrm{d}x} < \exp\left[\frac{\int_a^b p(x)f(x)\ln f(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x}\right].$$

提示：考虑 e^{-x} 的凸性.

6. 设 f, g, p 是 $[a,b]$ 上正的连续函数，则

(1) $$\exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)\mathrm{d}x\right) + \exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln g(x)\mathrm{d}x\right)$$

$$\leqslant \exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x\right);$$

(2) $$\exp\left[\frac{\int_a^b p(x)\ln f(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\mathrm{d}x}\right] + \exp\left[\frac{\int_a^b p(x)\ln g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\mathrm{d}x}\right]$$

$$\leqslant \exp\left[\frac{\int_a^b p(x)\ln[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\mathrm{d}x}\right].$$ (与此有关的不等式见[56]68 ~ 75)

7. **优化(或控制)不等式：** (1) 离散形式：设 $x = (x_1, \cdots, x_n)$ 被 $y = (y_1, \cdots, y_n)$ 所优超(控制)，即 $x \prec y$(见本节定义 6)，则对于任意凸函数 φ，下式成立

$$\sum_{j=1}^n \varphi(x_j) \leqslant \sum_{j=1}^n \varphi(y_j). \tag{1.26}$$

(2) 积分形式之一：设 f, g 是 $[a,b]$ 上正的递增函数，φ 为连续的凸函数，设 g 被 f 所优超(控制)，记为 $g < f$，是指对 $a \leqslant x < b$，有

$\int_a^x g(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^x f(t)\mathrm{d}t, \int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，则

$$\int_a^b \varphi(g(x))\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b \varphi(f(x))\mathrm{d}x. \tag{1.27}$$

证　取 $\Delta x_k = \dfrac{b-a}{n}, k=1,\cdots,n, \xi_k = a + k\Delta x_k$，由条件，有

$$g(\xi_1) \leqslant g(\xi_2) \leqslant \cdots \leqslant g(\xi_n); f(\xi_1) \leqslant f(\xi_2) \leqslant \cdots \leqslant f(\xi_n);$$

$$\sum_{j=1}^k g(\xi_j) \leqslant \sum_{j=1}^k f(\xi_j), 1 \leqslant k < n, \sum_{j=1}^n g(\xi_k) = \sum_{j=1}^n f(\xi_k),$$

由(1.26)，有 $\sum_{k=1}^n \varphi(g(\xi_k))\Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^n \varphi(f(\xi_k))\Delta x_k$. 令 $n \to \infty$，即得(1.27).

(3)　积分形式之二：设 f_k, g_k 在区间[0,1]上有界递减，且 $f_k \prec g_k$，即

$$\int_0^x f_k(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x g_k(t)\mathrm{d}t, 0 \leqslant x \leqslant 1, k = 1,\cdots,n,$$

$$\int_0^1 f_k(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 g_k(t)\mathrm{d}t,$$

则对于任意凸函数 φ，有

$$\int_0^1 \varphi(t, f_1, \cdots, f_n)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \varphi(t, g_1, \cdots, g_n)\mathrm{d}t.$$

(证明见[2]30 ~ 33 及[305]1954,61:626 ~ 631,[345]1985,9:35 ~ 37)

1982 年 Nicolai, H. 将 φ 为凸函数的条件减弱为：对任意正数 δ，$\varphi(x+\delta) - \varphi(x)$ 在区间 D 上递增，(God. Sofij. Univ. Fak. Mat. Mekh. 1982,76;1987,109 ~ 114)

(4)　积分的加权形式：设 f, g 是$[a,b]$上正的可积函数，ω 为权函数，φ 是$(0,\infty)$上的凸函数，而且

$$\int_a^x f(t)\omega(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^x g(t)\omega(t)\mathrm{d}t, \quad x \in [a,b]$$

$$\int_a^b f(t)\omega(t)\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\omega(t)dt.$$

①　若 f 在$[a,b]$上递减，则 $\int_a^b \varphi[f(t)]\omega(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b \varphi[g(t)]\omega(t)\mathrm{d}t$.

②　若 g 在$[a,b]$上递增，则上述不等号反向.

证　利用本节 No. 13(Hardy 不等式)，由 φ 凸知，

$$\forall u_1, u_2 \geqslant 0 \Rightarrow \varphi(u_1) - \varphi(u_2) \leqslant \varphi'(u_1)(u_1 - u_2).$$

令 $F(x) = \int_a^x [f(t) - g(t)]\omega(t)\mathrm{d}t$，则 $F(x) \leqslant 0$ 且 $F(a) = F(b) = 0$.

若 f 递减，则

$$\int_a^b [\varphi(f) - \varphi(g)]\omega \leqslant \int_a^b \varphi'[f(t)]\{f(t) - g(t)\}\omega(t)\mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b \varphi'(f(x))\mathrm{d}F(t) = \varphi'(f(t))F(t)\Big|_a^b - \int_a^b F(t)\mathrm{d}\varphi'(f(t))$$

$$= -\int_a^b F(t)\mathrm{d}\{\varphi'(f(t))\} \leqslant 0.$$

当 g 为递增时可类似证明.(L. Maligranda 等,[301]190(1995),248 ~ 262)

8. (1) **Szegö 不等式**:设 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_{2n-1} \geqslant 0$,且 f 是区间 $[0,a_1]$ 上的凸函数,则

$$\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k-1}f(a_k) \geqslant f\left(\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k-1}a_k\right). \tag{1.28}$$

(证明见[2]47)

(2) 设 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$,$\varphi$ 是 $[a_n,a_1]$ 上的凸函数,则

$\sum_{k=1}^{n}\varphi(a_{k+1})a_k \leqslant \sum_{k=1}^{n}\varphi(a_k)a_{k+1}$,式中 $a_{n+1} = a_1$.([305]1994,101(6):574 ~ 575)

9. **Bellman 不等式**:设 $a_1 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant 0$,且 f 是区间 $[0,a_1]$ 上的凸函数,$f(0) \leqslant 0$,则

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}f(a_k) \geqslant f\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k\right). \tag{1.29}$$

注 当 n 为偶数时,条件 $f(0) \leqslant 0$ 不能去掉,但当 n 为奇数时,该条件可省略.

1956 年,Brunk,H. D. 进一步推广为:设 f 是区间 $[a,b]$ 上的凸函数,$f(0) \leqslant 0$,若 $a \leqslant a_n \leqslant \cdots \leqslant a_2 < a_1 \leqslant b$,$0 \leqslant p_n \leqslant \cdots \leqslant p_2 < p_1 \leqslant 1$,则

$$f\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}p_k a_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}p_k f(a_k). \tag{1.30}$$

特别当 $p_1 = \cdots = p_n = 1$ 时,又得(1.29)式.

Bellman 积分不等式:设 f,φ 是 $[0,1]$ 上非负的凹函数,$p,q > 0$,$\int_0^1 f^{2p} = \int_0^1 \varphi^{2q} = 1$,则

$$\int_0^1 f^p\varphi^q \geqslant \frac{2\sqrt{(2p+1)(2q+1)}}{(p+1)(q+1)} - 1. \quad ([330]1991,22(2))$$

10. 设 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant 0$,$0 \leqslant p_n \leqslant \cdots \leqslant p_2 \leqslant p_1 \leqslant 1$,则

(1) **Olkin 不等式**:若 f 是区间 $[0,a_1]$ 上的凸函数,则

$$f\left[\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}p_k a_k\right] \leqslant \left[1 - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}p_k\right]\cdot f(0) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}p_k f(a_k); \tag{1.31}$$

(2) 若 f 的导数 f' 递增,则

$$f(c) - f(0) \leqslant \sum_{k=1}^{n}[f(a_{k+1}) - f(a_k)]\left(\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}p_j\right), \tag{1.32}$$

式中 $c = \int_0^{a_1} g(x)\mathrm{d}x$,$g$ 在区间 $[0,a_1]$ 上可积,$0 \leqslant g(x) \leqslant 1$,$x \in [0,a_1]$.([4]150 ~ 152)

11. (1) **Petrovic 不等式**:设 f 是区间 $[0,a]$ 上的凸函数,x_k 和 $\sum x_k$ 都在区间 $[0,a]$ 内,$k = 1,\cdots,n$,则

$$\sum f(x_k) \leqslant f\left(\sum x_k\right) + (n-1)f(0).$$

提示:利用凸函数的定义 1 及数学归纳法.

(2) **Giaccardi 不等式**:设 $p_k \geqslant 0$,$x = (x_1,\cdots,x_n)$,x_k 为实数,满足:

$$(x_k - x_0)\Big(\sum_{k=1}^{n} p_k x_k - x_k\Big) \geqslant 0, \quad k = 1,\cdots,n.$$

$$\sum_{k=1}^{n} p_k x_k \neq x_0.$$

若 f 是凸函数,则

$$\sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k) \leqslant C_1 f\Big(\sum_{k=1}^{n} p_k x_k\Big) + C_2\Big(\sum_{k=1}^{n} p_k - 1\Big) f(x_0),$$

式中

$$C_1 = \frac{\sum_{k=1}^{n} p_k (x_k - x_0)}{\sum_{k=1}^{n} p_k x_k - x_0}, \qquad C_2 = \frac{\sum_{k=1}^{n} p_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} p_k x_k - x_0}.$$

(3) 设$x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_m \leqslant 0 \leqslant x_{m+1} \leqslant \cdots \leqslant x_n$,

$m \in \{0,1,\cdots,n\}$, $x_k \in D\ (1 \leqslant k \leqslant n)$, $0 \in D$, q_k 为实数.

$$Q_n = \sum_{j=1}^{n} q_j, \overline{Q}_k = Q_n - Q_{k-1}.$$

设 $f: D \to R'$ 是凸函数.

① 若 $0 \leqslant Q_k \leqslant 1\ (1 \leqslant k \leqslant m)$; $0 \leqslant \overline{Q}_k \leqslant 1$, $(m+1 \leqslant k \leqslant n)$, 则

$$f\Big(\sum_{k=1}^{n} q_k x_k\Big) \leqslant \sum_{k=1}^{n} q_k f(x_k) + (1 - Q_n) f(0).$$

② 若$\sum_{k=1}^{n} q_k x_k \in D$, 并存在 $j \leqslant m$,使得

$$Q_k \leqslant 0 (k < j); \qquad Q_k \geqslant 1 (j \leqslant k \leqslant m); \qquad \overline{Q} \leqslant 0 (k \geqslant m+1),$$

或者存在 $j \geqslant m$,使得

$$Q_k \leqslant 0 (k \leqslant m); \qquad \overline{Q}_k \geqslant 1 (m+1 \leqslant k \leqslant j); \qquad \overline{Q}_k \leqslant 0 (k > j),$$

则 ① 中不等号反向.((2)(3) 见[22]11 ~ 12)

12. 设φ是区间$[0,\infty)$上递增的凸函数,f是区间$[0,a]$上非负的有界变差函数,而且 $\varphi(0) = f(0) = 0$,$V_0^a(f)$ 是 f 在区间$[0,a]$上的全变差,则

$$V_0^a\{\varphi(f)\} \leqslant \varphi\{V_0^a(f)\}. \tag{1.33}$$

([333]1982,27(12):1266 ~ 1270)

13. g是区间D上连续的凸函数的充要条件是对于D中所有x_0,存在$\lambda(x_0)$,使得当 $x \in D$,恒有

$$\lambda(x_0)(x - x_0) \leqslant g(x) - g(x_0). \tag{1.34}$$

([78]234 或[1]102)

上式称为 **Hardy 不等式**. 我们熟知(见本节 No. 46),若 g 是(a,b) 内的凸函数时,g 在(a,b) 上几乎处处可微,单侧导数 $g'_-(x)$,$g'_+(x)$ 在(a,b) 上递增且对(a,b) 中任一点 x_0,$g'_-(x_0) \leqslant g'_+(x_0)$. 所以,Hardy 不等式中的 $\lambda(x_0)$ 实际上满足

$$g'_-(x_0) \leqslant \lambda(x_0) \leqslant g'_+(x_0). \tag{1.35}$$

有时就取 $\lambda(x_0)=[g'_-(x_0)+g'_+(x_0)]/2$. 若 g 在 x_0 可导，则

$$\lambda(x_0)=g'(x_0).$$

Hardy 不等式还可推广到高维空间：设 f 是凸域 $G\subset R^n$ 上的可微函数. 则 f 是 G 内的凸函数的充要条件是对 G 中任意 x,x_0，都有

$$f(x)-f(x_0)\geqslant Df(x_0)(x-x_0). \tag{1.36}$$

此外，若 f 在开凸域 $G\subset R^n$ 上有二阶连续偏导数，海色矩阵 $H_f(x)$ 对于任意 $x\in G$ 是半正定的，则 f 是 G 内的凸函数. ([113]27)

注 海色矩阵(Hessian matrix) 定义为

$$H_f(x)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}\cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_2}\cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_n}\\ \cdots & \cdots & \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_2}\cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_n}\end{pmatrix}.$$

14. 设 f 是 $[a,b]$ 上的连续函数，则 f 在 $[a,b]$ 上为凸函数的充要条件是对于任意 $[x-h,x+h]\subset[a,b]$，下式成立

$$f(x)\leqslant\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}f(x+t)\,\mathrm{d}t. \tag{1.37}$$

提示：利用定积分的性质.

15. (1) 设 f 是 $(0,\infty)$ 上的凸函数，则 $F(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 也是 $(0,\infty)$ 上的凸函数.

(2) 设 $f: R^n\times R^1\to R^1$ 为连续函数，$\forall\, y\in[a,b]$，$f(x,y)$ 关于 x 是凸的，则 $g(x)=\displaystyle\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 也是凸函数.

16. 设 f 是 $[a,b)$ 上的递增函数，则 $G(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 是 $[a,b)$ 上的凸函数.

17. 设 f,g 是可积函数，g 是正的，f 是凸函数，则卷积 $(f*g)(x)=\displaystyle\int_E f(x-u)g(u)\,\mathrm{d}u$ 也是凸函数.

18. 设 f 是 $[a,b]$ 上正的连续函数，则

$F(x)=\displaystyle\int_a^b|x-t|\,f(t)\,\mathrm{d}t$ 是 $[a,b]$ 上严格凸函数.

提示：将 $F(x)$ 写成 $F(x)=\displaystyle\int_a^x(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t-\int_x^b(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$.

于是 $F''(x)=2f(x)>0$.

19. 设 f 是 $[a,b]$ 上负的凸函数，则

$$[f(x)]^2<f(x-c)f(x+c),\quad x\pm c\in[a,b],c\neq 0;$$

若 f 是 $[a,b]$ 上正的凹函数，则不等号反向.

20. 设 f 是凸函数且有二阶导数，则 $e^{f(x)}$ 也是凸函数.

21. 设 f 在区间 $[a,b]$ 上为正且存在二阶导数，则 $\ln f(x)$ 是 $[a,b]$ 上凸函数的充要条件是对于 $[a,b]$ 中的所有 x，有

$$f(x)f''(x)-[f'(x)^2]\geqslant 0.$$

22. 设 φ 为凸函数，则对于 $x_1\leqslant x_2<y_1\leqslant y_2$，有

$$\frac{\varphi(y_1)-\varphi(x_1)}{y_1-x_1}\leqslant\frac{\varphi(y_2)-\varphi(x_2)}{y_2-x_2}. \tag{1.38}$$

证 设 $a<c<b$，$p=\dfrac{b-c}{b-a}$，$q=\dfrac{c-a}{b-a}$，则 $p,q>0$，$p+q=1$，$c=pa+qb$，则 $\dfrac{\varphi(b)-\varphi(c)}{b-c}\geqslant\dfrac{\varphi(b)-p\varphi(a)-q\varphi(b)}{b-pa-qb}=\dfrac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}$，类似可证 $\dfrac{\varphi(c)-\varphi(a)}{c-a}\leqslant\dfrac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}$，依次取 $x_1=a,x_2=c,y_1=b$ 和 $x_2=a,y_1=c,y_2=b$，即可推得要证的不等式. 反之，若 $x_1<y_1=x_2<y_2$ 和 $y_1-x_1=y_2-x_2$ 时，(1.38) 式成立，则 φ 是凸函数.（[6]447）

特别，取 $x_1=x_2$，则从 φ 为凸函数，可推出 $f(x)=\dfrac{\varphi(x)-\varphi(x_1)}{x-x_1}$ 递增.

设区间 $D\subset(0,\infty)$，φ 是 D 上连续的凸函数，则 $f(x)=\varphi(x)/x$ 或者在 D 上单调，或者对某个 $c\in D$，f 在集 $A=\{x\in D: x\leqslant c\}$ 上递减，在 $B=\{x\in D: x\geqslant c\}$ 上递增.（[54]6）

23. 设 φ 是区间 D 上的凸函数，则对于 D 中任意三点：$x_1<x_2<x_3$，有

$$\frac{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant\frac{\varphi(x_3)-\varphi(x_1)}{x_3-x_1}\leqslant\frac{\varphi(x_3)-\varphi(x_2)}{x_3-x_2}. \tag{1.39}$$

而对于 D 中任意四点：$x_1<x_2<x_3<x_4$，有

$$\frac{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant\frac{\varphi(x_4)-\varphi(x_3)}{x_4-x_3}. \tag{1.40}$$

由此可以推出，若 φ 在 $(-\infty,\infty)$ 上有二阶连续导数，$\varphi(0)=0$，令

$$f(x)=\begin{cases}\varphi(x)/x, & x\neq 0,\\ \varphi'(0), & x=0,\end{cases}$$

则 φ 在 $(-\infty,\infty)$ 上为凸函数的充要条件是 f 在 $(-\infty,\infty)$ 上递增.

24. 设 g 是 $(0,\infty)$ 上严格递增的连续函数，$g(0)=0$，$g(\infty)=\infty$，从而 $y=g(x)$ 存在反函数 $x=g^{-1}(y)$，且 $g^{-1}(0)=0$，$g^{-1}(\infty)=\infty$. 令 $G(x)=\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$. $G^{-1}(x)=\int_0^x g^{-1}(u)\mathrm{d}u$. 则 G,G^{-1} 均为递增的凸函数，且成立 **Young 不等式**：$\forall a,b\geqslant 0$.

$$ab\leqslant G(a)+G^{-1}(b). \tag{1.41}$$

（证明见[115]下册 574）

25. $f: R^1\to R^1$ 为凸函数的充要条件是存在 $g: R^1\to R^1\cup\{\infty\}$，使得

$$f(x)=\sup\{xy-g(y): y\in R^1\},\ \forall x\in R^1. \tag{1.42}$$

式中 g 称为 f 的**共轭函数**，从(1.42) 可推出

$$xy \leqslant f(x) + g(y), \forall x, y \in R^1.$$

由此可推出第 8 章 §1 关于积分的 Young 不等式.(证明见[115]14 ~ 16)

26.　设 φ 为区间$[a,b]$上连续的凸函数,则对于 $x_1, x_2 \in [a,b]$, $|x_1| \leqslant |x_2|$ 及 $x \in [a,b]$,有

$$\varphi(x - x_1) + \varphi(x + x_1) \leqslant \varphi(x - x_2) + \varphi(x + x_2).$$

27.　设 g, φ 是区间$[a,b]$上绝对连续函数,而且 φ 是$[a,b]$上严格递增的凹函数,若 $\varphi(a) = g(a), \varphi(b) < g(b)$ 或 $\varphi(a) > g(a), \varphi(b) = g(b)$,则在区间$(a,b)$内存在 x_1, x_2,使得 $\varphi(x_2) = g(x_1)$ 且 $\varphi'_-(x_2) < g'(x_1)$. 式中 $\varphi'_-(x_2)$ 是 φ 在 x_2 点的左导数.(证明见[61]98 ~ 99)

28.　设 D 为 R^1 中任一区间,$f: D \to R^1$,则 f 是 D 上的凸函数的充要条件是 f 可表示为积分形式:

$$f(x) = f(c) + \int_c^x g(t)\mathrm{d}t.\quad c, x \in D. \tag{1.43}$$

式中 g 是 D 上递增右连续函数. 由此推出:若 f 是$[a,b]$上的凸函数,则 f 在(a,b)内 a.e. 存在有限二阶导数 $f''(x) > 0$.

证　"$\Rightarrow$"　设 f 凸,则 f'_+ 存在且为递增的右连续函数,令

$$\varphi(h) = \int_c^x \frac{f(t+h) - f(t)}{h}\mathrm{d}t, x, c \in D.\ \text{因为} \lim_{h \to +0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = f'_+(t),$$

从而 $\exists M > 0$,使 $\forall t \in (c, x)$,及充分小的 h,有

$$\left| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \right| \leqslant M.$$

由(L)控制收敛定理,得到 $\lim\limits_{h \to +0} \varphi(h) = \int_c^x f'_+(t)\mathrm{d}t$. 另一方面,$\lim\limits_{h \to +0} \varphi(h) = \lim\limits_{h \to +0} \frac{1}{h}\int_c^x [f(t + h) - f(t)]\mathrm{d}t = \lim\limits_{h \to +0} \frac{1}{h}\left[\int_{c+h}^{x+h} f(t)\mathrm{d}t - \int_c^x f(t)\mathrm{d}t\right] = \lim\limits_{h \to +0} \frac{1}{h}\left[\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t - \int_c^{c+h} f(t)\mathrm{d}t\right] = f(x) - f(c)$.

所以 $f(x) = f(c) + \int_c^x f'_+(t)\mathrm{d}t$. 同理可证 $f(x) = f(c) + \int_c^x f'_-(t)\mathrm{d}t$.

"$\Leftarrow$"　设(1.43)成立,$\forall x, y \in D$,不妨设 $x < y, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$,令 $z = \lambda x + (1-\lambda)y$. 则 $f(z) - \lambda f(x) - (1-\lambda)f(y) = \lambda[f(z) - f(x)] - (1-\lambda)[f(y) - f(z)] = \lambda\int_x^z g(t)\mathrm{d}t - (1-\lambda)\int_z^y g(t)\mathrm{d}t \leqslant \lambda(z - x)g(z) - (1-\lambda)(y - z)g(z) = 0$. 证毕.

29.　φ 在凸集 D 上为凸函数当且仅当对于每个 $x, y \in D$ 和 $0 < \alpha, \beta \leqslant 1$,有

$$\frac{\varphi((1-\alpha)x + \alpha y) - \varphi(x)}{\alpha} \leqslant \frac{\varphi(y) - \varphi(\beta x + (1-\beta)y)}{\beta}. \tag{1.44}$$

若除去 $x = y$ 或 $\alpha = \beta = 1$,则 φ 在 D 上严格凸当且仅当(1.44)式中严格不等号成立.(证明见[6]447)

30.　设 $x \geqslant 0$ 时 $\varphi(x)$ 为连续的凸函数,数列$\{a_k\}$非负递减,则

$$\varphi(0)+\sum_{k=1}^{\infty}\{\varphi(ka_k)-\varphi((k-1)a_k)\}\leqslant\varphi(\sum_{k=1}^{\infty}a_k). \tag{1.45}$$

若 φ' 严格递增，则仅当 a_k 从某个 k_0 起皆为 0，且 $a_1=a_2=\cdots=a_{k_0-1}$ 时等号成立.

31. **组合凸性不等式**：设 $0<a\leqslant b\leqslant c$，函数 f 满足条件：

(1) f 是区间 $[0,a]$ 上的凸函数；(2) f 是区间 $[0,b]$ 上的星形函数，即对于区间 $[0,b]$ 中所有 x 和 β：$0\leqslant\beta\leqslant 1$. 有 $f(\beta x)\leqslant\beta f(x)$；(3) f 是区间 $[0,c]$ 上非负的连续函数，而且具有超加性，即对于区间 $[0,c]$ 中任意 x 和 y，有 $f(x)+f(y)\leqslant f(x+y)$，则对于区间 $[0,b]$ 中任意 $x_k, k=1,\cdots,n$，只要满足 $\sum_{k=1}^{n}x_k=c_0\leqslant c$，就成立

$$f\left(\left(\frac{\beta}{n}\right)c_0\right)\leqslant\left(\frac{\beta}{n}\right)f(c_0),\quad 式中\ 0\leqslant\beta\leqslant\frac{a}{b}. \tag{1.46}$$

32. **Newman 不等式**：设 f 是 $(0,\infty)$ 上非负的凸函数，记 $\|f\|_c=\max\{f(x):0\leqslant x<\infty\}$，则 $\|f\|_2^2\leqslant\frac{2}{3}\|f\|_c\cdot\|f\|_1$. 即

$$\int_0^{\infty}[f(x)]^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{2}{3}\|f\|_c\int_0^{\infty}f(x)\mathrm{d}x, \tag{1.47}$$

式中系数 2/3 是最佳的.（证明见[305]1962,69:321 ~ 322）

Shepp, L. 推广了上述不等式：设 f 是非负凸函数，g,h 是 $[0,\infty)$ 上递增的绝对连续函数. 若 $g(0)=0$，并令 $G=g\cdot h$，则

$$\int_0^{\infty}G'(f(x))\mathrm{d}x\leqslant h(\max f)\int_0^{\infty}g'(f(x))\mathrm{d}x. \tag{1.48}$$

若 $g'(0)=0$，且 $x>0$ 时 $g'(x)>0$，则仅当存在 $a,b>0$，使得

$$f(x)=\begin{cases}b(1-\dfrac{x}{a}), & 0\leqslant x\leqslant a,\\ 0, & x>a.\end{cases}$$

时(1.48)式中积分为有限且等号成立.（[4]419）

33. (1) **Andersson 不等式**：

设 f_k 是区间 $[0,1]$ 上的凸函数，且 $f_k(x)\geqslant 0, f_k(0)=0, k=1,\cdots,n$，则

$$\int_0^1(\prod_{k=1}^{n}f_k(x))\mathrm{d}x\geqslant\frac{2^n}{n+1}\prod_{k=1}^{n}\int_0^1 f_k(x)\mathrm{d}x. \tag{1.49}$$

(Nord. Mat. Tidsk. 1958, 6:25 ~ 26)

事实上，早在 1933 年，Favard 就证明了：设 f_k 是 $[a,b]$ 上非负凹函数，则

$$\int_a^b(\prod_{k=1}^{n}f_k(x))\mathrm{d}x\leqslant\frac{2^n}{n+1}\cdot\frac{1}{(b-a)^{n-1}}\prod_{k=1}^{n}\int_a^b f_k(x)\mathrm{d}x.$$

(Bull. Sci. Math. 57(2)(1933), 54 ~ 64)

(2) 设 f_k 是 $[0,1]$ 上非负凹函数，则

① 当 $p_k\geqslant 1$ 时，有 $c_n\int_0^1(\prod_{k=1}^{n}f_k)\geqslant 2^n\prod_{k=1}^{n}\int_0^1 f_k\geqslant\prod_{k=1}^{n}(p_k+1)^{\frac{1}{p_k}}\|f_k\|_{p_k}$；

式中 $c_n = \dfrac{(n+1)!}{\left[\dfrac{n}{2}\right]!\left[\dfrac{n+1}{2}\right]!}$.

② 当 $0 < p_k \leqslant 1$ 时，有 $\int_0^1 \left(\prod_{k=1}^n f_k\right) \leqslant \frac{2^n}{n+1} \prod_{k=1}^n \int_0^1 f_k \leqslant \frac{1}{n+1} \prod_{k=1}^n (p_k+1)^{\frac{1}{p_k}} \| f_k \|_{p_k}$.

若 f_k 是[0,1]上非负凸函数，则以上不等号均反向.

③ 设 $p_k \geqslant 1$，则

$$\int_0^1 \left(\prod_{k=1}^n f_k\right) \geqslant c_n \prod_{k=1}^n (p_k+1)^{\frac{1}{p_k}} \| f_k \|_{p_k} + \frac{1}{2(n+1)} \left\{ \prod_{k=1}^n f_k(0) + \prod_{k=1}^n f_k(1) \right\},$$

式中 $C_n = \dfrac{\left[\dfrac{n-1}{2}\right]!\left[\dfrac{n}{2}\right]!}{2(n+1)(n-1)!}$. (L. Maligranda 等[301]187(1994), 306 ～ 323)

1984 年，Gavrea, I. 将这个不等式推广到正线性泛函 $A:[0,1] \to R$ 上，其中 $A(1) = 1$. ([306]MR86f:26018)

34. 设 f 是区间[0,1]上的凸函数，$f(0) = 0$，令 $F_\alpha(x) = \left\{(\alpha+1)\int_0^1 [f(x)^\alpha \mathrm{d}x]\right\}^{1/\alpha}$，$\alpha > 0$，则 F_α 关于 α 递增，即 $0 < \alpha < \beta$ 时，有 $F_\alpha(x) \leqslant F_\beta(x)$.

35. (1) 设 f 在区间 $D = [0,1)$ 上连续递增，且 $f(x) \geqslant 0$，则存在 D 上两个凸函数 g_1, g_2，使得 $0 \leqslant g_1(x) \leqslant f(x) \leqslant g_2(x)$，并且

$$\frac{1}{2}\int_0^1 g_2(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant 2\int_0^1 g_1(x)\mathrm{d}x. \tag{1.50}$$

其中系数 $\frac{1}{2}$ 与 2 为最佳. ([325]1965, 49:66 ～ 69)

这个不等式可推广到高维情形. 为简便起见，将 $D^n = D \times D \times \cdots \times D$ 记为 A.

若函数 $f: A \to R^1$，$x, x+h \in A$，其中 $x = (x_1, \cdots, x_n)$，$h = (h_1, \cdots, h_n)$，$h_j \geqslant 0$，$j = 1, \cdots, n$，$f(x) \geqslant 0$，$f(x+h) - f(x) \geqslant 0$，则存在 A 上两个凸函数 g_1, g_2，使得 $0 \leqslant g_1(x) \leqslant f(x) \leqslant g_2(x)$，并且有

$$\frac{n!}{(n+1)^n}\int_A g_2(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_A f(x)\mathrm{d}x \leqslant (n+1)!\int_A g_1(x)\mathrm{d}x, \tag{1.51}$$

式中 $\frac{n!}{(n+1)^n}$ 和 $(n+1)!$ 为最佳系数. (Michigan Math. J. 1965, 12:481 ～ 485)

(2) 设 f 是[0,1]上非负凹函数，则

$$\frac{2}{(n+1)(n+2)}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{n+2}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t, n = 0, 1, 2, \cdots,$$

(Mitrinovic, D. S. 等, Mach. Balkanica. (N. S.) 1991, 5(3):258 ～ 260)

36. 设 f 是区间 $[a,b]$ 上递减的凹函数，且 $f(a) = A$，$f(b) = B$，$0 < B < A$，令 $C = (A-B)^{-1}A\ln(A/B)$，则

$$1 \leqslant \frac{1}{(b-a)^2}\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\right) \leqslant \frac{\left(C - \dfrac{A+B}{2A}\right)^2}{2(A-B)(C-1)}. \tag{1.52}$$

(证明见[308]1955, 6:806 ～ 815. 一般情形见第 13 章 No. 51)

37. **Alzer 不等式:**

(1)　设 f 是$[0,x]$上非负连续的凹函数，$a>1$，则

$$\frac{(a-1)x}{a+1}\left\{1+\frac{x^{a-1}f(x)}{a(a-1)\int_0^x t^{a-2}f(t)\mathrm{d}t}\right\}\leqslant\frac{\int_0^x t^{a-1}f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x t^{a-2}f(t)\mathrm{d}t}$$

$$\leqslant\frac{ax}{a+1}\left\{1-\frac{x^{a-1}f(0)}{a^2(a-1)\int_0^x t^{a-2}f(t)\mathrm{d}t}\right\}.$$

(Rad. Mat. 1991, 7(2): 341 ～ 344)

(2)　设 f 是$[a,b]$上非负连续的凹函数，g 在$[a,b]$上非负，且其导数 g' 在$[a,b]$上可积，则

$$(p+q)f^q(x)\int_a^b(gf^p)+q\int_a^b(x-t)g'(t)[f(t)]^{p+q}\mathrm{d}t\leqslant(p+2q)\int_a^b g(t)[f(t)]^{p+q}\mathrm{d}t.$$

式中 $x\in[a,b]$，$p\geqslant 0$，$0<q\leqslant 1$. ([369]1992, 56(1 ～ 2): 79 ～ 82)

38.　**支撑不等式**：设集合 $D\subset R^n$ 是一个锥，即对于所有 $x\in D$，$\lambda>0$，都有 $\lambda x\in D$；若 $f(\lambda x)=\lambda f(x)$，则称 f 是正齐次函数. 从[113]知，正齐次函数 f 是凸的，当且仅当对于凸锥 D 中所有的点 x,y，下式成立

$$f(x+y)\leqslant f(x)+f(y).$$

一个函数 f 在点 x 关于 y 方向的单侧导数 $f'(x;y)$ 定义为

$$f'(x;y)=\lim_{\lambda\to+0}\frac{f(x+\lambda y)-f(x)}{\lambda}.$$

$f(x)$ 在点 y 的梯度记为 $\partial f(y)/\partial x$.

设 f 是凸锥 D 上的凸正齐次函数，则对于 D 中所有 x,y，有

$$f(x)\geqslant f'(y;x).\tag{1.53}$$

若 f 在点 y 可微，则

$$f(x)\geqslant\left(\frac{\partial f(y)}{\partial x},x\right).\tag{1.54}$$

若 f 是 D 上严格凸的正齐次函数，则当且仅当向量 x,y 成比例时，(1.53) 中等号成立. (证明见[301]1986, 117: 23 ～ 41)

注　(1.54) 中$\left(\frac{\partial f(y)}{\partial x},x\right)$表示梯度 $\partial f(y)/\partial x$ 在点 x 的值.

下面将 f 是 D 上的凸函数简称为 f 凸.

39.　**凸函数的初等运算性质**：(1)　设 f 凸，则当 $c>0$ 时，cf 凸，$c<0$ 时 cf 凹.

(2)　f_k 凸 $\Rightarrow\max_k\{f_k\}$ 凸；$\sum_{k=1}^n p_kf_k$ 凸 $(p_k>0)$；而且只要 $\{f_k\}$ 中有一个严格凸，$\sum_{k=1}^n p_kf_k$ 就严格凸.

(3)　f,g 凸 $\not\Rightarrow fg$ 凸. 例如　$f(x)=1/x$，$g(x)=x^{3/2}$ 在 $E=(0,\infty)$ 上为凸函数，但 $(fg)(x)=\sqrt{x}$ 却在 $(0,\infty)$ 上为凹函数.

①　设 f,g 在 D 上同时为非负递增(或非负递减)的凸函数，则 fg 也凸.

②　设 f 在 D 内凹，$f(x)>0$，$x\in D$，则 $1/f$ 凸，由此推出：设 f 在 D 内凹递减，$f(x)$

$>0, x\in D$，而 g 在 D 内非负递增凸，则 g/f 凸.

40. **凸函数的复合运算**：设 $g(y)$ 的定义域为 D，$f(x)$ 的值域 $Y\subset D$，定义域为 E.

$g(y)$ 在 D 内	$y=f(x)$ 在 E 内	$g\circ f$ 在 E 内
(1) ↗凸	凸	凸
(2) ↗凹	凹	凹
(3) ↘凸	凹	凸
(4) ↘凹	凸	凹

41. **凸函数的逆运算**：设 $y=f(x)$ 的定义域为 E，值域为 D，f 存在反函数 $f^{-1}: x=f^{-1}(y)$. 则当 f 严格递增时，f^{-1} 的凸性与 f 相反；f 严格递减时，f^{-1} 的凸性与 f 相同，列表如下：

$y=f(x)$ 在 E 内	$x=f^{-1}(y)$ 在 D 内
严格↗，严格凸	严格凹
严格↗，严格凹	严格凸
严格↘，严格凸	严格凸
严格↘，严格凹	严格凹

42. 设 $y=f(x)$ 是 $E=(a,b)$ 内严格递增的连续函数，$y=g(x)$ 在 E 内连续且严格单调，其值域为 D，则 $\forall x_k\in E, \forall t_k: 0\leqslant t_k\leqslant 1, \sum_{k=1}^{n}t_k=1$，下式成立

$$g^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n}t_kg(x_k)\right)\leqslant f^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n}t_kf(x_k)\right) \tag{1.55}$$

$\Leftrightarrow F(y)=f(g^{-1}(y))$ 在 D 内为凸函数.

证 令 $y_k=g(x_k)$，则 $(1.55)\Leftrightarrow g^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n}t_ky_k\right)\leqslant f^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n}t_kf(g^{-1}(y_k))\right)$

$\Leftrightarrow f\left[g^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n}t_ky_k\right)\right]\leqslant \sum_{k=1}^{n}t_kf(g^{-1}(y_k))\Leftrightarrow f\circ g^{-1}$ 凸. 证毕.

43. **Mulholland 不等式**：设 $\varphi:(0,\infty)\to(0,\infty)$ 为递增函数，而且是凸的双射，使得 $\varphi(t)=\ln\varphi(e^t)$ 在 $(0,\infty)$ 上是凸的，则对所有非负数 $x_k, y_k, 1\leqslant k\leqslant n$，下式成立

$$\varphi^{-1}\left(\sum_k\varphi(x_k+y_k)\right)\leqslant\varphi^{-1}\left(\sum_k\varphi(x_k)\right)+\varphi^{-1}\left(\sum_k\varphi(y_k)\right).$$

（证明见[318]1950,51:294～307;[308]1990,109(3):663～675）

44. **凸函数列的极限运算**：(1) 设 f_n 凸，$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)<\infty, x\in E$，则 f 凸.

(2) 设 f_n 凸，$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)=f(x)<\infty, x\in E$，则 f 凸.

(3) 设 f_n 凸，且 $f(x)=\sup_n\{f_n(x)\}<\infty$，则 f 凸.

45. **f 凸与 f 连续的关系**：在一般情形下，f 凸 $\not\Rightarrow f$ 连续. 反之，f 连续 $\not\Rightarrow f$ 凸，但在 E

$= (a,b)$ 为开区间情形,有以下基本结果:

(1)　1906 年 Jensen 证明:设 f 是 E 上可测的凸(或凹)函数,则 f 在 E 上连续.

由此可推出,设 f 是 R^n 中凸集 D 上可测的凸函数,则 f 在 $\overset{\circ}{D}$(D 的开核)上连续.

注　f 在闭区间 $[a,b]$ 上可测且凸时,仍不能保证 f 在 $[a,b]$ 上连续.例如

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 2, & |x| \geqslant 1, \end{cases}$$

在 $[-1,1]$ 上为凸函数且可测,但在端点间断.

(2)　1929 年 Qstrowski. A 证明:设 f 是测度为正的集合 D 上有上界的凸函数,则 f 在 D 的内点(即 $\overset{\circ}{D}$)处连续.

(3)　1954 年 Hukuhara. M 证明:设 f 是区间 D 上有下界的凸函数,则 f 在 D 上连续或者 f 的图像在集 $A = \{(x,y): x \in D, y \geqslant g(x)\}$ 内稠密,其中 g 为 D 上连续的凸函数.

(4)　设 f 在 $E = (a,b)$ 上为凸函数,则 f 在 E 的任一闭子区间 A 上满足 Lipschitz 条件,从而绝对连续.(证明见[118]316 ~ 317)

(5)　设 f 在 $E = (a,b)$ 上为中点凸(即 J 凸),且 f 在 $x_0 \in E$ 处间断,则 f 在 E 的每个子区间上都无界,从而 f 在 E 上处处间断.(证明见[118]317)

46.　**凸函数的可微性:**　(1)　设 f 在 $E = (a,b)$ 上为凸函数,则对于 $h > 0$,差商 $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ 关于 h 和 x 都递增.(证明见[118]317)

(2)　设 f 在 (a,b) 上为凸函数,则 $\forall x_0 \in (a,b)$,$f'_+(x_0)$,$f'_-(x_0)$ 均存在,且

$$f'_-(x_0) \leqslant f'_+(x_0). \tag{1.56}$$

证　对于 $a < x < x_0 < t < b$,由(1)有

$$\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \leqslant \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0}.$$

上式左边令 $x \to x_0 - 0$,右边令 $t \to x_0 + 0$,即得(1.56).证毕.

(3)　设 f 在 (a,b) 上为凸函数.

①　令 $c = \lambda a + (1-\lambda)b$,则

$$\lambda f(a) + (1-\lambda)f(b) \leqslant f(c) + \lambda\int_a^c (x-a)df'_+(x) + (1-\lambda)\int_c^b (b-x)df'_-(x).$$

当 f 可微时,成立等号,由此推出:

$$\frac{1}{2}[f(a) + f(b)] - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{(b-a)^2}{8} \| f'' \|_c. \quad \text{(Andi,K.)}$$

②　$\forall x_1, x_2 \in (a,b)$,$x_1 < x_2$,有

$$f'_+(x_1) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant f'_-(x_2). \tag{1.57}$$

③　$f'_-(x)$,$f'_+(x)$ 都在 (a,b) 上递增,从而 f 在 (a,b) 上除至多可数集外可微.(证明见[118]318)

注　从(3)知,f 凸 $\Rightarrow f$ 在 E 上 $a.e.$ 可微,于是用凸性条件代替经典分析中可微性的

条件,可以得到比经典分析更深刻的一系列结果.可参看[113].

47.　**凸函数的极小性质:**(1)　设 f 在 (a,b) 上为凸函数,且 f 在 (a,b) 内有局部极小值 m,则 m 必为 f 在整个区间 (a,b) 内的最小值.

证　设 $f(x_0)=m, x_0\in(a,b)$,要证

$$f(x_0)=\min\{f(x): a<x<b\}. \tag{1.58}$$

用反证法.设(1.58)不成立,则存在 $x_1\in(a,b), x_1\neq x_0$,使得 $f(x_1)<f(x_0)$.由 f 凸 $\Rightarrow \exists\,\alpha,\beta>0, \alpha+\beta=1$,使得 $f(\alpha x_1+\beta x_0)\leqslant \alpha f(x_1)+\beta f(x_0)<(\alpha+\beta)f(x_0)=f(x_0)$,因为 $|x_0-(\alpha x_1+\beta x_0)|=|(\alpha+\beta)x_0-\alpha x_1-\beta x_0|=\alpha|x_0-x_1|$, $\forall\,\varepsilon>0$,限制 $0<\varepsilon<|x_0-x_1|$,取 $\lambda=\dfrac{\varepsilon}{2|x_0-x_1|}$,使得 $y=\lambda x_1+(1-\lambda)x_0\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$,从而 $f(y)<f(x_0)$,与 $f(x_0)$ 为局部极小值相矛盾.证毕.

(2)　设 f 是闭区间 $[a,b]$ 上的凸函数,则

$$\max\{f(x): a\leqslant x\leqslant b\}=\max\{f(a),f(b)\}. \tag{1.59}$$

(即 f 在 $[a,b]$ 上的最大值为 $f(a)$ 或 $f(b)$).

证　$\forall\,x_0\in(a,b)$,令 $\alpha=\dfrac{b-x_0}{b-a}, \beta=\dfrac{x_0-a}{b-a}$,则 $\alpha,\beta>0, \alpha+\beta=1, x_0=\alpha a+\beta b$,由 f 凸 $\Rightarrow f(x_0)=f(\alpha a+\beta b)\leqslant \alpha f(a)+\beta f(b)\leqslant(\alpha+\beta)\max\{f(a),f(b)\}=\max\{f(a),f(b)\}$,由 x_0 的任意性知(1.59)成立.证毕.

(3)　设 f 在 (a,b) 上为凸函数,且 f 在 (a,b) 上不为常值函数,则 f 不可能在 (a,b) 的内点取得最大值.

证　用反证法,设 $\exists\,x_0\in(a,b)$,使得 $f(x_0)=\max\{f(x): a<x<b\}$.
又 $f\not\equiv c$(常数),所以 $\exists\,x_1\in(a,b), x_1\neq x_0$,使得 $f(x_1)<f(x_0)$,不妨设 $a<x_1<x_0$,再取定 $x_2: x_0<x_2<b$,则 $f(x_2)\leqslant f(x_0)$.

令 $\alpha=\dfrac{x_2-x_0}{x_2-x_1}, \beta=\dfrac{x_0-x_1}{x_2-x_1}$,则 $x_0=\alpha x_1+\beta x_2$,由 f 凸 $\Rightarrow f(x_0)\leqslant \alpha f(x_1)+\beta f(x_2)<\alpha f(x_0)+\beta f(x_0)=f(x_0)$,得到矛盾.证毕.

(4)　f 在 (a,b) 上既凸又凹 $\Leftrightarrow f$ 在 (a,b) 内为线性函数.

证　"$\Leftarrow$"显然成立,下面证"$\Rightarrow$", $\forall\,x_1,x_2\in(a,b), x_1<x_2, \alpha,\beta>0, \alpha+\beta=1, x=\alpha x_1+\beta x_2$,从 f 凸 $\Rightarrow f(x)\leqslant \alpha f(x_1)+\beta f(x_2)$,从 f 凹 $\Rightarrow f(x)\geqslant \alpha f(x_1)+\beta f(x_2)$,从而 $f(x)=\alpha f(x_1)+\beta f(x_2)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}x+\dfrac{x_2f(x_1)-x_1f(x_2)}{x_2-x_1}$.证毕.

48.　(1)　设 f 是 $[a,b]$ 上的凸函数,且 f 在区间端点的单侧导数 $f'_+(a), f'_-(b)$ 存在(有限数),则 $f\in \mathrm{Lip1}$,即存在常数 $M>0$,使得

$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|, x,y\in[a,b]$.

(2)　设 f 是 $[0,1]$ 上的凸函数,则 $\forall\,x\in(0,1), y\in[0,1]$,下式成立

$$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|,\text{式中 } M=\max\left\{\frac{|f(x)-f(0)|}{x},\frac{|f(1)-f(x)|}{1-x}\right\}.$$

49.　设 f 是 R^1 上的凸函数,则对于 $x\geqslant 0, 0<a\leqslant b$,下式成立

$$b[f(\frac{x}{b})-f(0)]\leqslant a[f(\frac{x}{a})-f(0)].$$ ([359]1989,39(3):461 ~ 469)

50. 设正数 a_k,x_k,y_k 满足:

$$\sum_{k=1}^n a_k=\sum_{k=1}^n x_k=1.\ \frac{x_j}{y_j}\leqslant\frac{a_j}{y_j}\leqslant\frac{a_k}{y_k}\leqslant\frac{x_k}{y_k},k=1,\cdots,m,j=m+1,\cdots,n.$$

$(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)$ 是 $(x_1,\cdots,x_n)$ 的递增重排. 若 f 为凹函数,则

$$\sum_{k=1}^n y_k f(\frac{x_k}{y_k})\leqslant\sum_{k=1}^n y_k f(\frac{a_k}{y_k})\leqslant\sum_{k=1}^n y_k^* f\left(\frac{a_k^*}{y_k^*}\right).$$

若 f 为凸函数,则上述不等号全部反向. ([301]1990,152:296 ~ 303)

51. 设 $a\leqslant x_0\leqslant x_1\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant b$, f 在点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 的 n 阶均差记为 $\varphi(x_0,x_1,\cdots,x_n)=[x_0,x_1,\cdots,x_n;f]$. (见本节定义 4)

1984 年,Zwick 证明:设 f 是 (a,b) 上 $n+2$ 阶凸函数. 则 $g(x)=[x+h_0,\cdots,x+h_n;f]$ 是 x 的凸函数,其中 $x+h_k\in(a,b),0\leqslant k\leqslant n$.

1985 年 Farwig,R. 和 Zwick,D. 证明:若 $f^{(n)}$ 是 (a,b) 上的凸函数,则

$$f^{(n)}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n x_k\right)\leqslant n!\varphi(x_0,x_1,\cdots,x_n)\leqslant\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n f^{(n)}(x_k).$$

若 $x_0\neq x_n$,则仅当 f 为 $n+1$ 阶多项式时等号成立([301]1985,108(2):430 ~ 437). 1989 年 Edward 等将上述结果推广到多元凸函数. ([301]1989,137(2):541 ~ 549) 同一年,Pecaric 等还证明:$(n+2)$ 阶凸函数 f 的 n 阶均差 $\varphi(x_0,x_1,\cdots,x_n)$ 满足 Schur 条件:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}-\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)(x_k-x_j)\geqslant 0,$$

从而进一步推广了上述结果. ([401]1989,19(1):303 ~ 311)

52. **凸性基本不等式**:设 A 为 R^n 中凸集,t 为实数,$tA=\{ty:y\in A\}$,若 A 是一个包含 0 的凸集,定义 A 关于 0 的度量:

$$h(x)=\begin{cases}\inf\{t>0:x\in tA\}, & \text{若至少存在 } t>0,\text{使 } x\in tA,\\ \infty & \text{,否则,}\end{cases}$$

于是,若 $x\in A$,则 $h(x)\leqslant 1$,若 $x\notin A$,则 $h(x)\geqslant 1$. 设 $A=\{x=(x_1,\cdots,x_n):x_k\geqslant 0,1\leqslant k\leqslant n\}$ 为凸锥. $A_+=\{x=(x_1,\cdots,x_n):x_k>0,1\leqslant k\leqslant n\}$ 为无顶点凸锥.

定义在任意集 E 上的(数值)函数构成的向量空间 X 和 X 内非负函数的锥 A^*,若 $\forall\varphi_1,\varphi_2\in A^*$, $\varphi_2(t)\leqslant\varphi_1(t)$,有 $h(\varphi_2)\leqslant h(\varphi_1)$,则称度量 h 在 A^* 上是递增的.

设 f 是 A_+ 内连续的凹函数,使得 $\forall x\in A,\lambda\geqslant 0$,有 $f(x)>0$, $f(\lambda x)=\lambda f(x)$, $\varphi_k\in A^*$, h 是 A^* 内递增的度量,使得 $h(\varphi_k)<\infty$,则 $h[f(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)]\leqslant f[h(\varphi_1),\cdots,h(\varphi_n)]$.

由此推出:设 $g_1,g_2\in A^*$, h 是 A^* 内递增的度量,使得

$h(g_1^p)<\infty,h(g_2^q)<\infty,1/p+1/q=1/r.\ p>0,q>0$,则成立 **Hölder 不等式**:

$$[h(g_1^r g_2^r)]^{1/r}\leqslant[h(g_1^p)]^{1/p}[h(g_2^q)]^{1/q},$$

而当 $p=q\geqslant 1$ 时,成立 **Minkowski 不等式**:

$$\{h[(g_1+g_2)^p]\}^{1/p}\leqslant[h(g_1^p)]^{1/p}+[h(g_2^p)]^{1/p}.$$

通过对集 E 和 g_1, g_2 的不同选取，可以得到许多有用的不等式.（[356]1989,9(1 ~ 2):35 ~ 43)

53. **凸函数的幂平均不等式**：设 f 在 $[a,b]$ 上可积且下界为正，则 f 在 $[a,b]$ 上的 p 次幂平均定义为：

$$M_p(f)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b[f(x)]^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}, & p\neq 0\\ \exp\left(\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b\ln f(x)\mathrm{d}x\right), & p=0.\end{cases}$$

我们在第一章 §3 还定义了两个正数 x,y 的幂平均 $M_p(x,y)$ 和广义对数平均 $J_p(x,y)$，即

$$M_p(x,y)=\begin{cases}\left[\dfrac{1}{2}(x^p+y^p)\right]^{1/p}, & p\neq 0,\\ \sqrt{xy}, & p=0.\end{cases}\quad J_p(x,y)=\begin{cases}\left(\dfrac{x^p-y^p}{p(x-y)}\right)^{\frac{1}{p-1}}, & x\neq y,\\ x, & x=y,\end{cases}$$

设 f 是 $[a,b]$ 上正的连续函数，且在 (a,b) 内二次可微.

(1) 若 f 是凸函数，则对任意实数 p，有 $M_p(f)<J_p(f(a),f(b))$.

当 f 为凹函数时，不等号反向；

(2) 若 f 是凸函数且 $p\geqslant 1$，则 $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<M_p(f)<M_p(f(a),f(b))$；

当 f 为凹函数且 $p\leqslant 1, p\neq 0$，则不等号反向.

$p=0$ 时， $\sqrt{f(a)f(b)}\leqslant M_0(f)\leqslant f(\frac{a+b}{2})$.

对于其他 p 值，相应的不等式不一定成立.（曹小琴，[344]2000,30(3):363 ~ 366)

54. **凸函数的单调平均不等式**：

(1) 令 $A_n(f)=\dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}f(\frac{k}{n})$， $B_n(f)=\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}f(\frac{k}{n}), n\geqslant 2$.

则当 f 是 $(0,1)$ 上的凸函数时，$A_n(f)$ 是 n 的递增序列；当 f 为凹函数时，$A_n(f)$ 递减；

若 f 是 $[0,1]$ 上的凸函数时，$B_n(f)$ 关于 n 递减；当 f 为凹函数时，$B_n(f)$ 递增.

特别，当 $f(x)=x^p$ 时，$A_{n+1}=\dfrac{1}{n(n+1)^p}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^p$，这时，若 $p\geqslant 1$ 或 $p\leqslant 0$，$A_{n+1}(f)$ 关于 n 递增；当 $0\leqslant p\leqslant 1$ 时 $A_{n+1}(f)$ 递减；而当 $p\geqslant 1$ 时，$B_n(f)=\dfrac{1}{n^p(n+1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^p$ 关于 n 递减，当 $p\leqslant 1$ 时，$B_n(f)$ 递增；若 f 是 $[0,1]$ 上的凸函数，则 $A_n(f)\leqslant\int_0^1 f\leqslant B_n(f)$. 当 f 为凹函数时，不等号全都反向.

(2) 令 $S_n(f)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}f(\frac{k}{n})$，$\sigma_n(f)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n})$，若 f 在 $[0,1]$ 上是凸或凹函数，则 $S_n(f)$ 关于 n 递增，$\sigma_n(f)$ 关于 n 递减，而且 $S_n(f)\leqslant S_{n+1}(f)\leqslant\int_0^1 f\leqslant\sigma_{n+1}(f)\leqslant\sigma_n(f)$.

（积分式左边的不等式见匡继昌[325]83(1999),123 ~ 127，右边的不等式见陈超平等[303]6(2)(2003),229 ~ 239)

(3)　令 $M_n(f)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{2k-1}{2n}),T_n(f)=\frac{1}{n}[\frac{1}{2}f(0)+\sum_{k=1}^{n-1}f(\frac{k}{n})+\frac{1}{2}f(1)]$；设 f 是[0,1]上的凸或凹函数，若 f 是凸函数，则 $M_n(f)$ 关于 n 递增而 $T_n(f)$ 递减，若 f 是凹函数，则 $M_n(f)$ 递减而 $T_n(f)$ 递增.(Bennett-Jameson,[301]2000,252:410 ~ 430)

55.　**Berwald 不等式**：设 f 是$[a,b]$上非负连续的凹函数，不恒等于零. φ 在$[0,y_0]$上严格单调且连续，y_0 是充分大的数，这时方程 $\frac{1}{z}\int_0^z\varphi(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{b-a}\int_a^b\varphi(f(x))\mathrm{d}x$ 有唯一的正根 z_0. 又设 g 是$[0,z_0]$上单调有界函数且令 $G(y)=\int_0^y g(t)\mathrm{d}\varphi(t),y\in[0,z_0]$，则当 φ 与 f 有相同的单调性(同为递增或同为递减)时，下式成立

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b G(f(x))\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{z_0}\int_0^{z_0}G(y)\mathrm{d}y;$$

而当 φ 与 f 有相反的单调性时，不等号反向，特别：

(1)　令 $\varphi(y)=y$,　$M(f)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

则 $z_0=2M(f)$，从而得到 **Favard 不等式**(1993)：

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b G(f(x))\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2M(f)}\int_0^{2M(f)}G(y)\mathrm{d}y.\ ([301]1995,190(1):248\sim 262)$$

(2)　令 $\varphi(y)=y^p,g(y)=\frac{q}{p}y^{q-p}$，于是 $G(y)=y^q,0<p<q$，从而

$$\left(\frac{q+1}{b-a}\right)^{1/q}\|f\|_q\leqslant\left(\frac{p+1}{b-a}\right)^{1/p}\|f\|_p.$$

特别取 $p=1,q>1$，得到

$$M_q(f)\leqslant\frac{2}{(q+1)^{1/q}}M_1(f).$$

取 $q=1$，即 $0<p<1$，得到

$$\|f\|_1\leqslant\frac{(p+1)^{\frac{1}{p}}}{2}(b-a)^{1-\frac{1}{p}}\|f\|_p.$$

(当 $q=2$ 时，称为 **Frank-Pick 不等式**).

$$\frac{\|f\|_c}{2}\leqslant M_1(f)\leqslant\frac{e}{2}M_0(f),$$

式中 $M_q(f)$ 由 No.53 定义.

56.　**Klamkin 不等式**：设 $a_k>0,S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$，$f$ 为 $D=(0,\infty)$ 上的凸函数，则

$$\sum_{k=1}^{n}f(a_k)\leqslant\sum_{k=1}^{n}f[S_n-(n-1)a_k].$$

特别，$f(x)=-\ln x$ 时就得 Mitrinovic 等的结果.([331]1996,7:72 ~ 73)

57.　设 f 在$[a,b]$上有直到 $n-1$ 阶连续导数，$f^{(n)}$ 是(a,b)上的凸函数，令 $x_0=\frac{1}{2}(a+b)$，若 $n>1$ 时，$f^{(n)}(x)\geqslant f^{(n)}(x_0),x\in(a,x_0)$，则

$$f(b)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \geqslant \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(b-a)^n.$$

58. **Godunova 不等式**：设 φ 是 $[0,\infty)$ 上连续递增的凹函数，且 $\varphi(0)=0$，$\int_0^\infty \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_0^\infty \frac{1}{x}\varphi^{-1}\left[\frac{1}{x}\int_0^x \varphi(f(t))\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x \leqslant \int_0^\infty \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x.$

特别，若 $a_n>0$，$\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{n}$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n+1}\varphi^{-1}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \varphi(a_k)\right] < \sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{n}.$

59. 设 X 为实线性空间，D 为 X 的凸子集，f 为 D 上凸函数，$q_k \geqslant 0$，$Q_n=\sum_{k=1}^n q_k>0$，$\alpha>0$，选取 $x_1,\cdots,x_n,x\in X$，使得 $x-\sum_{k=1}^n q_kx_k$，αx_k，$\frac{\alpha}{\alpha+Q_n}\in D$，则

$$\frac{\alpha+Q_n}{\alpha}f\left(\frac{\alpha}{\alpha+Q_n}\right)\leqslant f\left(x-\sum_{k=1}^n q_kx_k\right)+\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^n q_kf(\alpha x_k).$$

特别，当 $f(t)=t^2$ 时，得到**华罗庚不等式**. 当 $f(t)=t^p\ (p>1)$ 时，得到**王忠烈－华罗庚不等式**. ([368]1996，38(2)：101 ～ 109)

60. 设 f 是 $[-a,a]$ 上的凸函数，g 是 $[-a,a]$ 上的偶函数且在 $[0,a]$ 上递增，则

$$\left(\int_{-a}^a g(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x\right)\leqslant 2a\int_{-a}^a g(x)f(x)\mathrm{d}x,$$

提示：令 $\varphi(x)=f(x)+f(-x)$，$0\leqslant x\leqslant a$，因为 g 为偶函数，所以

$$\int_{-a}^a g(x)f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

又 f 为凸函数，于是从 $0\leqslant x_1<x_2\leqslant a$，得到

$$\frac{f(-x_1)-f(-x_2)}{(-x_1)-(-x_2)}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

从而 φ，g 都在 $[0,a]$ 上递增，由 Chebyshev 不等式（第一章 §3(3.131) 式），得到

$$\int_0^a g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_0^a g(x)\mathrm{d}x\int_0^a\varphi(x)\mathrm{d}x.$$ ([305]1990，97(7)：621)

61. 设 φ 是 $(-\infty,\infty)$ 上递增的凸函数，复函数 $f(z)=z+\sum_{k=2}^\infty a_kz^k$ 在圆盘 $|z|<1$ 上单叶解析，$0<r<1$，$K(z)=\frac{z}{(1-z)^2}$，则

$$\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\ln|f(re^{it})|)\mathrm{d}t\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\ln|K(re^{it})|)\mathrm{d}t.$$

(Baernstein, A.，[322]1974，133：139 ～ 169)

62. 设 $B=\{x\in R^n:|x|\leqslant 1\}$ 为 R^n 中单位闭球，$\varphi\in C^2(B)$，$\varphi>0$，$\ln\varphi$ 为凹函数. 令 $f(x)=(1-|x|^2)\varphi(x)$，$\|f\|_c=\sup\{f(x):x\in B\}$，$v(B)$ 为 B 的体积，则

$$\int_B f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{2}{n+2}v(B)\|f\|_c.$$

仅当 φ 为常值函数时等号成立. (MR91c：26026)

63. 设 f 是 $(-1,1)$ 上的 n 阶凸（或凹）函数，则当 $n=1$ 时，

$$\limsup_{y\to x}\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|\leqslant\frac{c}{(1-x^2)}\omega(f,1-x^2),$$

而当 $n\geqslant 2$ 时，$|f(x)|\leqslant C\left[\frac{n}{\sqrt{1-x^2}}\omega\left(f,\frac{\ln n}{n}\sqrt{1-x^2}\right)+\frac{\omega(f,1-x^2)}{1-x^2}\right]$.

式中 $\omega(f,\cdot)$ 为 f 的连续模.（第12章 §1. Mathematica，1996，38(61)(1～2)：141～148）

64. 设 f 是 $[0,a]$ 上 n 阶凸函数，$g\in L[0,a]$ 且满足：

$\int_0^a x^k g(x)\mathrm{d}x=0, 0\leqslant k\leqslant n, (-1)^{n+1}\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}g(t)\mathrm{d}t\geqslant 0, x\in[0,a]$，则

$$\int_0^a fg\geqslant 0.$$

特别地，f 是 $[0,2\pi]$ 上的凸函数时，$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos kx\mathrm{d}x\geqslant 0$.（Hasson，Maurice，[404](4). 1998，16(1～2)：15～21）

65. 设 f 是 $(0,b)$ 上非负凸函数，$f(0)=0, 0\leqslant a_k<b, 0\leqslant k\leqslant n, a_0=0$，若 $\sum_{k=1}^n|a_k-a_{k-1}|<b$，则

$$\sum_{k=1}^n|f(a_k)-f(a_{k-1})|\leqslant f\left(\sum_{k=1}^n|a_k-a_{k-1}|\right).$$

（Pecaric，J. 等. Comment. Math. Prace Mat，1996，36：169～178. 另见第8章 §1No. 17）

66. (1) 设 G 是 R^n 中开凸域，$f\in C^2(G)$，则 f 是凸函数的充要条件是

$$\sum_{k,j=1}^n f''_{x_kx_j}(x)y_ky_j\geqslant 0,\quad\forall y=(y_1,\cdots,y_n)\in R^n,\quad x=(x_1,\cdots,x_n)\in G.$$

(2) S 凸函数基本不等式：设 D 是 R^n 内有内点的对称凸集，$f:D\to R$ 连续，f 在 D 的内点可微，则 f 在 D 上 S 凸的充要条件是 f 在 D 上满足 Schur 条件，即 f 在 D 上对称且

$$(x_1-x_2)\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}-\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)\geqslant 0,\quad\forall x=(x_1,\cdots,x_n)\in D,\quad x_k>0.$$（[9]57）

67. 设 $f:[a,b]\times[c,d]\to R^1$ 是连续函数，G 是 R^1 中包含 f 的值域的开区间，$F:G\to R^1$ 是凸函数，则

$$F\left[\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right]\leqslant\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d F[f(x,y)]\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

当 F 是凹函数时，不等号反向.（Z. Anal. Anwend，24(2005)，389～400）

68. 设 $f:D\to R^+$ 是凸函数或单调函数，则 $\forall x_k\in D$，下式成立

$$f(x_1)(x_1-x_2)(x_1-x_3)+f(x_2)(x_2-x_1)(x_2-x_3)+f(x_3)(x_3-x_1)(x_3-x_2)\geqslant 0,$$

仅当 $x_1=x_2=x_3$ 时等号成立.（[325]40(1956)，217）

69. 设 $\{a_k\}$，$\{b_k\}$ 均为递增的实数列，且 $\sum_{j=1}^k a_j\leqslant\sum_{j=1}^k b_j$，$k=1,\cdots,n$. 若 f 是 R^1 上递增的凸函数，则

$$\sum_{k=1}^n f(a_k)\leqslant\sum_{k=1}^n f(b_k).$$（[6]10）

70. 设 f 是$[0,\infty)$ 上严格递增的凸函数，$f(0)=0$，$F(t)=\log f(e^t)$ 是$(-\infty,\infty)$ 上的凸函数，$a_k,b_k,q_k>0$. 记

$$a=(a_1,\cdots,a_n),\qquad b=(b_1,\cdots,b_n),\qquad Q_n=\sum_{k=1}^n q_k,$$

证明或否定

$$f^{-1}\left(\frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^n q_k f(a_k+b_k)\right)\leqslant f^{-1}\left(\frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^n q_k f(a_k)\right)+f^{-1}\left(\frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^n q_k f(b_k)\right).$$

若 f 是凹函数，则不等号反向.（马统一，[351]2004(2):280）

71. 设 f 是$[0,1]$ 上非负连续的凹函数，$f(0)=1$，则

$$2\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{12}\leqslant\left(\int_0^1 f\right)^2.$$（[305]112(2)(2005) 问题 11133）

72. 设 f 是对数凸函数，$p_k>0$，$\sum_{k=1}^n p_k=1$，则

$$f\left(\sum_{k=1}^n p_k x_k\right)\leqslant\prod_{k=1}^n[f(x_k)]^{p_k}.$$（Utilitas Math. 38(1990),61 ~ 63）

73. 设 f 是(a,b) 上的 n 阶凸函数，$f^{(k)}(a)=0$，$k=0,1,\cdots,n-2$. g 在(a,b) 上可积，且 $0\leqslant g(x)\leqslant 1$，则

$$\int_a^b fg\geqslant\int_a^{a+\lambda}f,$$

式中 $\lambda=\left\{n\int_a^b(x-a)^{n-1}g(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{n}}$.（[331]634 ~ 677(1979),97 ~ 100）

74. 设 $q_k>0$，$Q_n=\sum_{k=1}^n q_k$，若 $f\in GL(D)$（定义 9 后面的注 8）. 则

(1) $f\left(\frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^n q_k x_k\right)\leqslant Q_n\sum_{k=1}^n\frac{f(x_k)}{q_k}$.

(2) 若 $m\leqslant x_k\leqslant M$，则

$$\sum_{k=1}^n\frac{f(x_k)}{q_k}\leqslant f(m)\sum_{k=1}^n\frac{M-m}{q_k(M-x_k)}+f(M)\sum_{k=1}^n\frac{M-m}{q_k(x_k-m)}.$$（[22]411 ~ 413）

75. 定义 16 中所定义的 α 凸函数具有以下性质：

(1) f 为 α 凸 $\Leftrightarrow f(x)+\alpha\|x\|^2$ 是凸函数.

(2) 可微函数 f 为 α 凸 $\Leftrightarrow f(y)-f(x)\geqslant(\nabla f(y),y-x)-\alpha\|x-y\|^2$.

(3) 二次可微函数 f 为 α 凸 $\Leftrightarrow$ 存在实数 α，使得

$$(\nabla^2 f(x)y,y)\geqslant-2\alpha\|y\|^2.$$

(4) 设 $f:D\to R$ 是 α 凸函数，若 $\forall x_k\in D$，$q_k\geqslant 0$，且 $Q_n=\sum_{k=1}^n q_k>0$. 则

$$f\left(\frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^n q_k x_k\right)\leqslant\frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^n q_k f(x_k)+\frac{\alpha}{Q_n^2}\sum_{k<j}q_k q_j\|x_k-x_j\|^2.$$（[22]564 ~ 565）

76. 对数凸函数（定义 2）的性质：

(1) 设 $f(x)>0$，$x\in D$，则 f 在 D 上对数凸 $\Leftrightarrow f$ 在 D 上凸.

(2)　设 f_1,f_2 是 D 上对数凸函数,则 f_1f_2 也是 D 上对数凸函数.

(3)　设 f_1,f_2 是 D 上对数凸函数,若 f_1,f_2 是 D 上正的连续函数,且在 D 的内部二次可微,则 f_1+f_2 是 D 上对数凸函数.

(4)　设 f 是 D 上正的连续函数,f 在 D 的内部二次可微,则 f 在 D 上对数凸 $\Leftrightarrow f(x)f''(x)-[f'(x)]^2\geqslant 0,\ x\in D$.

(5)　设 $\{f_n\}$ 是 D 上对数凸函数列,且 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)>0,\ x\in D$,则 f 是 D 上对数凸函数.

§2　变分不等式

一、　R^n 中变分不等式

设 A 为 R^n 中闭凸子集,$(R^n)^*$ 为 R^n 的共轭空间,若 $f\in(R^n)^*$,$x\in R^n$,(f,x) 表示 f 在 x 的值,即 $f(x)$,若 $x,y\in R^n$,则 (x,y) 表示 x 与 y 的内积.

若 $T:R^n\to(R^n)^*$,则对于给定的 $f\in(R^n)^*$,R^n 中的变分不等式的一般形式是:求 $x_0\in A$ 使得 $\forall x\in A$,下式成立

$$(Tx_0,x-x_0)\geqslant(f,x-x_0).$$

若 $T:R^n\to R^n$,则 R^n 中的变分不等式为:

求 $x_0\in A$,使得　$(Tx_0,x-x_0)\geqslant 0,\forall x\in A$. 特别地,若 f 是 A 上可微实值函数,变分不等式变成求 $x_0\in A$,使得 $(\nabla f(x_0),x-x_0)\geqslant 0,\forall x\in A$.

它等价于**极小化问题**:求 $x_0\in A$,使得

$$f(x_0)=\min\{f(x):x\in A\}.$$

若 $T:A\to R^n$ 为连续映射,求 $x_0\in A$,使得

$$(Tx_0,x-x_0)\geqslant 0,\forall x\in A.$$

上式称为 **HSP 变分不等式**(HSP 指 Hartman,Stam,Pacchia).

二、　赋范线性空间中的变分不等式

设 $(X,\|\cdot\|)$ 为实赋范线性空间,X^* 是 X 的共轭空间,A 为 X 的闭凸子集.

若 $f\in X^*$,$x\in X$,(f,x) 表示 f 在 x 的值,即 $f(x)$.

1.　若映射 $T:X\to X^*$,则对于给定的 $f\in X^*$,$(X,\|\cdot\|)$ 中的变分不等式的一般形式是:求 $x_0\in A$,使得

$(Tx_0,x-x_0)\geqslant(f,x-x_0),\forall x\in A$.

2.　若 $f:x\to R^1$ 为凸泛函,而且是加托可微的,即微分 $Df:X\to X^*$ 定义为

$$(Df(x),y)=\frac{d}{dt}f(x+ty)\Big|_{t=0},x,y\in A.$$

则变分不等式为:求 $x_0\in A$,使得 $(Df(x_0),x-x_0)\geqslant 0,\forall x\in A$.

它等价于极小化问题:求 $x_0\in A$,使得 $f(x_0)=\inf\{f(x):x\in A\}$.

3.　**混合变分不等式**：若泛函 f 可分解为两个凸泛函 g,h 之和：$f(x)=g(x)+h(x)$，其中 g 可微，h 不可微但是下半连续且常态（即 $\forall x\in X, h(x)>-\infty, h\neq\infty$）. 求 $x_0\in X$，使得 $(Dg(x_0),x-x_0)-h(x_0)+h(x)\geqslant 0, \forall x\in X$. 它等价于极小化问题：求 $x_0\in x$，使得 $f(x_0)=\inf\{f(x):x\in X\}$.

4.　设 X 为复 Hilbert 空间，$L(x,y)$ 为 X 上共轭对称的双线性泛函，A 是 X 的闭凸子集，若 $\exists c_1,c_2>0$，使得 $c_1\|x\|^2\leqslant L(x,x)\leqslant c_2\|x\|^2, \forall x\in X$.
则变分不等式为：对于给定的 $y_0\in X$，求 $x_0\in A$，使得

$$\mathrm{Re}(2L(x_0,x-x_0)-(y_0,x-x_0))\geqslant 0, \forall x\in A.$$

它等价于 $f(x)=L(x,x)-Re(y_0,x)$ 在 A 上达到最小值.

5.　设 G 为 R^n 中开集，$(a_{jk}(x))_{n\times n}$ 为正定矩阵，且 $\exists\delta>0$，使得

$\sum\limits_{j,k=1}^{n}a_{jk}(x)x_jy_k\geqslant\delta\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|^2$，式中 $a_{jk}\in C(\overline{G})$.　设 $H^1(G)$ 为 $L^2(G)$ 的子空间，即 $H^1(G)=\{u:u,u'_{x_j}\in L^2(G)\}$. 在 $H^1(G)$ 中定义内积

$$(u,v)_*=\int_G\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_k}+uv\right]\mathrm{d}x.$$

则 $H^1(G)$ 按内积 $(u,v)_*$ 构成 Hilbert 空间.

若 A 为 $H^1(G)$ 中闭凸子集，则 $\forall f\in L^2(G)$，存在唯一的 $u_0\in A$，使得

$$\int_G\left[\sum_{j,k=1}^{n}a_{jk}(x)\frac{\partial u_0(x)}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}(u(x)-u_0(x))\right]\mathrm{d}x$$
$$\geqslant\int_G f(x)[u(x)-u_0(x)]\mathrm{d}x. \ \forall u\in A.$$

若 $A=\{u\in H^1(G):u(x)\leqslant\varphi(x),x\in G\}$. 式中 $\varphi\in C(\overline{G})$，$u$ 表示薄膜的位移，f 表示外力，$\varphi(x)$ 表障碍，则上述变分不等式称为障碍问题变分不等式.

6.　**椭圆型变分不等式**：设 X 为实 Hilbert 空间，范数为 $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$，A 为 X 的非空闭凸子集，$f\in X^*$，$L(x,y)$ 为 X 上双线性连续泛函，满足 X- 椭圆条件，即 $\exists c>0$，使得 $L(x,x)\geqslant c\|x\|^2, \forall x\in X$. 则存在唯一的 $x_0\in A$，使得 $L(x_0,x-x_0)\geqslant f(x-x_0), \forall x\in A$. 上式称为**第一类椭圆型变分不等式.**

若存在 X 上常态的下半连续的凸泛函 g（常态指 $g(x)>-\infty, \forall x\in X, g(x)\neq\infty$）. 则存在唯一的 $x_0\in X$，成立**第二类椭圆型变分不等式：**

$$L(x_0,x-x_0)+g(x)-g(x_0)\geqslant f(x-x_0), \forall x\in X.$$

若将上述 $g(x)$ 改为 $g(x,y)$，上式变成

$$L(x_0,x-x_0)+g(x_0,x)-g(x_0,x_0)\geqslant f(x-x_0). \ \forall x\in X.$$

则称为**拟变分不等式**，记为 QVI.

椭圆型变分不等式在弹性薄膜界面的流动问题（障碍问题）、弹塑性柱体的扭转问题、粘塑性流体在柱形管道中的流动问题、地下水的开发利用中的轴对称水井问题等有广泛应用. 这类变分不等式的常用解法有逐次逼近法、惩罚法、正则化法、对偶方法、数值解法等. 此外，还有 Ⅰ、Ⅱ 型抛物型变分不等式、双曲型变分不等式等、张石生[116] 用 Fan Ky

极大极小原理、KKM 技巧，分别用拓扑方法、变分方法、半序方式和不动点方法，研究了变分不等式解的存在性、唯一性及解集的性状，并给出其对偏微分方程的边值问题、非线性规划问题、鞍点问题及经济数学中的 Nash 限制平衡问题等的应用，还研究了随机变分不等式、向量变分不等式、Fuzzy 映象变分不等式等.

注　KMM 定理：设 X 为 Hausdorff 线性拓扑空间，$\sum \subset X$ 为 $n-1$ 维单形，$A_1,\cdots,A_n$ 为 $\sum$ 的顶点，$F_1,\cdots,F_n$ 为 X 中的 n 个闭集，若对 $\sum$ 的任意一组顶点 $(A_{i_1},\cdots,A_{i_m})$，$1\leqslant m\leqslant n$，有 $\{A_{i_1},\cdots,A_{i_m}\}\subset\bigcup_{k=1}^{m}F_{i_k}$，则存在点 $x_0\in\sum$，使得 $x_0\in\bigcap_{k=1}^{n}F_k$.

7.　**广义变分不等式**：设 X 为实 Hilbert 空间，A 为 X 中闭凸集，$(,)$ 为内积.

$T,g:X\to X$ 为非线性算子，求 $u\in X,g(u)\in A$，使得

$$(Tu,g(v)-g(u))\geqslant 0,\ \forall g(v)\in A. \tag{2.1}$$

这是 Noor 于 1988 年引入并研究的.([399]1988,1:119 ～ 121)

特别当 $g=I$(恒等算子)时，(2.1) 就等价于求 $u\in A$ 使得 $(Tu,v-u)\geqslant 0,\ \forall v\in A$. 这是 1964 年由 Stampacchia 引入并研究的古典变分不等式.(C. R. Acad. Sci. Paris，1964，258:4453 ～ 4416)

2000 年 Noor-Rassias 进一步研究了 (2.1) 的性质，例如设 $u\in X,g(u)\in A$ 是 (2.1) 的解的充要条件是 $u\in X$ 满足

$$g(u)=P_A[g(u)-rTu].$$

式中 $r>0$ 为常数，$g:A\to A$，P_A 是 X 在 A 上的投影算子.

(细节及进一步的结果见[301]2002，268(1):334 ～ 343. 268(2):602 ～ 614(抛物变分不等式)和 629 ～ 646；2003，277(2):379 ～ 394)

三、　拓扑空间中的变分不等式

1.　设 X 为拓扑空间，D 为 X 中任一非空子集，f 为 D 上常态泛函(即 $\forall x\in D,f(x)>-\infty,f(x)\not\equiv\infty$). φ 为 $D\times D$ 上泛函，而且取有限值，$\varphi(x,x)\geqslant 0,\ \forall x\in D$，则

$\varphi(x,y)\geqslant f(x)-f(y),\ \forall y\in D.$

称为**变分不等式**，若 $x_0\in D$ 满足上式，则 x_0 称为该不等式的解.

2.　**Fan Ky 变分不等式**：设 X 为局部凸的 Hausdorff 拓扑线性空间，A 为 X 中非空紧凸集，$f:A\to X$ 为连续映射. 求 $x_0\in A$ 和 X 上连续半范数 p，使得

$$p(f(x_0)-x)-p(f(x_0)-x_0)\geqslant 0,\ \forall x\in A.$$

3.　利用本章 §1 定义 17 关于 T-γ- 对角拟凸的概念还可证明以下变分不等式：

设 X,Y 为 Hausdorff 拓扑线性空间，$A\subset X,B\subset Y$ 分别为非空紧凸和非空凸集，$f,g:A\times B\to R^1$ 满足：

(1)　$\forall y\in B,g(x,y)$ 关于 $x\in A$ 是上半连续的；

(2)　$\forall x\in A,f(x,y)$ 关于 $y\in B$ 是 T-γ- 对角拟凸的；

(3)　$\forall (x,y)\in A\times B,f(x,y)\leqslant g(x,y)$，则存在 $x_0\in A$，使得 $g(x_0,y)\geqslant\gamma,\ \forall y\in B$，从而有 $\inf\{g(x_0,y):y\in B\}\geqslant\gamma$.([340]1991，11(3):346 ～ 352；[330]41(1)(2010)，1 ～ 14)

变分不等式理论在控制论、对策论、经济数学等领域中都起着十分重要的作用.

第八章　其他函数不等式

§1　单调函数不等式

一、基本概念和性质

定义 1　设 f 是定义在 R^1 的子集 E 上的有限函数，若 $\forall x_1, x_2 \in E, x_1 < x_2, f(x_1) \leqslant f(x_2)$，则称 f 在 E 上递增；若 $f(x_1) < f(x_2)$，则称 f 在 E 上严格递增；若 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$，则称 f 在 E 上递减；若 $f(x_1) > f(x_2)$，则称 f 在 E 上严格递减，递增与递减统称为单调，即

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) \text{ 当 } \Delta x > 0 \text{ 时不变号.}$$

定义 2　设 f 定义在 (a,b) 上，若 $\forall x \in (a,b), h > 0, x+kh < b, 1 \leqslant k \leqslant n$，$f$ 的 k 阶差分

$$\Delta_h^k f(x) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(x+jh) \geqslant 0 \quad (\text{或} \leqslant 0),$$

则称 f 是 **n 阶单调的**，若 $\forall n$，f 在 (a,b) 内为 n 阶单调，则称 f 在 (a,b) 内是**绝对单调的**. 由此推出，f 在 (a,b) 内绝对单调时，f 在 (a,b) 内的一切阶导数 $f^{(n)}$ 存在并且有相同的符号.

定义 3　设 $f \in C^\infty(a,b)$ 且 $(-1)^k f^{(k)}(x) \geqslant 0, x \in (a,b), \forall k \in N$，则称 f 在 (a,b) 内**完全单调**.

若 $f(x) > 0$ 且 $(-1)^k [\log f(x)]^{(k)} \geqslant 0$，$x \in (a,b)$，$\forall k \in N$，则称 f 是 (a,b) 内对数性完全单调函数.

对数性完全单调函数必为完全单调函数.（祁锋等，[301]296(2004)，603 ～ 607）

完全单调还有一种定义：设 $x > 0$，f 是非负测度的 Laplace 变换

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-xt} \mathrm{d}\mu(t), \qquad \mathrm{d}\mu(t) \geqslant 0.$$

则称 f 是 $(0,\infty)$ 上完全单调函数.

例如，设 $\alpha > 0$，因为 $x^{-\alpha} = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_0^\infty e^{-xt} t^{\alpha-1} \mathrm{d}t$.

所以，$f(x) = x^{-\alpha}$ 是 $(0,\infty)$ 上完全单调函数.

$$f_1(x) = x^a \left(\Gamma\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^x, \qquad f_2(x) = \left\{x^a \left(\frac{e}{x}\right)^x \Gamma(x)\right\}^b,$$

$$f_3(x) = \frac{\{\Gamma(ax)\}^\alpha}{\{\Gamma(bx)\}^\beta}, \qquad f_4(x) = \frac{[\Gamma(x+a+1)]^{\frac{1}{x+a}}}{[\Gamma(x+b+1)]^{\frac{1}{x+b}}}$$

均为完全单调函数.

我们可以类似定义多元函数的完全单调性. 例如设二元函数 $f(x,y)$ 的所有阶偏导数均存在并满足

$$(-1)^{n+m}D_x^nD_y^mf(x,y)\geqslant 0,\quad (x,y)\in(0,\infty)\times(0,\infty),\quad n,m=0,1,2,\cdots,$$

则称 f 是二元完全单调函数.

(有关二元完全单调函数不等式见[22]370 ~ 372)

设 $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$,若存在常数 c,使得

$$f(x_1)\leqslant cf(x_2),\quad 0<x_1\leqslant x_2<\infty$$

则称 f 是伪递增函数.

定义 4　若对某个实数 a,$f(x)+ax$ 是$[a,b]$上单调函数,则称 f 是$[a,b]$上**单调型函数**.

定义 5　若 f 定义在$(-\infty,\infty)$上,且当 $y>x$,$y-x\to 0$,$x\to\infty$ 时 $\liminf\{f(y)-f(x)\}\geqslant 0$,则称 f 是**慢递减函数**.

由定义 5 可推出,存在正数 δ 和与 δ 有关的 x_0,η,使得当 $x\geqslant x_0$,$0\leqslant y-x\leqslant 2\eta$ 时,成立　$f(y)-f(x)\geqslant-\delta/2$. ([76]242 ~ 243)

定义 6　设 f 及其各阶导数都在(a,b)上不变号,且

$$f^{(k)}(x)f^{(k+2)}(x)\leqslant 0,x\in[a,b],$$

则称 f 是(a,b)上**循环单调函数**.

由此可推出 $\forall k\in N$,

$$\left|f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\leqslant\left(\frac{2}{b-a}\right)^k\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|.\ ([21]557)$$

定义 7　设$\sum_{k=1}^n a_k=0$,$\sum_{k=1}^n a_kb_k=1$,$b_1<b_2<\cdots<b_n$,则 f 在 x 的 GRD 导数(广义黎曼导数)定义为

$$(Df)(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\sum_{k=1}^n a_kf(x+hb_k).$$

若上式右边的极限改为下极限,则称为 f 在 x 点的 GRD 下导数$(\underline{D}f)(x)$.

设 f 在$[a,b]$上连续,且 $b_1<0<b_2<b_3$,$b_2=b_1+b_3$,$a_1>0$,$a_2<0$,$a_3>0$,$(\underline{D}f)(x)\geqslant 0$,$x\in(a,b)$,则 f 是递增函数. (Humke,P. D. ,[378],1989,38(3):437 ~ 454)

定义 8　设 $-\infty<\alpha_0<\alpha_1<\infty$,$f(x)x^{-\alpha_0}$ 在$(0,\infty)$上递增,$f(x)x^{-\alpha_1}$ 在$(0,\infty)$上递减,则称 f 是$(0,\infty)$上拟单调函数. ([317]1998,57(2):363 ~ 370)

单调函数的概念可推广到多元函数,如:

定义 9　设 f 定义于R^n 中的 n 维闭方体 Q 上,若 $\forall x=(x_1,\cdots,x_n)$,$y=(y_1,\cdots,y_n)\in Q$,$x_k\leqslant y_k(1\leqslant k\leqslant n)$,$f(x)\leqslant f(y)$(或 $f(x)\geqslant f(y)$),称 f 在 Q 上递增(或递减). 设 $x_0\in Q$,$\forall t\in R^1$. $\{f=t\}=\{x\in Q:f(x)=t\}$ 称为 f 的水平集. 若 $\forall t$,$\forall y\in Q-\{f=t\}$,y 在 Q 中与 x_0 不被$\{f=t\}$所分隔,且 $f(y)<t$(或 $f(y)>t$);而对 $\forall z\in Q-$

$\{f=t\}$，z 在 Q 中与 x_0 被 $\{f=t\}$ 所分隔，且 $f(z)>t$（或 $f(z)<t$）则称 f 在 x_0 **递增（或递减）**.

定义 10 设 X 为 Banach 空间，X^* 为 X 的共轭空间. $f\in X^*$ 在 $x\in X$ 的值记为 (f,x). 算子 $T:X\to X^*$，若 $\forall x_1,x_2\in X$，$\mathrm{Re}(Tx_1-Tx_2,x_1-x_2)\geqslant 0$，则称算子 **$T$ 是单调的.**（注：算子单调函数的定义见第 14 章 §2No. 51）.

函数单调性的判别，常用的方法有：

(1) 若 $f'(x)\geqslant 0$（或 >0），$x\in(a,b)$，则 f 在 (a,b) 上递增（或严格递增）. 这个条件还可减弱，例如：

(2) 设 $f\in AC[a,b]$（即 f 在 $[a,b]$ 上绝对连续），且 $f'(x)\geqslant 0$，$a.e.\ x\in[a,b]$，则 f 在 $[a,b]$ 上递增.

(3) 设 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，若 $\forall x\in(a,b)$，单侧导数 $f'_+(x)$ 或 $f'_-(x)$ 非负（可能为 ∞），则 f 在 $[a,b]$ 上递增.

(4) 设 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，若 $\forall x\in(a,b)$，f 的 Schwarz 导数 $f'_s(x)=\lim\limits_{h\to+0}\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}\geqslant 0$（可能为 ∞），则 f 在 $[a,b]$ 上递增.

(5) 利用 f 的 Dini 导数

$$D^+f(x)=\limsup_{h\to+0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},\ (h\to-0\text{ 时为 }D^-f(x))$$

$D_+f(x)=\liminf\limits_{h\to+0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$，$(h\to-0$ 时为 $D_-f(x))$. 若 $D_+f(x)\geqslant 0$，$a.e.\ x\in[a,b]$ 且 $D_+f(x)>-\infty$，$x\in[a,b]$. 则 f 在 $[a,b]$ 上递增.

若 f 在 $[a,b]$ 上连续，且存在 $[a,b]$ 中的零测度集 A，使得 $\forall x\in[a,b]-A$，$D^+f(x)\geqslant 0$ 或 $D_-f(x)\geqslant 0$（可取 ∞）. 而 $\forall x\in A$（可能要去掉一个可数集），$D^+f(x)$ 或 $D_-f(x)>-\infty$，则 f 在 $[a,b]$ 上递增.（[305]1986，93(6)：471 ～ 475）

(6) 设 f 在 $(0,\infty)$ 上可导，则 f 的导数 f' 递增的充要条件是 $f(x)-xf'(x)$ 递减；f' 严格递增的充要条件是 $f'+af$（a 为实数）严格递增.

(7) 若 f 在 $(0,a)$ 上非负递增，$p>0$，则 $G(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x t^p f(t)\mathrm{d}t$ 在 $(0,a)$ 上也递增.

推广：设在 $[a,b]$ 上 f 非负递增，g 非负递减. 令

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,\qquad G(x)=\int_a^x g(t)\mathrm{d}t,$$

$E=\{x\in[a,b]:G(x)\neq 0\}$，则 $h=F/G$ 在 E 上递增.（Mott，T. E.，[305]1963，70：195 ～ 196）由此可推出：设 f 在 $[a,b]$ 上递增，则 $\forall x\in(a,b)$ 成立：

$$\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{b-x}\int_x^b f(t)\mathrm{d}t.$$（Mott，T. E.，[305]1963，70：195 ～ 196）

(8) 设 $P_n(x)=x^n+\sum\limits_{k=0}^{n-1}c_kx^k$ 为 n 阶实系数多项式，则 $F_n(x)=P_n(x)[e-(1+\frac{1}{x})^x]$ 完全单调的充要条件是 $n=1$ 且 $c_0\geqslant\dfrac{11}{12}$；而 $G_n(x)=P_n(x)\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}-e\right]$ 完全

单调的充要条件是 $n=1$，且 $c_0 \geqslant \frac{1}{12}$.

(9)　设 $f(x)=\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x+b}-e^a$，$a>0$，$b$ 为实数，则 f 完全单调的充要条件是 $a \leqslant 2b$.

(10)　Bernstein 定理：设 μ 为 $[0,\infty)$ 上非负测度，则 f 完全单调的充要条件是 $\forall x>0$，积分 $f(x)=\int_0^{\infty} e^{-xt}\mathrm{d}\mu(t)$ 收敛.

((8) ~ (10) 见 Ann. Acad. Sci. Fennicae, Series A; J. Math. 2002, 27(2): 445 ~ 460)

(11)　复合函数的单调性：设 $u=g(x)$ 的定义域为 A，值域 $D \subset B$，$y=f(u)$ 定义在集 B 上，若 g,f 分别在 A,B 上同时递增（或递减），则复合函数 $f \circ g$ 在 A 上递增；若 g 与 f 有相反方向的单调性，即 g 递增（或递减），而 f 递减（或递增），则 $f \circ g$ 在 A 上递减.

(12)　设 f 是 (a,b) 上的凸函数，则 $f'_-(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow f$ 递增；$f'_+(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow f$ 递减.

(13)　设 $f \in BV[a,b]$，且 $V_a^b(f)=f(b)-f(a)$，则 f 是 $[a,b]$ 上的递增函数.

(14)　洛必达法则的单调形式：设 $f,g:[a,b] \to R^1$ 连续，在 (a,b) 上可微，

$$g'(x) \neq 0, \qquad x \in (a,b),$$

若 $\frac{f'}{g'}$ 在 (a,b) 上递减，则 $\varphi_1(x)=\frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)}$ 和 $\varphi_2(x)=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$ 也在 (a,b) 上递减；

若 $\frac{f'}{g'}$ 递增，则 φ_1,φ_2 也递增；令 $h=\frac{f}{g}$，若 $g>0$，$\frac{f}{g}$ 递增且 $h(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0}h(x)=1$，则 $f(x)>g(x)$，$x\in(a,b)$. ([399]19(2006), 240 ~ 243, 990 ~ 994, [305]111(10)(2004), 905 ~ 909)

定义 11　设 M_n 是 $n\times n$ 对称矩阵的集合. 在 M_n 上建立偏序 $\leqslant$：$A \leqslant B \Leftrightarrow B-A$ 是非负定的. 设 $\{\lambda_1,\cdots,\lambda_m\}$ 是 M_n 中矩阵 A 的谱（不相同的特征值的集合）. 则 $A=\sum\limits_{k=1}^{m}\lambda_k E_k$，式中 E_k 是正交幂等矩阵. 设 $f:D\to R^1$，$\{\lambda_k\}\subset D$.

定义矩阵函数 $f(A)=\sum\limits_{k=1}^{m} f(\lambda_k)E_k$. 若 $A,B\in M_n$，$A\leqslant B \Rightarrow f(A)\leqslant f(B)$，则称 f 是 n 阶矩阵单调递增函数. 当 $n=1$ 时，f 变成通常意义下的单调性.

定义 12　设 X 为 Hilbert 空间. $T:X\to X$ 为非线性算子. 若 $\forall u,v\in X$，$(Tu-Tv, g(u)-g(v))\geqslant 0$，则称 T 为 g 单调算子；若从 $(Tu, g(v)-g(u))\geqslant 0$ 可推出 $(Tv, g(v)-g(u))\geqslant 0$，则称 T 为 g 伪单调算子. ([301]2003, 277(2): 379 ~ 394)

二、　单调函数不等式

1.　设 f,g 在区间 $[a,\infty)$ 上连续，在区间 (a,∞) 上可导，若 $f(a)-g(a)=q<0$ 且对于任意 $x\in(a,\infty)$，有 $f'(x)-g'(x)\geqslant p>0$，则当 $x>a-q/p$ 时，$f(x)>g(x)$.

提示：$F(x)=f(x)-g(x)$ 严格递增.

2.　设 g 递增且 $x\geqslant x_0$ 时，$|f'(x)|\leqslant g'(x)$，则当 $x\geqslant x_0$ 时，

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant g(x)-g(x_0).$$

3. 设:(1) $f^{(k)}(x_0)=g^{(k)}(x_0), k=0,1,\cdots,n-1$,

(2) $x>x_0$ 时,$f^{(n)}(x)>g^{(n)}(x)$,则 $x>x_0$ 时,$f(x)>g(x)$.

注 从这个不等式出发可以证明一系列重要的不等式.

4. 设 x_k, p_k 均为正数,$k=1,\cdots,n$,则

$$\left(\sum p_k\right)\varphi\left(\sum x_k\right)\leqslant\sum p_k\varphi(x_k)$$

成立的充要条件是对于正数 x,$\varphi(x)$ 递减.若 $\varphi(x)$ 严格递减且 $n>1$,则成立严格不等式,若 φ 递增,则不等号反向.

推论 不等式 $f\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^n f(x_k)$ 对于所有正数 x 成立的充要条件是 $x^{-1}f(x)$ 递减.若 $x^{-1}f(x)$ 严格递减,且 $n>1$,则成立严格的不等式:$f\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)<\sum_{k=1}^n f(x_k)$.

5. 设 φ 为严格单调的连续函数,令 $M_\varphi(a)=\varphi^{-1}\left(\sum p_k\varphi(a_k)\right)$(对 k 求和均为从 1 到 n),特别,当所有 $p_k=1$ 时,$G_\varphi(a)=\varphi^{-1}\left(\sum\varphi(a_k)\right)$.令 $q_k=p_k/\sum p_k$,则 $\sum q_k=1$,再令 $M_\varphi^*(a)=\varphi^{-1}\left(\sum q_k\varphi(a_k)\right)$,于是有

(1) 设 φ,ψ 为严格单调的连续函数,且均为正,若 φ 递减,ψ 递增,或 φ,ψ 同时递增(或同时递减),而 ψ/φ 递减,则 $G_\varphi\leqslant G_\psi$;若 ψ/φ 递增,则当 φ,ψ 同时递增(或减)时,$G_\varphi\geqslant G_\psi$.

(2) $2\varphi^{-1}\left(\sum p_k\varphi\left(\frac{a_k+b_k}{2}\right)\right)\leqslant\varphi^{-1}\left(\sum p_k\varphi(a_k)\right)+\varphi^{-1}\left[\sum p_k\varphi(b_k)\right]$,

特别地,对于 $\varphi(x)=x^r, r>1$,得到 Minkowski 不等式的推广(本质上等价的形式):

① $M_\varphi^*\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}\{M_\varphi^*(a)+M_\varphi^*(b)\}$,

② $G_\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}\{G_\varphi(a)+G_\varphi(b)\}$,

③ $M_\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}\{M_\varphi(a)+M_\varphi(b)\}$.([1]91 ~ 92)

6. 设导函数 f' 在区间 $[0,c]$ 上递减,$f(0)=0$,则对于 $0\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant\alpha+\beta\leqslant c$,恒有 $f(\alpha+\beta)\leqslant f(\alpha)+f(\beta)$.

提示:用微分中值定理.

7. [MC].设 f 递增,$f(0)\neq0$,且对于任意非负数 x,y,有 $f(x+y)=f(x)f(y)$,则对于任意非负数 x,存在实数 $a\geqslant1$,使得 $a^{-1}\leqslant f(x)a^{-x}\leqslant a$.

提示:设 $[x]=n$,即 $n\leqslant x<n+1$,则 $a^n\leqslant a^x\leqslant a^{n+1}$.

8. 设在开区间 $G=(a,b)$ 上,f,g,f',g' 都是正的函数,若 f'/g' 在 G 中严格递增,则 f/g 在 G 中严格递增,或存在 $c\in(a,b)$,使得 f/g 在 $(a,c]$ 上严格递减而在 $[c,b)$ 上严格递增.([74]Vol. 1:177 ~ 178)

9. 设 $f''(x)>0$, $x,x_0\in(a,b)$,令

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, x \neq x_0, \\ f'(x_0), \qquad x = x_0, \end{cases}$$

则 φ 在 (a,b) 上严格递增.

10. 设 f 在 R^1 上递减连续,则 $F(x) = \int_0^x (x - 2t) f(t) \mathrm{d}t$ 递增.

11. 设 f 在 R^1 上递增连续,$a > 0$,则 $F(x) = \int_0^a f(x + y) \mathrm{d}y$ 在 R^1 上递增,

12. (1) 设在 $[0,a]$ 上 $f''(x) < 0, f(0) = 0$,则 $f(x)/x$ 在 $[0,a]$ 上严格递减;

(2) 若在 $(-\infty,\infty)$ 上 $f(0) \leqslant 0, f''(x) > 0$,则 $f(x)/x$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,\infty)$ 上严格递增;

(3) 设 $x \geqslant 0$ 时,$f''(x) > 0$,且 $\lim\limits_{x\to\infty}[xf'(x) - f(x)] \leqslant 0$,则 $x > 0$ 时 $f(x)/x$ 严格递减.([1]107)

(4) [MCU].设 $f''(x) > 0, x \in (a,b)$,且 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)/x = 1$,则 $f(x) \geqslant x, x \in (a,b)$.

13. **Dini 函数不等式**:设函数 $\omega(t)$ 当 $t > 0$ 时为非负连续递增,$\omega(t)/t$ 递减且 $\int_0^1 \omega(t)/t \mathrm{d}t < \infty$,则称 $\omega(t)$ 是 $(0,\infty)$ 上的 Dini 函数.当 $0 < t < 1$ 时,下式成立

$$\omega(t) \leqslant c(\log \frac{1}{t})^{-1}.$$

证 设 $0 < \varepsilon < 1$,则

$$c = \int_0^1 \omega(t)/t \mathrm{d}t \geqslant \int_\varepsilon^1 \omega(t)/t \mathrm{d}t = -\omega(\varepsilon)\log\varepsilon - \int_\varepsilon^1 \log t d\,\omega(t) \geqslant -\omega(\varepsilon)\log\varepsilon.$$ 证毕.

14. 1980 年王忠烈猜测:设 f 在 $(0,2b)$ 上递增且有非负的三阶导数,$b > 0$,则对于 $x_k \in (0,b], q_k > 0, 1 \leqslant k \leqslant n, Q_n = \sum\limits_{k=1}^n q_k$,有

$$\frac{\sum q_k f(x_k)}{Q_n} \leqslant f\left(\frac{\sum q_k x_k}{Q_n}\right) + f\left[f^{-1}\left(\frac{\sum q_k f(x_k)}{Q_n}\right) + f^{-1}\left(\frac{\sum q_k f(2b - x_k)}{Q_n}\right)\right]. \quad (1.1)$$

1988 年,Yang,Y.举出反例:$b = 1/4, f(u) = \log u, x_k = 1/4, q_k = 1, 1 \leqslant k \leqslant n$ 时,(1.1)式不成立.但他证明:对于 $b > 0$,(1.1)成立充要条件是 $f \geqslant 0$.([301]1988,133,(1):282)

15. 1985 年杨耀池证明:设 $f(x,y)$ 的二阶混合偏导数 $\partial^2 f/\partial x \partial y > 0$,$\{a_k\}$,$\{b_k\}$ 为两个递增的非常值序列,$\{b'_k\}$ 为 $\{b_k\}$ 的任意重排,则

$$\sum_{k=1}^n f(a_k, b_{n-k+1}) \leqslant \sum_{k=1}^n f(a_k, b'_k) \leqslant \sum_{k=1}^n f(a_k, b_k),$$

仅当 $\{b'_k\}$ 与 $\{b_k\}$ 是同一排列时,等号成立.1988 年彭秀平将其推广到 m 元函数.([344]1988,4:64 ~ 68)

16. 设 $g_k (1 \leqslant k \leqslant n)$ 是区间 D 上实值函数,$\{b'_k\}$ 是 $\{b_k\}$ 的任意重排,则

$$\sum g_k(b_{n+1-k}) \leqslant \sum g_k(b'_k) \leqslant \sum g_k(b_k)$$

对所有递增序列$\{b_k\}$成立的充要条件是$g_{k+1}-g_k$在D上递增$(1\leqslant k<n)$,([305]1990,97:319～323)取$g_k(x)=a_kx$,又得到第三章的排序不等式No. 86.

17. 设f在$[0,1]$上严格递增,$0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant 1$.

(1) 若$a_k=(2k-1)/2n$,$1\leqslant k\leqslant n$,则

$$\sum f(|x_k-a_k|)\leqslant\sum f(a_k);$$

(2) 若$0\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant 1$,$f$还是凸函数,则

$$\sum f(|x_k-a_k|)\leqslant\max\{\sum f(a_k),\sum f(1-a_k)\}.$$

([305]1992,99(5):462.另见第7章§1,No. 65)

18. 设$f(x)$在$x\geqslant 1$时可微,且当$x\to\infty$时,$f'(x)$递增到∞,则

$$0<[f(1)+f(n)]/2+\sum_{k=2}^{n-1}f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x<[f'(n)-f'(1)]/8.$$
([56]Vol. 1.52)

19. 设f在$(0,\infty)$上递减连续,则

$$\int_1^{n+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=1}^n f(k)\leqslant f(1)+\int_1^n f(x)\mathrm{d}x.$$

20. 若$x\geqslant m$时,f非负递增,m为整数,则对于所有$x\geqslant m$,有

$$\left|\sum_{m\leqslant k\leqslant x}f(k)-\int_m^x f(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant f(x);$$

若$x\geqslant m$时,f非负递减,则

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=m}^n f(k)-\int_m^n f(x)\mathrm{d}x\right)=\beta$$

存在且$0\leqslant\beta\leqslant f(m)$.此外,若还有$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$,则当$x\geqslant m+1$时,有

$$\left|\sum_{m\leqslant k\leqslant x}f(k)-\int_m^x f(t)\mathrm{d}t-\beta\right|\leqslant f(x-1).$$
(证明见[76]100～103)华罗庚在[76]中还利用这些不等式来估计许多重要的和式.匡继昌利用Euler-Maclaurin求和公式改进和推广了上述结果,见第13章或河西学院学报2002,18(2):1～8.

21. 设$x>0$时,f''递增,则

$$\frac{x^3}{24}f''\left(\frac{x}{2}\right)\leqslant\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-xf\left(\frac{x}{2}\right)\leqslant\frac{x^3}{24}f''(x).$$
([375]1986,2(4):177)

22. 设函数f在区间$[a,b]$上递增连续,则

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

当f递减时,不等号反向.

证1 对于积分 $\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x$ 分段使用积分第一中值定理.

证2 对于积分 $\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x$ 使用积分第二中值定理.

证3 考虑积分 $\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left(f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)\mathrm{d}x\geqslant 0$.

证 4　从不等式$(t-x)(f(t)-f(x))\geqslant 0, x,t\in[a,b]$出发，先固定$x$，对$t$积分，将所得结果再对$x$积分.

推论　令$f(x)=-\dfrac{1}{x}$，可得：$\ln\dfrac{b}{a}>\dfrac{2(b-a)}{b+a}$，$(b>a>0)$.

证 5　考虑$F(x)=\int_a^x tf(t)\mathrm{d}t-\dfrac{a+x}{2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$的单调性.

证 6　用质心公式.

证 7　利用 Chebyshev 不等式.

23. **Talenti 不等式**：设f是$[a,b]$上正的递减函数，则

$\ln\left(1+\dfrac{1}{1+af(a)}\int_a^b f\right)\leqslant\int_a^b\dfrac{f(t)}{1+tf(t)}\mathrm{d}t$.（Lemmert, R. 等，[54]. 6）

24. [MCU]. 设函数f在区间$[o,b]$上非负递减，则对于所有$0<a<b$，有

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{a}{b}\int_0^b f(x)\mathrm{d}x.$$

25. [MCU]. 设函数f在区间$[0,1]$上正值递减，则

$$\frac{\int_0^1 x(f(x))^2\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x}\leqslant\frac{\int_0^1(f(x))^2\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}.\tag{1.2}$$

证 1　令$D=[0,1]\times[0,1]$，则

$$I=\int_0^1(f(x))^2\mathrm{d}x\int_0^1 yf(y)\mathrm{d}y-\int_0^1 yf^2(y)\mathrm{d}y\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$
$$=\iint_D f(x)f(y)y[f(x)-f(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

交换x,y的位置，又得到

$$I=\iint_D f(x)f(y)x[f(y)-f(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

两式相加，得

$$2I=\iint_D f(x)f(y)(y-x)[f(x)-f(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由于f正值递减，所以$I\geqslant 0$，它等价所要证的(1.2)式.

证 2　考虑$F(x)=\left(\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t\right)-\left(\int_0^x tf^2(t)\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)$.

26. (1)　**Polya 不等式**：设函数f在区间$(0,\infty)$上非负递减，$a\geqslant 0, b\geqslant 0, a\neq b$，则

$$\left(\int_0^\infty x^{a+b}f(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\left\{1-\left(\frac{a-b}{a+b+1}\right)^2\right\}\int_0^\infty x^{2a}f(x)\mathrm{d}x\times\int_0^\infty x^{2b}f(x)\mathrm{d}x,\tag{1.3}$$

仅当$f(x)=\begin{cases}c,(c>0), & 若\ 0<x<\xi,\\ 0, & 若\ \xi<x<\infty\end{cases}$时，等号成立，其中$\xi$可以为0. 若$f$在$(0,1)$上非负递增，则(1.3)式中不等号反向，并将积分限改为$(0,1)$.（[1]185）

提示：利用 Cauchy 不等式及分部积分.

(2)　设f,g,h在$[a,b]$上非负递增，导数g',h'在$[a,b]$上连续，$g(a)=h(a), g(b)$

$= h(b)$，则

$$\left(\int_a^b fg'\right)\left(\int_a^b fh'\right)\leqslant\left\{\int_a^b f\left(\sqrt{gh}\right)'\right\}^2.$$(Alzer，H. MR93h:26028)

27. **Gauss 不等式**：设 f 是 $(0,\infty)$ 上非负递减函数，则 $\forall a>0$，下式成立

$$3\int_0^a x^2 f(x+a)\mathrm{d}x\leqslant a^2\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{4}{9}\int_0^\infty x^2 f(x)\mathrm{d}x.$$([2]188)

2000 年黄启亮作了参数推广：

设 $a\geqslant 0$，$1\leqslant p\leqslant\infty$，$1/p+1/q=1$（约定$\frac{1}{\infty}=0$），$\alpha,\beta\geqslant 0$，$q\alpha\neq p\beta$，则

$$\int_a^\infty x^{\alpha+\beta}f(x)\mathrm{d}x<\lambda(\alpha,\beta,p,q)\left[\int_0^\infty x^{q\alpha}f(x)\mathrm{d}x-\omega_q(a)\right]^{1/q}\left[\int_0^\infty x^{p\beta}f(x)\mathrm{d}x-\omega_p(a)\right]^{1/p},$$

式中 $\omega_q(a)=\int_0^a\left[x^{q\alpha}f(x)-\frac{a^{q\alpha}f(a)}{q\alpha+1}\right]\mathrm{d}x\geqslant 0$，将上式中 q 换成 p，得到 $\omega_p(a)$.

$$\lambda(\alpha,\beta,p,q)=\frac{(q\alpha+1)^{1/q}(p\beta+1)^{1/p}}{\alpha+\beta+1},$$

仅当 $f(x)=\begin{cases}c,(c>0),0<x<\xi,\\0,\quad\xi<x<\infty\end{cases}$ 时等号成立.

$\lambda(\alpha,\beta,p,q)$ 为最佳常数.（华南理工大学学报，2001，29(7)：1 ～ 4）

28. 设 f 为 $(0,\infty)$ 上正值连续函数，则 $x>0$ 时，

$$\varphi(x)=\frac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$$

是递增函数.

提示：$\varphi'(x)=\frac{f(x)}{\left(\int_0^x f\right)^2}\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t>0.$

29. 设 f 是 $[a,b]$ 上连续函数，$f'(x)\geqslant 0$，$x\in(a,b)$，$p>0$，则 $F(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x[f(t)]^p\mathrm{d}t$ 是 (a,b) 上递增函数.

30. 设在 $(0,\infty)$ 上，$f^{(n)}(x)>0$，$n=0,1,2,\cdots$，则 $g(x)=\frac{f^{(n)}(x)}{f^{(n+1)}(x)}$ 在 $(0,\infty)$ 上递减；若 f 在 $(0,\infty)$ 上绝对单调（见定义 2），且 $\sum_{k=0}^n a_k x^k\geqslant 0$，则 $\sum_{k=0}^n a_k f^{(k)}(x)\geqslant 0$.

(Fink，A. M.，[301]1982，90(1)：251 ～ 258)

31. 设 D 为 R^1 中的区间，f 在 D 上递减，g 在 $[a,b]$ 上递增，且 $g(a),g(b)\in D$，若 $g(x)\geqslant x$，则

$$\int_a^b fg'\geqslant\int_{g(a)}^{g(b)}f.$$

若 $g(x)\leqslant x$，则不等号反向.（Pecaric，J. E. Southeast Asian Bull. Math. 1989，13(2)：89 ～ 91）

32. **Lebesgue 不等式**：设 f 在有限区间 $[a,b]$ 上递增，则

$$\int_a^b f' \leqslant f(b)-f(a).$$

若 f 递减，则不等号反向.（证明见[118]143 ～ 144）.

33. **Young 不等式**：设当 $x \geqslant 0$ 时，$y=f(x)$ 严格递增连续且 $f(0)=0$，f^{-1} 为 f 的反函数，则对于所有 $a,b>0$，有

$$ab \leqslant \int_0^a f(x)\mathrm{d}x + \int_0^b f^{-1}(y)\mathrm{d}y,$$

仅当 $b=f(a)$ 时等号成立.

特别，取 $f(x)=x^{p-1}\quad(p>1)$，$1/p+1/q=1$，则 $ab \leqslant (a^p/p)+(b^q/q)$.

1932 年，Takahashi, T. 证明了 Young 不等式的逆定理：设 $x \geqslant 0$ 时，f,g 严格递增连续，且 $g^{-1}(x) \geqslant f(x)$，$f(0)=g(0)$，若 $\forall a,b>0$，都有

$$ab \leqslant \int_0^a f(x)\mathrm{d}x + \int_0^b g(x)\mathrm{d}x,$$

则 f 与 g 必互为反函数.

所以，$\varphi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 与 $\psi(x)=\int_0^x f^{-1}(t)\mathrm{d}t$ 称为 **Young 互补函数.**

Young 不等式已有许多推广，例如：

(1) **Oppenheim 不等式**：设 $f_k(x)$ 非负递增连续，$a_k \geqslant 0$，$k=1,\cdots,n$，且至少有一个 k，使得 $f_k(0)=0$，则

$$\prod_{k=1}^n f_k(a_k) \leqslant \sum_{k=1}^n \int_0^{a_k} \prod_{j\neq k} f_j(x)\mathrm{d}f_k(x),$$

仅当 $a_1=\cdots=a_n$ 时等号成立.（证明见[317]1927，2：21 ～ 23）

(2) **Cooper 不等式**：设 $g_k(x)$ 严格递增连续，$g_k(0)=0$，$a_k \geqslant 0$，$k=1,\cdots,n$. 而且 $\prod_k g_k^{-1}(x)=x$，则

$$\prod_{k=1}^n a_k \leqslant \sum_{k=1}^n \int_0^{a_k} \frac{g_k(x)}{x}\mathrm{d}x,$$

仅当 $g_1(a_1)=\cdots=g_n(a_n)$ 时等号成立.（证明见[317]1927，2：17 ～ 21，159 ～ 163）

(3) f 是 $[0,\infty)$ 上严格递增连续函数，$f(0)=0$，f^{-1} 为 f 的反函数，$[x]$ 为 x 的整数部分，则 $\forall m,n \in N$，有 $mn \leqslant \sum_{k=0}^m [f(k)] + \sum_{k=0}^n [f^{-1}(k)]$.

(4) 1988 年徐利治证明：设 $a,b>0$，f 在 $[0,\infty)$ 上严格递增连续且 $f(0)=0$，f^{-1} 为 f 的反函数，则

$$ab \leqslant \int_0^a f(x)\mathrm{d}x + \int_0^b f^{-1}(y)\mathrm{d}y \leqslant af(a)+bf^{-1}(b)-f(a)f^{-1}(b),$$

若 $f(x)$ 为凸函数，则当 $f''(x)[b-f(a)] \geqslant 0$ 时，

$$ab+\frac{1}{2}[b-f(a)][f^{-1}(b)-a] \leqslant \int_0^a f(x)\mathrm{d}x + \int_0^b f^{-1}(y)\mathrm{d}y.$$

若 $f''(x)[b-f(a)] \leqslant 0$，则不等号反向.

设 f' 单调，记 $h=(1/n)[f^{-1}(b)-a]$，$n\geqslant 2$.

$S_n=bf^{-1}(b)-h\Big[(f(a)+b)/2+\sum_{k=1}^{n-1}f(a+kh)\Big]$，则

$$\left|\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^b f^{-1}(y)\mathrm{d}y-S_n\right|\leqslant(h^2/8)\mid f'(a)-f'[f^{-1}(b)]\mid.$$

([339]1988，8(4)：512)

1989 年，徐利治、邹春苓还证明了双边 Young 不等式和一个逆定理：

设 f,g 是严格递增的连续函数，$f(0)=g(0)=0$，f 定义在 $[0,c]$ 上，$a\in[0,c]$，$b\in[0,f(c)]$，

① 若 $g^{-1}(x)\geqslant f(x)$，$\forall x\in[0,c]$，且

$$ab\leqslant\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^b g(x)\mathrm{d}x$$

对所有 $a\in[0,c]$，$b\in[0,f(c)]$ 成立，则 $f=g^{-1}$（和 $g=f^{-1}$）.

② 对所有 $a\in[0,c]$，$b\in[0,f(c)]$，有

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^b f^{-1}(x)\mathrm{d}x\leqslant af(a)+bf^{-1}(b)-f(a)f^{-1}(b).$$

③ 若 $\forall x\in[0,c]$，$g^{-1}(x)\leqslant f(x)$ 和 $\forall a\in[0,c]$，$\forall b\in[0,f(c)]$，有

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^b g(x)\mathrm{d}x\leqslant af(a)+bg(b)-f(a)f(b),$$

则 $f=g^{-1}$（和 $g=f^{-1}$）.

作者还利用这些结果得到某些直接计算困难的定积分的上下界.([353]1989，5(3)：12～16)

(5) Zsolt，P. 证明：设 $f(x,y)$ 有二阶连续偏导数，且 $\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial y}f(x,y)\geqslant 0$，$(x,y\geqslant 0)$，则对于任意非负数 x,y 和任意 Young 函数 φ，有

$$f(x,y)\leqslant f(0,0)+\int_0^x\frac{\partial}{\partial t}f[t,\varphi(t)]\mathrm{d}t+\int_0^y\frac{\partial}{\partial s}f[\varphi^{(-1)}(s),s]\mathrm{d}s,$$

式中 $\varphi^{(-1)}$ 表示 φ 的右逆.([54]5(1986)：471～472)

34. 设 f 是 $[0,\infty)$ 上非负递减函数，且 $\forall a>0$，f 在 $[0,a]$ 上绝对连续，则对 $p\geqslant 1$，有 $p\int_0^\infty x^{p-1}f^p\leqslant(\int_0^\infty f)^p$.

证 若 $f\notin L[0,\infty)$，即 $\int_0^\infty f=\infty$，则上式成立. 若 $f\in L[0,\infty)$，又 f 递减，所以 $f(x)\to 0(x\to\infty)$. 从而

$$p\int_0^\infty(xf)^{p-1}f\leqslant p\int_0^\infty(\int_0^x f)^{p-1}f=\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\int_0^x f)^p\mathrm{d}x=(\int_0^\infty f)^p.$$

35. 设 f 是 $(0,1)$ 上正的递增函数，$1\leqslant p\leqslant q$，则

$q\int_0^1(1-t)^{q-1}f(t)^p\mathrm{d}t\leqslant\left(\int_0^1 f\right)^p$.(Malamud，S. M.，[308]2001，129(9)：2671～2678)

36. 设 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上(关于 x)单调，而且 $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)=f(x)$ （在 $[a,b]$ 上点态

收敛)，则 f 在 $[a,b]$ 上也单调，且

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f'_n(x)\quad a.e.\ x\in[a,b].$$

(逐次求导的 Fubini 定理)(证明见[118]145～146)

37. 设 $L^n=\{f:(-1)^k f^{(k)}(t)\geqslant 0,t>0,0\leqslant k\leqslant n\}$，

$L=\{f:(-1)^k f^{(k)}(t)\geqslant 0,t>0,\forall k\in N\}$. 则

$\forall\alpha>1$，当 $n\leqslant 7$ 或 $n\geqslant 13$ 时，$f\in L\Rightarrow f^\alpha\in L^n$.

([301]1997,210(1):102～113). 我们问：$8\leqslant n\leqslant 12$ 时，有什么相应的结论？

38. 设 $-\infty<a<b\leqslant\infty,0<p\leqslant q<\infty$，$f$ 是 $[a,b]$ 上正的递减可积函数，则

$$\left(\int_a^b[f(x)]^q(x-a)^{q-1}\mathrm{d}x\right)^{1/q}\leqslant p^{1/p}q^{-1/q}\left(\int_a^b[f(x)]^p(x-a)^{p-1}\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

(Heining,H.,等[329]1995,116(2):133～165)2000 年，Peric 等将其推广到多元函数.([303]2000,3(1):51～62)

39. 设 $a,b\in R^n,a=(a_1,\cdots,a_n),b=(b_1,\cdots,b_n)$.

若 $\forall a_k<b_k$，记为 $a<b,Q=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n],g=(g_1,\cdots,g_n)$，若 $\forall g_k(x)$ 递增，称 g 递增，而若 $\forall g_k\geqslant 0$，称 $g\geqslant 0$，记 $dg(x)=\prod_{k=1}^{n}dg_k(x),d(g^p(x))=\prod_{k=1}^{n}d[g_k^p(x_k)]$. 若 $f,g\geqslant 0$，f 递减，g 递增，且

$$\lim_{x_k\to a_k+0}g_k(x_k)=0,1\leqslant k\leqslant n. \text{若 } 0<p\leqslant 1,\text{则}$$

$$\int_Q f\mathrm{d}g\leqslant\left\{\int_Q f^p dg^p\right\}^{1/p}.$$

若 $1\leqslant p<\infty$，则不等号反向.(Pecaric,J. 等[369],1996,62(3～4):407～412)

40. **Stolarsky 不等式**：设 g 在 $(0,1]$ 上递减，$0\leqslant g(x)\leqslant 1,p,q>0$，则

$$\int_0^1 g(x^{1/p})\mathrm{d}x\int_0^1 g(x^{1/q})\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 g(x^{\frac{1}{p+q}})\mathrm{d}x. \tag{1.4}$$

([305]1991,98:889～900)1994 年 Pecaric,J. 又证明了(1.4)式的反向不等式：

$g(0)Q(g,p+q)\leqslant Q(g,p)Q(g,q)$，式中

$Q(g,p)=p\int_0^1 g(x)x^{p-1}\mathrm{d}x=g(1)-\int_0^1 x^p\mathrm{d}g(x)$.([305]1994,101(6):565～567)

41. [MCU]. 设 f' 在 R^1 上有界，且 $\forall x\in R^1$，下式成立

$$|f(x)+f'(x)|\leqslant 1,\text{则 } |f(x)|\leqslant 1.$$

42. [MCU]. 设 φ' 递增，$\varphi(0)=0$，则 $\forall x\in(0,1)$，下式成立

$$\varphi'(1)x<\varphi(x)<\varphi'(0)x.$$

43. 矩不等式：设 f 在 $[a,b]$ 上正值递减，g 在 $[a,b]$ 上正值连续，则

$$\frac{\int_a^b xf(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}<\frac{\int_a^b xg(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}. \tag{1.5}$$

([325]46(1962),140 ~ 141) 特别取 $g = f$,得到 No. 25.

44. 设在$(0,\infty)$ 上,f 递减,g 递增,且 $g(x) \geqslant x$, $x > 0$, 则

$$\int_{g(0)}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\infty} f(x)g'(x)\mathrm{d}x. \tag{1.6}$$

若在$(0,\infty)$ 上, f 递减, g 可测, $f,g>0$, $1\leqslant p<\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $f\in L^p\cap L^{\infty}$, $g\in L^q\cap L^1$, $\|g\|_q=1$, $\|g\|_1=a$,则

$$\int_0^{\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant 2^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^{a^p} f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.7}$$

式中 $2^{\frac{1}{q}}$ 是最佳常数.([22]319)

45. 设 f 是$(0,\infty)$ 上绝对单调函数,则

$$\frac{f^{(k)}(x)}{f^{(k+1)}(x)} \geqslant \frac{f^{(k+1)}(x)}{f^{(k+2)}(x)}, \quad k=0,1,2,\cdots. \tag{1.8}$$

([171]167)

46. 设 $D = \det(a_{kj})$ 是以 a_{kj} 为元素的 n 阶行列式,若 f 是绝对单调或者完全单调函数,则

$$\det(f^{(k+j-2)}(x)) \geqslant 0, \qquad \det((-1)^{k+j}f^{(k+j-2)}(x)) \geqslant 0.$$ ([171]167)

47. 设 f 是$[a,b]$ 上完全单调函数,则

(1) $(-1)^{nk}(f^{(k)}(x))^n \leqslant (-1)^{nk}(f^{(n)}(x))^k(f(x))^{n-k}$, $(0<k<n)$;

(2) $\int_a^b |f^{(k)}|^p \leqslant \left(\int_a^b f^p\right)^{1-\frac{k}{n}}\left(\int_a^b |f^{(n)}|^p\right)^{\frac{k}{n}}$, $(1\leqslant k<n,\ 1\leqslant p<\infty)$.

(1)(2) 中均仅当 $f(x) = e^{-cx}(c>0)$ 时等号成立.

(3) 若 $f^{(k)}(x) \neq 0$, $k=0,1,\cdots$, 并令 $a_k = \log\{(-1)^{k-1}f^{(k-1)}(x)\}$,则$\{a_k\}$ 是凸序列.(凸序列的定义见第 11 章 1No. 37).([301]90(1982),251 ~ 258,[22]368 ~ 369)

48. 设 f 是$[a,b]$ 上递增的凹函数,$a>0$, $n\geqslant 2$, $0\leqslant x_1\leqslant\cdots\leqslant x_n$, $x_{n+1}=x_1$, $x_n = x_0$, 则

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_k)}{x_k+x_{k+1}} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_k)}{x_{k-1}+x_k}.$$

(Elem. Math. 46(1991),92)

49. 设 $0<R\leqslant\infty$, $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 与 $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 在$(-R,R)$ 上收敛. 记

$$c_n=\frac{a_n}{b_n}, \qquad h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}.$$

若 $b_n>0$, c_n 递增(或递减),则 h 也在$(0,R)$ 上递增(或递减).([301]335(2007),1294 ~ 1308)

50. 设 f,g 是$[a,b]$ 上非负递增函数, $\alpha,\beta>0$.

若 $0<\lambda<\min\left\{\alpha\left(1+\frac{g(a)}{f(b)}\right), \beta\left(1+\frac{f(a)}{g(b)}\right)\right\}$,令

$$h(x,y)=\frac{[f(x)]^{\alpha}[g(x)]^{\beta}}{[f(x)+g(x)]^{\lambda}}.$$

则 $h(x,y)$ 分别关于 x,y 递增,从而当 $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$, $a \leqslant y_1 < y_2 \leqslant b$ 时, $h(x_1,y_1) \leqslant h(x_2,y_2)$.

若 f,g 是$[a,b]$上非负递减函数,$\alpha,\beta > 0$,若

$$\lambda < \min\left\{\alpha\left(1+\frac{g(b)}{f(a)}\right),\ \beta\left(1+\frac{f(b)}{g(a)}\right)\right\},$$

则 $h(x,y)$ 分别关于 x,y 递增.

51.　设 $f:R^1 \to R^1$ 满足

$$f(x-y)=\frac{f(x)-f(y)}{1-f(x)f(y)},\qquad f(x)f(y)\neq 1, \tag{1.9}$$

设 $0 < a < b$, 若 $f(x) > 0$, $x \in (a,b)$, 则 f 是 R^1 上有界的递增函数.

证明基本思路:

(1)　取 $0 < h < b-a$,考虑差式

$$f(x+h)-f(x)=f(h)\,\frac{1-f^2(x)}{1+f(x)f(h)}. \tag{1.10}$$

(2)　若能证 $|f(x)| < 1$,就可推出 $1-f^2(x) > 0$, $1+f(x)f(h) > 0$. 所以,为证(1.10)左边式子大于零,只要证 $f(h) > 0$.

(3)　为证 $|f(x)| < 1$, 先后在(1.9)中取 $x=y$ 和 $x=0$,分别得出 $f(0)=0$,f 为奇函数,从而在(1.9)式中将 y 换成 $-y$ 时,就得出

$$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}. \tag{1.11}$$

在(1.11)式中取 $y=x$,得出 $|f(x)| \leqslant 1$. 再证成立严格不等式 $|f(x)| < 1$.

(4)　为证 $f(h) > 0$,用反证法. 若 $f(h) \leqslant 0$,可证 $\forall k$, $f(kh) \leqslant 0$. 特别取 $k_0 = \left[\frac{a}{h}\right]+1$,得出 $f(k_0h) \leqslant 0$,这与假设 $f(x) > 0$ 相矛盾. 证毕.

52.　**最值单调不等式**:设 a,b 是实数, $f:[a,b]^n \to R^1$ 有连续的偏导数,$c \in [a,b]$.

(1)　记 $D_j = \left\{(x_1,\cdots,x_{n-1},c): \min\limits_{1\leqslant k\leqslant n-1}\{x_n\} \geqslant c,\ x_j = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n-1}\{x_n\} \neq c\right\}$, $j=1,\cdots,n-1$. 若在 D_j 内,$\dfrac{\partial f}{\partial x_j} > 0$, 则对于 $c \leqslant x_j \leqslant b$,有 $f(x_1,\cdots,x_{n-1},c) \geqslant f(c,\cdots,c)$.

特别,若 $x_n = \min\{x_k\}$, 则

$$f(x_1,\cdots,x_n); \geqslant f(x_n,\cdots,x_n).$$

(2)　记 $E_j = \left\{(c,x_2,\cdots,x_n): \max\limits_{2\leqslant k\leqslant n}\{x_k\} \leqslant c,\ x_j = \min\limits_{2\leqslant k\leqslant n}\{x_k\} \neq c\right\}$.

若在 E_j 内,$\dfrac{\partial f}{\partial x_j} < 0$, 则对于 $a \leqslant x_j \leqslant c$, $j=2,\cdots,n$,下式成立

$$f(c,x_2,\cdots,x_n) \geqslant f(c,\cdots,c).$$

特别,若 $x_1 = \max\{x_k\}$, 则

$$f(x_1,\cdots,x_n) \geqslant f(x_1,\cdots,x_1).$$

(张小明、褚玉明,[351]2008(1):1 ~ 8)

§ 2　有界变差函数不等式

一、 基本概念

一元有界变差函数的概念及其性质可参看有关“实分析”(实变函数论) 的著作，如[58,64,98,103,115,118,119] 等．

定义 1　设 f 是 $[a,b]$ 上的有限函数，对 $[a,b]$ 的任一分划 $T=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$，$f$ 在 $[a,b]$ 上关于 T 的变差和全变差分别定义为

$$V_a^b(f,T)=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|;\quad V_a^b(f)=\sup_T\{V_a^b(f,T)\}.$$

若 $V_a^b(f)<\infty$，称 f 是 $[a,b]$ 上有界变差函数，记为 $f\in BV[a,b]$. 开区间 (a,b) 和无穷区间上的有界变差函数可通过极限过程来定义. 由 Jordan 分解定理，$f\in BV[a,b]\Leftrightarrow f=g-h$，式中，$g,h$ 是 $[a,b]$ 上递增函数．$f\in BV[a,b]\Leftrightarrow$ 存在 $[a,b]$ 上递增函数 φ，使得 $\forall x_1,x_2\in[a,b]$，$x_1<x_2$，$f(x_2)-f(x_1)\leqslant\varphi(x_2)-\varphi(x_1)$，这时 φ 称为 f 的强函数. ([118]147 ~ 156).

定义 2　设 f 是 $[a,b]$ 上的有限函数.

$$\Delta_h^m f(x)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}f[x+(m-k)h].$$

对 $[a,b]$ 的任一分划 $T=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$. 记

$$V_a^b(f,T)_m=\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\Delta_{\alpha_k}^{m-1}f(x_k)}{\alpha_k^{m-1}}-\frac{\Delta_{\alpha_{k-1}}^{m-1}f(x_{k-1})}{\alpha_{k-1}^{m-1}}\right|,\text{式中 }\alpha_k=\frac{1}{m-1}(x_k-x_{k-1}),$$

若 $V_a^b(f)_m=\sup\limits_T V_a^b(f,T)_m<\infty$，则称 f 是 $[a,b]$ 上 m 阶有界变差函数.

(有关性质见[333]，1981，26(6)：381)

定义 3　设 f 是 $[a,b]$ 上有限函数，φ 在 $(0,\infty)$ 上递增连续，$\varphi(0)=0$. $T=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$ 为 $[a,b]$ 的任一分划，若

$$\sup_T\{\sum_{k=1}^{n}\varphi(|f(x_k)-f(x_{k-1})|)\}<\infty.$$

则称 f 是 $[a,b]$ 上有界 φ 变差函数，记为 $f\in BV_\varphi[a,b]$.

当 $\varphi(x)=x$ 时，得到定义 1.

但对于多元变差却有好几种定义，如 Arzela 变差、Vitali 变差、Pierpont 变差、Frechet 变差、Hardy 变差等，[117] 第 5 章利用分布意义下的偏导数给出了如下的定义.

定义 4　设 G 为 R^n 中开集，$C_0^\infty(G)$ 表示 G 上有紧支集的无穷次可微函数空间，$f\in L^1(G)$，f 的全变差定义为

$$\|Df\|=\sup\{\int_\Omega f\,\mathrm{div}g\,\mathrm{d}x:g=(g_1,\cdots,g_n)\in C_0^\infty(G;R^n),\ |g(x)|\leqslant 1,x\in G\}.$$

式中 $C_0^\infty(G;R^n)$ 表示 $g:G\to R^n$，$g_k\in C_0^\infty(G)$，$1\leqslant k\leqslant n$；$\mathrm{div}g=\sum\limits_{k=1}^{n}D_kg_k$.

若 $\| Df \| < \infty$，则称 f 是 G 上有界变差函数，记为 $f \in BV(G)$. 在 $BV(G)$ 中定义范数 $\| f \|_{BV} = \| f \|_1 + \| Df \|$，式中 $\| f \|_1 = \int_G | f(x) | \mathrm{d}x$.

二、 有界变差函数不等式

由定义 3 导出的有关不等式见[117]第 5 章，本书着重介绍按定义 1 导出的有关不等式.

1. 设 $f \in C[a,b]$，$g \in BV[a,b]$，则

(1) $\left| \int_a^b f dg \right| \leqslant \| f \|_c \cdot V_a^b(g)$. 式中 $\| f \|_c = \max\limits_{x\in[a,b]} | f(x) |$.

(2) $\int_a^b | g' | \leqslant V_a^b(g)$. (Lebesgue). 仅当 g 在$[a,b]$上绝对连续时等号成立.

2. 设 $f,g \in BV[a,b]$，$f \geqslant 0$，f 与 g 没有公共间断点. 1956 年 Ganelius, T. 证明

$$\int_a^b \mathrm{d}g \leqslant \{ \inf_{x\in[a,b]} f(x) + V_a^b(f) \} \sup\{ \int_E \mathrm{d}g : E \subset [a,b] \}. \tag{2.1}$$

1984 年，Knowles, Ian 将上式改进为

$$\int_a^b f \mathrm{d}g \leqslant \frac{1}{2}[f(a) + f(b) + V_a^b(f)] \sup\{ \int_E \mathrm{d}g : E \subset [a,b] \}.$$

若 f 变号，则(2.1) 式变成

$$\int_a^b f \mathrm{d}g \leqslant [g(b) - g(a)](\inf_{x\in[a,b]} f(x)) + V_a^b(f) \sup\{ \int_E \mathrm{d}g : E \subset [a,b] \}.$$

([306]MR86a:26026)

3. 令 $BV_0[a,b] = \{ f \in BV[a,b] : f(a) = 0 \}$，若 $f,g \in BV_0[a,b]$，则 $fg \in BV_0[a,b]$，且 $V_a^b(fg) \leqslant V_a^b(f) V_a^b(g)$. ([305]1980, 87(1): 39 ~ 40)

4. 设 $f,g \in BV[a,b]$，则

$$V_a^b(fg) \leqslant \| f \|_c V_a^b(g) + \| g \|_c V_a^b(f).$$

式中 $\| f \|_c = \sup\{ f(x) : x \in [a,b] \}$. ([119]238)

5. 设 $f \in L[a,b]$，$F(x) = \int_a^x f(t) \mathrm{d}t$，$x \in [a,b]$，则 $V_a^b(F) \leqslant \int_a^b | F' |$. ([119]243)

6. 设 $f \in BV[0,a]$，$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t) \mathrm{d}t$，$F(0) = 0$，则 $F \in BV[0,a]$. ([119]263)

7. 设 $f_k \in BV[a,b]$，$V_a^b(f_k) \leqslant M \quad (\forall k)$，$\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$，$x \in [a,b]$. 则 $f \in BV[a,b]$，且 $V_a^b(f) \leqslant M$.

8. 设 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} | a_k | < \infty$，$f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^k$，$x \in [-1,1]$，则 $f \in BV[-1,1]$.

9. 设 $f_k \in BV[a,b]$，$q_k > 0$，$Q_n = \sum\limits_{k=1}^{n} q_k$，$F(x) = \frac{1}{Q_n} \sum\limits_{k=1}^{n} q_k f_k(x)$，$l_k$ 表示 f_k 在$[a,b]$上的弧长，L 为 F 在$[a,b]$ 上的弧长(在间断点的跳跃必须包括在弧长内)，则

$$L \leqslant \frac{1}{Q_n} \sum_{k=1}^{n} q_k l_k. \tag{2.2}$$

提示：对$[a,b]$的任一分划 $T = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$，

$$l_k(T) = \sum_{j=1}^{n} \{(x_j - x_{j-1})^2 + [f_k(x_j) - f_k(x_{j-1})]^2\}^{1/2}.$$

$l_k = \sup\limits_T l_k(T)$. 再利用$\sqrt{c^2+t^2}$是凸函数和

$$\frac{1}{Q_n} \sum_{k=1}^{n} q_k l_k \geqslant \frac{1}{Q_n} \sum_{k=1}^{n} q_k l_k(T) \geqslant L(T). \tag{2.3}$$

式中 $L(T) = \sum\limits_{j=1}^{n} \{(x_j - x_{j-1})^2 + [F(x_j) - F(x_{j-1})]^2\}^{1/2}$.

(2.3) 式两边对 T 求 sup，即得(2.2)式.

10. 设 $f \in BV[0,2\pi]$，再将 f 作 2π 周期的延拓. ω 是$[0,2\pi]$上非负可积函数，令

$$F(x) = \frac{1}{\int_0^{2\pi} \omega(y)\mathrm{d}y} \int_0^{2\pi} \omega(y) f(x+y)\mathrm{d}y.$$

l, L 分别表示 f 与 F 在$[0,2\pi]$上的弧长，则 $F \in BV[0,2\pi]$ 且 $L \leqslant l$.

(证明见[56]Vol. 1. 73. 271 ~ 272)

11. 设 $g:[0,1] \to R^1$，ω_k 是$[0,1]$上非负可积的权函数. 记

$$Q(g,\omega) = \frac{\int_0^1 g\omega}{\int_0^1 \omega}, \qquad \sigma_k(x) = \frac{\int_0^x \omega_k(t)\mathrm{d}t}{\int_0^1 \omega_k(t)\mathrm{d}t}.$$

(1) 若 $g \in BV[0,1]$ 且 $0 \leqslant g(1) \leqslant g(x) \leqslant g(0)$，$x \in (0,1)$.

$$\sigma_1(x)\sigma_2(x) = \sigma_3(x), \qquad x \in [0,1] \tag{2.4}$$

则

$$Q(g,\omega_1)Q(g,\omega_2) \leqslant g(0)Q(g,\omega_3). \tag{2.5}$$

(2) 若 g 在$[0,1]$上递减，则将(2.4)改为 $\sigma_1(x)\sigma_2(x) \leqslant \sigma_3(x)$ 时，(2.5)式仍成立.
([308]123(7)(1995),2113 ~ 2118)

§3 其他特殊函数不等式

一、 Beta 与 Gamma 函数不等式

(一) 定义与性质

Gamma 函数 Γ 定义为

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} \mathrm{d}t \quad (\mathrm{Re}z > 0) \tag{3.1}$$

式中 z 为复数，t^{z-1} 的多值性可由公式 $t^{z-1} = e^{(z-1)\ln t}$ 来消除，此处 $\ln t$ 为实数，若 $\mathrm{Re}z < 0$，且 $-n-1 < \mathrm{Re}z < -n$，$n = 0,1,2,\cdots$，Γ 函数由 Cauchy-Saalschütz 积分表示：

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} \left(e^{-t} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{t^k}{k!}\right) \mathrm{d}t. \tag{3.2}$$

$\Gamma(z)$ 又称为**第二类 Euler 积分.**

Beta 函数 $B(z,w)$(又称为第一类 Euler 积分) 定义为:

$$B(z,w)=\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}\mathrm{d}t.\ (\mathrm{Re}z>0,\mathrm{Re}w>0). \tag{3.3}$$

$B_x(z,w)=\int_0^x t^{z-1}(1-t)^{w-1}\mathrm{d}t$,称为不完全 Beta 函数.

$$\Gamma_1(x,y)=\int_0^y t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t \quad 与 \quad \Gamma_2(x,y)=\int_y^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t \tag{3.4}$$

称为**不完全 Gamma 函数**.([101]260,263)

$\Gamma(z)$ 与 $B(z,w)$ 的基本性质:

1. Euler 函数方程 $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)(\mathrm{Re}z>0)$ 或

$$\Gamma(z)=\frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)}\ (\mathrm{Re}z<0,-n-1<\mathrm{Re}z<-n,n=0,1,2,\cdots) \tag{3.5}$$

当 n 为正整数时,$\Gamma(n+1)=n!$,$\Gamma(1)=1$,规定 $0!=\Gamma(1)=1$.

2. **Euler 完全化公式(余元公式):**

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)}. \tag{3.6}$$

特别 $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$. 当 n 为正整数时,$\Gamma(n+\frac{1}{2})=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}$.

3. **Gauss 乘法公式(倍数公式):**

$$\Gamma(nx)=(2\pi)^{(1-n)/2}n^{nx-(\frac{1}{2})}\prod_{k=0}^{n-1}\Gamma(x+\frac{k}{n}).\ n=2,3,4,\cdots \tag{3.7}$$

4. Weierstrass 无穷乘积表达式:

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=ze^{cz}\prod_{k=1}^{\infty}[(1+\frac{z}{k})e^{-\frac{z}{k}}].$$

式中 c 为 Euler 常数.

5. 渐近展开式:设 $\mathrm{Re}z\geqslant\delta>0$,或 $|\mathrm{Im}\,z|\geqslant\delta>0$,则 $\ln\Gamma(z)$ 可渐近展开为 Stirling 级数:

$$\ln\Gamma(z)=(z-\frac{1}{2})\ln z-z+\frac{1}{2}\ln(2\pi)+\sum_{k=1}^{n}\frac{B_{2k}}{2k(2k-1)z^{2k-1}}+O(z^{-2n-1}).$$

其中 B_{2k} 为 Bernoulli 数,由此推出

$$\Gamma(z)=\sqrt{2\pi}z^{z-(\frac{1}{2})}e^{-z}[1+\frac{z^{-1}}{12}+\frac{z^{-2}}{288}-\frac{139z^{-3}}{51840}-\frac{571z^{-4}}{2488320}+O(z^{-5})].$$

特别地 $\Gamma(x+1)=\sqrt{2\pi}x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x+\frac{\theta}{12x}}$,$0<\theta<1$. 而更准确的是 Sonin 公式:

$$\Gamma(x+1)=\sqrt{2\pi}x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x+\frac{1}{12(x+\theta)}},0<\theta<1/2.$$

当 $x>0$ 时,Binet 公式成立:

$$\Gamma(x+1)=(\frac{x}{e})^x\sqrt{2\pi x}e^{\theta(x)},式中,\theta(x)=\int_0^\infty(\frac{1}{e^t-1}-\frac{1}{t}+\frac{1}{2})\frac{1}{t}\exp(-xt)\mathrm{d}t.$$

6. $B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$,$p,q>0$; $B(p,q)=\frac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1)$,$q>1$;

$$B(p,1-p)=\frac{\pi}{\sin(p\pi)},0<p<1.$$

(二) 下面主要讨论 z,w 为正实数时 $\Gamma(x)$ 与 $B(p,q)$ 的若干不等式

1. $x>0$ 时，$\Gamma(x)>0$.

$$x^{\alpha(x-1)-c}<\Gamma(x)<x^{\beta(x-1)-c}. \tag{3.8}$$

(1) $\forall x\in(0,1)$，(3.8) 式成立的充要条件是 $\alpha\leqslant 1-c$ 和 $\beta\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{6}-c\right)$.

(2) $\forall x\in(1,\infty)$，(3.8) 式成立的充要条件是 $\alpha\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{6}-c\right)$ 和 $\beta\geqslant 1$，其中 c 为 Euler 常数.(Alzer. H. [308]2000,128(1):141 ~ 147)

2. $\forall x\in R^1$, $\Gamma(x)\Gamma''(x)>[\Gamma'(x)]^2\geqslant 0$.

即不论是 $|\Gamma(x)|$ 的，还是 $\ln|\Gamma(x)|$ 的一切分支都是凸函数. 当 $x>0$ 时，$\Gamma(x)$ 在 $x_0=1.4616321\cdots$ 处具有唯一的极小值：$\Gamma(x_0)=0.885603\cdots$. ([101]259)

3. 设 $x>0$，则：(1) $\ln\Gamma(x)$ 是凸函数，即 $\Gamma(\frac{x}{p}+\frac{y}{q})\leqslant[\Gamma(x)]^{\frac{1}{p}}(\Gamma(y)]^{\frac{1}{q}}$，式中 $1<p<\infty$，$(1/p)+(1/q)=1$.

(2) $\ln\Gamma(x+1)-\ln\Gamma(x+\frac{1}{2})<\frac{1}{2}\ln(x+\frac{8x+3}{8(4x+1)})$.

(Alzer, H., [301]2000,252(1):353 ~ 363)

4. 令 $\psi(x)=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$, $x>0$，则

$$\psi(x+\frac{1}{2})-\psi(x)>\frac{2x+1}{x(4x+1)}.\ ([101]259,260)$$

5. 设 $x_k>0, k=1,\cdots,n$ 则

$$[\Gamma(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k)]^n\leqslant\prod_{k=1}^n\Gamma(x_k).$$

6. (1) $\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\mathrm{d}x>\int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha e}$. 于是 $\lim\limits_{\alpha\to 0+}\Gamma(\alpha)=\infty$.

(2) 设 $f(x)=x^r\left(\frac{e}{x}\right)^x\Gamma(x)$, $x>0$，则 f 在 $(0,\infty)$ 上严格递减的充要条件是 $r\leqslant\frac{1}{2}$.

(Math. Comput. 66(1997),373 ~ 389)

(3) $\Gamma(x)^2+\Gamma\left(\frac{1}{x}\right)^2<2\Gamma(x)^2\Gamma\left(\frac{1}{x}\right)^2$.

(4) 令 $f(x)=\left(\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+\frac{1}{2})}\right)^2$，则 f 在 $\left(-\frac{1}{2},\infty\right)$ 上严格凸，且 $f(n+1)-f(n)<1$.

(陈超平，祁锋，[339]26(2)(2006),361 ~ 364)

(5) 设 $a_k, b_k>0$, $a_k\geqslant b_k$, $M=\max\{a_k,b_k:1\leqslant k\leqslant n\}$. 令

$$F(x)=\prod_{k=1}^n\frac{\Gamma(x-a_k)}{\Gamma(x-b_k)},\qquad S_n=\sum_{k=1}^n a_k,$$

$$G(x)=\Gamma(x)^{\alpha}\Gamma(x-S_n)\left(\prod_{k=1}^{n}\Gamma(x-a_k)\right)^{-1}.$$

则 F 在(M,∞) 上对数完全单调，G 在(S_n,∞) 上严格对数完全单调 $\Leftrightarrow\alpha=n-1$.

若令 $g(x)=\Gamma(x)^{n-1}\Gamma(x+S_n)\left(\prod_{k=1}^{n}\Gamma(x+a_k)\right)^{-1}$,则 g 是 x 的递减函数.

([330]38(4)(2007),313 ~ 322,[308]123(7)(1995),2113 ~ 2118)

(6) $\left(\frac{x}{e}\right)^{x}\sqrt{2\pi x}\left(1+\frac{1}{12x}\right)<\Gamma(x+1)<\left(\frac{x}{e}\right)^{x}\sqrt{2\pi x}\left(1+\frac{1}{12x-0.5}\right),\quad x\geqslant 1.$

([339]27(4)(2007):667 ~ 670)

利用 $\log\Gamma(x)=\frac{1}{2}\log(2x)+\left(x-\frac{1}{2}\right)\log x-x+\frac{1}{12x}-\frac{\theta}{360x^3},\quad 0<\theta<1,$

可以得出 $x>0$ 时,下式成立

$$\frac{-1}{360x^3}<\log\Gamma(x)-\left[\frac{1}{2}\log(2x)+\left(x-\frac{1}{2}\right)\log x-x+\frac{1}{12x}\right]<0.$$

(7) 记 $f(x)=\dfrac{\log\Gamma(x)}{x\log x}$，则 f 在$(0,\infty)$ 上严格递增,由此推出:设 $x>1$，则

$$x^{(1-c)x-1}<\Gamma(x)<x^{x-1}.$$

式中 c 是 Euler 常数. ([308]125(1997),3355 ~ 3362)

(8) 令 $f(x)=\dfrac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+\alpha)}$,$f$ 称为 Wallis 比. 设 $\alpha\in(0,1)$，$x\geqslant 1$，则

① $\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^{1-\alpha}<f(x)<\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{\alpha+\frac{1}{2}}\right)^{1-\alpha}$;

② $\exp[(1-\alpha)\psi(x+\sqrt{\alpha})]<f(x)<\exp\left[(1-\alpha)\psi\left(x+\frac{\alpha+1}{2}\right)\right].$

([303]3(2000),239 ~ 252)

(9) 令 $f(x,y)=\dfrac{\Gamma(x)}{\Gamma(y)}$，$g(x,y)=\left(\dfrac{\Gamma(x)}{\Gamma(y)}\right)^{\frac{1}{x-y}}$，$x-y>0$，则

① f,g 分别关于 x 和 y 都是递增的.

② 若 $x>y>0$,则

$$\exp[(x-y)\psi(y+1)]<f(x+1,y+1)<\exp[(x-y)\psi(x+1)];$$

$$\exp[(x-y)\psi(y)]<\left(\frac{S_1}{y}\right)^{x-y}\exp[(x-y)\psi(y)]<f(x,y)$$

$$<\left(\frac{S_1}{A}\right)^{(x-y)}\exp\left[(x-y)\psi\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]<\exp\left[(x-y)\psi\left(\frac{x+y}{2}\right)\right].$$

式中 A，S_1 分别是 x,y 的算术平均和指数平均(见本书第一章 §3). ([303]5(1)(2002),61 ~ 67,[414]23(1)(2007),55 ~ 60 和[351]2007(2):179 ~ 191)

③ 设 $x>y>0$,则

$$\exp(y-x)\frac{x^{x-1}}{y^{y-1}}\leqslant f(x,y)\leqslant\exp(x-y)\frac{x^{x-\frac{1}{2}}}{y^{y-\frac{1}{2}}};$$

$$\exp(y-x)\frac{x^x}{y^y}\left(\frac{x}{y}\right)^{y[\psi(y)-\log y]}\leqslant f(x,y)\leqslant \exp(y-x)\frac{x^x}{y^y}\left(\frac{x}{y}\right)^{x(\psi(x)-\log x)}.$$

(Indian J. Math. 41(1999),79 ～ 93;[304]8(1)(2007),Art. 17)

(10) 设 $a\geqslant -\frac{1}{2}$, $b\geqslant 0$, $x\geqslant 1$，则

$$x^{-b}\left(\frac{x}{e}\right)^{x-1}\leqslant \Gamma(x)\leqslant ex^a\left(\frac{x}{e}\right)^x.$$ ([305]112(2005),468)

(11) 设 $A_n(a)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k$, $a_k>0$，则

$$\prod_{k=1}^n\left(\frac{\Gamma(a_k)}{a_k^{a_k-1}}\right)\leqslant\left\{\frac{\Gamma(A_n(a))}{A_n(a)^{A_n(a)-1}}\right\}^n.$$ ([305]112(2005),468)

(12) 设 $x\geqslant y\geqslant 3$, $f(x)=(\Gamma(x+1))^{\frac{1}{x}}$, $h_1(y)=\frac{7\log y}{5y}$, $h_2(x)=\frac{\log x}{5x}$，则

$$\left(\frac{x+1}{y+1}\right)^{1-h_1(y)}<\frac{f(x)}{f(y)}<\left(\frac{x+1}{y+1}\right)^{1-h_2(x)}.$$ ([409]12(1)(2009),46 ～ 47,51)

(13) 令 $f(x,y)=\left(\frac{\Gamma(x+y+1)}{\Gamma(y+1)}\right)^{\frac{1}{x}}$, $y>0$, $x>1$，则

$$\frac{f(x,y)}{f(x+1,y)}<\left(\frac{x+y}{x+y+1}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

当 $0<x<1$ 时,不等号反向.([301]352(2009),967 ～ 970)

(14) 设 $x>1$，则

$$x^{x-c}e^{1-x}<\Gamma(x)<x^{x-\frac{1}{2}}e^{1-x}.$$

式中 Euler 常数 c 与 $\frac{1}{2}$ 是最佳的. 当 $0<x<1$ 时,左边不等式仍成立,而右边不等式则反向. 设 $x+a>0$,则

$$x^{\frac{1}{2}-a-c}<\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+a)}<x^{c-a-\frac{1}{2}}.$$

式中 C 为 Euler 常数. (Far East J. Appl. Math. 35(3)(2009),393 ～ 409)

(15) 设 $x>1$，则 $0<\ln\Gamma(x)-\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)\ln x-x+\frac{1}{2}\ln(2\pi)\right]<\frac{1}{x}$(左边不等式对 $x>0$ 仍成立).

(16) $$\left(n+\frac{1}{4}+\frac{1}{32(n+1)}\right)^{1/2}<\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+(1/2))}<\frac{n+(1/2)}{\left(n+\frac{3}{4}+\frac{1}{32n+48}\right)^{1/2}}.$$

7. **Gautschi 不等式:**

$$n^{1-\alpha}\leqslant\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha)}\leqslant(n+1)^{1-\alpha},(0\leqslant\alpha\leqslant 1).$$

8. 设 $a>0$, $a-2\beta>0$,则成立 **Gurland 不等式:**

$$\frac{\alpha+\beta^2}{\alpha}\leqslant\frac{\Gamma(\alpha-2\beta)\Gamma(\alpha)}{(\Gamma(\alpha-\beta))^2}.$$

当 $\beta=0$ 或 -1 时等号成立. ([4]393)

9.　设 $\alpha > -1, \beta > -1$，则

$$\Gamma(\alpha+\beta+n+1) < cn^{\beta}\Gamma(\alpha+n+1),$$

式中 c 是与 α,β 有关的常数.([60] 中册 117)

10.　$n^{\alpha}-(n-1)^{\alpha} \geqslant \dfrac{\alpha}{n!}\Gamma(n+\alpha),(0<\alpha<1)$.

11.　我们在 No. 4 中定义的 $\psi(x)=\dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ 称为 Gauss 函数，它在应用中具有重要意义. 将 x 换成复数 z，有

$$\psi(z)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln\Gamma(z)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=-c+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z-1}{(k+1)(z+k)}=-c+\int_0^1\frac{1-(1-t)^{z-1}}{t}\mathrm{d}t.$$

$\psi(z)$ 是亚纯函数，它在点 $z=0,-1,,\cdots$ 上具有单极点，并且满足函数方程 $\psi(z+1)-\psi(z)=\dfrac{1}{z}$. 当 $|z|<1$ 时，由 $\psi(z)$ 的表示式得到

$$\ln\Gamma(1+z)=-cz+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}S_k z^k,$$

式中

$$S_k=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-k}.$$

可以用这个展开式来计算点 $z=1$ 的邻域内 $\Gamma(z)$ 的值. Γ 函数能用于表示大量的定积分、无穷乘积、级数的和，还广泛用于特殊函数、柱函数理论和解析函数论等方面.

(1)　利用 $\psi(x)\ (x>0)$ 的展开式：

$$\psi(x)=\ln x-\frac{1}{2x}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{B_k}{(2k)x^{2k}}+(-1)^{n+1}\frac{B_{n+1}}{(2n+2)x^{2n+2}}\theta,$$

$$B_1=\frac{1}{6},\ B_2=\frac{1}{30},\ B_3=\frac{1}{42},\cdots,\quad x>0,\quad 0<\theta<1$$

可以推出不等式：

$$0<\psi(x)-\left[\ln x-\frac{1}{2x}-\frac{1}{12x^2}\right]<\frac{1}{120x^4}.$$

当 $x>\dfrac{1}{2}$ 时，

$$0<\psi(x)-\ln\left(x-\frac{1}{2}\right)-\sum_{k=1}^{2n}\frac{B_{2k}\left(\frac{1}{2}\right)}{2k\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2k}}<\frac{B_{2(2n+1)}\left(\frac{1}{2}\right)}{2(n+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2(n+1)}}.$$

([303]5(3)(2000),543 ～ 555)

(2)　$0<\psi\left(x+\dfrac{1}{2}\right)-\left[\ln x+\dfrac{1}{24x^2}-\dfrac{7}{960x^4}\right]<\dfrac{1}{128x^6}$.

([301]349(2009),68 ～ 73)

(3)　因为 $\psi'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2x^2}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{B_k}{x^{2k+1}}+(-1)^n\frac{B_{n+1}}{x^{2n+3}}\theta,\quad x>0,\ 0<\theta<1$,

所以

$$0 < \psi'(x) - \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} - \frac{1}{30x^5}\right] < \frac{1}{42x^7} \quad (x > 0).$$

(4) 因为 $\psi''(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k(2k+1)\frac{B_k}{x^{2k+2}} + (-1)^{n+1}(2n+3)\frac{B_{2n+1}}{x^{2n+4}}\theta$,

$$x > 0, \quad 0 < \theta < 1.$$

所以,$x > 0$ 时,

$$0 < \psi''(x) - \left[-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} - \frac{1}{2x^4}\right] < \frac{1}{6x^6}.$$

(5) $x > 1$ 时, $\frac{1}{x} < \psi'(x) < \frac{1}{x-1}$; $\frac{1}{2x} < \ln x - \psi(x) < \frac{1}{x}$.

(6) 设 $x > 0$,则

① $\psi(x) + x\psi'(x) > 1 + \ln x$;

② $2\psi'(x) + x\psi''(x) < \frac{1}{x}$;

③ $[\psi'(x)]^2 + \psi''(x) > 0$;

④ $x^2\psi'(1+x) + x^3\psi''(1+x) < \frac{1}{2}$.(张小明等,[351]2007(2 ~ 4))

(7) ψ 是$(0,\infty)$ 上的凹函数,几何凹函数,对数凹函数和几何平均凹函数.

(8) 设 $x > 1$,则$(x+2)\psi'(x) + x(x+1)\psi''(x) > 0$.

(9) 令$g(x) = \left[\psi(x+1) - \ln\left(x - \frac{1}{2}\right)\right]x^2$, $x > 0$.

$$G(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 g(x).$$

2009 年陈昌平提出 2 个猜想:

① $g(x) > 0$, $(-1)^n[g(x)]^{(n+1)} > 0$;

② G 是$(0,\infty)$ 上严格完全单调函数.([164]66 ~ 76)

(10) 设 $x > 0$, $0 \leqslant \alpha \leqslant n$, 则

$$x \mid \psi^{(n+1)}(x) \mid > \alpha \mid \psi^{(n)}(x) \mid.$$

(祁锋等,RGMIA2006(1))

(11) 设 $x > 0$,n 为奇数,则

$$(\Gamma(x))^{(n-1)}(\Gamma(x))^{(n+1)} - \{\Gamma(x)^{(n)}\}^2 \geqslant \alpha,$$

式中 $\alpha = \min\limits_{1.5 \leqslant x \leqslant 2}\{[\Gamma(x)]^2\psi'(x)\} = 0.6359\cdots$([301]350(2009),276 ~ 282)

(12) $$\frac{B_{2(2m+1)}\left(\frac{1}{2}\right)[n+2(2m+1)-1]!}{[2(2m+1)]!\left(x - \frac{1}{2}\right)^{n+2(2m+1)}}$$

$$< (-1)^{n+1}\psi^{(n)}(x) - \frac{(n-1)!}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^n} - \sum_{k=1}^{2m}\frac{B_{2k}\left(\frac{1}{2}\right)(n+2k-1)!}{(2k)!\left(x - \frac{1}{2}\right)^{n+2k}}.$$

式中 $B_k\left(\frac{1}{2}\right)=-\left(1-\frac{1}{2^{k-1}}\right)B_k$. B_k 是 Bernoulli 数.([303]5(3)(2002),543 ~ 555)

(13)　设 $x>0$, $0\leqslant a<b$, 则

$$(b-a)\psi(x+\sqrt{ab})<\log\left(\frac{\Gamma(x+b)}{\Gamma(x+a)}\right)<(b-a)\psi\left(x+\frac{a+b}{2}\right)$$

令 $x\to 0^+$, $0<a<b$,则

$$(b-a)\psi(\sqrt{ab})<\log\left(\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)}\right)<(b-a)\psi\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

(Math. of comput. 41,164(1983),607 ~ 611)

2007 年祁锋改进为

$$(b-a)\psi(S_0)<\log\left(\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)}\right)<(b-a)\psi(S_1),$$

式中 S_0, S_1 分别为 a,b 的对数平均和指数平均(见第 1 章 §3).

同一年,张小明、祁锋等又推广为

$$(b-S_0)\psi(b)+(S_0-a)\psi(a)\leqslant\log\left(\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)}\right)\leqslant(b-a)\psi(A)-\frac{b^2-a^2}{2}\log\left(\frac{A}{S_1}\right)\psi'(A),$$

式中 $A=\frac{1}{2}(a+b)$.　([351]2007(1,3))

(14)　2007 年张小明、褚玉明证明:设 $\sqrt[3]{5}\leqslant a<b$,则

$$(b-a)\psi(S_0)\leqslant(b-S_0)\psi(b)+(S_0-a)\psi(a),$$

并猜想当 $o<a<b$ 时上式仍成立.([351]2007(4):503 ~ 507)

12.　$x>0$ 时,

$$0\leqslant\ln\Gamma(x)-\ln\left[\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}\right]\leqslant x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

由此推出

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

提示:利用 $\ln\Gamma(x)$ 的凸性.

13.　$$\left|\ln\Gamma(z)-\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z+z-\frac{1}{2}\ln(2\pi)-\sum_{k=1}^{n}\frac{B_{2k}}{2k(2k-1)z^{2k-1}}\right|$$

$$\leqslant\frac{|B_{2n+2}|}{(2n+1)(2n+2)|z|^{2n+1}}\sup_{t\geqslant0}\left|\frac{z^2}{t^2+z^2}\right|$$

式中 B_n 为 Bernoulli 数.([101]257)

14.　不完全 Gamma 函数 $\Gamma_1(x,y)$,$\Gamma_2(x,y)$ 不等式:

(1)　设 $x>0$,$a>0$,则

$$\frac{\Gamma_1(x+a,x+a)}{\Gamma_1(x,x)}<\frac{(x+a)^{x+a-1}}{x^{x-1}e^a}.$$

(Merkle,M. J. ,[306]MR93c:26018)

(2)　$x>0$ 时,$\Gamma_1(x+1,x+1)<x\Gamma_1(x,x)$.　([414]23(1)(2007),55 ~ 60,86)

(3) 设$\int_x^{x+1} e^{-t}t^x\mathrm{d}t < \left(\frac{x}{e}\right)^x$,则 $\frac{\Gamma_1(x+1,x+1)}{\Gamma_1(x,x)} < \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)}$, $\frac{\Gamma_1(x,x)}{\Gamma(x)} > \frac{1}{2}$.
([21]526)

(4) 当 $y > 0$ 时,$\Gamma_1(x,y)$ 是 x 的对数凹函数.([301]1998,223(1):151 ~ 157)

15. 设 $a_k > 0, q_k > 0, 1 \leqslant k \leqslant n, n \geqslant 2$.

$\sum_{k=1}^n q_k = 1$. $M_r(a,q) = (\sum_{k=1}^n q_k a_k^r)^{1/r}, 0 < |r| < \infty, M_0(a,q) = \prod_{k=1}^n a_k^{q_k}$ 是 $a = (a_1,\cdots,a_n)$ 的 r 阶加权幂平均,则

$$\Gamma(M_r(a,q)) \leqslant M_r(\Gamma(a_k),q_k)$$

成立的充要条件是 $0.01317\cdots \leqslant r \leqslant 11.29416\cdots$.(Alzer,H.,Monatsh. Math.,2000,131(3):179 ~ 188)

16. 设 $a,b > 0, M_p(a,b) = \left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{1/p}$,则

$M_p(\Gamma(x),\Gamma(\frac{1}{x})) \geqslant 1, x \in (0,\infty)$ 成立的充要条件是 $p \geqslant \frac{1}{c} - \frac{\pi^2}{6c^2}$. 式中 c 为 Euler 常数.(Alzer,H.,[308]2000,128(1):141 ~ 147)

17. $\sqrt{\frac{2n-3}{2n-2}} < \sqrt{\frac{2}{n-1}}\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} < \sqrt{\frac{2n-2}{2n-1}}$,

当 n 是大于 3 的奇数时,下界可改进为$(n/2)[(2n-2)(2n+1)]^{1/2}$.

18. $\sqrt{\frac{4n-3}{4n-2}} < 2^{2n-1}\sqrt{\frac{2n-1}{2\pi}}B(n,n) < \sqrt{\frac{4n-2}{4n-1}}$.

19. 设 $\frac{\Gamma(x+1/2)}{\Gamma(x+1)} = (x+\theta(x))^{-1/2}$,则当$x \geqslant -\frac{1}{2}$ 时,$\frac{1}{4} \leqslant \theta(x) \leqslant \frac{1}{2}$,而当$x \geqslant 0$ 时,$\frac{1}{4} \leqslant \theta(x) \leqslant \frac{1}{\pi}$.

20. 设 $p,q > 0$,令 $\alpha = \frac{p}{p+q}$,则$\int_0^\alpha x^p(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x < \frac{1}{2}B(p+1,q)$.([107]MR86b:26031)

21. 对于充分大的 $|z|$ 和正数 ε,有

$$\frac{1}{|\Gamma(x)|} < \exp\left[|z|\log\frac{|z|}{e} + \frac{\pi^2|z|}{2\log|z|}(1+\varepsilon)\right].$$

注意上式中的正数 ε 不能换成负数.(证明见 A. И. 马库雪维奇,解析函数论,黄正中等译,高等教育出版社,1957,467 ~ 470)

22. 设 $\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(x)}\int_x^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$,当 t 从 $0 \to \infty$ 时,φ 从 0 递增到 1/2.([305]1990,97(10):929)

23. 设 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1, x \geqslant 0$,则存在常数 c(只依赖于 α),使得
$[\Gamma(x+1)]^{1-\alpha}[\Gamma(x+2)]^\alpha \leqslant c\Gamma(x+\alpha+1)$.[336]1991,12A(6):649)

24.　$B(p,n+1)=\dfrac{n!\Gamma(p)}{\Gamma(n+p+1)}=O(n^{-p}),p>0$. ([324]1992,66(3):443 ~ 467)

25.　设 $a_k>0,\sigma_n=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k$,则

$\prod_{k=1}^{n}\Gamma(a_k)^{\Gamma(a_k)}\geqslant\exp\{n\Gamma(\sigma_n)-1\}$. ([305]1996,103(8):695)

26.　$f(x)=\dfrac{e^{ax}\Gamma(x)}{x^x}$, $g(x)=e^{\frac{a}{x}}[\Gamma(x)]^{\frac{1}{x}}$ 的几何凸性及相关不等式.(张小明等,[351] 2005(4):330 ~ 345,2006(1):5 ~ 16)

(三) 双重 Gamma 函数不等式

双重 Gamma 函数 G 定义为下述整函数:

$$G(z+1)=(2\pi)^{\frac{z}{2}}\exp\left(-\frac{z}{2}-\frac{1}{2}(c+1)z^2\right)\prod_{k=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{k}\right)^k\exp\left(-z+\frac{z^2}{2k}\right)\right\},$$

式中 c 为 Euler 常数.

已知 $G(1)=1$, $G(z+1)=G(z)\Gamma(z)$. 设 $x>0$,则

(1)　$$[\Gamma(x)]^{\frac{x}{2}}x^x(2\pi)^{\frac{x}{2}}\exp\left(-\left(\frac{x+x^2}{2}\right)\right)$$

$$<G(x+1)<\left(\frac{\Gamma(x)}{\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^x(8\pi)^{\frac{x}{2}}\exp\left(-\left(\frac{x+x^2}{2}\right)\right).$$

(2)　$$(2\pi)^{\frac{x}{2}}\exp\left[\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}\psi\left(\frac{x}{2}\right)\right]<G(x+1)<(2\pi)^{\frac{x}{2}}\exp\left[-\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}\psi(x)\right].$$

([301]351(2009),182 ~ 185)

二、 Riemann-zeta 函数不等式

Riemann zeta 函数 $\zeta(z)$ 是由下述 Dirichlet 级数定义:

$$\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z},\quad z=x+iy.$$

当 $x>1$ 时,有 Euler 乘积表示:

$$\zeta(z)=\prod_{p}(1-\frac{1}{p^z})^{-1}.$$

式中 p 遍历全体素数,$\zeta(z)$ 还可解析延拓到整个复平面上.

著名的 Riemann猜想是:$\zeta(z)$ 的所有非平凡零点均位于直线 $x=1/2$ 上,($\zeta(z)$ 有负偶数 $-2,-4,\cdots$,的零点称为平凡零点). 通过计算机的计算已知 Riemann猜想对于 2×10^{20} 以内的零点成立,但仍然是 2000 年 Clay 数学促进会公布的七个新千年数学奖问题之一.

1.　$\limsup\limits_{y\to\infty}\dfrac{|\zeta(1+iy)|}{\ln\ln y}\geqslant e^c$;　$\limsup\limits_{y\to\infty}\dfrac{|\zeta(1+iy)|^{-1}}{\ln\ln y}\geqslant\dfrac{6}{\pi^2}e^c$.

若 Riemann 猜想成立,则上述两个上极限分别不超过 $2e^c$ 和 $\dfrac{12}{\pi^2}e^c$,其中 c 为 Euler 常数.(Titchmarsh,E. C. ,The theory of the Riemann zeta-function,Clarendon Press,1986)

2.　令 $f(x)=\limsup_{y\to\infty}\frac{\ln|\zeta(x+iy)|}{\ln y}$，$-\infty<x<\infty$. 则

$$f(x)\leqslant(1/2)(1-x),0\leqslant x\leqslant 1.$$

Lindelöf 猜想：

$$f(x)=\begin{cases}(1/2)-x, & x<1/2,\\ 0, & x\geqslant 1/2.\end{cases}$$

Lindelöf 猜想比 Riemann 猜想要弱.([97]Vol. 1:46 ~ 49)

3. (1)　当 $x>1$ 时，$\zeta(x)$ 是 x 的递减函数，而且当 $x\geqslant 2$ 时，$\zeta(x)\leqslant\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$.

([301]1986,118(1):84)

(2)　$\zeta(2n+2)+3\zeta(2n-2)\leqslant\frac{2}{3}\pi^2$.　([399]22(2009),743 ~ 748)

4.　$\zeta(z)=\frac{1}{z-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}c_n(z-1)^n$. 式中 $c_n=\lim_{m\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{m}\frac{(\ln k)^n}{k}-\frac{(\ln m)^{n+1}}{n+1}\right\}$

称为**广义 Euler 常数**. 特别地，c_0 就是通常的 Euler 常数.([101]807)

5.　设 $S(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{1+x}}$，$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{1+x}}$，$R_n(x)=S(x)-S_n(x)$，$x>0$，则

(1)　$(1/2)+(1/x)<S(x)<1+(1/x)$;

(2)　$\frac{2n-x}{2xn^{(1+x)}}<R_n(x)<\frac{2n-x}{2xn^{(1+x)}}+\frac{1+x}{2n^{(2+x)}}$.([345]1991,11:36 ~ 37)

三、　指数积分不等式

指数积分定义为：

$$E_1(z)=\int_z^{\infty}\frac{1}{t}e^{-t}\mathrm{d}t,(|\arg z|<\pi).\ E_n(z)=\int_1^{\infty}\frac{e^{-zt}}{t^n}\mathrm{d}t,\mathrm{Re}z>0,n=0,1,2,\cdots,$$

则当 $x>0$，对于 $n=1,2,3\cdots$，有

1.　$\frac{n-1}{n}E_n(x)<E_{n+1}(x)<E_n(x)$.

2.　$E_n^2(x)<E_{n-1}(x)E_{n+1}(x)$.

3.　$\frac{1}{x+n}<e^xE_n(x)<\frac{1}{x+n-1}$.

4.　$(1/2)\ln[(1+(2/x)]<e^xE_1(x)<\ln[1+(1/x)]$.

5.　$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{E_n(x)}{E_{n-1}(x)}\right)>0$.

(以上见[101]229)

四、　Bessel 函数不等式

第一类 Bessel 函数 $J_\alpha(z)$ 定义为

$$J_\alpha(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(z/2)^{\alpha+2k}}{k!\Gamma(\alpha+k+1)},z=x+iy.$$

1. $|J_\alpha(x)| \leqslant c_\alpha[\exp(\pi|\mathrm{Im}\alpha|)]x^{-1/2}, (x > 0, \mathrm{Re}x > -1/2)$;

2. $|J_\alpha(x)| \leqslant \begin{cases} c_\alpha x^{-1/2}, x \geqslant 1, \\ c_\alpha x^\alpha, \quad 0 < x < 1. \end{cases}$

3. $|J_\alpha(x)| \leqslant 1, (\alpha \geqslant 0)$.

4. $|J_\alpha(x)| \leqslant 1/\sqrt{2}, (\alpha \geqslant 1)$.

5. $0 < J_\alpha(x) < \dfrac{2^{1/3}}{3^{2/3}\alpha^{1/3}\Gamma(2/3)}, (\alpha > 0)$.

6. $|J_\alpha(z)| \leqslant \dfrac{\left|\frac{1}{2}z\right|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\exp|\mathrm{Im}z|, (\alpha \geqslant -\frac{1}{2})$ 式中 $\mathrm{Im}z = y$.

7. $|J_n(nz)| \leqslant \left|\dfrac{z^n\exp(n\cdot\sqrt{1-z^2})}{(1+\sqrt{1-z^2})^n}\right|$.

(以上见[101]362)

8. **Cauchy 不等式：** $|J_n(z)| \leqslant \dfrac{1}{n!}\left|\dfrac{1}{2}z\right|^n\exp(\dfrac{1}{4}|z|^2)$.

9. 设 $\alpha > -1, x > \dfrac{\pi}{16(\alpha+2)}\{\pi + [\pi^2 + 32(\alpha+2)]^{1/2}\}$，则

$$(x+1)^{\alpha+1}J_\alpha\left(\frac{\pi}{x+1}\right) - x^{\alpha+1}J_\alpha\left(\frac{\pi}{x}\right) > \left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

(Mahajan, A., [331]1979, 634 ~ 677: 70 ~ 71)

10. 设 $\alpha > 0, 0 \leqslant x \leqslant 1$，则

$$1 \leqslant x^{-\alpha}\frac{J_\alpha(\alpha x)}{J_\alpha(\alpha)} \leqslant \exp[\alpha(1-x)].$$

(证明见[385]1984, 15: 203 ~ 205)

11. 设 $\alpha \geqslant 1, \alpha > \beta > -\dfrac{1}{2}$，则

$$\int_0^\infty \frac{|J_\alpha(t)|}{t^{\beta+1}}\mathrm{d}t \leqslant ce^{-(\beta+\frac{1}{2})}.$$ ([301]1993, 179: 507 ~ 511)

12. 第一类 α 阶广义 Bessel 函数定义为

$$V_\alpha(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k c^k}{k!\Gamma(\alpha+k+\frac{b+1}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\alpha}.$$

特别当 $c = b = 1$ 时，$V_\alpha(x)$ 即为 $J_\alpha(x)$.

标准化的广义 Bessel 函数定义为

$$B_\alpha(x) = a_0 x^{-\frac{\alpha}{2}}V_\alpha(x^{\frac{1}{2}}),$$

式中 $a_0 = 2^\alpha\Gamma\left(\alpha + \dfrac{b+1}{2}\right)$.

令 $\sigma(r) = \dfrac{B_\alpha(1-r^2)}{B_\alpha(r^2)}, r \in (0,1)$. 则当 $c > 0$, $2\alpha+b+1 > 0$, $r_k \in (0,1)$ 时，下式成立

$$\left[\prod_{k=1}^m \sigma(r_k)\right]^{\frac{1}{m}} \leqslant \sigma\left[\left(\prod_{k=1}^m r_k\right)^{\frac{1}{m}}\right],$$

仅当 $r_1 = \cdots = r_m$ 时等号成立.

当 $m = 2$ 时,$\sqrt{\sigma(r_1)\sigma(r_2)} \leqslant \sigma(\sqrt{r_1 r_2})$ 成立.(Baricz[301]319(2006),450 ~ 459)

五、 上、下确界不等式

设函数 f,g 定义在集 A 上,则

1. $\inf\{f(x)\} + \inf\{g(x)\} \leqslant \inf\{f(x)+g(x)\} \leqslant \inf\{f(x)\} + \sup\{g(x)\}$
$\leqslant \sup\{f(x)+g(x)\} \leqslant \sup\{f(x)\} + \sup\{g(x)\}$;

2. 若 f,g 在集 A 上非负,则
$\inf\{f(x)\}\cdot\inf\{g(x)\} \leqslant \inf\{f(x)g(x)\} \leqslant \inf\{f(x)\}\sup\{g(x)\} \leqslant \sup\{f(x)\cdot g(x)\} \leqslant \sup\{f(x)\}\cdot\sup\{g(x)\}$.

3. 单调性:设 $f(x) \leqslant g(x)$, $\forall x \in A$,则

$$\inf\{f(x)\} \leqslant \inf\{g(x)\}, \sup\{f(x)\} \leqslant \sup\{g(x)\}.$$

上述上、下确界均在集 A 上取.

4. 设 $A_1 \subset A_2$,则

$$\inf\{f(x):x\in A_1\} \geqslant \inf\{f(x):x\in A_2\};$$
$$\sup\{f(x):x\in A_1\} \leqslant \sup\{f(x):x\in A_2\}.$$

5. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续,则

$$m(x) = \inf\{f(t):a\leqslant t\leqslant x\} \text{ 在}[a,b]\text{上递减}$$
$$M(x) = \sup\{f(t):a\leqslant t\leqslant x\} \text{ 在}[a,b]\text{上递增}.$$

六、 上、下极限不等式

1. 1984 年,匡继昌证明:设 f 定义在 (a,∞) 上且在 (a,∞) 的任何有限子区间上均有界,g 在 (a,∞) 上严格递增到 ∞,则对任意常数 $c>0$,下式成立

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{f(x+c)-f(x)}{g(x+c)-g(x)} \leqslant \liminf_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \limsup_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \limsup_{x\to\infty}\frac{f(x+c)-f(x)}{g(x+c)-g(x)}.$$

由此可以推出,若 f 定义在 $(0,\infty)$ 上且在 $(0,\infty)$ 的任一有限子区间上有界,则

(1) $\liminf\limits_{x\to\infty}[f(x+1)-f(x)] \leqslant \liminf\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \leqslant \limsup\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \leqslant \limsup\limits_{x\to\infty}[f(x+1)-f(x)]$;

(2) 当 $f(x)\geqslant c>0$,(c 为常数,$x>0$),则

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)} \leqslant \liminf_{x\to\infty}[f(x)]^{1/x} \leqslant \limsup_{x\to\infty}[f(x)]^{1/x} \leqslant \limsup_{x\to\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)}.$$

(湖南师院学报 1984,3:105 ~ 112,MR88m:26001)

2. $\liminf\limits_{x\to x_0} f(x) + \liminf\limits_{x\to x_0} g(x) \leqslant \liminf\limits_{x\to x_0}\{f(x)+g(x)\} \leqslant \liminf\limits_{x\to x_0} f(x) + \limsup\limits_{x\to x_0} g(x)$
$\leqslant \limsup\limits_{x\to x_0}\{f(x)+g(x)\} \leqslant \limsup\limits_{x\to x_0} f(x) + \limsup\limits_{x\to x_0} g(x)$.

3. 设 $f,g\geqslant 0$,则

$\liminf\limits_{x\to x_0} f(x)\liminf\limits_{x\to x_0} g(x) \leqslant \liminf\limits_{x\to x_0}\{f(x)g(x)\} \leqslant \liminf\limits_{x\to x_0} f(x)\limsup\limits_{x\to x_0} g(x)$

$\leqslant \limsup\limits_{x \to x_0}\{f(x)g(x)\} \leqslant \limsup\limits_{x \to x_0} f(x) \limsup\limits_{x \to x_0} g(x)$.

七、 Zygmund 函数类不等式

Zygmund 函数类定义为 $Z = \{f: f \in C[-1,1], \mid f(x_1) - 2f(\frac{x_1 + x_2}{2}) + f(x_2) \mid \leqslant \mid x_1 - x_2 \mid, x_1, x_2 \in [-1,1], f(-1) = f(1) = 0\}$,

令 $\| f \|_c = \sup\{\mid f(x) \mid : -1 \leqslant x \leqslant 1\}, K = \sup\{\| f \|_c : f \in Z\}$.

(1) 1951 年 Timan 证明:$K < 4/3$, 随后 Abramov, L. M. 证明 $K \leqslant (4/3) - (1/288)$, 1976 年, Sokolova. I. P. 证明:

$$K \leqslant (4/3) - (4/381).$$

(2) 若 f 还满足 $f(-x) = f(x)$, 则 $K \leqslant \frac{5}{4}$.

问题:K 的最好上界是什么?

八、 其他

1. 设函数 f, g 定义在整个实轴上,且对于所有实数 x, y,下式成立

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)g(y).$$

若 $f(x) \not\equiv 0$,且对于所有实数 x,有 $\mid f(x) \mid \leqslant 1$,则对于所有实数 y, $\mid g(y) \mid \leqslant 1$ 成立.

证 用反证法.反设存在 y_0,使得

$\mid g(y_0) \mid = 1 + \alpha \ (\alpha > 0)$,令 $M = \sup \mid f(x) \mid$,则对于所有 x,有

$2 \mid f(x) \mid \cdot \mid g(y_0) \mid = \mid f(x+y_0) + f(x-y_0) \mid \leqslant \mid f(x+y_0) \mid + \mid f(x-y_0) \mid \leqslant 2M$.

所以

$$\mid f(x) \mid \leqslant \frac{M}{\mid g(y_0) \mid} = \frac{M}{1+\alpha} = M - \beta, \text{式中 } \beta = \frac{M\alpha}{1+\alpha} > 0$$

这与 M 的定义相矛盾.

2. 设 $g(x)$ 是方程 $[x + g(x)]^p + \mid x - g(x) \mid^p = 2x$ 的唯一非负解, $1 < p < 2$, $0 \leqslant x \leqslant 1/2$, 则

$$[1 - x + g(x)]^p + \mid 1 - x - g(x) \mid^p \leqslant 2(1-x). \tag{3.9}$$

证 令 $y = 1 - x$,从条件知 $x \leqslant g(x) \leqslant y$.

(3.9) 式左边 $= [1 + (g(x) - x)]^p + [1 - (x + g(x))]^p$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} (g(x) - x)^k + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} (g(x) + x)^k$$

$$\leqslant 2 - 2px + 2x \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \binom{p}{k} (-1)^k = 2(1-x).$$

3. [MCU] 设函数 f 在区间 $[0,1]$ 上有 m 阶连续导数,当 $k = 0, 1, \cdots, m-1$ 时, $f^{(k)}(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上都不取零值,而对于区间 $[0,1]$ 中所有 x,有 $\mid f^{(m)}(x) \mid \geqslant M$,令 $\| f \| = \max\{\mid f(x) \mid : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$,则 $\| f \| \geqslant \frac{M}{m!}$. ([63]77 ~ 78)

4. [MCU]. 设函数 f,g 定义在实数集 R^1 上，则存在 x,y，使得 $0\leqslant x,y\leqslant 1$，且

$$|xy-f(x)-g(x)|\geqslant 1/4.$$

提示：利用三角不等式，有

$$1=|[1-f(1)-g(1)]+[f(1)+g(0)]+[f(0)+g(1)]-[f(0)+g(0)]|$$
$$\leqslant|1-f(1)-g(1)|+|f(1)+g(0)|+|f(0)+g(1)|+|f(0)+g(0)|,$$

上式右边四个绝对值中至少有一个不小于 1/4. 因此在 $(0,0)$，$(0,1)$，$(1,0)$ 及 $(1,1)$ 四个点中，至少有一点的坐标满足所要证的不等式.

5. [MCU]. 设函数 f 在区间 $[0,1]$ 上可积，且对于 $k=0,1,\cdots,n-1$，都有 $\int_0^1 x^k f(x)\mathrm{d}x=0$，而 $\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x=1$. 则在区间 $[0,1]$ 的某个正测度集内，有

$$|f(x)|\geqslant 2^n(n+1).$$

提示：用反证法. 设除区间 $[0,1]$ 的零测度子集外，恒有 $|f(x)|<2^n(n+1)$，则

$$1=\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^n f(x)\mathrm{d}x<2^n(n+1)\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|^n\mathrm{d}x=1,$$

这是不可能的，故不等式得证.

6. **Lyapunov 不等式**：设曲面 (S) 的方程为 $z=f(x)$，其中 $x=(x_1,x_2)\in D$，$\theta(x,y)$ 为曲面 (S) 在 $x,y(\in D)$ 两点的法线之间的夹角，$d(x,y)$ 为点 x 与 y 之间的距离，若 D 为有界闭域，f 在 D 内存在有界的二阶导数，则 $\theta(x,y)<cd(x,y)$. 式中 c 为常数.

7. 设 $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{[x]}\dfrac{(-1)^k(x-k)^k e^{(x-k)}}{k!}$，$x>0$. 则 $f(x)<2x+1$.

证明思路：$f(x)=\begin{cases}e^x, & 0<x<1,\\ e^x-(x-1)e^{x-1}, & 1\leqslant x<2.\end{cases}$

而 $x>1$ 时，$\int_{x-1}^x f(t)\mathrm{d}t=f(x)-1$.

再考虑线性泛函方程：$F(x)=1+\int_{x-1}^x F(t)\mathrm{d}t$. ([305]104(10)(1997), 981 ~ 982)

第九章　复数与解析函数不等式

§1　复数不等式

在“符号说明”中,我们总记 $z=x+iy$, $\bar{z}=x-iy$. $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$, $-\pi<\arg z\leqslant\pi$.

1. (1) $\max\{|x|,|y|\}\leqslant|z|\leqslant 2\max\{|x|,|y|\}$.

   (2) $|z-1|\leqslant||z|-1|+|z|\cdot|\arg z|$. $(z\neq 0)$.

   (3) $\left|\dfrac{z}{|z|}-1\right|\leqslant|\arg z|$.

   (4) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(|x|+|y|)\leqslant|z|\leqslant|x|+|y|$.

2. 设 $z=|z|e^{i\alpha}$, α 为实数,则对任意实数 β,下式成立

   $|z-e^{i\alpha}|\leqslant|z-e^{i\beta}|\leqslant|z+e^{i\alpha}|$.

3. 设 x,y 为实数,则

$$\left|\frac{x-i}{x+i}-\frac{y-i}{y+i}\right|\leqslant 2|x-y|.$$

4. $\left|\dfrac{\sqrt{1-z^2}}{(1+\sqrt{1-z})^2}\right|\leqslant\dfrac{\sqrt{6}}{9}\ (|z|\leqslant 1)$,

其中上界$\dfrac{\sqrt{6}}{9}$是最好的.(证明见[8]176 ~ 177)

5. $|x|^3+|y|^3\leqslant|z|^3\leqslant\sqrt{2}(|x|^3+|y|^3)$.

提示:将复数 z 用极坐标表示,问题变成求函数 $f(\theta)=\sin^3\theta+\cos^3\theta$ 在区间$[0,\dfrac{\pi}{2}]$上的最大最小值.

6. $1+2(z+\bar{z})+|z|^2+\dfrac{1}{5}|z|^4\leqslant|1+z|^4\leqslant 1+2(z+\bar{z})+8|z|^2+3|z|^4$.

证　令 $z=re^{it}$,则

$F=|1+z|^4-\{1+2(z+\bar{z})+|z|^2+(1/5)|z|^4\}$

$\quad=2r^2\cos 2t+3r^2+4r^3\cos t+\dfrac{4}{5}r^4=\dfrac{4}{5}r^2+(4\cos t)r+(3+2\cos 2t)$.

只要证明对于所有 t 及所有 $r\geqslant 0$,有 $F\geqslant 0$. 这只要注意到判别式

$\Delta=16\cos^2 t-\dfrac{16}{5}(3+2\cos 2t)=-\dfrac{8}{5}(1-\cos 2t)\leqslant 0$,即可证明左边不等式. 为证右边不等式,只要注意到

$|1+z|^4\leqslant 1+2(z+\bar{z})+6|z|^2+4|z|^3+|z|^4$

以及 $|z|^3 \leqslant \frac{1}{2}(|z|^2 + |z|^4)$.

7. (1) 设 $1 \leqslant p \leqslant 2, 1/p + 1/q = 1$,则

$$|z_1 + z_2|^q + |z_1 - z_2|^q \leqslant 2\{|z_1|^p + |z_2|^p\}^{q-1}.\text{(Clarkson 不等式)}$$

(2) 设 $0 < p, q \leqslant \infty$,则

$$(|z_1 + z_2|^q + |z_1 - z_2|^q)^{\frac{1}{q}} \leqslant C(|z_1|^p + |z_2|^p)^{\frac{1}{p}},$$

式中 $C = \max\{2^{1-\frac{1}{p}}, 2^{\frac{1}{q}}, 2^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}}\}$ 是最佳常数.

(3) 记 $A_p = (|z_1|^p + |z_2|^p)^{\frac{1}{p}}$, $B_p = (|z_1 + z_2|^p + |z_1 - z_2|^p)^{\frac{1}{p}}$.

则当 $p > 0$ 时 A_p, B_p 递减, $2^{-\frac{1}{p}}A_p$, $2^{-\frac{1}{p}}B_p$ 递增. 而且

① 若 $0 < q \leqslant 2 \leqslant p$, 则 $B_q \leqslant 2^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}B_2 = 2^{\frac{1}{q}}A_2 \leqslant 2^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}}A_p$;

② 若 $q \geqslant 2$, $p \geqslant q'$, 则 $B_q \leqslant 2^{\frac{1}{q}}A_{q'} \leqslant 2^{1-\frac{1}{p}}A_p$;

③ 若 $p, q \leqslant 2$, 则 $B_q \leqslant 2^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}B_2 = 2^{\frac{1}{q}}A_2 \leqslant 2^{\frac{1}{q}}A_p$;

④ 若 $q \geqslant 2$, $q' \geqslant p$, 则 $B_q \leqslant 2^{\frac{1}{q}}A_{q'} \leqslant 2^{\frac{1}{q}}A_p$.

在 ① 中仅当 $(z_1, z_2) = (1, i)$, 在 ② 中仅当 $(z_1, z_2) = (1, 1)$, 在 ③④ 中仅当 $z_1 = 1$, $z_2 = 0$ 时等号成立. 式中

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \qquad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

((2)(3) 见 L. Maligranda 等,[417]280(12)(2007):1363 ~ 1375)

(4) 设 r 为非零实数, $s > 0$, $p = \frac{1}{r} - \frac{1}{s} - \frac{1}{q}$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$, 式中

$$q = \begin{cases} \min\{2, s\}, & \text{若 } r \leqslant 2, \\ \min\{r', s\}, & \text{若 } r > 2. \end{cases}$$

则

$$(|z_1 + z_2|^r + |z_1 - z_2|^r)^{\frac{1}{r}} \leqslant 2^p(|z_1|^s + |z_2|^s)^{\frac{1}{s}}.$$

([417]155(1992),187 ~ 197)

(5) 设 $2 < p < \infty$, 则存在常数 $c_1 \sim c_4$,使得

$$c_1|z|^2 + c_2|z|^p \leqslant |1 + z|^p - (1 + p\mathrm{Re}z) \leqslant c_3|z|^2 + c_4|z|^p,$$

式中 $0 < c_1 < \frac{p}{2}$, $\quad 0 < c_2 \leqslant \min\left\{\frac{(t-1)^p + pt - 1 - c_1t^2}{t^p} : t \geqslant 2\right\}$,

$$1 < c_4 < \infty, \quad \sup\left\{\frac{(t+1)^p - 1 - pt - c_4t^p}{t^2} : t > 0\right\} \leqslant c_3 < \infty.$$

当 $p = 2$ 时, $0 < c_1 < 1$, $c_2 = 1 - c_1$, $c_3 = 1 - c_4$.

(Leinder, Acta Sci. Math. Hung. 33(1972),225 ~ 230)

我们问:$c_1 \sim c_4$ 的最佳值是多少?

(6) 设 $|t| \leqslant 1$, $1 < p < \infty$, 则

$$|z_1|^p - |z_1 - z_2|^p \leqslant \frac{1}{t}(|z_1 + tz_2|^p - |z_1|^p) \leqslant |z_1 + z_2|^p - |z_1|^p.$$

(7) $z_1 = r_1 e^{it_1}$, $z_2 = r_2 e^{it_2}$.

$$|r_2\cos t_2 - r_1\cos t_1| \leqslant |z_2 - z_1| \leqslant |r_2 - r_1| + 2(r_2 r_1)^{\frac{1}{2}}\sin|t_2 - t_1|.$$

(8) $|(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)^{\frac{1}{2}}| \leqslant \max\{|z_1| + |z_2|, |z_2| + |z_3|, |z_3| + |z_1|\}$.

([305]112(10)(2005),933)

(9) 设 $|z| \leqslant 1$,章仁江证明下述不等式中的常数均为最佳:

① $(\sin 1)|z| \leqslant |\sin z| \leqslant \frac{1}{2}(e - e^{-1})|z|$;

② $\cos 1 \leqslant |\cos z| \leqslant \frac{1}{2}(e + e^{-1})$;

③ $\frac{e^2 - 1}{e^2 + 1}|z| \leqslant |\tan z| \leqslant |z|(\tan 1)$;

④ $(1 - e^{-1})|z| \leqslant |e^z - 1| \leqslant (e - 1)|z|$.([401]2008)

(10) 设 $|z_k| \leqslant 1$, $|w_k| \leqslant 1$,则

$$\left|\prod_{k=1}^n z_k - \prod_{k=1}^n w_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^n |z_k - w_k|.$$

8. [MCM]**Clarkson 不等式**:设 z,ω 为复数,$\alpha \geqslant 2$,则

$$2(|z|^\alpha + |\omega|^\alpha) \leqslant |z + \omega|^\alpha + |z - \omega|^\alpha \leqslant 2^{\alpha-1}(|z|^\alpha + |\omega|^\alpha).$$

提示:不妨设 $|z| \geqslant |\omega|$,于是可以令 $\omega = zre^{i\theta}(0 \leqslant r \leqslant 1)$,左边不等式归结成要证 $1 + r^\alpha \leqslant (1 + r^2)^{\alpha/2}$.

9. $\max\{|z_1|, |z_2|\} \leqslant |z_1| + |z_2| \leqslant 2\max\{|z_1|, |z_2|\}$.

10. [MCM].设 $|z_k| < 1, k = 1,\cdots,n$ $(n > 3)$,而且

$\sum_{k=1}^n z_k = 0$,则至少有两个复数 $z_k, z_j (k \neq j)$,使得 $|z_k + z_j| < 1$.

11. 设复数 z_1, z_2 不为 0,则

$$|z_1 \pm z_2| \geqslant \frac{1}{2}(|z_1| + |z_2|)\left|\frac{z_1}{|z_1|} \pm \frac{z_2}{|z_2|}\right|,$$

仅当 $|z_1| = |z_2|$ 时等号成立.

12. 设 a_1, a_2 为不同时为 0 的实数,则

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_1^2 + z_2^2| \leqslant 2\frac{|a_1 z_1 + a_2 z_2|^2}{a_1^2 + a_2^2} \leqslant |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_1^2 + z_2^2|.$$

提示:令 $\mathrm{tg}\beta = a_1/a_2$,将表达式写成 $f(\beta) = A + B\sin 2\beta + C\cos 2\beta$,求 $f(\beta)$ 的最大最小值.

13. 设 a,b 为实数,$a \neq 0, b \neq 0, a + b \neq 0$,若 $1/a + 1/b > 0$,则

$$\frac{|z_1 + z_2|^2}{a + b} \leqslant \frac{1}{a}|z_1|^2 + \frac{1}{b}|z_2|^2.$$

若 $1/a + 1/b < 0$,则不等号反向,仅当 $az_2 = bz_1$ 时等号成立.

14. 设 $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1$,则

$$\left|\frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2}\right| < 1, \quad |z_1^n + z_2^n| < |1 + z_1^n \cdot \bar{z}_2^n|.$$

15.　设 $|z_1| \leqslant r < R < 1$，$|z_2| = 1$，则

$$\frac{1+Rr}{R+r} \leqslant \frac{R|z_1|+1}{R+|z_1|} \leqslant \left|\frac{Rz_1 - z_2}{R - \bar{z}_1 z_2}\right| \leqslant \frac{1-R|z_1|}{R-|z_1|} \leqslant \frac{1-Rr}{R-r}.$$

（证明见[334]1992，35(1)：76）

16.　设 $0 < |z_1| < 1$，$|z_2| \leqslant \gamma < 1$，则

$$\left|\frac{z_1 + |z_1| z_2}{(1-\bar{z}_1 z_2) z_1}\right| \leqslant \frac{1+\gamma}{1-\gamma}.$$

17.　设 $z_k = x_k + iy_k$，$1 \leqslant k \leqslant n$，则

$$\left|\mathrm{Re}\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} z_k^2}\right)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k|.$$

提示：利用 Cauchy 不等式.

18.　设 $|z| = 1$，则 $0 \leqslant |z^2 - z + 1| \leqslant 3$.

提示：令 $z = \cos\theta + i\sin\theta$，则 $|z^2 - z + 1| = |2\cos\theta - 1|$.

19.　$\mathrm{Re}\left(\sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{n} z_j z_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2$，仅当 $z_1 = z_3 = z_5 = \cdots = \bar{z}_2 = \bar{z}_4 = \bar{z}_6 = \cdots$ 时，等号成立.

20.　设 $\mathrm{Re}z \geqslant 1$，则 $|z^{n+1} - 1| > |z|^n |z-1|$.

（证明见[305]1962，69：927 ～ 928）

21.　设 $z = e^{i\alpha}\cos\alpha$，$0 < \alpha < \pi/2$，则 $|1-z| < |1-z^n|$.（[305]1968，75：85）

22.　设 $|\arg z_1 - \arg z_2| \leqslant \theta \leqslant \pi$，则

$$|z_1 - z_2|^n \leqslant (|z_1|^n + |z_2|^n)\max\left\{1, 2^{n-1}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^n\right\}.$$

23.　对于任意复数 $z_1, \cdots, z_n$，都存在 $\{1, \cdots, n\}$ 的一个子集 M，使得

$$\left|\sum_{k \in M} z_k\right| \geqslant \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

其中常数 $1/\pi$ 是最好的.（证明及其推广见[4]456 ～ 457）

24.　设 $|z + 1/z| = 1$，则

$$\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) \leqslant |z| \leqslant \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1), \tag{1.1}$$

$$k\pi + \pi/3 \leqslant \mathrm{Arg}z \leqslant k\pi + \frac{2}{3}\pi, (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots). \tag{1.2}$$

提示：将复数 z 用极坐标表示：$z = re^{i\theta}$，代入

$$|z + 1/z| = 1，得\ r^2 + r^{-2} + 2\cos 2\theta = 1. \tag{1.3}$$

即　$$r^4 + (2\cos 2\theta - 1)r^2 + 1 = 0. \tag{1.4}$$

由判别式 $\Delta = (2\cos 2\theta - 1)^2 - 4 \geqslant 0$，即可推得(1.2)式，再由(1.3)式，得 $2 \leqslant r^2 + r^{-2} \leqslant 3$，由此即可推得(1.1)式成立.

25.　[MCM]设 $|z_k|$ $(1 \leqslant k \leqslant 3)$ 不全小于或等于 1，$\alpha \leqslant 2/3$，则

$$\alpha\left(\sum_{k=1}^{3}|z_k|\right)\leqslant 1+\left|\sum_{k=1}^{3}z_k\right|+|z_1\cdot z_2\cdot z_3|+|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|. \qquad (1.5)$$

若 $z_k(1\leqslant k\leqslant 3)$ 为任意复数，则使以上不等式成立的 α 的最大值为 $2^{-(2/3)}$.

提示：不妨设 $|z_1|\geqslant|z_2|\geqslant|z_3|$. 令 $z_2=bz_1,z_3=cz_1$，则由假设 $|z_1|>1$，$|c|\leqslant|b|\leqslant 1$，引入辅助函数

$$f(t)=1+t|1+b+c|+t^2|b+c+bc|+t^3|bc|-\alpha t(1+|b|+|c|). \qquad (1.6)$$

易证 $f'(t)\geqslant(1-2|c|)^2/3\geqslant 0(t\geqslant 1)$，从而由 $|z_1|>1$ 得 $f(|z_1|)\geqslant f(1)\geqslant 0$. 当 z_1，z_2,z_3 为任意复数时，还要考虑 $1\geqslant|z_1|\geqslant|z_2|\geqslant|z_3|$ 的情形. 在(1.6)式中令 $t=|z_1|$，求得 $f(t)\geqslant 1+t^3-3\alpha t$. 令 $g(t)=1+t^3-3\alpha t$，从 $g'(t)=0$ 求出 $t=\sqrt{\alpha}$，又 $g''(t)=6>0$，知当 $t=\sqrt{a}$ 时 $g(t)$ 有最小值. 由 $g(\sqrt{a})=0$ 解出 $a=2^{-(2/3)}$，且当 $z_1=z_2=z_3=(\sqrt[3]{4}/2)\exp(i2\pi/3)$ 时，(1.5)式中等号成立.

26.　设 $|z_1|\leqslant r$，$|z_2|\leqslant r$，$z_1\neq z_2$，则

$$\left|\frac{z_1^n-z_2^n}{z_1-z_2}-nz_2^{n-1}\right|\leqslant\frac{1}{2}n(n-1)r^{n-2}|z_1-z_2|.$$（证明见[4]440～441）

27.　设 $z_1,\cdots,z_n$ 为复数 $(n\geqslant 3)$，$z_{n+1}=z_1$，则

$$\sum_{k=1}^{n}|z_k-z_{k+1}|^2\geqslant 2\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right)\operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n}\bar{z}_kz_{k+1}\right),$$

仅当 $z_k=\alpha\exp\left(\frac{2\pi ik}{n}\right)+\beta\ (1\leqslant k\leqslant n)$ 时等号成立，其中 α,β 为任意复数.（[4]432）

28.　设 $\sum|z_k|\leqslant a<1$，（k 从 1 到 n），则

$$\left|\prod(1+z_k)-1-\sum z_k\right|\leqslant\frac{a^2}{1-a}.$$（Bourbaki，N，[4]432～433）

29.　设 $z=e^{i\theta}$，则

(1)　$|z^{2n}-1|\leqslant 2n|\sin\theta|$.

(2)　$\displaystyle\sum_{k=n}^{n+m}|z^{2k}-1|\leqslant(2n+m)(m+1)|\sin\theta|$.

提示：用数学归纳法.

30.　**反向三角不等式**：设 $\alpha\in R^1$，$0<\theta<\pi/2$，$\alpha-\theta\leqslant\arg z_k\leqslant\alpha+\theta$，$k=1,\cdots,n$，则有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}z_k\right|\geqslant(\cos\theta)\sum_{k=1}^{n}|z_k|.$$

证　$|\sum z_k|=|e^{i\alpha}\sum z_k|\geqslant\operatorname{Re}(e^{-i\alpha}\sum z_k)=\sum|z_k|\cos(-\alpha+\arg z_k)\geqslant(\cos\theta)\sum|z_k|$.

推广　设 $\alpha<\arg z_k\leqslant\alpha+\theta<\alpha+\frac{\pi}{2}$，则

$$\left|\sum_{k=1}^{n}z_k\right|\geqslant\max\left\{\frac{\sqrt{2}}{2},\cos\theta\right\}\sum_{k=1}^{n}|z_k|.$$（[301]1986，118(1)：140）

31. 设 n 个复数 z_k 满足 $|z_k|\leqslant 1$,则存在 $\varepsilon_k=\pm 1\ (1\leqslant k\leqslant n)$,使得

$$\left|\sum_{j=1}^{k}\varepsilon_j z_j\right|<\sqrt{3}, k=1,2,\cdots,n.$$

提示:用数学归纳法证明.([305]1987,94(8):788 ~ 789)

32. 设 n 个复数 z_k 满足 $\sum z_k=0$,则 $\forall p\in N$,

$$\text{(1)}\quad \sum_{k=1}^{n}|z_k|^p\leqslant\begin{cases}(\dfrac{n-1}{2})^p\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|z_k-z_{k+1}|^p,\\(\dfrac{n^2-1}{12})^p\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|z_{k-1}-2z_k+z_{k+1}|^p,\end{cases}$$

式中 $z_n=z_0, z_1=z_{n+1}$.([2]184)

$$\text{(2)}\quad \frac{12n}{n^2-1}\max_{1\leqslant k\leqslant n}|z_k|^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}|z_{k+1}-z_k|,\quad \text{式中 } z_{n+1}=z_1\quad \text{(Alzer, H.)}.$$

33. (1) **Archbold 不等式**:设 z_k 为复数,$\alpha_k>0, k=1,\cdots,n$,

且 $\sum_{k=1}^{n}(1/\alpha_k)=1$,则 $\left|\sum_{k=1}^{n}z_k\right|^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}\alpha_k|z_k|^2$,仅当 $\sqrt{\alpha_1}z_1=\cdots=\sqrt{\alpha_n}z_n$ 时等号成立.

(2) 推广:设 $\alpha_k>0$, $r>1$, 则 $\left|\sum_{k=1}^{n}z_k\right|^r\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^{\frac{1}{1-r}}\right)^{r-1}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k|z_k|^r$.

仅当 $\alpha_1|z_1|^{r-1}=\cdots=\alpha_n|z_n|^{r-1}$ 且 $z_k\bar{z}_j\geqslant 0$ 时等号成立.([22]500)

34. 若 $a_1,\cdots,a_n$ 为实数,$z_1,\cdots,z_n$ 和 λ 为复数,则

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_kz_k\right|^2\leqslant\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2+\left|\sum_{k=1}^{n}z_k^2\right|\right),$$

仅当 $a_k=\mathrm{Re}(\lambda z_k)$ 且 $\sum\lambda^2z_k^2$ 为非负实数时,等号成立,$(k=1,\cdots,n)$.(证明见[4]430 ~ 431)

35. [MCM]. 设复数 $z_k(k=1,\cdots,n)$ 满足 $\sum|z_k|=1$,则这 n 个复数中,必存在若干个复数,它们的和的模不小于 $1/\pi$.

36. 设复数 $z_1,\cdots,z_n$ 互不相同,它们每两点间距离的最小值为 d,则

$$\prod_{j=2}^{n}|z_1-z_j|\geqslant\left(\frac{d}{3}\right)^{n-1}\sqrt{n!}.$$

若再设在复数平面内,$z_1,\cdots,z_n$ 在一条直线上,则

$\prod_{j=2}^{n}|z_1-z_j|\geqslant(d/2))^{n-1}(n-1)!$.(证明见[345]1980,8:34)

37. 设 $d(z_1,z_2)=\dfrac{|z_1-z_2|}{\sqrt{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}}$,则

$$d(z_1,z_2)\leqslant d(z_1,z_3)+d(z_3,z_2).$$

证 因为 $(z_1-z_2)(1+z_3\bar{z}_3)=(z_1-z_3)(1+z_2\bar{z}_3)+(z_3-z_2)(1+z_1\bar{z}_3)$,所以,

$|z_1-z_2|(1+|z_3|^2)\leqslant|z_1-z_3||1+z_2\bar{z}_3|+|z_3-z_2|\cdot|1+z_1\bar{z}_3|$.

再利用 $|1+z_2\bar{z}_3|^2\leqslant(1+|z_2|^2)(1+|z_3|^2)$ 和

$|1+\bar{z}_1z_3|^2\leqslant(1+|z_1|^2)(1+|z_3|^2)$ 即可得证.

注 $d(z_1,z_2)$ 是椭圆几何中的球面距离. 当 $|z_1|<R$, $|z_2|<R$ 时,还成立

$$\frac{|z_1-z_2|}{1+R^2}\leqslant d(z_1,z_2)\leqslant |z_1-z_2|.$$

38. $D(z_1,z_2)=|z_1-z_2|/|1-\bar{z}_2z_1|$ 是双曲几何中的非欧距离或伪弦距离. 若 $|z_1|<\rho$, $|z_2|<\rho$, $0<\rho<1$,则

$$\frac{|z_1-z_2|}{2}\leqslant\frac{|z_1-z_2|}{1+|\bar{z}_2z_1|}\leqslant D(z_1,z_2)\leqslant\frac{|z_1-z_2|}{1-|\bar{z}_2z_1|}\leqslant\frac{|z_1-z_2|}{1-\rho^2};$$

若 $|z_1|<1$, $|z_2|<1$,则

$$\frac{|z_1|-|z_2|}{1-|z_1|\cdot|z_2|}\leqslant D(z_1,z_2)\leqslant\frac{|z_1|+|z_2|}{1+|z_1|\cdot|z_2|}.$$

39. 设 $0<r<1$, $|z_k-1|\leqslant r$, $1\leqslant k\leqslant n$, $\lambda_k>0$, $\sum_{k=1}^n\lambda_k=1$, $A=\sum_{k=1}^n\lambda_kz_k$, $G=\prod_{k=1}^n z_k^{\lambda_k}$, $H=\sum_{k=1}^n\frac{\lambda_k}{z_k}$,则

(1) $(1-r^2)|A|\leqslant|H|\leqslant\frac{|A|}{1-r^2}$; (2) $\frac{(1-r^2)|G|}{1-|G-1|^2}\leqslant|H|\leqslant\frac{|G|^2}{1-r}$.

(Richard, F., [301]2000, 243(2): 313 ~ 325)

40. **华罗庚不等式**(1965):设 x_k 为实数, $\delta,\alpha>0$,则

$$(\delta-\sum_{k=1}^n x_k)^2+\alpha\sum_{k=1}^n x_k^2\geqslant\frac{\alpha\delta^2}{\alpha+n}.$$

1997 年,Pearce-Pecaric 将其推广到复数和复值凸函数,即

(1) 设 $\alpha>0$, a_k 为实数, δ, z_k 为复数,则

$$|\delta-\sum_{k=1}^n a_kz_k|^2+\frac{\alpha}{2}(\sum_{k=1}^n|z_k|^2+|\sum_{k=1}^n z_k|^2)\geqslant\frac{\alpha|\delta|^2}{\alpha+\sum_{k=1}^n a_k^2},$$

仅当 $a_k=\mathrm{Re}(\lambda z_k)$, λ 为复数, $\sum_{k=1}^n\lambda^2z_k^2$ 为非负实数,

且 $\sum_{k=1}^n a_kz_k=\frac{\delta\sum_{k=1}^n a_k^2}{\alpha+\sum_{k=1}^n a_k^2}$ 时等号成立.

(2) 设 $\alpha>0$, δ, z_k, w_k 均为复数, $\omega_k\neq0$, f 是 $[0,\infty)$ 上递增的凸函数,则

$$f(|\delta-\sum_{k=1}^n z_kw_k|)+\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^n|\omega_k|f(\alpha|z_k|)\geqslant\frac{\alpha+\sum_{k=1}^n|\omega_k|}{\alpha}f\left(\frac{\alpha|\delta|}{\alpha+\sum_{k=1}^n|\omega_k|}\right);$$

若 f 为严格凸,则仅当 $z_k=\frac{\delta\overline{w}_k}{(\alpha+\sum_{k=1}^n|\omega_k|)|\omega_k|}$ $(1\leqslant k\leqslant n)$ 时等号成立.

([306]MR98m: 26016)

41. **华罗庚不等式**：设 z_k,ω_k 为任意两组复数，$1\leqslant k\leqslant n$. 若存在常数 $c>0$，使得

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|z_k-z_j|\leqslant c,\ \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|\omega_k-\omega_j|\leqslant c,\ |z_k-z_j|+|\omega_k-\omega_j|>0,$$

则对于每对同时大于零的绝对差 $|z_k-z_j|>0$，$|\omega_k-\omega_j|>0$，下式成立

$$\min\{|z_k-z_j|>0,\ |\omega_k-\omega_j|>0\}\leqslant\frac{3c}{2n(n-1)}.$$

（证明见[8]第一版 142 ～ 143）

42. **Turan 不等式**：

(1) 设复数 z_k,b_k 满足 $z_k\neq 0,\sum_{k=1}^{n}b_k\neq 0,k=1,\cdots,n$，对于任一整数 $m\geqslant -1$，定义

$$Q=\max\left\{\left|\sum_{k=1}^{n}b_kz_k^r\right|\cdot\left|\sum_{k=1}^{n}b_k\right|^{-1}(\min_{1\leqslant k\leqslant n}|z_k|^r)^{-1}:r=m+1,\cdots,m+n\right\},\text{则}$$

$$Q\geqslant\left(\frac{n}{2e(m+n)}\right)^n.$$

1958 年 Dancs, I. 将上述不等式改进为

$$Q\geqslant\frac{1}{2e}\left(\frac{n}{2e(m+n)}\right)^{n-1}.$$

1959 年 Makai, E. 以及 1960 年 de Bruijn, N. G 得到最佳估计：

$$Q\geqslant\left[\sum_{k=0}^{n-1}2^k\binom{m+k}{k}\right]^{-1}.$$

(2) 设 z_k,b_k 均为复数，$k=1,\cdots,n$，且 $|z_n|\leqslant\cdots\leqslant|z_2|\leqslant|z_1|=1$，则

$$\max_{r=m+1,\cdots,m+n}\left|\sum_{k=1}^{n}b_kz_k^r\right|\geqslant\left[\frac{n}{A(m+n)}\right]^n\min_{1\leqslant r\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{r}b_k\right|,$$

其中常数 A 满足 $4e\leqslant A\leqslant 8e$.

(3) 设 z_j 为复数，令 $S_k=\sum_{j=1}^{n}z_j^k,k=1,2,\cdots,m=\max_{1\leqslant j\leqslant n}|z_j|$，

$M=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\frac{S_k}{n}\right|^{1/k}$，若 $z_1,\cdots,z_n$ 不全为 0，则

① $\frac{\sqrt{2}-1}{2}\leqslant\frac{M}{m}\leqslant 1$，其中上、下界都为最佳.

② 当 $\lambda>-1,n>(6+3\lambda)^3$ 时，有

$$\sum_{k=1}^{n}k^{\lambda}|S_k|>\frac{1+\lambda}{2}\ln n.$$

式中 $\frac{1}{2}(1+\lambda)$ 是最佳常数.

(4) 若复数 z_k 满足 $|z_k|\leqslant 1,k=1,2,\cdots,n-1,z_n=1$，则

$$\max_{1\leqslant r\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{n}z_k^r\right|>\frac{1}{3}.$$

当 $n<1.6\times 10^3$ 时，下界可改进为 $\pi/8$，但是最佳下界还不知道.（详见[4] §2.18）

43. 设 $|a| \neq r$, $c = \{z: |z| = r\}$. 则

$$\int_C \frac{|dz|}{|z-a||z+a|} < \frac{2\pi r}{|r^2 - |a|^2|}.$$

44. **零点不等式**:设 $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, $a_0 = 1, z_1, \cdots, z_n$ 是 $P_n(z)$ 的零点,则

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 < 1 + \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |a_{n-k}|^2.$$

([305]112(1)(2005),91.问题 11008)

45. 设 $\alpha, \beta \in z_+^n$, $|\alpha| = m$, $|\beta| = n$. 则复数 z_α, z_β 满足

$$\sum_{|\gamma|=m+k} \gamma! \left|\sum_{\alpha+\beta=\gamma} z_\alpha \bar{z}_\beta\right|^2 \geqslant \left(\sum_{|\alpha|=m} \alpha! |z_\alpha|^2\right)\left(\sum_{|\beta|=k} \beta! |z_\beta|^2\right).$$

([305]112(3)(2005),265)

46. 设 r 是非零实数, $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$, $s > 0$, 则

$$\left(\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|^r + \sum_{1 \leqslant k < j \leqslant n} |z_k - z_j|^r\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant C\left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^s\right)^{\frac{1}{s}},$$

式中 $C = \begin{cases} m^{\frac{1}{r}-\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}-\frac{1}{s}}, & 若\ r \leqslant 2,\ p = \min\{2, s\},\ m = \frac{n(n-1)}{2}, \\ n^{\frac{1}{r}+\frac{1}{q}-\frac{1}{s}}, & 若\ r > 2,\ q = \min\{s, r'\}. \end{cases}$

特别,当 $r = s = p \geqslant 2$ 时,下式成立

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|^p + \sum_{1 \leqslant k < j \leqslant n} |z_k - z_j|^p \leqslant n^{p-1} \sum_{k=1}^{n} |z_k|^p.$$

([417]155(1992),187 ~ 197)

§2　解析函数不等式

一、　指数函数不等式

1. $\frac{1}{4}|z| < |e^z - 1| < \frac{7}{4}|z|$, $(0 < |z| < 1)$. ([101]70)

2. 若 $|z| \leqslant 1$,则 $|e^z - z - 1| \leqslant |z|^2$.

证　$|e^z - z - 1| = \left|\sum_{k=2}^{\infty} z^k/k!\right| \leqslant \sum_{k=2}^{\infty} |z|^k/k! \leqslant (|z|^2/2)\sum_{k=0}^{\infty}(|z|/2)^k \leqslant |z|^2$.

3. 设 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$,则

$$|\alpha\exp\{(1-\alpha)z\} + (1-\alpha)\exp(-\alpha z)| \leqslant \exp(|z|^2).$$

4. $|e^z - 1| < e^{|z|} - 1 < |z|e^{|z|}$, $(z \neq 0)$.

5. 对于任意实数 α,有

(1)　$|e^{i\alpha} - 1| \leqslant |\alpha|$.

(2)　$|e^{i\alpha} - 1 - i\alpha| \leqslant \frac{|\alpha|^2}{2!}$.　或 $2|\alpha|$.

(3) $|e^{i\alpha}-1-i\alpha+\alpha^2/2|\leqslant|\alpha|^3/3!$ 或 α^2.

(4) $\left|e^{i\alpha}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(i\alpha)^k}{k!}\right|\leqslant\frac{|\alpha|^{n+1}}{(n+1)!}$ 或 $\frac{2|\alpha|^n}{n!}$.

6. 令 $f(\alpha)=\exp(-i\alpha)-(1-i\alpha-\alpha^2/2)$，则

$$|f(\alpha)|\leqslant\begin{cases}4\alpha^2, & \alpha\in R^1,\\ |\alpha|^3, & |\alpha|\leqslant 1,\\ p\alpha^2, & |\alpha|\leqslant p.\end{cases}$$

7. **Kloosterman 不等式：**

$$\left|e^z-(1+\frac{z}{n})^n\right|<\left|e^{|z|}-(1+\frac{|z|}{n})^n\right|<e^{|z|}\cdot\frac{|z|^2}{2n}.$$

([4]445 ~ 447)

8. $\left|e^z-\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\right|\leqslant\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}e^{|z|}$.

注 1 当 $|z|<n+2$ 时，上界可改进为 $\frac{(n+2)|z|^{n+1}}{(n+1)!(n+2-|z|)}$.

注 2 若 $\mathrm{Re}z\leqslant 0$，则

$$\left|e^z-\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\right|\leqslant\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

9. 设 $|z|\leqslant\frac{2r-1}{4r^2}$，$1/2<r\leqslant 1$，则

$\left|e^z-\frac{4r^2}{4r-1}\right|<\frac{2r(2r-1)}{4r-1}$. (Wall, H. S., [305]1942, 49:549)

10. 设 $0<\alpha<1$，$|z|\leqslant\alpha$，$\beta=\frac{1}{\alpha}(\frac{e^{-\alpha}}{1-\alpha}-1)$，则

$|e^z|\leqslant|1+z|(1+\beta|z|)$. ([355]1968, 20(5):117 ~ 119)

二、 对数函数不等式

1. 设 $|z|<1$，则

$\frac{|z|}{1+|z|}\leqslant|\ln(1+z)|\leqslant|z|\frac{1+|z|}{|1+z|}$. (Wall, H. S., [305]1942, 49:72 ~ 75)

2. 若 $|z|<1$，则 $\exp(|z|/(|z|-1))\leqslant|1+z|\leqslant\exp(|z|)$.

3. 若 $|z|<1/2$，则 $(1/2)|z|\leqslant|\log(1+z)|\leqslant(3/2)|z|$.

提示：利用 $\ln(1+z)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}z^k/k$，当 $|z|<1/2$ 时，有

$$\left|1-\frac{1}{2}\ln(1+z)\right|\leqslant\frac{|z|}{2(1-|z|)}\leqslant\frac{1}{2}.$$

4. $|\ln(1+z)|<-\ln(1-|z|)$，$(0<|z|<1)$. ([101]68)

5. $\log^+|1+z|\leqslant 1+|z|$.

6. $|\log^+|z_1|-\log^+|z_2||\leqslant\log 2+\log^+|z_1\pm z_2|$.

三、 三角函数与双曲函数不等式

1. $|\cos z| < 2$,($|z| < 1$).

2. $|\sin z| < (6/5)|z|$,($0 < |z| < 1$).

注 在复数范围内,$|\sin z| \leqslant 1$,$|\cos z| \leqslant 1$ 不仅一般不成立,而且沿直线 $\arg z = \theta \neq k\pi$($k$ 为整数),$z \to \infty$ 时,有 $\cos z \to \infty$,$\sin z \to \infty$. 例如令 $z = iy$,则 $|\cos z| = (e^y + e^{-y})/2 \to \infty(y \to \infty)$,但当 $z = x + iy$ 时,有

$$|\sin z| \geqslant |e^y - e^{-y}|/2, \ |\operatorname{tg} z| \geqslant \frac{|e^y - e^{-y}|}{e^y + e^{-y}}.$$

3. $|\operatorname{sh} y| \leqslant |\sin z| \leqslant \operatorname{ch} y$.

4. $|\operatorname{sh} y| \leqslant |\cos z| \leqslant \operatorname{ch} y$.

5. $|\cos z| \leqslant \operatorname{ch}|z|$.

6. $|\sin z| \leqslant \operatorname{sh}|z|$.

7. $|\csc z| \leqslant \operatorname{csch}|y|$.(以上 1 ~ 7 见[101]75)

四、 单叶解析函数不等式

设 f 是复平面上某区域 D 内的复变复值函数,若导数

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

在 D 内处处存在,则称 f 是 D 内的**解析函数**(或正则函数、全纯函数). D 中每点都称为 f 的解析点. 它等价于 f 在 D 内任一点附近都能展开成幂级数. D 内除极点外处处解析的函数称为 D 内的**亚纯函数**(或**半纯函数**).

若 $\forall z_1, z_2 \in D, z_1 \neq z_2$ 时,$f(z_1) \neq f(z_2)$,称 f 是 D 上单叶函数,定义函数类 S:

$S = \{f: f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ 在 $|z| < 1$ 内单叶解析$\}$. 函数类 S 在单连通区域单叶函数论中起着特殊作用. 区域 D 内的解析函数 f 在点 z_0 的充分小的邻域 $B(z_0, r)$ 内单叶的充要条件是 $f'(z_0) \neq 0$. 但 f 在 D 内每一点的这种局部单叶性并不能保证 f 在整个 D 内的单叶性. 例如函数 $f(z) = e^z$ 在圆盘 $|z| \leqslant R(R > \pi)$ 内非单叶,尽管该函数在复平面上每一点均满足局部单叶性条件. 有关在 D 内单叶性的充要条件见[107]Vol. 5. 343 ~ 345.

在第七章 §1 —(二) 定义 1 中,我们定义了单位圆盘 $D = \{z \in C: |z| < 1\}$ 内复变量的凸函数 f,该 f 有幂级数展开式:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

若该函数 f 还满足规范化条件:$a_0 = f(0) = 0, a_1 = f'(0) = 1$,则记为 $f \in S^0$.

设 $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ 在圆盘 D 内解析,若存在 D 上的凸函数 φ,使得 $\varphi(0) = 0$,且

$$\operatorname{Re}\left(\frac{f'(z)}{\varphi'(z)}\right) > 0, z \in D.$$

则称 f 是 D 上近于凸的，记为 $f \in K$.

我们用 $\sum$ 表示形如 $F(z) = z + c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{z^k}$ 为 $|z| > 1$ 内单叶亚纯函数类.

1. **Bieberbach 猜想**(1916)：设 $f \in S$，则

$$|a_n| \leqslant n, \forall n. \tag{2.1}$$

1984 年 De Branges 证明了上述猜想成立，同时证明了仅当 $f(z) = \frac{z}{(1 - ze^{i\theta})^2}$($\theta$ 为实常数) 时等号成立.([322]1985,154:137 ~ 152)

注 若 $f \in S^0$，则 $|a_n| \leqslant 1(\forall n)$.

在证明这个猜想的过程中，下面两个不等式起了重要作用.

(1) **Lebedev-Milin 不等式**：设 $f \in S$，$\ln \frac{f(z)}{z} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$，则

$$\sum_{k=1}^{n} k |c_k|^2 (n + 1 - k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{n + 1 - k}{k}.$$

(2) **Fitz-Gerald 不等式**：设 $f \in S$，a_k, z_k 为复数且 $0 \leqslant |z_k| < 1, k = 1, 2, \cdots, n$，则

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_k \bar{a}_j \left| \frac{f(z_k) - f(z_j)}{(z_k - z_j)(1 - z_k \bar{z}_j)} \right|^2 \geqslant \left| \sum_{k=1}^{n} a_k \left| \frac{f(z_k)}{z_k} \right|^2 \right|.$$

(它的改进见[336]1980(3 ~ 4):421 ~ 426 和[317]1981(24):227 ~ 242)

注 设 $f \in S$ 且 $\ln \frac{f(z)}{z} = 2\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$，则 c_k 称为 f 的对数系数，这时成立 Milin 不等式：

$\sum_{k=1}^{n} k |c_k|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \delta$，式中 $0 < \delta < 0.312$.([121]39 ~ 41)

2. 设 $f \in S$，$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$，则 $|a_n| \leqslant 1/n$.

提示：$f'(z) = \sum_{k=1}^{n} k a_k z^{k-1} (a_1 = 1)$ 的全部零点都落在单位圆外.

3. **Littlewood 系数不等式**：

设 $f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{2n+1} \in S$，则 b_n 称为 f 的 Littlewood 系数，Littlewood 证明 $|b_n| < c(c < 16)$ 后，许多数学家如陈建功、龚昇、Levin、Milin. 胡克等都做出了贡献，特别是胡克证明 $|b_n| < 1.1305$.([121]107 ~ 109)

注 设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 是整函数，$\forall r > 0$，满足 $|f(re^{i\theta})| \leqslant M\exp(r^k)$，式中 M, k 为正数，则对所有 n，有

$$|a_n| \leqslant \frac{M\exp(n/k)}{(n/k)^{(n/k)}}.$$

4. **龚昇不等式**：

设 $f(z) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_n z^n$ 在 $|z| < 1$ 中解析，则经 Möbius 变换后，得到

$$f\left(\frac{z+\zeta}{1+\bar{z}\zeta}\right)=f(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{\delta^n f(z)}{\delta s^n}\zeta^n, \qquad (2.2)$$

其中 $|\zeta|<1$，$\delta/\delta s$ 是相对于 Poincare 度量的固有导数，由此得到(2.2) 式等价于：

$$\left|\frac{\delta^n f}{\delta s^n}\right|\leqslant n!n\left|\frac{\delta f}{\delta s}\right|, \qquad (2.3)$$

因为固有导数是不变量. 所以，不等式(2.3) 是对不变量的估计，从这个意义上讲，不等式(2.3) 比等式(2.2) 更有意义. 龚昇从(2.3) 式还推出了一系列不等式. 若 $f(z)\in S$，则

$$|a_3-\mu a_2^2|\leqslant\begin{cases}4\mu-3, & \text{若 } \mu>1,\\ 1, & \text{若 } \mu=1,\\ 1+2\exp\left(\dfrac{-2\mu}{1-\mu}\right), & \text{若 } 0<\mu<1,\\ 3-4\mu, & \text{若 } \mu\leqslant 0.\end{cases}$$

([333]1986,31(16):1209 ~ 1212)

5.　**胡克不等式**：设 $f\in S$，令 $d_n=|a_{n+1}|-|a_n|$，则 $-2.793<d_n<3.26$. ($\forall n$). 它改进了 Ye Z. Q. 和 Grinspan, A. Z. 的结果. ([336]1989,10B(1):38 ~ 42)

胡克进一步提出，d_n 的最佳上下界是什么？称为 Hayman 常数问题. ([121]:2,73)

6.　设 $F(z)=z+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{b_k}{z^k}\in\sum$，则 $|b_1|\leqslant 1$，$|b_2|\leqslant\dfrac{2}{3}$，$|b_3|\leqslant(1/2)+e^{-6}$.

若 f 是 $\sum$ 中星形函数，则　$|b_n|\leqslant\dfrac{2}{n+1}$，$n\geqslant 1$. (Hayman, W. K., [317]1965, 40(3):385 ~ 406)

问题：若 $f\in\sum$，则当 $n>3$ 时，$|b_n|$ 的精确上界是多少？

7.　**外部面积定理(Cronwall 不等式)**：设 $F(z)=z+\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_nz^{-n}$，在 $|z|>1$ 中为单叶正则，并除去在无穷远点有一极点，则　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n|b_n|^2\leqslant 1$，仅当 $F(z)=z+\dfrac{e^{ia}}{z}$ 时等号成立. 证明见[120]Vol. 2. No. 1:159.

注　面积定理的推广：若 $F(z)$ 在 $|z|>1$ 上解析且为 m 叶(即其所取每一值至多 m 次)且有展开式

$$F(z)=\sum_{k=-m}^{\infty}b_kz^{-k},\ b_{-m}\neq 0,\text{则}\quad \sum_{k=1}^{\infty}k|b_k|^2\leqslant\sum_{k=1}^{m}k|b_{-k}|^2.$$

8.　**Milin-Lebejev 不等式**：设 $F\in\sum$，C_r 是 $w=F(z)$ 将圆 $|z|=r(r>1)$ 映成的闭曲线，G_r 为其内部区域，$Q(w)$ 是 G_r 内的解析函数. 若 $Q(F(z))$ 在 $1<|z|<\infty$ 内的展开式为

$$Q(F(z))=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_kz^{-k}+\lambda_0+\sum_{k=1}^{\infty}\beta_kz^k,\text{则}\quad \sum_{k=1}^{\infty}k|\lambda_k|^2\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}k|\beta_k|^2.$$

证明见[121]16 ~ 17.

9.　**畸变不等式**：

(1) **Bieberbach 不等式**:设 $f\in S^0$,则

$$\frac{|z|}{1+|z|}\leqslant|f(z)|\leqslant\frac{|z|}{1-|z|}. \tag{2.4}$$

若 $f\in K$,则

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2}\leqslant|f(z)|\leqslant\frac{|z|}{(1-|z|)^2}. \tag{2.5}$$

(2) **Koebe 不等式**:设 $f\in S^0$,则

$$\frac{1}{(1+|z|)^2}\leqslant|f'(z)|\leqslant\frac{1}{(1-|z|)^2}, \tag{2.6}$$

若 $f\in K$,则

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3}\leqslant|f'(z)|\leqslant\frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}, \tag{2.7}$$

$$\frac{1-|z|}{1+|z|}\leqslant\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right|\leqslant\frac{1+|z|}{1-|z|}.\ ([121]:6)$$

(3) 设 $f\in S^0$,则

$$|\arg f'(z)|\leqslant 2\arcsin|z|, z\in D. \tag{2.8}$$

若 $f\in K$,则

$$|\arg f'(z)|\leqslant 4\arcsin|z|, z\in D. \tag{2.9}$$

上述函数的辐角在(2.8)式中理解为当 $\mathrm{Re}z=0$ 时取值为零的分支,在(2.9)式中理解为当 $z=0$ 时取零值的分支.

在(2.4),(2.6),(2.8)式中仅当 $f(z)=\dfrac{z}{1-\varepsilon z}\quad(|\varepsilon|=1)$ 时等号成立;

在(2.5),(2.7),(2.9)式中仅当 $f(z)=\dfrac{z}{(1-\varepsilon z)^2}\quad(|\varepsilon|=1)$ 时等号成立.

注 当 $f\in S^0$ 时,(2.8)式有精确估计:

$$|\arg f'(z)|\leqslant\begin{cases}4\arcsin|z|, & |z|\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{2}},\\ \pi+\ln\left(\dfrac{|z|^2}{1-|z|^2}\right), & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqslant|z|<1.\end{cases}$$

([120]Vol 2 No. 1:162)

(4) 设 $F(z)=z+c_0+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{c_k}{z^k}\in\sum$, $\forall z_0:1<|z_0|<\infty$,下式成立

$$1-\frac{1}{|z_0|^2}\leqslant|F'(z_0)|\leqslant\frac{|z_0|^2}{|z_0|^2-1}.$$

左边等号仅对 $F_1(z)=z+a_0+z_0(\bar{z}_0z)^{-1}$ 成立,而右边等号仅对 $F_2(z)=\dfrac{z-z_0}{1-(\bar{z}_0z)^{-1}}+\beta_0$ 成立.式中 α_0,β_0 是两个任意固定的数.

(5) **Grunsky 不等式**:设 $F\in\sum$, $1<|z_0|<\infty$,则

$$|\ln F'(z_0)|\leqslant-\ln\left[1-\frac{1}{|z_0|^2}\right].$$

(6) 设 $F \in \sum$,则 $\forall z_1, z_2 : |z_1| = |z_2| = r > 1$,下式成立

$$\left|\ln \frac{F(z_1) - F(z_2)}{z_1 - z_2}\right| \leqslant -\ln\left(1 - \frac{1}{r^2}\right) \quad \text{(Goluzin)},$$

仅当 $F(z) = z + \frac{1}{z}e^{i\alpha}$($\alpha$ 为实常数)时等号成立;

$\left|\frac{F(z_1) - F(z_2)}{z_1 - z_2}\right| \geqslant 1 - \frac{1}{r^2}$ (**弦畸变不等式**),仅当 $F(z) = z + c + \frac{1}{z}e^{2i\alpha}$($c$ 为常数,$\alpha = \frac{1}{2}(\arg z_1 + \arg z_2)$)时等号成立.

(4) ~ (6) 及其各种推广形式见[122].

(7) 设 $F \in \sum$,则 $\forall z_1, z_2 : |z_1| > 1, |z_1| > 1$,成立

$$\left|\frac{F(z_1) - F(z_2)}{z_1 - z_2}\right| \geqslant \sqrt{\left(1 - \frac{1}{|z_1|^2}\right)\left(1 - \frac{1}{|z_2|^2}\right)}. \quad \text{(Goluzin)([121]:18)}$$

(8) **Fan Ky 不等式**:设 $D = \{z : |z| < 1\}$,$z_1, z_2 \in D$ 的非欧距离定义为

$$d(z_1, z_2) = \frac{1}{2}\ln \frac{|1 - z_1\bar{z}_2| + |z_1 - z_2|}{|1 - z_1\bar{z}_2| - |z_1 - z_2|},$$

若 $f \in S$,则

$$\frac{|1 - z_1\bar{z}_2|}{1 - |z_1|^2}\exp(-2d(z_1, z_2)) \leqslant \left|\frac{f(z_1) - f(z_2)}{(z_1 - z_2)f'(z_2)}\right| \leqslant \frac{|1 - z_1\bar{z}_2|}{1 - |z_1|^2}\exp(2d(z_1, z_2));$$

$$\frac{|1 - z_1\bar{z}_2|}{(1 + |z_1|)^2}\left(\frac{1 - |z_2|}{1 + |z_2|}\right) \leqslant \left|\frac{f(z_1) - f(z_2)}{(z_1 - z_2)f'(z_2)}\right| \leqslant \frac{|1 + z_1\bar{z}_2|}{(1 - |z_1|)^2}\left(\frac{1 + |z_2|}{1 - |z_2|}\right);$$

$$\left|\frac{f'(z_1)}{f'(z_2)}\right| \leqslant \frac{1 - |z_2|^2}{1 - |z_1|^2}\exp(4d(z_1, z_2)).$$

特别地,

$$\frac{|z|(1 - |z|)}{1 + |z|} \leqslant \left|\frac{f(z)}{f'(z)}\right| \leqslant \frac{|z|(1 + |z|)}{1 - |z|}, z \in D.$$

若 $f \in S^0$,D 的像集 $f(D)$ 为复平面中的凸集,则

$$\frac{1 - |z_2|^2}{|1 - z_1\bar{z}_2| + |z_1 - z_2|} \leqslant \left|\frac{f(z_1) - f(z_2)}{(z_1 - z_2)f'(z_2)}\right| \leqslant \frac{1 - |z_2|^2}{|1 - z_1\bar{z}_2| - |z_1 - z_2|};$$

$$\frac{1 - |z_2|}{1 + |z_1|} \leqslant \left|\frac{f(z_1) - f(z_2)}{(z_1 - z_2)f'(z_2)}\right| \leqslant \frac{1 + |z_2|}{1 - |z_1|};$$

$$\left|\frac{f'(z_1)}{f'(z_2)}\right| \leqslant \left(\frac{1 - |z_2|^2}{1 - |z_1|^2}\right)\exp(2d(z_1, z_2)).$$

([301]1978,66(3):626 ~ 631)

10. **Beiberbach 不等式**:设 $f \in S$,则

$$\left|\left(\frac{1 - |z|^2}{2}\right)\frac{f''(z)}{f'(z)} - \bar{z}\right| \leqslant 2, \text{仅当 } f(z) = \frac{(z - z_0)(1 - \bar{z}_0 z)}{[(1 - e^{i\alpha}z_0) + (\bar{z}_0 - e^{i\alpha}z)]^2},$$

且 $z = z_0$ 时等号成立.(证明见[120]2(1):161)

11. 设 $f \in S$, $|z_1| \leqslant r$, $|z_2| \leqslant r$,则

$$\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^4 \leqslant \left|\frac{f'(z_1)}{f'(z_2)}\right| \leqslant \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^4. \text{([120]2(1):162)}$$

12. 设 $f \in S$,则

$$\left|\frac{z}{f(z)}+c_2 z+1-|z|^2-2\frac{E(|z|)}{K(|z|)}\right| \leqslant 2\left[1-\frac{E(|z|)}{K(|z|)}\right],\ |z|<1.$$

式中 E,K 为完全椭圆积分:

$$E(|z|)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-|z|^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t,\quad K(|z|)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-|z|^2\sin^2 t}}.$$

([107]5:346)

13. 设 $f \in S$,则

(1) $$|f'(z)| \leqslant \frac{1}{1-|z|^2}\left|\frac{f(z)}{z}\right|^2(1-x^2)^2\left|\frac{x}{|z|}\right|^{\frac{4x^2}{1-x^2}}$$

式中 $|x|<|z|<1$ 由下式确定:$\left|\frac{f(z)}{z}\right|(1+x^2)\left|\frac{z}{x}\right|^y=1$,式中 $y=\frac{2x}{1+x}$,

([107]5:346)

(2) $$\left|z\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leqslant a(r)\left[|f(z)|\frac{(1-r)^2}{r}\right]^{a(r)^2}$$,式中 $a(r)=\frac{1+r}{1-r}$,$0<r<1$.

(龚昇,[334]1953,3:208 ~ 210)

(3) 设 $0<r<\rho=\operatorname{th}\frac{\pi}{4}$,$|z|=r$,则 $\operatorname{Re}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right) \geqslant \frac{\rho-r}{\rho+r}$.

(证明见[121]:124)

14. **Goluzin 不等式**:设 $f \in S$,则

(1) $$|f(re^{i\theta})|+|f(-re^{i\theta})| \leqslant \frac{r}{(1-r)^2}+\frac{r}{(1+r)^2};$$

(2) $$|f'(re^{i\theta})|+|f'(-re^{i\theta})| \leqslant \frac{1+r}{(1-r)^3}+\frac{1-r}{(1+r)^3}.$$

式中 $0 \leqslant \theta < 2\pi$,$0 \leqslant r < 1$.([107]5:346)证明及胡克的改进见[121]:114 ~ 122.

15. 设 $f(z)=1+\sum_{k=1}^{\infty}a_k z^k$,$|z|<1$.对 f 作变换 G:

$$G(f)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a}{a+\lambda}\right)^{\lambda}a_k z^k,\ a>0,\lambda \geqslant 0,$$

(1) 若 $\operatorname{Re}f>0$,$|z|<1$,则

$$\operatorname{Re}G(f)>\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{a}{a+1}\right)^{\lambda}\right\};$$

(2) 若 $\operatorname{Re}f>\alpha$,$|z|=r$,则

$$\operatorname{Re}G(f) \geqslant \frac{1+(1-2\alpha)r^2-2(1-\alpha)r}{1-r^2}.$$

(Chan Kim Yong 等. Panamer, Math. J, 1997, 7(3):105 ~ 111)

16. 设 $f \in S$,$0<\lambda \leqslant 1$,$\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\lambda}=1+\sum_{n=1}^{\infty}D_n(\lambda)z^n$,

$$A_n(\lambda) = \big|\,|D_{n+1}(\lambda)| - |D_n(\lambda)|\,\big| \leqslant cn^{\frac{b(\lambda)-1}{2}}, d_n(\lambda) = \frac{\lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+n-1)}{n!}.$$

胡克提出以下问题：

(1)　$0 < \lambda < 1$ 时，$b(\lambda)$ 的最佳值是什么？已知 $b(1) = 1$.

(2)　$|D_n(\frac{1}{2})|$ 的最佳上界是什么？

(3)　$\forall \varepsilon > 0$，Duren 猜测（证明或否定）：

$$\left|\,|D_{n+1}(\frac{1}{2})|^2 - |D_n(\frac{1}{2})|^2\,\right| \leqslant cn^{-\frac{1}{2}+\varepsilon};$$

(4)　$\sum_{k=1}^{n} \frac{A_k(\lambda)}{d_k(\lambda)} \leqslant cn, 0 < \lambda < 1$　是否成立？

其中(3)、(4)已为胡克所解决，详见胡克的专著[121].

17.　**平均模数不等式**：设 $f \in S, p > 0, 0 < r < 1, M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$，则

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \mathrm{d}\theta \leqslant p\int_0^r \frac{[M(t)]^p}{t}\mathrm{d}t.$$

证明见[121]27 ~ 28.　$p = 1$ 时，称为 **Littlewood 不等式.**

推论　设 $f \in S, p > \frac{1}{2}, 0 < r < 1$，则

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \mathrm{d}\theta \leqslant p\int_0^r \frac{t^{p-1}}{(1-t)^{2p}}\mathrm{d}t.$$

18.　若 $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k z^k (\alpha_1 = 1)$ 是单位圆内的单叶解析函数，则当 $0 < r < 1$ 时，

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| \mathrm{d}\theta \leqslant r/(1-r);\quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \mathrm{d}\theta \leqslant r^2/(1-r^2).$$

([56]Vol. 2. 29. Ex155, 158)

19.　若 $f \in S^0$，则

$$\left| z\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} \right| \leqslant \frac{4|z|}{1-|z|^2}, \tag{2.10}$$

从而

$$\left| \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| \leqslant \frac{6}{1-|z|^2}. \tag{2.11}$$

(2.10)，(2.11)式对 Koebe 函数 $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ 成立等号. 实际上，(2.10)，(2.11)式对 D 中任何单叶函数均成立. 特别，若 f 在 D 内单叶，从(2.10)式有精确的不等式：

$$|f''(0)/f'(0)| \leqslant 4.$$

1982 年 Osgood, B. G. 做了进一步推广.（[368]1982, 31(4): 449 ~ 461）

20.　设 $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$ 在圆盘 $D = \{z: |z| < 1\}$ 内单叶解析，则

(1)　$|f(z)| \leqslant \frac{r}{(1-r^2)^{1/2}}, |z| = r, 0 < r < 1$，(Jinkins- 夏道行)；

(2)　$|f'(z)| \leqslant \frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}$，式中 $|z| < 1, |f(z)| < 1$.

胡克将(1)改进为：

$$|f(z)| \leqslant \frac{r}{(1-r^2)^{1/2}}\{1-[(1-r^2)r^{2n-2}-|c_n|^2]^2\}^{1/4},$$

仅当 $|c_n| = r^{n-1}(1-r^2)^{1/2}$ 时等号成立，其证明和进一步的改进见[121]：137 ～ 138.

21. 设 $f \in S$，圆周 $A = \{z: |z| = r < 1\}$ 的像集 $f(A)$ 称为等高线，记为 $L(f,r)$. 它的曲率记为 $K(f,r)$，则

$$K(f,r) \geqslant \frac{1-4r+r^2}{r}\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^2,$$

仅当 $f(z) = \dfrac{z}{(1+z)^2}$ 在 $z = r$ 时等号成立；

我们问：$K(f,r)$ 的精确上界是什么？

目前已知 f 属于 S 的星形函数子类时，

$$K(f,r) \leqslant \frac{1+4r+r^2}{r}\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2,$$

仅当 $f(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ 在 $z = r$ 时等号成立. 有关参考文献见[107]3：391 ～ 392.

22. 设 $f(z)$ 在 $z = 0$ 的邻域内具有级数展开式：

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k, \text{并设} \quad \ln\frac{f(t)-f(z)}{t-z} = \sum_{k,n=1}^{\infty} \omega_{k,n} t^k z^n,$$

式中 a_k 与 $\omega_{k,n}$ 为常数系数，则 f 在 $D = \{z: |z| < 1\}$ 内单叶解析的充要条件是 $\forall N$，$\forall x_k, 1 \leqslant k \leqslant N$，成立 **Grunsky 不等式**：

$$\left|\sum_{k,n=1}^{N} \omega_{k,n} x_k x_n\right| \leqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}|x_k|^2.$$

(Duren, P. L., Univalent functions, Springer, 1983)

23. 设 $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ 在圆盘 $D = \{z: |z| < 1\}$ 上解析，$\mathrm{Re} f(z) > 0$，则

$$|f^{(n)}(z)| \leqslant \frac{2n!\sum_{k=0}^{n-1} G(n,k)|z|^k}{(1-|z|^2)^n}\mathrm{Re} f(z),$$

式中 $G(n,0) = 1$，　$G(n,1) = n-1$，　$G(n,m) = \sum_{k=1}^{m}\binom{n-1}{n-k-1}G(n-k,m-k)$，$m \leqslant n-1$，　$m = 1,2,\cdots,n-1$. 特别当 $|f(z)| < 1$ 时，有

$$|f''(z)| \leqslant \frac{2(1+|z|)}{(1-|z|^2)^2}(1-|f(z)|^2). \text{([330]36(2005),193 ～ 197)}$$

24. 设 f 是形如 $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ 的开单位圆盘上的单叶解析函数，且是 β 阶强 α 凸的(其定义见第 7 章 §1). 则对于复数 z，下式成立

$$|a_3 - z a_2^2| \leqslant \frac{\beta}{2\alpha+1}\max\left\{1, \frac{|\alpha^2+8\alpha+3-4z(1+2\alpha)|\beta}{(1+\alpha)^2}\right\},$$

其证明及更多的结果见[330]34(2003)：21 ～ 28.

25. 令$S_0 = \{f \in S: |f(z)| < 1, f(z) \neq 0, z \in D\}$, $D = \{z: |z| < 1\}$,

$$A = \sup\left\{\left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right|: f \in S_0\right\}, \text{则}$$

$$A < C_0 = 1.616\cdots$$

但上界 C_0 不是最佳的. 于是,我们问,是否存在最佳常数 C,使得

$$A \leqslant C < C_0 ?$$ ([330]35(2004),101 ~ 104)

26. 设 $f(z)$ 是 $|z| < 1$ 上单叶解析函数, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, 则

(1) $\dfrac{-4}{1-|z|^2} \leqslant \dfrac{\partial \arg f'(z)}{\partial |z|} \leqslant \dfrac{4}{1-|z|^2}$;

(2) $|\arg f'(z)| \leqslant 2\log\left(\dfrac{1+|z|}{1-|z|}\right)$.

注 满足某些附加条件的单叶解析函数类的系数不等式,见[330]37(2006),345 ~ 354.

五、 一般解析函数不等式

1. 设 f 在 $D = \{z \in C: |z| < 1\}$ 上解析, $|f(z)| \leqslant 1$. $f(0) = 0$,若存在数 $r \in (0,1)$,使得 $f(r) = f(-r) = 0$. 则

$$|f(z)| \leqslant |z| \left|\frac{z^2 - r^2}{1 - r^2 z^2}\right|.$$

(美国加州大学贝克利分校 1991 年试题)

2. **Schwarz 不等式**:设 f 在圆 $|z| < R$ 内解析并满足 $|f(z)| \leqslant M$. $f(0) = 0$,则

$$|f(z)| \leqslant \frac{M|z|}{R}, (|z| = R); \ |f'(0)| \leqslant \frac{M}{R},$$

这是最大模原理的一个直接推论,Lindelöf,E. 还把 Schwarz 引理推广到一般域的情形.

3. 设 $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 内解析且 $|f(z)| < 1$,则

$$|f(z) - f(0)| \leqslant |z| \frac{1 - |f(0)|^2}{1 - |f(0)| \cdot |z|}, 0 < |z| < 1,$$

仅当 $f(z) = \dfrac{e^{i\alpha} z + w_0}{1 + \overline{w}_0 e^{i\alpha} z}$ $(\alpha \in R^1)$ 时等号成立, $w_0 = f(z_0)$。

4. 设 $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 内解析,且 $|f(z)| \leqslant 1$,则

(1) $\dfrac{|f(0)| - |z|}{1 - |f(0)| \cdot |z|} \leqslant |f(z)| \leqslant \dfrac{|f(0)| + |z|}{1 + |f(0)| \cdot |z|}, (|z| < 1)$;

(2) **Pick 不等式**:设 $|z| < 1$, $|\omega| < 1$,则

$$\left|\frac{f(z) - f(\omega)}{1 - \overline{f(\omega)} f(z)}\right| \leqslant \left|\frac{z - \omega}{1 - \overline{\omega} z}\right|.$$

特别有 $\left|\dfrac{f(z) - f(0)}{z}\right| \leqslant |1 - \overline{f(0)} f(z)|$;

(3) 若 $|z_1| < r < 1$, $|z_2| < r < 1$,则

$$\left|\frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1}\right| \leqslant \frac{1}{1 - r^2}.$$

5. [MCU]. 设 $f(z)$ 是将单位开圆盘 D 映入自己的解析函数，$f(0)=0$，则在 D 上下式成立

$$|f(z)+f(-z)| \leqslant 2|z|^2.$$

仅当 $f(z)=\lambda z^2$，$|\lambda|=1$ 时等号成立.

6. 若 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，且 $|f(z)|<1$，$f(0)=\beta>0$，则当 $|z|\leqslant r<1$ 时，

$$\left|f(z)-\frac{\beta(1-|z|)}{1-(\beta|z|^2)}\right| \leqslant \frac{|z|(1-\beta^2)}{1-(\beta|z|)^2}.$$

7. 设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 在 $|z|<1$ 内解析，且 $|f(z)|\leqslant M$，则

$$M|a_1| \leqslant M^2-|a_0|^2.$$

8. 若 $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$，则

$$|f(z)| \geqslant \frac{|z|(1-2|z|)}{1-|z|} \quad (0<|z|<1).$$

9. 设 $b_n\geqslant 0$，$\varphi(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n$，当 $|z|<1$ 时收敛，则当 $0<\alpha<\pi$，$z=re^{i\theta}(0<r<1)$ 时，有

$$\frac{1}{2\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}|\varphi(z)|^2\mathrm{d}\theta \geqslant \frac{1}{6\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi(z)|^2\mathrm{d}\theta.$$

提示：令 $g(\theta)=\begin{cases}1-|\theta/\alpha|, & \text{若 } |\theta|\leqslant\alpha,\\ 0, & \text{若 } \alpha<|\theta|\leqslant\pi.\end{cases}$

考虑

$$\int_{-\pi}^{\pi}|g(\theta)|^2\exp(i(n-m)\theta)\mathrm{d}\theta=\begin{cases}\dfrac{4}{\alpha(n-m)^2}\left[1-\dfrac{\sin(n-m)\alpha}{\alpha(n-m)}\right]\geqslant 0, & m\neq n,\\ 2\alpha/3, & m=n,\end{cases}$$

([76]154 ~ 155)

10. 设 $|z|<1$，$(1-z)^{-r}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$，则存在两个常数 c_1,c_2，使得

$$0<c_1<a_n/n^{r-1}<c_2<\infty. \tag{2.12}$$

提示：(2.12) 式等价于

$$\log a_n=(r-1)\log n+O(1). \tag{2.13}$$

而由二项式定理，得到

$$a_n=\frac{r(r+1)\cdots(r+n-1)}{n!}.$$

所以 $\log a_n=\sum_{k=1}^{n}\log(r+k-1)-\sum_{k=1}^{n}\log k$.

再利用 $\int_{c-1/2}^{c+1/2}\log t\mathrm{d}t=\int_0^{1/2}\{\log c^2+\log(1-t^2/c^2)\}\mathrm{d}t=\log c+O(c^{-2})$ 即可得证.

11. **Caratheodory 不等式：** 设 $f(z)$ 在圆 $|z|\leqslant R$ 上解析，$M(r)=\max\{|f(z)|:$

$|z|=r\leqslant R\}$,$A(r)=\max\{\mathrm{Re}f(z):|z|=r\leqslant R\}$,$\lim\limits_{r\to R-0}A(r)=A(R)$,则对于 $0\leqslant|z|=r<R$,有

(1) $|f(z)|\leqslant|f(0)|+\dfrac{2r}{R-r}[A(R)-\mathrm{Re}f(0)]$;

(2) $\mathrm{Re}f(z)\leqslant\mathrm{Re}f(0)+\dfrac{2r}{R-r}[A(R)-\mathrm{Re}f(0)]$;

(3) $|\mathrm{Im}f(z)-\mathrm{Im}f(0)|\leqslant\dfrac{2Rr}{R^2-r^2}[A(R)-\mathrm{Re}f(0)]$;

(4) $A(r)\leqslant\dfrac{R-r}{R+r}A(0)+\dfrac{2r}{R+r}A(R)$,$(0<r<R)$;

(5) $M(r)\leqslant M(0)+\dfrac{2r}{R-r}[A(R)-A(0)]\leqslant\dfrac{R+r}{R-r}M(0)+\dfrac{2r}{R-r}A(R)$.

(6) 若 $f(z)$ 在 $|z|<R$ 内解析,非零且有界,令 $\alpha=\dfrac{R-r}{R+r}$,$\beta=\dfrac{2r}{R+r}$,$0<r<R$,则

$$M(r)\leqslant M(0)^{\alpha}M(R)^{\beta}.$$

其中 $\lim\limits_{r\to R-0}M(r)=M(R)$. 除了 $f(z)$ 是常数外,$M(r)$,$A(r)$ 都是 r 的严格递增函数.

(7) 若 $A(r)\geqslant 0$,则

$$M(r)\leqslant\frac{R+r}{R-r}[A(R)+|f(0)|].$$

而且

$$\max_{|z|=r}|f^{(n)}(z)|\leqslant\frac{2^{n+2}n!R}{(R-r)^{n+1}}(A(R)+|f(0)|).$$

提示:利用 $f^{(n)}(z)=\dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\int_C\frac{f(\omega)}{(\omega-z)^{n+1}}\mathrm{d}\omega$,式中 C 是以 $\omega=z$ 为心,$\delta=(R-r)/2$ 为半径的圆,在圆 C 上,$|\omega|\leqslant(R+r)/2$. 再利用(5). 改进见[344]1992,4:88 ~ 89.

(8) 令 $T(r)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|\mathrm{d}\theta$,式中

$$\log^+x=\begin{cases}\log x, & x\geqslant 1,\\ 0, & 0<x<1.\end{cases}$$

则当 $0\leqslant|z|=r<R$ 时,有 $T(r)\leqslant\log^+M(r)\leqslant\dfrac{R+r}{R-r}T(R)$.

12. **Reza 不等式**:设 $f(z)$ 在区域 $\mathrm{Re}z\geqslant 0$ 内除去虚轴上可能有极点外是解析的,又设 $f(\bar{z})=\overline{f(z)}$ 且 $\mathrm{Re}f(z)\geqslant 0$ $(\mathrm{Re}z\geqslant 0)$,则对于 $\mathrm{Re}\,z\geqslant 0$,有

$$|f'(z)|\leqslant\frac{f(z)+f\overline{(z)}}{z+\bar{z}}.$$

13. 设 $f(z)$ 在 $|z|<R$ 上解析,在 $|z|=r(r<R)$ 上,$A(r)=\sup\mathrm{Re}f(z)$,则 $|a_n|r^n\leqslant\max\{4A(r),0\}-2\mathrm{Re}f(0)$,$n=0,1,2,\cdots$,式中 a_n 为 $f(z)$ 的 Taylor 展开式的系数.

14. 设 $f(z)$ 在 $|z-z_0|<R$ 上解析,$|f(z)|\leqslant M$,$f(z)$ 的 Taylor 级数为 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$,则

(1) **Gutzmer 不等式**: $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2R^{2n}\leqslant M^2$.

(2) Gauchy 不等式: $|f^{(n)}(z_0)|\leqslant\frac{n!M}{R^n}$; $|a_n|\leqslant\frac{M}{R^n}$.

由此推出 Cauchy-Hadamard 不等式: $\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\right)^{1/n}\leqslant\frac{1}{d(z_0,\partial D)}$.

式中 $d(z_0,\partial D)$ 是从 z_0 到 $f(z)$ 的全纯域的边界 ∂D 的距离. ([107]Vol. 1,512)

15. 设 $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$ 在圆 $|z|<R$ 内解析,令

$$\Delta(f)=\sup\{|\operatorname{Re}f(z_1)-\operatorname{Re}f(z_2)|:|z_1|<R,|z_2|<R\},$$

$D(f)=\sup\{|f(z_1)-f(z_2)|:|z_1|<R,|z_2|<R\}$,则:

(1) $|a_1|R\leqslant\frac{2}{\pi}\Delta(f)$.

(2) $|a_1|R\leqslant\frac{1}{2}D(f)$.

式中因子 $2/\pi$,$1/2$ 都不能再改进.

(3) 对于所有 $r<R$,当 $|z_1|\leqslant r$, $|z_2|\leqslant r$ 时,有

$$|\operatorname{Re}f(z_1)-\operatorname{Re}f(z_2)|\leqslant\frac{4}{\pi}\Delta(f)\operatorname{arctg}(r/R);$$

$$|\operatorname{Im}f(z_1)-\operatorname{Im}f(z_2)|\leqslant\frac{2}{\pi}\Delta(f)\ln\frac{R+r}{R-r}.$$

16. **Harnack 不等式**:设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析,$\operatorname{Re}f(z)>0$,$f(0)$ 为实数,则

(1) $f(0)\frac{1-|z|}{1+|z|}\leqslant\operatorname{Re}f(z)\leqslant f(0)\frac{1+|z|}{1-|z|}$.

(2) $|\operatorname{Im}f(z)|\leqslant f(0)\frac{2|z|}{1-|z|^2}$.

(3) $f(0)\frac{1-|z|}{1+|z|}\leqslant|f(z)|\leqslant f(0)\frac{1+|z|}{1-|z|}$, $0<|z|<1$.

式中仅当 $f(z)=w_0\frac{1+e^{i\alpha}z}{1-e^{i\alpha}z}$ (w_0,α 为实数且 $w_0>0$) 时等号成立.

Fan ky 将上述不等式推广到算子,即设 X 为复 Hilbert 空间,T 为 X 上有界线性算子. T 的实部和虚部分别为

$$\operatorname{Re}(T)=\frac{1}{2}(T+T^*),\operatorname{Im}(T)=\frac{1}{2i}(T-T^*).\quad(T^*\text{ 为 }T\text{ 的共轭算子})$$

设 T_1,T_2 为 X 上 Hermite 算子. $T_1\leqslant T_2$ 表示 T_2-T_1 为正算子,即 $((T_2-T_1)x,x)\geqslant0$, $x\in X$. $T_1<T_2$ 表示 T_2-T_1 为可逆的正算子,I 为恒等算子. 设 $\|T\|<1$,g 为 $D=\{z:|z|<1\}$ 上解析函数,$g(T)$ 是由 Riesz-Dunford 积分所定义的算子(见本节后面 No. 45) $\operatorname{Re}g(z)>0$,$z\in D$,$g(0)=1$,$g'(0)=g''(0)=\cdots=g^{(n-1)}(0)=0$,$(n\geqslant2)$,则

(4) $[I-g(T)^*][I-g(T)]\leqslant[I+g(T)^*](T^n)^*(T^n)[I+g(T)]$;

(5) $\frac{1-\|T^n\|}{1+\|T^n\|}\leqslant\|g(T)\|\leqslant\frac{1+\|T^n\|}{1-\|T^n\|}$;

(6) $\left\|g(T)-\frac{1+\|T^n\|^2}{1-\|T^n\|^2}I\right\|\leqslant\frac{2\|T^n\|}{1-\|T^n\|^2}$;

(7) $\frac{1-\|T^n\|}{1+\|T^n\|}I\leqslant \mathrm{Reg}(T)\leqslant\frac{1+\|T^n\|}{1-\|T^n\|}I$;

(8) $-\frac{2\|T^n\|}{1-\|T^n\|^2}I\leqslant \mathrm{Img}(T)\leqslant\frac{2\|T^n\|}{1-\|T^n\|^2}I$;

(9) $\|(I+T)(I-T)^{-1}-\frac{1+r^2}{1-r^2}I\|\leqslant\frac{2r}{1-r^2},(0<r<1)\Leftrightarrow\|T\|\leqslant r$;

(10) 若 $\|T\|\leqslant r<1$,则

$$\mathrm{Re}T(I-T)^{-1}\geqslant-\frac{r}{1+r}I.$$

仅当 $T=-rI$ 时等号成立;

(11) 设 $\|T\|<1$,复数 z 满足 $\|z\|<1,0\leqslant r\leqslant 1$,则 $\|(T-zI)(I-\bar{z}T)^{-1}\|<1$. 而且 $\|(T-zI)(I-\bar{z}T)^{-1}\|\leqslant r\Leftrightarrow$

$$\|T-\frac{(1-r^2)z}{1-(r|z|)^2}I\|\leqslant\frac{(1-|z|^2)r}{1-(r|z|)^2}.$$

([354]1982,179:293 ~ 298;54(2):333 ~ 339,另见第 14 章 §2. No. 42,43)

17. 设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 上解析,$\mathrm{Re}f(z)\leqslant A$,则

$$|f(z)-f(0)|\leqslant 2\mathrm{Re}\{A-f(0)\}|z|(1-|z|)^{-1}.$$

18. 设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 上解析,$|f(z)|\leqslant 1,f(0)=0$,则

(1) $$|f'(z)|\leqslant\begin{cases}1, & 若\ |z|\leqslant\sqrt{2}-1,\\ \frac{(1+|z|^2)^2}{4|z|(1-|z|^2)}, & 若\ \sqrt{2}-1<|z|<1.\end{cases}$$

(2) 若 f 还满足 $|f'(0)|=a$,则

$$|z|(a-|z|)\leqslant(1-a|z|)|f(z)|.$$

19. 设 $f(z)$ 在 $D=\{z:|z|<1\}$ 内解析.

(1) 若 $f(0)=0,\mathrm{Re}f(z)\leqslant A\quad(A>0)$,则 $|f(z)|\leqslant\frac{2A|z|}{1-|z|},(z\in D)$.

(2) 若 $f(0)=\alpha>0,\mathrm{Re}f(z)>0$,则

$$\left|\frac{f(z)-\alpha}{f(z)+\alpha}\right|\leqslant|z|,\ |f'(0)|\leqslant 2\alpha.$$

(3) 若 $|f(z)|\leqslant\frac{1}{1-|z|}\quad(z\in D)$,则

$$|f'(z)|\leqslant 4(1-|z|)^{-2}(z\in D);\quad |f^{(n)}(0)|\leqslant\frac{n!}{r^n(1-r)},(0<r<1).$$

取 $r=n/(n+1)$ 时,得到 $|f^{(n)}(0)|\leqslant(n+1)!\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leqslant e(n+1)!$.

20. 设 $f(z)$ 解析,且当 $\mathrm{Im}z=y>0$ 时 $\mathrm{Im}f(z)\geqslant 0$,则

(1) $\frac{|f'(z)|}{\mathrm{Im}f(z)}\leqslant\frac{1}{y},(z=x+iy)$.

(2) $\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|f(z)-\overline{f(z_0)}|}\leqslant\frac{|z-z_0|}{|z-\bar{z}_0|}$.

21. 设 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant 1$ 上解析,则在 $|z|<1$ 时成立

$$(1-|z|^2)|f(z)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(e^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta.$$

提示：先证 $(1-|z|^2)f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|\zeta|=1}f(\zeta)\left(\frac{1-\bar{z}\zeta}{\zeta-z}\right)\mathrm{d}\zeta,\ |z|<1.$

22. 若 f 在一个包含圆 $\overline{B}(z_0,R)$ 的开集 G 内是解析的，则

$$|f(z_0)|^2\leqslant\frac{1}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\int_0^R|f(z_0+re^{i\theta})|^2r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

23. 设 $F(z)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n z^n=\frac{h(z)}{1-h(z)}$，其中 $h(z)$ 是方程 $w-ze^{w-1}=0$ 在 $|z|<1$ 内的根：$w=h(z)$，$h(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，$h(0)=0$，$|h(z)|<1$，则当 $|z|<1$ 时，有

(1) $\dfrac{|z|}{e(1+|z|)}\leqslant|F(z)|\leqslant\dfrac{|z|}{1-|z|}.$

(2) $\dfrac{|h(z)|}{1+|h(z)|}\leqslant|F(z)|\leqslant\dfrac{|h(z)|}{1-|h(z)|}.$

(3) $\dfrac{|h(z)|}{|z|(1+|h(z)|)^3}\leqslant|F'(z)|\leqslant\dfrac{1+|h(z)|}{(1-|h(z)|)(1-|z|^2)}.$

(4) $\dfrac{1-|z|}{e(1+|z|)^3}\leqslant|F'(z)|\leqslant\dfrac{1+|z|}{e(1-|z|)^3}.$

证明见[375]1986,2(3):127 ~ 130.

24. **Schottky 不等式**：设 $f(z)$ 在 $|z|<R$ 上解析，并且 $f(z)\neq 1$，而当 $|z|<1$ 时 $f(z)\neq 0$，则在 $|z|\leqslant\theta R$ $(0\leqslant\theta<1)$ 上，有 $|f(z)|<S(f(0),\theta)$，式中 $S(f(0),\theta)$ 是由 $f(0)$ 与 θ 确定的正常数.

25. [MCU]. 设 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶极点，则存在正数 c_1,c_2 及 $\varepsilon>0$，使得 $0<|z-z_0|<\varepsilon$ 时，有

$$c_1|z-z_0|^{-m}\leqslant|f(z)|\leqslant c_2|z-z_0|^{-m}.$$

26. 设 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant 1$ 内解析且 $\displaystyle\int_0^{2\pi}|f(e^{i\theta})|d\theta=1$，则当 $k>-1$ 时，有

$$\left|\int_0^1 x^k f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & \text{当 } k \text{ 为整数},\\ (2|\sin k\pi|)^{-1}, & \text{当 } k \text{ 不为整数}.\end{cases}$$

27. (1) 设 $f(z)=1+\alpha_1 z+\cdots$ 在 $|z|\leqslant 1$ 上解析，$\alpha<1$，若 $|z|\leqslant 1$ 时，$\mathrm{Re}[z^2f''(z)+3zf'(z)-\alpha f^2(z)]>-1$，则 $\mathrm{Re}f(z)>0$. ([305]1984,91:446)

(2) 设 $f(z)$ 在单位圆 $D=\{z:|z|<1\}$ 内解析，$f(0)=0$ 且 $\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n}z^kf^{(k)}(z)\right|<1$，则 $|f(z)|<1\quad(z\in D)$.

28. 设 $\varphi(\gamma)$ 在 $0\leqslant\gamma<1$ 上递增，$\varphi(0)>0$，$f(z)$ 在 $|z|<1$ 上解析，$f(0)=0$，若 $|f(z)|\leqslant\varphi(|z|)$，则 $|f(z)|\leqslant k|z|\varphi(|z|)$，式中，常数 $k=\dfrac{2\varphi(1/2)}{\varphi(0)}$.

29. 设 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant r<R$ 内解析，则

(1) **Jensen 不等式**：

$$\log|f(0)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int \log|f(re^{it})|\,dt. \tag{2.14}$$

若 $f(z)$ 在 $z=0$ 有 m 重零点，则

$$\log|\lim_{z\to 0} z^{-m}f(z)| + \log(r^m) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int \log|f(re^{it})|\,dt.$$

Jensen 不等式还有以下形式：

$$\log|f(0)| + \sum_{k=1}^{n}\log(r|z_k|^{-1}) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int \log|f(re^{it})|\,dt,$$

式中 $z_1,\cdots,z_n$ 为 f 在 $|z|\leqslant r$ 内的零点(m 重零点作 m 个零点计算).

提示：利用 Poisson-Jensen 公式：

$$\log|f(0)| + \log\prod_{k=1}^{n} r|z_k|^{-1} = \frac{1}{2\pi}\int \log|f(e^{it})|\,dt.\ ([85]82)$$

(2)　**Polya-Szegö 均值不等式**：当 $p>0$ 时，

$$I_p(r) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{it})|^p dt.\right)^{1/p}\quad (p>0) \tag{2.15}$$

是 r 的严格递增函数，而且 $\log I_p(r)$ 是 $\log r$ 的凸函数. 当 $p=2$ 时就是 Hardy 均值不等式. 这个不等式还包括了著名的 Hadamard 三圆定理.

(3)　**几何平均不等式**：

$$G(r) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{it})|\,dt\right) \tag{2.16}$$

是 r 的递增函数，而且 $\log G(r)$ 是 $\log r$ 的凸函数，$\lim\limits_{p\to+0}(I_p(r))^{1/p} = G(r)$. 式中 $I_p(r)$ 由 (2.15) 式定义.

30.　**Hadamard 三圆定理**：设 f 在开集 $G=\{z\in C: 0\leqslant R_1<|z|<R_2\}$ 上解析，$\forall r$: $R_1<r<R_2$，令 $M(r)=\sup\limits_{|z|=r}|f(z)|$. 若 $R_1<r_1<r<r_2<R_2$，则

$$\ln M(r) \leqslant \frac{\ln r-\ln r_1}{\ln r_2-\ln r_1}\ln M(r_2) + \frac{\ln r_2-\ln r}{\ln r_2-\ln r_1}\ln M(r_1),$$

它表明 $\ln M(r)$ 是 $\ln r$ 的凸函数. ([74]Vol. 1:238)

31. **三线定理**：设 F 是闭带域 $D=\{z\mid z=x+iy, 0\leqslant x\leqslant 1\}$ 上有界连续复值函数，并在 D 的内部解析. 若对于所有 y，有 $|F(iy)|\leqslant m_0$，$|F(1+iy)|\leqslant m_1$.
则对于所有 $z=x+iy\in D$，有

$$|F(x+iy)| \leqslant m_0^{1-x}m_1^x.$$

即若令 $k_x=\sup\{|F(x+iy)|: -\infty<y<\infty, 0\leqslant x\leqslant 1\}$，则 $\psi(x)=\ln k_x$ 是凸函数，

注　定理的证明见[65]180 ～ 181，利用三线定理可以证明 Riesz 凸性定理，这是 L^p 空间的基本插值定理，由它可以推出很多重要的不等式，有关三线定理的类似结果及其应用，参看[56]Vol. 1. 174 ～ 183.

32.　**Lindelöf 不等式**：设区域 D 含有 z_0，并且以 z_0 为中心、r 为半径、α 为中心角的圆弧在 D 的外部，以 C 表示 D 的边界 ∂D 与圆盘 $|z-z_0|<r$ 的交，若 f 在 D 内单值解析，$|f(z)|\leqslant M$，并且对于所有 $\zeta\in C$，有

$$\limsup_{z\to\zeta}|f(z)| \leqslant m < M,$$

则对于所有 $n>2\pi/\alpha$，有

$$|f(z_0)|\leqslant M^{1-\frac{1}{n}}\cdot m^{1/n}.$$

33. **Carleman 不等式**：设 D 是线段 OA，OB 以及连接 A，B 的 Jordan 弧 AB 围成的区域，$\angle AOB=\alpha\pi$，R 是 O 与 $\widehat{AB}$ 的最大距离，$f(z)$ 是 D 上的解析函数，若对于 OA，OB 上的 ζ，有 $\limsup\limits_{z\to\zeta,z\in D}|f(z)|\leqslant M$，而对于 $\widehat{AB}$ 上的 ζ，有 $\limsup\limits_{z\to\zeta,z\in D}|f(z)|\leqslant m<M$，则在 $\angle AOB$ 的角平分线上的点 $z\in D$，有 $|f(z)|\leqslant M^{1-p}m^p$，式中 $p=(|z|/R)^{1/\alpha}$.

34. **Doetsch 不等式**：设 $f(z)$ 在带状区域 $S=\{z\mid z=x+iy,x_1\leqslant x\leqslant x_2,-\infty<y<\infty\}$ 上有界解析．若对于 $x_1<x_2<x_3$，$|f(z)|$ 在 $x=x_j$ 上的上限为 $M(x_j)$，$j=1,2,3$，则 $M(x_2)\leqslant M(x_1)^\alpha M(x_3)^\beta$．式中 $\alpha=\dfrac{x_3-x_2}{x_3-x_1}$，$\beta=\dfrac{x_2-x_1}{x_3-x_1}$.

35. **Gabriel 不等式**：若可求长曲线 L 位于另一闭曲线 C 的内部，并且 f 是 C 内的解析函数，则存在绝对常数 A，使得

$$\int_L|f(z)||\mathrm{d}z|<A\int_C|f(z)||\mathrm{d}z|.$$

但 A 的最佳值还不知道，猜想 $A=2$．当 C 是圆的情形，已证明是正确的．([4]§3.8.45)

36. **积分估值不等式**：(1) 设在曲线 C 上定义的连续函数 $f(z)$ 在 C 上满足 $|f(z)|\leqslant M$，曲线 C 的长为 L．则

$$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right|\leqslant\int_C|f(z)||\mathrm{d}z|\leqslant ML.$$

式中 $|\mathrm{d}z|=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}$ 是曲线 C 的弧元.

提示：$\left|\sum\limits_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta z_k\right|\leqslant\sum\limits_{k=1}^n|f(\xi_k)||\Delta z_k|\leqslant M\sum\limits_{k=1}^n|\Delta z_k|$.

令 $\max|\Delta z_k|\to 0$ 取极限即可得证.

特别地，若 $C=\{z:z=re^{i\theta},0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$，则

$$\left|\int_C\frac{\mathrm{d}z}{z}\right|\leqslant 2\pi.$$

(2) $$\left|\int_0^\pi\frac{i\mathrm{R}e^{i\theta}}{1+R^2e^{2i\theta}}\mathrm{d}\theta\right|\leqslant\frac{\pi R}{R^2-1},(R>1).$$

(3) $$\left|\int_0^{2\pi}\frac{(\mathrm{R}e^{i\theta})^{\alpha-1}i\mathrm{R}e^{i\theta}}{1+Re^{i\theta}}\mathrm{d}\theta\right|\leqslant 2\pi\frac{R^2}{R-1}\ (R>1,0<\alpha<1).$$

37. [MCU]．设 $f(z)$ 在 $D=\{z:|z|<1\}$ 内解析，且在 D 内 $|f(z)|\leqslant M$．$z_1,\cdots,z_n$ 是 $f(z)$ 在 D 内按重数计算的零点，则在 D 内，有

$$|f(z)|\leqslant M\prod_{k=1}^n\left|\frac{z-z_k}{1-\bar{z}_kz}\right|.\text{特别有 }|f(0)|\leqslant M\prod_{k=1}^n|z_k|.$$

38. [MCU] 设 $\omega=f(z)$ 是从 $D=\{z:|z|<1\}$ 到平面区域 Ω 上的保角映射，$\omega_0=f(z_0)$，则

$$\inf\{|\omega-\omega_0|:\omega\notin\Omega\}\leqslant|f'(z_0)|(1-|z_0|^2).$$

提示：将 Schwarz 引理用于 f^{-1} 上．(美国 1984 年博士资格考试题).

39. **Phragmen-Lindelöf 定理**：设 f 在单连通域 D 内解析，若存在 D 中复值解析函数 φ，φ 在 D 中有界且不取零值，若存在正常数 M，$\partial D=A\cup B$，使得：

(1) $\forall a\in A,\limsup\limits_{z\to a}|f(z)|\leqslant M$;

(2) $\forall b \in B, \forall \eta > 0, \limsup_{z \to b} |f(z)||\varphi(z)|^{\eta} \leqslant M.$

则 $\forall z \in D, |f(z)| \leqslant M.$

40. **准素因子不等式**：整函数

$$E(z,p)| = \begin{cases} 1-z, & p=0, \\ (1-z)\exp\left(\sum_{k=1}^{p} z^k/k\right), & p \geqslant 1 \end{cases}$$

称为准素因子（或基本因子）.

(1) 若 $|z| \leqslant 1/2$，则 $|E(z,p)-1| \leqslant 4|z|^{p+1}$；

(2) 若 $|z| \leqslant 1, p \geqslant 0$ 时，则 $|E(z,p)-1| \leqslant |z|^{p+1}$；

(3) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{-p} < \infty, p > 0, c > 0$，则

$$\left|\prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{a_n}, p-1\right)\right| \leqslant \exp(c|z|^p).$$

(4) $|E(z,p-1)| \leqslant \exp(b|z|^{p-1})$ （b 为常数）.

注 (3) 的证明用到(4).（[74]Vol. 1,260 ~ 261）

41. **Milin-Lebedev 不等式**：设 f 在 $D = \{z: |z| < 1\}$ 内解析，$f(0) = 0$，$\iint_D |f'(z)|^2 dxdy < \infty$，则当 $p > 0$ 时，下式成立

$$\frac{p}{\pi}\iint_D (1-|z|^2)^{p-1}|\exp f(z)|^2 dxdy \leqslant \exp\left\{\frac{1}{\pi(p+1)}\iint_D |f'(z)|^2 dxdy\right\}.$$

当 $p = 0$ 时，下式成立

$$\frac{1}{2\pi}\iint_D |\exp f(z)|^2 |dz| \leqslant \exp\left\{\frac{1}{\pi}\iint_D |f'(z)|^2 dxdy\right\},$$

仅当 $f(z) = -(p+1)\log(1-\bar{c}z)$ 时等号成立，$c \in D$ 为常数.（[344]1992,3）

42. **Marcinkiewicz-Zygmund 不等式**：设 $P_{n-1}(z)$ 为 $n-1$ 次代数多项式，则当 $1 < p < \infty$ 时，有

$$\int_{|z|} |P_{n-1}(z)|^p |dz| \leqslant \frac{c_p}{n}\sum_{k=1}^{n} |P_{n-1}(z_k)|^p, \tag{2.17}$$

当 $1 \leqslant p \leqslant \infty$ 时，有

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |P_{n-1}(z_k)|^p \leqslant c'_p \int_{|z|} |P_{n-1}(z)|^p |dz|, \tag{2.18}$$

式中 $\{z_k\}$ 为 n 次单位根：$z_k = \exp\left(\frac{2k\pi}{n}i\right), 1 \leqslant k \leqslant n$ (2.19)

c_p, c'_p 为只依赖于 p 的常数.

1989 年沈燮昌、钟乐凡将其推广为：

对于任意整数 $q \geqslant 0$，任取 $q+1$ 个不同的自然数 $0 = m_0 < m_1 < m_2 < \cdots < m_q, m_k \leqslant kn, 1 \leqslant k \leqslant q$. 则对于任意 N 次多项式 $P_N(z)$ $(N = (q+1)n-1)$，有

(1) 当 $1 < p < \infty$ 时，

$$\int_{|z|=1} |P_N(z)|^p |dz| \leqslant c_1 \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{q} \{P_N^{(m_j)}(z_k)|^p\}/n^{pm_j+1},$$

(2) 当 $0<p<\infty$ 时，

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{q}|P_N^{(m_j)}(z_k)|^p/n^{pm_j+1}\leqslant c_2\int_{|z|}|P_N(z)|^p|\mathrm{d}z|,$$

式中 $\{z_k\}$ 是由(2.19)式所确定的单位根，$c_k(k=1,2)$ 是依赖于 $p,m_1,\cdots,m_q$ 的常数.

(北京大学学报，1990.3.257 ~ 265. 其他推广见[332]1991.7(1):100 ~ 107. [335]1994,23(1):66)

43. **超几何函数不等式**：超几何级数定义为：

$F(a,b,c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!}=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)}\cdot\frac{z^n}{n!}$. 式中 $(a)_n=a(a+1)\cdots(a+n-1)$，$(a)_0=1$. a,b,c 可以是实数或复数. $F(a,b,c;z)$ 在单位圆 $D=\{z\in C:|z|<1\}$ 内解析. 它可解析延拓到整个复平面(奇点 $z=1$ 和 $z=\infty$ 除外)，这样延拓后的函数称为超几何函数.

(1) 令 $H=F(a,1,c,;1)$，$a,c>0$，$c-a>1$，则当 $|z|\leqslant 1$ 时，

$\left|F(a,1,c;-z)-\frac{H^2}{2H-1}\right|\leqslant\frac{H(H-1)}{2H-1}$. 当 $z=-1$ 时等号成立；

$$\mathrm{Re}F(a,1,c;-z)\geqslant\frac{H}{2H-1},$$

(2) 设 $c>a>0$，则当 $|z|\leqslant 1$ 时，下式成立

$$\left|F(a,1,c+1;-z)-\frac{c^2}{c^2-a^2}\right|\leqslant\frac{ac}{c^2-a^2};$$

$$\left|\frac{1}{F(a,1,c;-z)}-\frac{2c-a+cz}{2c-a}\right|\leqslant\frac{c-a}{2c-a}|z|;$$

若 $\mathrm{Re}z\geqslant -1/2$，则

$$\left|F(a,1,c+1;-z)-\frac{c}{2c-a}\right|\leqslant\frac{c}{2c-a};$$

$$\left|\frac{1}{F(a,1,c;-z)}-\frac{c+a+az}{c+a}\right|\leqslant\frac{a}{c+a}|z|.$$

(Wall, H. S., [324]1940, 7:146 ~ 153; [305]1942, 49:72 ~ 75)

44. **(复)H^p 函数不等式**：设 f 在圆 $D=\{z:|z|<1\}$ 中解析，$0<p<\infty$，

$$\|f\|_p=\sup_{0<r<1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{it})|^p\mathrm{d}t\right\}^{1/p}.$$

若 $\|f\|_p<\infty$，则称 $f\in H^p$(圆盘的 Hardy 类). H^∞ 表示 D 内有界解析函数类.

(1) **Fejer-Riesz 不等式**：设 f 在 $|z|\leqslant 1$ 上解析，则 $\forall\theta:0\leqslant\theta<2\pi$，$p>0$，有

$$\int_{-1}^{1}|f(re^{i\theta})|^p\mathrm{d}r\leqslant\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{it})|^p\mathrm{d}t,$$

仅当 $f\equiv 0$ 时等号成立. 式中系数 1/2 是最好的. 证明及其早期推广见[4]460 ~ 461.

1983 年潘一飞证明：设 $f\in H^p$，$0<p<\infty$. 若 $0<\alpha<1$，则

$$\int_0^1 x^{-\alpha}|f(x)|^p\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2\sin(\alpha\pi)}\int_0^{2\pi}|f(e^{it})|^p\mathrm{d}t;$$

若 $\alpha>0$，则

$$\int_{-1}^{1}|x|^{\alpha-1}|f(x)|^p\mathrm{d}x\leqslant M_\alpha\int_0^{2\pi}|f(e^{it})|^p\mathrm{d}t.$$

式中 $M_\alpha = \begin{cases} [2\sin(\alpha\pi/2)]^{-1}, 0 < \alpha < 1, \\ 1/2, \qquad \alpha \geqslant 1. \end{cases}$

([333]1983,28(5):316 和胡克[159] § 4.18)

(2) **Riesz 不等式**:设 $F = u + iv \in H^p(T_\Gamma)$,$1 < p < \infty$,其中 Γ 是 R^n 中一个开凸锥,则存在常数 $A_p < \infty$,使得对于 $y \in \Gamma$ 和 $y = 0$,下式成立

$$\left(\int_{R^n} |v(x+iy)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \leqslant A_p \left(\int_{R^n} |u(x+iy)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

注　Γ 为开凸锥指:子集 $\Gamma \subset R^n$ 满足:① $0 \notin \Gamma$, ② 若 $x, y \in \Gamma, \alpha, \beta > 0$,则 $\alpha x + \beta y \in \Gamma$. C^n 为 n 维复欧氏空间,Γ 为基的管 $T_\Gamma = \{z: z = (z_1, \cdots, z_n) = (x_1 + iy_1, \cdots, x_n + iy_n) = x + iy \in C^n$,且 $y \in \Gamma\}$. $F \in H^p(T_\Gamma)$ 指在 F 在 T_Γ 上解析且对所有 $y \in \Gamma$,有

$$\int_{R^n} |F(x+iy)|^p \mathrm{d}x \leqslant A^p \quad (p > 0). \text{([65]138} \sim \text{139)}$$

45. **Jilia-Fan 不等式**:设 f 在 $D = \{z: |z| < 1\}$ 上解析且 $|f(z)| < 1$,若 $z_n \in D$,使得 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 - |f(z_n)|}{1 - |z_n|} = \alpha < \infty$.

设 T 是 Hilbert 空间 X 上的有界线性算子且 $\|T\| < 1$. $f(T)$ 是 Riesz-Dunford 积分:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_c f(z)(zI - T)^{-1}\mathrm{d}z.$$

式中 C 为 D 中正定向简单闭可求长围道. I 为恒等算子. 则

(1) $\|\{I - f(T)\}\{I - f(T)^* f(T)\}^{-1}\{I - f(T)^*\}\|$
$\leqslant \alpha \|(I - T)(I - T^* T)^{-1}(I - T^*)\|$;

(2) 若 $(I - T^*)(I - T) < \beta(I - T^* T)$, $\beta > 0$,则
$[I - f(T)^*][I - f(T)] < \alpha\beta[I - f(T)^* f(T)]$;

(3) 若 $\left\|T - \dfrac{1}{1+\beta}I\right\| < \dfrac{\beta}{1+\beta}$, $\beta > 0$,则

$$\left\|f(T) - \frac{1}{1+\alpha\beta}I\right\| < \frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta}. \text{[321]1979,239:241} \sim \text{245)}$$

46. **Von Neumann 不等式**:设 f 在 $D = \{z: |z| < 1\}$ 上解析,$f(D) \subset D$. $f(T)$ 是 Riesz-Dunford 积分(No. 45),若 T 是 Hilbert 空间上有界线性算子,且 $\|T\| < 1$,则

$$\|f(T)\| < 1.$$

Fan Ky 改进了该不等式,例如,$f(0) = 0$ 时,得到

$$\|f(T)\| \leqslant \frac{\|T\| + |f'(0)|}{1 + \|T\| \cdot |f'(0)|}\|T\| < 1. \text{([354]1987,194:7} \sim \text{13)}$$

47. **Wolff 不等式**:设 f 是 $D = \{z = |z| < 1\}$ 上解析函数,$f(D) \subset D$,$f(z) \neq z$, $z \in D$,$f^{[n]}$ 是 f 的 n 次迭代,即 $f^{[1]} = f$, $f^{[n]} = f \circ f^{[n-1]}$, $n \geqslant 2$,则存在复数 w, $|w| = 1$,使得

$$|f^{[n]}(z) - c(w,z)w| \leqslant r(w,z), z \in D.$$

式中 $c(w,z) = \dfrac{1 - |z|^2}{2[1 - \mathrm{Re}(\overline{w}z)]}$, $r(w,z) = \dfrac{|1 - \overline{w}z|^2}{2[|1 - \mathrm{Re}(\overline{w}z)|]}$,

Fan ky 将其推广到算子上. ([354]1982,179:293 ~ 298,[387]1983,12:295 ~ 304)

48. **Pick 不等式**:设 $w = f(z)$ 在单位圆盘 $D = \{z: |z| < 1\}$ 内解析. $|z| < 1$ 时

$$|f(z)| \leqslant 1, \qquad \mathrm{d}w = f'(z)\mathrm{d}z.$$

则

$$\frac{|\mathrm{d}w|}{1-|w|^2} \leqslant \frac{|\mathrm{d}z|}{1-|z|^2}. \quad ([321]1916,77:1 \sim 6)$$

49. **Grötzsch 原理**:设 $0<r<R<\infty$,圆环 $K(r,R)=\{z:r<|z|<R\}$ 包含有限个互不相交的单连通域 $D_k(1\leqslant k\leqslant n)$,$D_k$ 具有 Jordan 边界,边界上分别包含圆周 $|z|=r$,$|z|=R$ 上不退化为点的弧 C_k 和 l_k.若 D_k 被映入某个矩形 $G=\{w:0<\mathrm{Re}w<a_k, 0<\mathrm{Im}w<b_k\}$,使得 C_k 和 l_k 分别贯穿长度为 a_k, b_k 的边,则

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k} \leqslant \frac{2\pi}{(\ln R-\ln r)},$$

仅当 $D_k=\{z:r<|z|<R, \alpha_k<\arg z<\beta_k\}$($\alpha_k,\beta_k$ 为常数),且 $\bigcup_{k=1}^{n} D_k$ 覆盖 $K(r,R)$ 除去射线 $\arg z=\alpha_k$ 和 $\arg z=\beta_k$ 上属于 $K(r,R)$ 的那些区间时等号成立.([107]Vol. 2:780)

50. Bloch **常数不等式**:设 H 是单位圆盘 $D=\{z:|z|<1\}$ 内的解析函数 $f(z)$ 类,$f(z)$ 的 Riemann 曲面在其一叶上包含一个半径为 $B_f>0$ 的最大开圆盘,令 $B=\inf\{B_f: f\in H\}$.则 $\frac{\sqrt{3}}{4}<B\leqslant 0.472$.([317]1970,2:689 ~ 695)

1982 年,Minda 证明 $B\leqslant\dfrac{\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{11}{12})}{\sqrt{1+\sqrt{3}}\,\Gamma(\frac{1}{4})}$,并猜想等号成立.(J,d'Analyse Math. 1982,41:54 ~ 84)

51. 设 $f(z)$ 在圆 $|z|<R$ 内的展开式为 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$,令 $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n!}z^n$,则 g 的展开式在整个平面上收敛,而且存在 $M>0$,使得 $|z|<r<R$ 时,下式成立

$$|g(z)|\leqslant M\exp\left(\frac{|z|}{r}\right), \qquad |g^{(k)}(z)|\leqslant\frac{M}{r^k}\exp\left(\frac{|z|}{r}\right).$$

52. 设 $f(z)$ 在圆 $|z|\leqslant 1$ 内解析,$f(\alpha)=0$,$|\alpha|<1$.则 $|z|\leqslant 1$ 时,下式成立

$$|f(z)|\leqslant\frac{|z-\alpha|}{|1-\bar{\alpha}z|}.$$

53. 设 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant 1$ 上解析,$|\mathrm{Re}f(z)|\leqslant 1$,则

(1) $|\mathrm{Re}[f(z)-f(0)]|\leqslant\frac{4}{\pi}\arcsin|z|$,

(2) $|\mathrm{Im}[f(z)-f(0)]|\leqslant\frac{2}{\pi}\log\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)$.

54. 设 $p>1$,$f(z)=u+iv$ 是 $|z|<R$ 上正则函数,$v(0)=0$,$r<R$.令

$$M_p(f)=\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p\mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{p}},$$

则

$$M_p(f)\leqslant\begin{cases}\left(\dfrac{p}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}M_p(u), & 1<p\leqslant 2,\\ 2^{-\frac{1}{2}}pM_p(u), & p\geqslant 2.\end{cases} \qquad \text{(Riesz 不等式)}$$

([317]8(3)(1933):242 ~ 247)

55.　设 $f(z)$ 在圆 $D=\{z: |z|\leqslant 1\}$ 的内部解析，D_1, D_2 是圆的任 2 个直径，$\lambda>0$，则

$$\int_{D_1\cup D_2}|f(z)|^{\lambda}|dz|\leqslant\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}\int_{\partial D}|f(z)|^{\lambda}|dz|,$$

式中 θ 是直径之间的锐角夹角.([317]9(2)(1934):90 ~ 94)

56.　设 f 是 $|z|<1$ 上的解析函数，$\mathrm{Re}f'(z)>0$，$f(0)=0$，$f'(0)=1$，$|z|=r<1$，则

$$\int_0^{2\pi}\left|\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)\right|d\theta\leqslant 2\pi+4\log\left(\frac{1+r}{1-r}\right).$$

(Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 65(1)(1989),15 ~ 16)

57.　设 $-1<\alpha<\infty$，$0<p<\infty$，dA 是 D 上正规化的面积测度，即

$$A(D)=1,\qquad dA_{\alpha}(z)=(\alpha+1)(1-|z|^2)^{\alpha}dA(z),$$

$$\|f\|_{A_{\alpha}^{p}}=\left\{\int_D|f(z)|^{p}dA_{\alpha}(z)\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

加权 Bergman 空间定义为 $A_{\alpha}^{p}=\{f: f$ 在 D 上解析而且 $\|f\|_{A_{\alpha}^{p}}<\infty\}$.

在 Bergman 空间上以下三个不等式成立：

(1)　Fejer-Riesz 不等式：$\int_{-1}^{1}(1-|x|)^{\alpha+1}|f(x)|^{p}dx\leqslant\pi\int_D|f(z)|^{p}dA_{\alpha}(z)$；

(2)　Hardy 不等式：设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\in A_{\alpha}^{1}$，$-1<\alpha<\infty$，则

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{(n+1)\Gamma\left(\frac{n}{2}+2+\alpha\right)}|a_n|\leqslant\pi\int_D|f(z)|dA_{\alpha}(z);$$

(3)　Hardy-Littlewood 不等式：设 $0<p\leqslant 2$，$-1<\alpha<\infty$，$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\in A_{\alpha}^{p}$，则

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma\left(\frac{np}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{np}{2}+2+\alpha\right)}(n+1)^{p-2}|a_n|^{p}\leqslant 2\pi c_p\int_D|f(z)|^{p}dA_{\alpha}(z),$$

特别地

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{p-\alpha-3}|a_n|^{p}\leqslant c\int_D|f(z)|^{p}dA_{\alpha}(z),$$

式中 $c=c(p,\alpha)$ 是与 p,α 有关的常数.([305](2004):520 ~ 525)

58.　亚纯函数的 Schwarz 导数不等式：设 $D=\{|z|<1\}$ 是单位圆盘，f 是 D 上亚纯函数.令

$$S_f=\left(\frac{f''}{f'}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2,$$

则 S_f 称为 f 在 D 上的 Schwarz 导数，定义非欧距离

$$\sigma(w,z)=\text{th}^{-1}\left(\frac{|w-z|}{|1-\bar{z}w|}\right),\quad w,z\in D$$

$$H(z,\alpha)=\{w\in D:\sigma(w,z)<\alpha\}\quad(0<\alpha\leqslant\infty)$$

与

$$\Gamma(z,\alpha)=\{w\in D:\sigma(w,z)=\alpha\}\quad(0<\alpha<\infty)$$

分别是中心在 $z\in D$ 半径为 α 的非欧圆盘和非欧圆周. 记 $p=p(\alpha)=\text{th}\alpha$，$0<\alpha\leqslant\infty$，$p(\infty)=1$.

(1) 若 f 是 D 上亚纯函数，使得 S_f 是 D 上全纯函数. 则 $\forall\alpha,\delta\in(0,\infty)$，$\forall z\in D$，下式成立

① $(1-|z|^2)^{\frac{2}{\delta}}|S_f(z)|\leqslant p^{-2}\left\{K(p,2\delta-z)\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{H(z,\alpha)}|S_f(\zeta)|^{\delta}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\right\}^{\frac{1}{\delta}}$

② $(1-|z|^2)^{\frac{1}{\delta}}|S_f(z)|\leqslant p^{-2}\left\{K(p,2\delta-1)\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\Gamma(z,\alpha)}|S_f(\zeta)|^{\delta}|\mathrm{d}\zeta|\right\}^{\frac{1}{\delta}}$，

式中

$$\zeta=\xi+i\eta,\qquad K(p,c)=\begin{cases}\left(\dfrac{p}{(1+p)^2}\right)^c, & c<0,\\ \left(\dfrac{p}{(1-p)^2}\right)^c, & c\geqslant 0.\end{cases}$$

(2) 若 f 是 D 上单叶亚纯函数，则

① $\sup\limits_{z\in D}(1-|z|^2)^2|S_f(z)|\leqslant 6$；

② $\displaystyle\int_{H(z,\alpha)}|S_f(\zeta)|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\leqslant\frac{6\pi p^2}{1-p^2}$；

③ $\displaystyle\int_{\Gamma(z,\alpha)}|S_f(\zeta)|^{\frac{1}{2}}|\mathrm{d}\zeta|\leqslant\frac{2\sqrt{6}\pi p}{1-p^2}$. ([368]28(1)(1979),131～135)

59. 设 $p_0(z)=1+\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_kz^k$，$\text{Re}p_0(z)>0$，$\alpha>0$，$|z|<1$，

$$p_n(z)=\frac{\alpha}{z^{\alpha}}\int_0^z t^{\alpha-1}p_{n-1}(t)\mathrm{d}t=1+\sum_{k=1}^{\infty}p_{n,k}z^k,$$

式中 $p_{n,k}=\left(\dfrac{\alpha}{\alpha+k}\right)^n p_k$. 则

(1) $|p_{n,k}|\leqslant\dfrac{2\alpha^n}{(\alpha+k)^n}$；　(2) $|p_n(z)|\leqslant 1+2\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{\alpha+k}\right)^n r^k$，　$|z|=r$.

(3) $\text{Re}P_n(z)\geqslant 1+2\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{\alpha+k}\right)^n(-r)^k$，$|z|=r$. ([330]37(2006),355～366)

注 1 形如 $f(z)=z^{-p}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{p+n-1}z^{p+n-1}(p>0)$ 的亚纯 p 阶函数类的系数不等式，畸变不等式等见[330]37(2006),251～260.

注 2 解析函数的某些子类的系数不等式、增长和畸变不等式等见[330]38(2007),103～109,301～306,39(2008),325～334,40(2009),31～39 等.

六、 多叶解析函数不等式

设 f 在域 D 内取所有的值至多 m 次，且恰取到某个值 m 次，则称 f 在 D 内是 m 叶的，

当 $m>1$ 时，称 f 为多叶函数.

1.　设 $|z|=1$ 时，$m-1<\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)<m+1$，或

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\,|a_{m-1+n}|<|a_m|-\sum_{k=2}^{m} k\,|a_{m+1-k}|.$$

则 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $|z|\leqslant 1$ 内是 m 叶的.

2.　设 $f(z)=\frac{1}{z^m}\sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k\ (a_0=1)$　在 $0<|z|\leqslant 1$ 内是 m 叶解析函数，则对所有递增函数 $F(t), t\geqslant 0$，下式成立

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\int_0^{2\pi} F(|f(re^{i\theta})|)\mathrm{d}\theta\leqslant 0.$$

特别，当 $F(t)=t^2$ 时，就成为**面积定理**.

我们还可以定义该 $f(z)$ 在 $0<|z|\leqslant 1$ 内平均 m 叶解析的概念(例如见[122])，这时面积定理变成：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)|a_n|^2\leqslant m.$$

§3　调和函数不等式

一、调和函数的定义及其性质

设 Ω 是 R^n 中开子集，$f\in L^1_{loc}(\Omega)$，f 在开球 $B=B(x,r)$ 上的平均记为

$$f_B=\frac{1}{\mu(B)}\int_B f(y)\mathrm{d}\mu(y).$$

若 $\forall r: B(x,r)\subset\Omega$，$f(x)\leqslant f_B\ a.e.\ x\in\Omega$. 则称 f 在 Ω 上是下调和的，它等价于 $\Delta f\geqslant 0$.

若 $-f$ 是下调和的，则称 f 是上调和的.

若 $f(x)=\frac{1}{\mu(B)}\int_B f(y)\mathrm{d}\mu(y)\quad a.e.\ x\in\Omega$. 则称 f(在 Ω 上)是调和函数，它等价于 $\Delta f=0$.

f 在 R^n 中单位球面 S^{n-1} 上的平均记为

$$f_s=\frac{1}{\mu(S^{n-1})}\int_{S^{n-1}} f(x+r\omega)\mathrm{d}\omega.$$

式中 r 是球 $B(x,r)$ 的半径.

设 f 是下调和的，则存在唯一函数 $\tilde{f}:\Omega\to R\cup\{-\infty\}$，使得 $\tilde{f}(x)=f(x)\ a.e.\ x\in\Omega$. 而且 $\tilde{f}$ 也是下调和的，并且成立平均值不等式：

$$\tilde{f}(x)\leqslant\frac{1}{\mu(B)}\int_B\tilde{f}(y)\mathrm{d}\mu(y)\leqslant\frac{1}{\mu(S^{n-1})}\int_{S^{n-1}}\tilde{f}(x+r\omega)\mathrm{d}\omega.$$

在一些著作中，直接用 f 满足 Laplace 方程 $\Delta f=0$ 来定义 f 是调和函数，并常常将 f 改记

为 u，即：

设 $u(x)=u(x_1,\cdots,x_n)$ 在区域 $D\subset R^n$ 上有二阶连续偏导数，且满足 Laplace 方程：$\Delta u=\sum_{k=1}^{n}\partial^2 u/\partial x_k^2=0,(x\in D)$，则称 u 是 D 上的 n 元调和函数.

调和函数 u 的一个基本性质是平均值公式：u 在以 x 为中心，r 为半径的球面 $S(x,r)$ 上的平均值等于它在圆心的值，即

$$u(x)=\frac{1}{\mu(S(x,r))}\int_{S(x,r)}u(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{\sum_{n-1}}u(x+rt')\mathrm{d}t'$$

式中 $\sum_{n-1}$ 是 R^n 中单位球面，$\omega_{n-1}=\mu(\sum_{n-1})$ 为 $\sum_{n-1}$ 的表面积.

利用平均值公式立即得出调和函数的最大最小值原理：若 u 在区域 D 内调和，在 D 的闭包 $\overline{D}$ 上连续，若 u 不是常数，则它不能在 D 的内部取得最大最小值，即 $\forall x\in D$，成立 $\inf\{u(x):x\in D\}<u(x)<\sup\{u(x):x\in D\}$（其中上、下确界均为有限数）.

当 $n=2$ 时，用复数 $z=x+iy$ 的记号，将 $u(x,y)$ 记为 $u(z)$，若 $u(z)$ 在 $|z|<R$ 内调和，在 $|z|\leqslant R$ 上连续，则 $\forall z_0:|z_0|<R$，平均值公式可写成

$$u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=R}\frac{R^2-|z_0|^2}{|z-z_0|^2}u(Re^{i\theta})\mathrm{d}\theta.$$

这就是著名的泊松公式.

二维调和函数和解析函数有密切联系：在区域 D 内的调和函数一定是 D 内某解析函数的实部或虚部；反之，D 内的解析函数的实部与虚部都是 D 内的调和函数，并称虚部为实部的共轭调和函数. 调和函数的详细讨论见[65]第 2、6 章，[72]、[87]、[114]等.

二、 调和函数不等式

1. 设 B 是上半空间 $R_+^{n+1}=\{(x,y):x\in R^n,y>0\}$ 中以 (x_0,y_0) 为中心的球，$u(x,y)$ 在 B 内调和，在 B 的闭包上连续，则对任意正数 p，下式成立

$$|u(x_0,y_0)|^p\leqslant\frac{C}{\mu(B)}\int_B|u(x,y)|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{3.1}$$

式中 $\mu(B)$ 是球 B 的体积，常数 C 与 B 无关.（[322]1972，129：137 ~ 193）

(3.1) 是上半空间 R_+^{n+1} 中的调和函数不等式. 由此可以推出：若 $u(x,y)$ 在 R_+^{n+1} 中调和，而且对 $0<p<\infty$，有

$$\sup_{y>0}\int_{R^n}|u(x,y)|^p\mathrm{d}x<\infty,\text{则}\quad \sup_{x\in R^n}|u(x,y)|\leqslant Ay^{-n/p}\quad(0<y<\infty).$$

2. 若 $u(x)=u(x_1,\cdots,x_n)$ 是区域 D 上的 n 维调和函数，$B=B(x,r)$ 是 D 中以 x 为中心，r 为半径的球，$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 为多重指标，记 $|\alpha|=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k$，$D^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$，则

$$|D^\alpha(x)|\leqslant A_\alpha r^{-(n/2+|\alpha|)}\left(\int_B|u(y)|^2\mathrm{d}y\right)^{1/2}.\ ([72]275)$$

下面 3 ~ 6 是二维调和函数不等式，

3. **Harnack 不等式**：设 $u(z)$ 是单位圆盘 $D(|z|<1)$ 上非负的调和函数，$D(z_0,r)=\{z\in D:|z-z_0|<r\}$. 则

$$\sup\{u(z):z\in D(z_0,r)\}\leqslant\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^2\inf\{u(z):z\in D(z_0,r)\}.\ ([87]187\sim188.278)$$

4. **Hardy-Littlewood平均值不等式**：设 u 在单位圆盘 D 上调和，$D(z_0,r)\subset D(z_0,R)\subset D$，若 $0<p<\infty$，则存在常数 $c=c(p)$（与 R,r,u 无关），使得

$$\sup\{|u(z)|:z\in D(z_0,r)\}\leqslant\frac{c}{(R-r)^{2/p}}\left(\int_B|u(z)|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/p},\tag{3.2}$$

式中 $B=D(z_0,R)\backslash D(z_0,r)$ $(0<r<R)$.

更一般地，若(3.2)式对某个 $p_0(0<p_0<\infty)$ 成立，则(3.2)式也对所有 $p:0<p<p_0$ 成立.（[87]188 ~ 191）

5. **Littlewood从属运算(Subordination)定理**：设 $u(z)$ 是 D 中的次调和函数，f 是 D 中的解析函数，且满足 $|f(z)|\leqslant|z|$，则

$$\int_T u(f(re^{it}))\mathrm{d}t\leqslant\int_T u(re^{it})\mathrm{d}t,0<r<1,T=(-\pi,\pi].$$

提示：不妨设 $f(z)\not\equiv z\exp(i\lambda)$，$\lambda$ 为实数，于是当 $|z|\leqslant r$ 时 $|f(z)|<r$. 若 $\omega(z)$ 表示 $u(z)$ 对 $D(0,r)$ 的调和扩张，则 $\omega(f(z))$ 在 $|z|\leqslant r$ 中调和. 由平均值性质，有

$$\int_T w(f(re^{it}))\mathrm{d}t=2\pi\omega(f(0))=2\pi\omega(0)=\int_T u(re^{it})\mathrm{d}t.$$

再考虑到 $z\in D(0,r)$ 时，$u(z)\leqslant\omega(z)$，不等式即可得证.（[87]197. No. 6. 31）

6. 设 $u=u(x,y)$ 为单位圆 D 上的非负调和函数，C_1,C_2 为 D 内光滑曲线，C_1 位于 C_2 所围的区域内，令 $f(x,y)=(u(x,y))^p,(p>0)$，则

(1) 当 $p>1$ 时，$0\leqslant\int_{C_1}\frac{\partial f}{\partial n}\mathrm{d}s\leqslant\int_{C_2}\frac{\partial f}{\partial n}\mathrm{d}s$，当 $0<p<1$ 时，两个不等号均反向，当 $p=1$ 时，

$$0=\int_{C_1}\frac{\partial f}{\partial n}\mathrm{d}s\leqslant\int_{C_2}\frac{\partial f}{\partial n}\mathrm{d}s,$$

式中 $\partial f/\partial n$ 是 f 沿曲线 C 的外法向的方向导数.

(2) 当 $p>1$ 时，$(u(0,0))^p\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[u(r\cos\theta,r\sin\theta)]^p\mathrm{d}\theta$，

当 $0<p<1$ 时，不等号反向. 当 $p=1$ 时等号成立，这就是二维调和函数的泊松公式，其中 $0<r<1$.

7. 若 $f(z)$ 在 $|z|<R$ 内调和且非负，则

$$f(0)\frac{R-|z|}{R+|z|}\leqslant f(z)\leqslant f(0)\frac{R+|z|}{R-|z|}.$$

8. **R^n 中的 Harnack 不等式(对偶 Harnack 不等式)**：这是正调和函数两个值之比 $u(x)/u(y)$ 的上、下界估计不等式.

(1) 设 D 为 R^n 中的区域，u 是 D 上非负调和函数，$D(x_0,r)$ 是 R^n 中以 x_0 为中心、r 为半径的开球，若闭包 $\overline{B(x_0,r)}\subset D$，$\forall x\in B(x_0,\rho)$，$0<\rho<r$，下式成立

$$\left(\frac{r}{r+\rho}\right)^{n-2}\left(\frac{r-\rho}{r+\rho}\right)u(x_0)\leqslant u(x)\leqslant\left(\frac{r}{r-\rho}\right)^{n-2}\left(\frac{r+\rho}{r-\rho}\right)u(x_0),\text{或}$$

$$\max\{u(x):x\in B(x_0,\rho)\}\leqslant\left(\frac{r-\rho}{r+\rho}\right)^n\min\{u(x):x\in B(x_0,\rho)\}.$$

相关文献见[107]2:837 ~ 838.

(2) 设 u 是 R^n 中开球 $B(x,r)$ 上的非负调和函数，则 $\forall x,y\in B\left(z,\frac{r}{3}\right)$，使得

$$3^{-n}u(x) \leqslant 2^{-n}u(z) \leqslant u(y). \tag{3.3}$$

这种形式的 Harnack 不等式并不是最佳的，但它很有用. 因为它通过确定非负调和函数变化量的界来量化极大值原理.（[167] 第 9 章）

9. $\Delta - \mu^2$ 平均值不等式：设 Ω 是 R^n 中开子集，$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. 若在 $D'(\Omega)$ 中，

$$\Delta f - \mu^2 f \geqslant 0. \tag{3.4}$$

则在 Ω 上存在唯一的上半连续函数 $\tilde{f}$，使得 $\tilde{f} = f\ a.e.$ 于 Ω 且

$$\tilde{f}(x) \leqslant \frac{1}{J(r)} \frac{1}{\mu(S^{n-1})} \int_{S^{n-1}} \tilde{f}(x + r\omega)\mathrm{d}\omega. \tag{3.5}$$

式中 $J:[0,\infty) \to (0,\infty)$ 满足 $J(0) = 1$ 并且是

$$(\Delta - \mu^2)J(|x|) = 0$$

的解. 使用 Bassel 函数 $I_{\frac{(n-2)}{2}}$，J 可以表示为

$$J(r) = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(\mu\frac{r}{2}\right)^{1-\frac{n}{2}} I_{\frac{(n-2)}{2}}(\mu r).$$

若(3.4) 反向，则 $\tilde{f}$ 是下半连续函数且(3.5) 也反向.

第十章　行列式与矩阵不等式

在本章中，设 n 阶实方阵为

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & & \cdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix},$$

相应的行列式记为

$$D=|A|=\det A=\det(a_{ij}).$$

若 $a_{ij}=a_{ji}, i,j=1,\cdots,n$，则 A 称为对**称矩阵**；若实对称矩阵 A 的特征值都大于 0（或非负），则 A 称为**正定矩阵**（或**半正定矩阵**）；若 A 为复方阵，且 A 的转置矩阵 A' 等于 A 的共轭矩阵 $\overline{A}$，则称 A 为 **Hermite 矩阵**. 记 $A^*=\overline{A'}$；A^{-1} 表示 A 的逆矩阵，$A\otimes B$ 表示 A 与 B 的 Kronecker 乘积，$A\circ B$ 表示 A 与 B 的 Hadamard 乘积（或 Suhur 乘积）. $r(A)$ 表示矩阵 A 的秩（即非零矩阵中不等于零的子式的最大阶数）；$\mathrm{tr}A$ 表示 A 的迹（即 A 的主对角线上各元素之和）：$\mathrm{tr}A=\sum_{k=1}^{n}a_{kk}$. $\lambda(A)$ 表示 A 的**特征值**，即 A 的特征方程 $\varphi(\lambda)=|A-\lambda I|=0$ 的根 $\lambda_k(1\leqslant k\leqslant n)$，其中 I_n 表示 n 阶单位矩阵；$\sigma(A)$ 表示 A 的**奇异值**. $\sigma_k(A)=\lambda_k(A^*A)^{1/2}$.

$\rho(A)=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|\lambda_k(A)|$ 称为 A 的**谱半径**. 若 $\forall a_{kj}>0$，则称 A 为**正矩阵**，记为 $A>0$；若 $\forall a_{kj}\geqslant 0$，则称 A 为**非负矩阵**，记为 $A\geqslant 0$；若 $A-B>0(\geqslant 0)$，则记为 $A>B(A\geqslant B)$. 若方阵 A 满足 $\overline{A'}=A^{-1}$，则称 A 为**酉矩阵**. 若 $\overline{A'}A=A\overline{A'}$，（即 A 与 $\overline{A'}$ 可交换），则称 A 为**正规矩阵**. 实对称矩阵、Hermite 矩阵、正交矩阵与酉矩阵都是正规矩阵.

n 阶方阵 A 的积和式定义为

$$\mathrm{per}(A)=\sum_{\sigma}\Big(\prod_{k=1}^{n}a_{k\sigma(k)}\Big),$$

式中求和遍及 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一切排列 σ.

若 A 的每一行元素的和，以及每一列元素的和都等于 1，则称 A 为**双随机矩阵**.

设 $A(i_1,\cdots,i_k)$ 表示 A 的第 $i_1,\cdots,i_k$ 行和列交叉处元素组成的主子阵，相应的主子式记为 $\det A(i_1,\cdots,i_n)$.

$$P_k(A)=\prod_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\det A(i_1,\cdots,i_k).$$

称为 A 的所有 k 阶主子式之积.

其中的乘积共有 $\binom{n}{k}$ 个. 特别 $P_n(A)=|A|$；$P_1(A)=\prod_{k=1}^{n}a_{kk}$.

§1 行列式不等式

1. **Hadamard 不等式**(1893)：设 D 是具有复元素 $a_{kj}(k,j=1,\cdots,n)$ 的矩阵 A 的行列式，则

$$D^2=|A|^2\leqslant\prod_{k=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n}|a_{kj}|^2).\tag{1.1}$$

仅当对于每对不同的 k,j，$\sum_{m=1}^{n}a_{km}\bar{a}_{jm}=0$ 或(1.1)式右边的因子中至少有一个等于零时等号成立.

(1.1)式的几何意义：n 维空间中平行六面体的体积不大于它从某一顶点出发的各边长度之积，而当这些边互相垂直或某一边的长度为零时则等于这个乘积.

特别当 $\forall a_{kj}$ 为实数且 $|a_{kj}|\leqslant M$ 时从(1.1)得到 $D\leqslant M^n n^{n/2}$，仅当 $\forall a_{kj}=1$ 或 -1，且 $AA'=nI$(I 为 n 阶单位矩阵)时等号成立，这样的矩阵称为 Hadamard 矩阵.

(Bull，Sci，Math，1893，17(2)：240 ～ 246)

若 $A=(a_{kj})$ 为 $n\times m$ 矩阵，则

$$|AA^*|\leqslant\prod_{k=1}^{n}(\sum_{j=1}^{m}|a_{kj}|^2),\tag{1.2}$$

仅当 A 的行向量相互正交时等号成立.

若 $A=(a_{kj})$ 是 n 阶半正定 Hermite 矩阵，则

$$|A|\leqslant\prod_{k=1}^{n}a_{kk},\tag{1.3}$$

仅当 A 为对角阵时等号成立.

利用 Hadamard 不等式可以推出许多其他不等式，目前对于 Hadamard 不等式已有上百种不同的证明方法.([30]81 ～ 84；[2]64)

Hadamard 不等式已有许多推广和改进：

(1) 若将 A 中 a_{kj} 换成矩阵 A_{kj}，就可将(1.3)式推广为 **Fischer 不等式**：设下述 A 为半正定 Hermite 矩阵：

$$A=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1m}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2m}\\\cdots&&&\\A_{m1}&A_{m2}&\cdots&A_{mm}\end{bmatrix},$$

式中 $A_{kk}(k=1,\cdots,m)$ 皆为方阵，则

$$|A|\leqslant\prod_{k=1}^{m}|A_{kk}|$$

仅当 A 为准对角阵，即 $A_{kj}=0(k\neq j)$ 时等号成立.

证明见[30]84，由此推出：将 A 分块为 $A=(A_1:A_2)$，则

$$|A|^2\leqslant|A_1^*A_1|\cdot|A_2^*A_2|.$$

仅当 $A_1^* A_2 = 0$ 时等号成立.

(2) **Szasz 不等式**:设 A 为 n 阶正定 Hermite 阵,则

$|A| = P_n(A) \leqslant (P_{n-1}(A))^{\alpha_{n-2}} \leqslant \cdots \leqslant [P_{k+1}(A)]^{\alpha_k} \leqslant [P_k(A)]^{\alpha_{k-1}} \leqslant \cdots \leqslant (P_3(A))^{\alpha_2} \leqslant (P_2(A))^{\alpha_1} \leqslant P_1(A)$.

式中 $\alpha_k = \binom{n-1}{k}^{-1}$. 证明见[30]85 ~ 86,或[360]1957,8:274 ~ 275.

由此推出:$|A| \leqslant \left(\prod_{i=1}^{n} |A_{(i)}|\right)^{\frac{1}{n-1}}$. 式中,$A_{(i)}$ 表示除去 A 的第 i 行和第 i 列后剩下的子阵. 王谅儒证明 $P_{n-j}^{\alpha} P_k^{\beta}$ 关于 k 是递增的. 其中 $k = 0,1,\cdots,n-j-1, j = 0,1,\cdots,n-1$,

$$\alpha = -\frac{n-j}{n-j-k},\ \beta = \frac{\binom{n-k}{j}}{\binom{n-j-1}{k}}. \text{([345]1989,5:28)}$$

(3) 设 $A = (a_{ij})$ 是 $n \times n$ 实方阵,令

$$A_1 = \left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} : a_{ij} > 0\right\},\ A_2 = \left\{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| : a_{ij} \leqslant 0\right\}, D = |A|.$$

1978 年,Schinzel 证明:

$$D \leqslant \prod_{i=1}^{n} (\max(A_1, A_2)).$$

1980 年,Johnson 与 Newman 将上式改进为:

$$D \leqslant \prod_{i=1}^{n} (\max(A_1, A_2)) - \prod_{i=1}^{n} (\min(A_1, A_2)).$$

同年,Minc 证明对复方阵也有类似的不等式. 但对于非负实方阵,上式反而不及 Hadamard 不等式.

1986 年,屠伯埙对 Hadamard 不等式作了实质性的改进,证明:对于 $n \times n$ 阶非奇异复方阵 $A = (a_{ij})$,下式成立

$$D^2 \leqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \left[\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{jk}|^2 - \frac{\left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \bar{a}_{jk}\right|^2}{\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2}\right)\right].$$

作者猜测,上式对四元数除环上的可中心化非奇异阵仍成立.(复旦大学学报,1986,25(4):429 ~ 435)

1989 年,李广兴证明:设 $A = (a_{jk})$ 是半正定 Hermite 方阵,σ 为非恒等置换,则

$$D = \det A \leqslant \prod_{k=1}^{n} a_{kk} - \left|\prod_{k=1}^{n} a_{k\sigma(k)}\right|, \quad \operatorname{per} A \geqslant \prod_{k=1}^{n} a_{kk} + \left|\prod_{k=1}^{n} a_{k\sigma(k)}\right|.$$

这两个不等式加强了 Hadamard 不等式和 Marcus 不等式.([339]1989,9(3):372 ~ 374)

(4) 设 $A = (a_{kj})$ 为 n 阶方阵,令

$$\tilde{a}_{kj} = \begin{cases} |a_{kk}|, & k = j, \\ -|a_{kj}|, & k \neq j. \end{cases}$$

则 $M(A)=(\tilde{a}_{kj})$ 称为 A 的比较矩阵；

若 $|a_{kk}|>R_k(A)=\sum_{j\neq k}|a_{kj}|,k=1,2,\cdots,n$,

则称 A 为严格对角占优矩阵，于是下式成立

$$|\det A|\geqslant\prod_{k=1}^{n}[|a_{kk}|-R_k(A)];$$

$$|\det A|\geqslant\det M(A)\geqslant\max_k\{|a_{kk}|\prod_{j\neq k}(|a_{jj}|-R_j(A))\}.$$

（胡永建，[345]1994，7：38 ~ 41）

(5) **Oppenhein 不等式**：设 A,B 是 n 阶正定 Hermite 方阵，则

$$(\det A)\prod_{k=1}^{n}b_{kk}\leqslant\det(AoB).$$

式中 AoB 是 A 与 B 的 Hadamard 乘积. 由此推出：

$$\det A\det B\leqslant\det(AoB)\leqslant(\prod_{k=1}^{n}a_{kk})(\prod_{k=1}^{n}b_{kk});\quad \det(AoA^{-1})\geqslant 1.$$

（证明见[30]88 ~ 89）

2. 设 A、B 为 n 阶半正定 Hermite 方阵.

令 $S_+(A)=\frac{1}{2}(A+A^*),S_-(A)=\frac{1}{2}(A-A^*)$.

若 $A^*=A$ 为正定矩阵. $S_+(B)$ 为半正定矩阵，则

(1) $|\det(A+B)|\geqslant\det(A)+|\det(B)|$.

由此推出：当 $S_+(A)$ 为正定矩阵时，成立 $|\det A|\geqslant\det(S_+(A))+|\det(S_-(A))|$. 它是下述 Ostrowski-Taussky 不等式的改进：

$|\det A|\geqslant\det S_+(A)$，仅当 $S_-(A)=0$ 时等号成立.

(2) 若 $\det(\lambda A-B)=0$ 的复根个数为 m，令 $p=\frac{2}{2n-m}$，则

$$|\det(A+B)|^p\geqslant(\det A)^p+|\det B|^p.$$

仅当 $\det(\lambda A-B)=0$ 的复根为纯虚数且模长相等，实根相等并等于复根模平方时等号成立；

$$|\det(A+B)|^{1/n}\geqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{2n}}(|\det A|^{1/n}+|\det B|^{1/n});$$

$$|\det(\lambda A+(1-\lambda)B)|\geqslant[\lambda^{\lambda}(1-\lambda)^{1-\lambda}]^{\frac{m}{2}}|\det A|^{\lambda}|\det B|^{1-\lambda}.$$

由此推出，当 $A^*=A,B^*=B$ 均为正定矩阵时，**Minkowski 不等式**成立：

$$(\det(A+B))^{1/n}\geqslant(\det A)^{1/n}+(\det B)^{1/n}. \tag{1.4}$$

仅当 $B=\lambda A(\lambda>0)$ 时等号成立.（何淦瞳，[339]2002，22(1)：79）

Fan Ky 从另一角度推广上述 Minkowski 不等式：

设 A,B 为 n 阶正定方阵，A_k 是 A 的由前 k 行和前 k 列形成的主子矩阵，则

$$\left(\frac{\det A}{\det A_k}\right)^{\frac{1}{n-k}}+\left(\frac{\det B}{\det B_k}\right)^{\frac{1}{n-k}}\leqslant\left(\frac{\det(A+B)}{\det(A_k+B_k)}\right)^{\frac{1}{n-k}}.$$

正定矩阵的 Minkowski 不等式(1.4) 还有以下推广：

$$p(\det A)^{m/n}+q(\det B)^{m/n}\leqslant[\det(pA+qB)]^{\frac{m}{n}},$$

仅当 $A=\alpha B,(\alpha>0)$ 时等号成立；

设 $A_k(1\leqslant k\leqslant m)$ 为 n 阶正定矩阵，则 $\forall p_k>0$，有

$$\sum_{k=1}^{m}p_k[\det(A_k)]^{1/n}\leqslant\left[\det\left(\sum_{k=1}^{m}p_kA_k\right)\right]^{1/n},$$

证明可用凸函数不等式、数学归纳法等.([345]1989,7:18;1985,3:31,[2]70;[342]1991,3:64 ~ 66. 冯慈璜，杭州大学学报，1994,21(1):11 ~ 15)

郝稚传证明：设 A_{kj} 为正定同阶 Hermite 矩阵，$p_k>0$ 且 $\sum_{k=1}^{n}p_k=1,m,n\geqslant 2$，则

$$\sum_{k=1}^{m}\left[\prod_{j=1}^{n}(\det A_{kj})^{p_j}\right]<\prod_{j=1}^{n}\left[\det\left(\sum_{k=1}^{m}A_{kj}\right)\right]^{p_j}. \tag{1.5}$$

([344]1985,4)

1987 年张福振指出，(1.5) 式对于 $\sum_{k=1}^{n}p_k\geqslant 1$ 也成立.([344]1987,2)

1990 年沈光星讨论 $\sum p_k<1$ 的情形. 证明：

① 设 A_{kj} 都是 $r\geqslant 2$ 阶 Hermite 正定矩阵，$p_k>0,\sum_{k=1}^{n}p_k\geqslant\frac{1}{r}$，则

$$\sum_{k=1}^{m}\left[\prod_{j=1}^{n}(\det(A_{kj}))^{p_j}\right]\leqslant\prod_{j=1}^{n}\left[\det\left(\sum_{k=1}^{m}A_{kj}\right)\right]^{p_j}, \tag{1.6}$$

仅当 A_{kj} 都为某矩阵 $B_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 的倍数且 $\sum_{j=1}^{n}p_j=\frac{1}{r}$ 时等号成立. (1.6) 式对实对称正定矩阵也成立.

② 设 A_{kj} 都是 $r\geqslant 2$ 阶 Hermite 半正定矩阵，或实对称半正定矩阵，$0<p\leqslant\frac{1}{r}$，则

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\sum_{k=1}^{m}(\det A_{kj})^{p}\right]^{\frac{1}{rp}}\leqslant\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\det\left(\sum_{j=1}^{n}A_{kj}\right)\right)^{p}\right]^{\frac{1}{rp}};$$

$$\sum_{k=1}^{m}\left[\left(\sum_{j=1}^{n}(\det A_{kj})^{p}\right]^{\frac{1}{rp}}\leqslant\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\det\left(\sum_{k=1}^{m}A_{kj}\right)\right)^{p}\right]^{\frac{1}{rp}}.$$

(杭州师院学报，1990,3:14 ~ 18)

3. 设 A_{kj} 是 n 阶方阵 A 相应行列式 $\det A$ 中 a_{kj} 的代数余子式，则

$$(\det A)^{n-1}\leqslant\prod_{k=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n}(A_{kj})^2\right]^{1/2},$$

仅当 $\sum_{i\neq j}(a_{ik}a_{jk})=0$ 时等号成立.

$$\left[\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{kj}^2\right)^{1/2}\right]^{n-1}\leqslant\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\prod_{m\neq k}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{mj}^2\right)^{1/2}\right]^{n},$$

仅当 $\sum_{j=1}^{n}a_{1j}^2=\sum_{j=1}^{n}a_{2j}^2=\cdots=\sum_{j=1}^{n}a_{nj}^2$ 时等号成立.(尹景尧，[345]1983,2:25 ~ 28)

4.　设 A、B 为半正定 Hermite 方阵，则

$$\det(A+B) \geqslant \det(A) + \det(B).$$

仅当 $A=0$ 或 $B=0$ 或 $\det(A+B)=0$ 时等号成立.

推论　设 $A,B,A-B$ 均为半正定方阵，则 $\det(A) \geqslant \det(B)$.

(华罗庚.[334]1995,5:463 ～ 470)

5.　将方阵 A 分块为

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

当 A_{11} 可逆时，$A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ 称为 A_{11} 在 A 中的 Schur 补矩阵，记为 (A/A_{11})，则

(1)　A 为正定 Hermite 方阵的充要条件是 A_{11}，(A/A_{11}) 均为正定矩阵.

(2)　$\det(A/A_{11}) = \dfrac{\det A}{\det A_{11}}$.

(3)　设 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$，

A 与 B，A_{11} 与 B_{11} 各具有相同阶. A_{11}，B_{11} 与 A，B 均为正定矩阵，则

$$\frac{\det(A+B)}{\det(A_{11}+B_{11})} \geqslant \frac{\det A}{\det A_{11}} + \frac{\det B}{\det B_{11}}.$$

此外，若 A，B 为半正定矩阵，则 $((A+B)/(A_{11}+B_{11}))-(A/A_{11})-(B/B_{11})$ 仍为半正定矩阵.([30]73 ～ 76)

6.　**Bergstrom 不等式**：设 A，B 为同阶正定 Hermite 矩阵，A_i，B_i 分别表示 A，B 删去第 i 行和第 i 列后剩下的子矩阵，则

$$\frac{\det(A+B)}{\det(A_i+B_i)} \geqslant \frac{\det A}{\det A_i} + \frac{\det B}{\det B_i}.$$

该不等式已有许多推广形式，例如：

(1)　设 A，B 是 n 阶正定矩阵，$E=\lambda A+(1-\lambda)B$，$0\leqslant\lambda\leqslant 1$，$A^j$ 表示 A 删去头 $j-1$ 行与头 $j-1$ 列后得到的主子矩阵，实数 α_k 满足 $\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k \geqslant 0$，$m=1,2,\cdots,n$，则

$$\prod_{j=1}^{n}(\det E^j)^{\alpha_j} \geqslant \prod_{j=1}^{n}(\det A^j)^{\lambda\alpha_j}(\det B^j)^{(1-\lambda)\alpha_j}.$$

(2)　设 A 是 n 阶正定实矩阵，则 $\forall x,y \in R^1$，下式成立

$$(x,y)^2 \leqslant (x,Ax)(y,A^{-1}y).$$ (证明及其推广见[2]67 ～ 69)

7.　设 A，B 为 n 阶半正定 Hermite 方阵. A_k 表示 A 的左上角 k 阶子方阵，若 A_k，B_k 均为正定矩阵，$k=1,2,\cdots,n-1$，则

$$\det(A+B) \geqslant \det A\left(1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\det B_k}{\det A_k}\right)+\det B\left(1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\det A_k}{\det B_k}\right)+(2^n-2n)(\det A\det B)^{1/2}.$$

提示：利用数学归纳法.([30]76 ～ 79)

推论　设 A，B 是 n 阶正定 Hermite 矩阵，则 $\det(A+B) \geqslant \det A+\det B+(2^n-2)(\det A\det B)^{1/2}$.

8. 设 $A=(a_{kj})$ 是 n 阶实正定方阵.

$$A_{rs}=\begin{pmatrix} a_{rr} & a_{r,r+1} & \cdots & a_{rs} \\ a_{r+1,r} & a_{r+1,r+1} & \cdots & a_{r+1,s} \\ \cdots \\ a_{sr} & a_{s,r+1} & \cdots & a_{ss} \end{pmatrix},1\leqslant r\leqslant s\leqslant n.$$

则 $\det A_{1n}\leqslant(\det A_{1k})(\det A_{k+1,n})$. 特别地，$\det A\leqslant\prod_{k=1}^{n}a_{kk}$. ([344]1994,2:45 ~ 47)

9. **Fan Ky 不等式**：设 $|A|_k=\lambda_n\lambda_{n-1}\cdots\lambda_{n-k+1}$ 是实正定矩阵 A 的头 k 个最小特征根之积，则对于 n 阶实正定矩阵 A,B 以及 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$，有 $|\lambda A+(1-\lambda)B|_k\geqslant|A|_k^{\lambda}|B|_k^{1-\lambda}$. 证明及其各种变形和推广见[2]74 ~ 79.

10. **Fan Ky 凹性定理**：设 A,B 为实正定矩阵，则对于 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$，有

$$|\lambda A+(1-\lambda)B|\geqslant|A|^{\lambda}|B|^{1-\lambda}. \tag{1.7}$$

提示：当 $\lambda=0$ 或 1 时，(1.7) 式显然成立，所以不妨设 $0<\lambda<1$. 用 Hölder 不等式，有

$$\frac{\pi^{n/2}}{|\lambda A+(1-\lambda)B|^{1/2}}=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\lambda(x,Ax)-(1-\lambda)(x,Bx))\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\left(\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-(x,Ax)]\mathrm{d}x\right)^{\lambda}\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-(x,Bx)]\mathrm{d}x\right)^{1-\lambda}$$

$$\leqslant\pi^{n/2}|A|^{-\lambda/2}|B|^{-(\frac{1-\lambda}{2})}.$$

上式就等价于(1.7) 式. ([2]63)

1981 年胡克将(1.7) 式改进为：设 A,B,C 为三个 n 阶实正定矩阵. $0\leqslant\lambda\leqslant 1$，令 $M(\lambda)=\min\{\lambda,1-\lambda\}$，则

$$|\lambda A+(1-\lambda)B|\geqslant|A|^{\lambda}|B|^{1-\lambda}\left[1-\left(\frac{\sqrt{|A|}}{\sqrt{|A+C|}}-\frac{\sqrt{|B|}}{\sqrt{|B+C|}}\right)^2\right]^{-M(\lambda)}.$$

(证明见[364]1981,2:141 ~ 148 或[121]143 ~ 144)

同年胡克进一步证明，设 A,B,C 为 n 阶实正定矩阵，则当 $1/2\leqslant\lambda\leqslant 1$ 时，有

$$|\lambda A+(1-\lambda)B|^{-1}\leqslant|A|^{1-2\lambda}\{(|A|\cdot|B|)^{-1}$$
$$-(|A+C|\cdot|B|)^{-1/2}-(|A|\cdot|B+C|)^{-1/2}]^2\}^{1-\lambda}.$$

([364]1981,8:1047 ~ 1055)

11. **华罗庚不等式**：设 A,B 为同阶复方阵. $I-AA^*$ 与 $I-BB^*$ 均为正定矩阵，则

$$\det(I-AA^*)\det(I-BB^*)\leqslant|\det(I-AB^*)|^2,$$

仅当 $A=B$ 时等号成立.

王松桂([30]91 ~ 92) 改进为：

$$\det(I-AA^*)\det(I-BB^*)+|\det(A-B)|^2\leqslant|\det(I-AB^*)|^2.$$

(进一步的推广见[6]235)

12. **Lavoie 不等式**：设 A 为 $m\times n$ 阶复矩阵，将其分块为：

$$A=\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_k \end{pmatrix}$$ 式中 A_i 为 $m_i\times n$ 矩阵，$\sum_{i=1}^{k}m_i=m$. A_i^+ 为 A_i 的 Moore-Penrose 广义逆

阵,令 $B=(A_1^+,\cdots,A_k^+)$,则 $0\leqslant \det(AB)\leqslant 1$,仅当 $r(A)<m$ 时,左边等号成立;而仅当 $A_iA_j^*=0\ (\forall i\neq j)$ 时,右边等号成立.(证明见[30]95 ～ 96)

13.　**Price 不等式**:设 $A=(a_{kj})$ 为 n 阶复方阵,令 $S_k=\sum_{j=k+1}^{n}|a_{kj}|,k=1,\cdots,n$.若 $|a_{kk}|>\sum_{j\neq k}|a_{kj}|,k=1,\cdots,n$.则

$$0<\prod_{k=1}^{n}(|a_{kk}|-S_k)\leqslant|\det A|\leqslant\prod_{k=1}^{n}(|a_{kk}|+S_k).$$

仅当 A 为下三角阵时,等号成立.(证明见[30]97 ～ 98)

Fan Ky 改进和推广了上述不等式.([317]1971,3(2):187 ～ 189)

14.　**BW 不等式(Bloomfield-Watson 不等式)**:设 A 为 n 阶半正定 Hermite 方阵,$\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$ 为 A 的特征值,若 $\forall\, n\times m$ 矩阵 B 满足 $B^*B=I_m$,则

$$\prod_{k=n-m+1}^{n}\lambda_k\leqslant\det(B^*AB)\leqslant\prod_{k=1}^{m}\lambda_k.$$

若 A 为 n 阶正定 Hermite 方阵,$n>2m$,则

$$\det(B^*AB)\det(B^*A^{-1}B)\leqslant\prod_{k=1}^{m}\frac{(\lambda_k+\lambda_{n-k+1})^2}{4\lambda_k\lambda_{n-k+1}}.$$

(证明及其推广见[30]99 和 149 ～ 153)

15.　**Gram 不等式**:设$\{x_k\}(k=1,\cdots,n)$ 为内积空间 X 中 n 个元,内积(x_i,x_j) 记为 a_{ij},由这些内积构成的 n 阶方阵记为$G(x_1,\cdots,x_n)=(a_{ij})$,称为 $x_1,\cdots,x_n$ 的 **Gram 矩阵**,它是 Hermite 对称矩阵,即(i,j) 是(j,i) 的共轭复数,G 的行列式 $|G(x_1,\cdots,x_n)|$ 称为 **Gram 行列式**.令 $\|x_j\|^2=(x_j,x_j),j=1,\cdots,n$.若 $x_j\neq 0$(即 x_j 为非零元),$j=1,\cdots,n$,则

$$0\leqslant|G(x_1,\cdots,x_n)|\leqslant\|x_1\|^2\cdots\|x_n\|^2.$$

式中 $|G(x_1,\cdots,x_n)|=0\Leftrightarrow x_1,\cdots,x_n$ 线性相关,$|G(x_1,\cdots,x_n)|=\|x_1\|^2\cdots\|x_n\|^2\Leftrightarrow x_1,\cdots,x_n$ 正交.

推论 1　Gauchy 不等式的推广

(1)　离散形式:令 $A_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{jk}$,则　$\det(A_{ij})\geqslant 0$.

(2)　积分形式:令 $A_{ij}=\int f_if_j\mathrm{d}x$,则　$\det(A_{ij})\geqslant 0$,

仅当 $f_1,\cdots,f_n$ 线性相关时等号成立.

若$\{y_1,\cdots,y_n\}$ 是内积空间 X 中的线性无关组,则对于 $1\leqslant k\leqslant n-1$,有

$$|G(y_1,\cdots,y_n)|\leqslant|G(y_1,\cdots,y_k)|\cdot|G(y_{k+1},\cdots,y_n)|,$$

仅当 $M_1=\{y_1,\cdots,y_k\}$ 中的每个元素都正交于 $M_2=\{y_{k+1},\cdots,y_n\}$ 中的每个元素时等号成立.

16.　设 x_k 是酉空间中的向量,Gram 行列式仍记为 $|G(x_1,\cdots,x_n)|$,设 $0\leqslant k\leqslant m-1$, $m<n$. 则

(1) $\dfrac{|G(x_1,\cdots,x_n)|}{|G(x_1,\cdots,x_k)|}\leqslant\dfrac{|G(x_2,\cdots,x_n)|}{|G(x_2,\cdots,x_k)|}\leqslant\cdots\leqslant|G(x_{k+1},\cdots,x_n)|.$

(2) $|G(x_1+y_1,x_2,\cdots,x_n)|^{\frac{1}{2}}\leqslant|G(x_1,x_2,\cdots,x_n)|^{\frac{1}{2}}+|G(y_1,x_2,\cdots,x_n)|^{\frac{1}{2}}.$

(3) $\dfrac{|G(x_k,x_{k+1},\cdots,x_n)|}{|G(x_{k+1},\cdots,x_n)|}\leqslant\dfrac{|G(x_k,x_{k+1}\cdots,x_m)|}{|G(x_{k+1},\cdots,x_m)|}.$

(4) $\dfrac{|G(x_m,\cdots,x_n)|}{|G(y_{m+1},\cdots,y_n)|}\leqslant|G(y_m)|.$

(5) $|\det(x_k,y_j)|^2\leqslant|G(x_1,\cdots,x_n)|\cdot|G(y_1,\cdots,y_n)|.$

(6) 设 P 为投影算子，$y_k=Px_k$. 则

$$\frac{|G(y_1,\cdots,y_{n-1})|}{|G(y_1,\cdots,y_n)|}\geqslant\frac{|G(x_1,\cdots,x_{n-1})|}{|G(x_1,\cdots,x_n)|},$$

式中 $|G(y_1,\cdots,y_n)|\cdot|G(x_1,\cdots,x_n)|\neq 0$ 而且 $|G(x_1,\cdots,x_n)|\geqslant|G(y_1,\cdots,y_n)|$.

([22]597 ~ 599)

17. 设 A 是 n 阶正定矩阵. 在 A 上定义 BBF 拟线性泛函 σ_i，δ_j，υ_k(BBF 指 Bellman-Bergstöm-Fan) 如下:设 $|A|_i$ 表示 A 的头 i 个最小特征根之积,$A_{(j)}$ 表示从 A 中删去第 j 行第 j 列后剩下的子矩阵,A_k 是由 A 的前 k 行和前 k 列形成的主子矩阵. 令

$$\sigma_i(A)=|A|_i^{1/i},\quad |A|_n=|A|,\quad \delta_j(A)=\frac{|A|}{|A_{(j)}|},\quad \upsilon_k(A)=\left(\frac{|A|}{|A_k|}\right)^{\frac{1}{n-k}}.$$

下面将它们统一记为 $\varphi\in$ BBF.

(1) 设 $\varphi\in$ BBF，A_1,A_2 是 n 阶正定矩阵，$p_1,p_2>0$，则

$$\varphi(p_1A_1+p_2A_2)\geqslant p_1\varphi(A_1)+p_2\varphi(A_2)\qquad\text{(拟线性)}$$

(2) 设 A_k 均为 n 阶正定矩阵，$N_k=\{1,\cdots,k\}$，$q_k>0$，$Q_n=\sum_{k=1}^{n}q_k$，令

$$F(N_k)=\frac{\varphi\left(\frac{1}{Q_k}\sum_{j=1}^{k}q_jA_j\right)^{Q_k}}{\prod_{j=1}^{k}\varphi(A_j)^{q_j}},\qquad f_{k,m}=\binom{m}{k}^{-1}\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant m}\varphi\left(\frac{1}{k}(A_{j_1}+\cdots+A_{j_k})\right)$$

则 $F(N_m)\geqslant F(N_{m-1})\geqslant\cdots\geqslant F(N_2)\geqslant 1$;

$$\varphi\left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}A_j\right)=f_{m,m}\geqslant\cdots\geqslant f_{(k+1),m}\geqslant f_{k,m}\geqslant\cdots\geqslant f_{1,m}=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\varphi(A_j).$$

更多的类似不等式见[22]215 ~ 219.

18. 幂不等式:设 $A=(a_{kj})$ 是 n 阶对称方阵. 令 $S(A)=\sum_{k,j=1}^{n}a_{kj}$,则当 $n\leqslant 3$ 时，下式成立 $S(A)\,S(A^2)\leqslant nS(A^3)$. 但当 $n\geqslant 4$ 时,上式不成立. 当 $n\geqslant 4$ 时有以下结果:设 $A=(a_{kj})$ 是 n 阶非负对称方阵.

若 ①$m=3,4,5$，$n=1,2,\cdots$,或 ②$m=3,4,\cdots$，和 $n=1,2,3$,则

$$S(A^m)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{kj}\right)^m.\ ([22]227)$$

我们问:在 $c(n)$ 满足什么条件下,下式成立

$$S(A)S(A^2) \leqslant c(n)S(A^3)?$$

19. **Minkowski 猜想**:设 $A = (a_{kj})$ 为实 n 阶方阵,$\det A \neq 0$,令

$$y_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j, 1 \leqslant k \leqslant n,$$

则 $\forall$ 实数 $b_k(1 \leqslant k \leqslant n)$,存在整数 $x_1, \cdots, x_n$,使得

$$\prod_{k=1}^{n} |y_k - b_k| \leqslant 2^{-n} |\det A|. \tag{1.8}$$

1918年Minkowski证明了 $n=2$ 时上式成立,目前已知 $n \leqslant 5$ 时上式也成立,当 $n > 5$ 时,已知在某些附加条件下,上式成立. 令 m 为 $\prod_{k=1}^{n} |y_k - b_k|$ 的下界,则

$$m \leqslant 2^{-\frac{n}{2}} |\det A|.$$

([107]3:761)

20. 设 A,B 为 n 阶正定矩阵,$I_\alpha = \alpha I(\alpha > 0)$ 为数量矩阵,$\det(A) > \det(I_\alpha)$,$\det(B) > \det(I_\beta)$,则

$$[\det(A+B) - \det(I_\alpha + I_\beta)]^{1/n} \geqslant [\det(A) - \det(I_\alpha)]^{1/n} + [\det(B) - \det(I_\beta)]^{1/n},$$

仅当 $\alpha^{-1}A = \beta^{-1}B$ 时等号成立.([345]1990,8:36)

21. [MCM]设 $A = (a_{kj})$ 为 n 阶非负矩阵,它有如下性质:若某个 $a_{kj} = 0$,则 $\sum_{m=1}^{n} a_{km} + \sum_{m=1}^{n} a_{mj} \geqslant n$. 于是 A 的所有元素之和不小于 $\frac{1}{2}n^2$.(13 届 IMO).

证 可先通过换行或换列,使得有尽可能大的 m,满足 $a_{11} = \cdots = a_{mm} = 0$,这时 $k,j > m$ 时 $a_{kj} \neq 0$,当 $k \leqslant m, j > m$ 时,若 $a_{kj} = 0$,则 $a_{jk} \neq 0$,从而 $\sum_{m=1}^{n}(a_{jm} + a_{mj}) \geqslant n$. 于是

$$2\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{kj} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{kj} + a_{jk}) \geqslant n^2. \text{证毕.}$$

§2 矩阵不等式

一、 矩阵特征值与奇异值不等式

设 $A = (a_{kj})$ 为 n 阶复方阵,$\lambda(A)$,$\sigma(A)$ 分别为 A 的任一特征值和奇异值. 当 A 为实对称或实正定方阵时,$\lambda(A)$ 为实数,我们总设 A 的 n 个特征值和奇异值从大到小排列:

$$|\lambda_1(A)| \geqslant |\lambda_2(A)| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_n(A)|; \ |\sigma_1(A)| \geqslant |\sigma_2(A)| \geqslant \cdots \geqslant |\sigma_n(A)|;$$

$\rho(A) = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\lambda_k(A)|$ 为 A 的谱半径. 因为 $\det A = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k(A)$,所以,$A$ 的行列式 $\det A$ 与 $\lambda_k(A)$ 有密切联系.

1. **Gersgorin 不等式**：设 $A=(a_{kj})$ 为 n 阶复方阵. $\forall\lambda_k(A)$，至少存在一个 m，使得

$$|\lambda_k(A)-a_{mm}|\leqslant\sum_{\substack{j=1\\j\neq m}}^{n}|a_{jj}|.$$

Fan Ky 证明：设 $B=(b_{kj})$ 是另一 n 阶复方阵. 若 $b_{kj}>|a_{kj}|$，$\forall k,j=1,2,\cdots,n$，则

$$|\lambda_k(A)-a_{mm}|\leqslant\rho(B)-b_{mm};$$

Ostrowski 则进一步证明：$\forall p:0\leqslant p\leqslant 1$，下式成立

$$|\lambda_k(A)-a_{mm}|\leqslant\Big(\sum_{\substack{j=1\\j\neq m}}^{n}|a_{kj}|\Big)^{p}\Big(\sum_{\substack{i=1\\i\neq m}}^{n}|a_{ij}|\Big)^{1-p}.$$

2. 设 A,B 为 n 阶实对称方阵，$x\in R^n$，$x\neq 0$. $\dfrac{(x,Ax)}{(x,x)}$ 称为 **A 的 Rayleigh 商.**

(1) **C-F 不等式(Courant-Fischer 不等式)：**

$$\lambda_n(A)\leqslant\frac{(x,Ax)}{(x,x)}\leqslant\lambda_1(A);$$

(2) $\lambda_n(B)\leqslant\lambda_k(A+B)-\lambda_k(A)\leqslant\lambda_1(B)$，$1\leqslant k\leqslant n$；

3. **Weyl 不等式**：设 A,B 为 n 阶 Hermite 方阵，$\lambda_1(A)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(A)$；$\sigma_1(A)\geqslant\cdots\geqslant\sigma_n(A)$，则

(1) $\lambda_k(A)+\lambda_n(B)\leqslant\lambda_k(A+B)\leqslant\lambda_k(A)+\lambda_1(B)$，$1\leqslant k\leqslant n$.

(2) $\lambda_m(A+B)\leqslant\lambda_j(A)+\lambda_k(B)$，$m\geqslant j+k-1$.

(3) $\lambda_j(A)+\lambda_k(B)\leqslant\lambda_{j+k-n}(A+B)$，$j+k\geqslant n$.（证明见[30]114 ～ 120）

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{m}|\lambda_k(A)|^p\leqslant\sum_{k=1}^{m}(\sigma_k(A))^p$，$p>0$，$1\leqslant m\leqslant n$.（证明见[12]153 ～ 154）

4. 设 A,B 为 n 阶 Hermite 方阵，则对于 $1\leqslant k_1\leqslant\cdots\leqslant k_m\leqslant n$，下式成立

$$\sum_{j=1}^{m}\lambda_{k_j}(A)+\sum_{j=1}^{m}\lambda_{n-m+j}(B)\leqslant\sum_{j=1}^{m}\lambda_{k_j}(A+B)\leqslant\sum_{j=1}^{m}\lambda_{k_j}(A)+\sum_{j=1}^{m}\lambda_k(B).$$

（证明见[30]121 ～ 122）

5. 设 A,B 为 n 阶 Hermite 方阵，$r(B)\leqslant m$，$k\leqslant n-2m$，则

(1) $\lambda_{k+2m}(A+B)\leqslant\lambda_{k+m}(A)\leqslant\lambda_k(A+B)$.

(2) $\lambda_{k+2m}(A)\leqslant\lambda_{k+m}(A+B)\leqslant\lambda_k(A)$.（证明见[30]123）

6. 设 A,B 为 n 阶实对称正定方阵，则

$$\Big(\prod_{k=1}^{m}\lambda_k(A)\Big)^{1/m}+\Big(\prod_{k=1}^{m}\lambda_k(B)\Big)^{1/m}\leqslant\Big(\prod_{k=1}^{m}\lambda_k(A+B)\Big)^{1/m}.$$

7. **Sturm 不等式**：设 A 是 n 阶实对称方阵，A_m 是 A 的任一 m 阶主子阵，这样的主子阵共有 $\dbinom{n}{m}$ 个，则　$\lambda_{n-m+k}(A)\leqslant\lambda_k(A_m)\leqslant\lambda_k(A)$，$1\leqslant k\leqslant m$.（证明见[30]124 ～ 125）

8. **Fan Ky 不等式**：设 A,B 为 n 阶实正定矩阵，$0\leqslant\alpha\leqslant 1$. 记 $P_m(A)=\displaystyle\prod_{k=1}^{m}\lambda_{n-k+1}(A)$　（即 A 的前 m 个最小特征值之积）；$\sigma_m(A)=\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\lambda_{n-k+1}(A)$　（即前 m 个最小特征值之和），则

(1) $[P_m(A)]^\alpha[P_m(B)]^{1-\alpha} \leqslant P_m(\alpha A+(1-\alpha)B)$;

(2) $\alpha\sigma_m(A)+(1-\alpha)\sigma_m(B) \leqslant \sigma_m(\alpha A+(1-\alpha)B)$.

9. 设 A 是 n 阶实对称方阵,$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 R^n 中标准正交向量组,令 $b_{kj}=(x_k, Ax_j)$,$B=(b_{kj})$,则

(1) **C-P 不等式(Cauchy-Poincare 不等式)**:

$$\lambda_{n-m+k}(A) \leqslant \lambda_k(B) \leqslant \lambda_k(A).\ k=1,2,\cdots,m.$$

(2) **Fan Ky 不等式**:

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k(A)=\max\sum_{k=1}^m b_{kk};\quad \sum_{k=1}^m \lambda_{n-k+1}(A)=\min\sum_{k=1}^m b_{kk},$$

特别:$\sum\limits_{k=m}^n \lambda_k(A) \leqslant \sum\limits_{k=m}^n a_{kk}$,$1 \leqslant m \leqslant n$.

(3) 若 A 为 n 阶实正定方阵,则

$$\prod_{k=m}^n \lambda_k(A)=\min\prod_{k=m}^n b_{kk} \qquad \text{(Fan Ky)}$$

10. **Poincare 不等式**:设 A 为 n 阶 Hermite 方阵,B 为 $n\times m$ 阶正交阵,即 $B^*B=I_m$,则

$$\lambda_{n-m+k}(A) \leqslant \lambda_k(B^*AB) \leqslant \lambda_k(A) \leqslant, 1 \leqslant k \leqslant m.$$

由此推出 **DW 不等式**:设 A 为 n 阶半正定 Hermite 方阵,B 为正交投影阵,$r(B)=m$,则 $\lambda_{n-m+k}(A) \leqslant \lambda_k(BA) \leqslant \lambda_k(A)$,$1 \leqslant k \leqslant m$.(证明及其推广见[30]125 ~ 134)

11. 设 A,B 为 n 阶半正定 Hermite 方阵,$1 \leqslant k \leqslant n$,则

(1) $\lambda_n(A)\lambda_k(B) \leqslant \lambda_k(AB) \leqslant \lambda_1(A)\lambda_k(B)$.

(2) $\lambda_k(A)\lambda_n(B) \leqslant \lambda_k(AB) \leqslant \lambda_k(A)\lambda_1(B)$.(证明及其推广见[30]128 ~ 129)

(3) 设 $\lambda_1(A) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(A)$;$\lambda_1(B) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(B)$,$1 \leqslant k \leqslant n$,则

$$\frac{1}{n\lambda_n(A)\lambda_n(B)} \leqslant \lambda_k(AB) \leqslant n\lambda_1(A)\lambda_1(B).$$

(4) $\left|\lambda_k(AB)-\frac{1}{n}(\mathrm{tr}(AB))\right| \leqslant \left\{[\mathrm{tr}(AB)]^2-\frac{n}{n-1}[\mathrm{tr}(AB)^2-\mathrm{tr}(A^2B^2)]\right\}^{1/2}$.

(冯慈璜,[352]1987,14(1):121 ~ 122)

12. 设 A,B 是 n 阶半正定 Hermite 方阵,$1 \leqslant k_1 < \cdots < k_m \leqslant n$. 则

(1) $\sum\limits_{j=1}^m \lambda_j(A)\lambda_{n-j+1}(B) \leqslant \sum\limits_{j=1}^m \lambda_j(AB) \leqslant \sum\limits_{j=1}^m \lambda_j(A)\lambda_j(B) \quad (1 \leqslant m \leqslant n)$;

(2) $\sum\limits_{j=1}^m \lambda_{k_j}(A)\lambda_{n-j+1}(B) \leqslant \sum\limits_{j=1}^m \lambda_{k_j}(AB)$;

(3) $\prod\limits_{j=1}^m \lambda_{k_j}(AB) \leqslant \prod\limits_{j=1}^m \lambda_{k_j}(A)\lambda_j(B)$. 当 $m=n$ 时等号成立;

(4) $\prod\limits_{j=1}^m \lambda_{k_j}(A)\lambda_{n-k_j+1}(B) \leqslant \prod\limits_{j=1}^m \lambda_j(AB)$. 当 $m=n$ 时,等号成立.

(证明见[30]132 ~ 134)

13. **Schur 不等式**:设 A 为 n 阶复方阵,令 $\|A\| = (\mathrm{tr}(A^*A))^{1/2}$,则

(1) $\left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k(A)|^2\right)^{1/2} \leqslant \|A\|$;　　(2.1)

(2) $\left(\sum_{k=1}^{n} |\mathrm{Re}(\lambda_k(A))|^2\right)^{1/2} \leqslant \|\frac{1}{2}(A+A^*)\|$;

(3) $\left(\sum_{k=1}^{n} |\mathrm{Im}(\lambda_k(A))|^2\right)^{1/2} \leqslant \|\frac{1}{2}(A-A^*)\|$.(证明见[30]135 ~ 136)

推论 $\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k(A)|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n}\lambda_k(A^*A)$.

1982 年屠伯埙将(2.1)式作了改进.证明:设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 n 阶复方阵

$$A = \begin{pmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{pmatrix}$$

的特征值,其中 A_k 是 A 的 k 阶顺序主子阵,$1 \leqslant k \leqslant n-1$,则

$$\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 \leqslant \|A\|^2 - \max_{1\leqslant k\leqslant n-1}(\|B_k\| - \|C_k\|)^2.$$

证明及进一步推广见复旦大学学报 1982,21:416;1985,24:321;1986,25:429 ~ 435.

14. **Hirsch 不等式**:设 $A = (a_{kj})$ 为 n 阶复方阵.

记 $M_1 = \max\limits_{k,j}\{|a_{kj}|\}$;$M_2 = \max\limits_{k,j}\{\frac{1}{2}|a_{kj}+\bar{a}_{jk}|\}$;$M_3 = \max\limits_{k,j}\{\frac{1}{2}|a_{kj}-\bar{a}_{jk}|\}$,

则对 A 的任一特征值 $\lambda(A)$,下式成立

$|\lambda(A)| \leqslant nM_1$;$|\mathrm{Re}\lambda(A)| \leqslant nM_2$;$|\mathrm{Im}\lambda(A)| \leqslant nM_3$.(证明见[30]136 ~ 137)

15. **Bendixson 不等式**:设 $A = (a_{kj})$ 为 n 阶实方阵,$\lambda(A)$ 为 A 的任一特征值,令 $d = \max\{(1/2)|a_{kj}-a_{jk}|\}$,则

$$|I_m(\lambda(A))| \leqslant \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}d.$$

这是本节 Schur 不等式(No. 13)的推论.

16. **Cauchy 不等式**:设 A 为 n 阶半正定 Hermite 方阵,则 $\forall x,y \in R^n$,下式成立

$$|(x,Ay)|^2 \leqslant (x,Ax)(y,Ay).$$

若 x 与 y 正交,A 为 n 阶正定 Hermite 方阵.A 的特征值 $\lambda_1(A) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(A) > 0$.

则成立 **Wielandt 不等式**:

$$|(x,Ay)|^2 \leqslant \left(\frac{\lambda_1(A)-\lambda_n(A)}{\lambda_1(A)+\lambda_n(A)}\right)^2(x,Ax)(y,Ay).\text{(证明见[30]142 ~ 144)}$$

17. **Kantorovich 不等式**:设 A 为 n 阶正定 Hermite 方阵,$\lambda_1(A) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(A) > 0$,$x \in R^n$,则

$$1 \leqslant \frac{(x,Ax)(x,A^{-1}x)}{(x,x)^2} \leqslant \frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}.$$

证明及其各种推广、应用见[30]144 ~ 153,218 ~ 221,288 ~ 292.

18. **Weyl 不等式**:设 A 为 n 阶复方阵,f 在 $(0,\infty)$ 上递增,且 $f(e^t)$ 是 t 的凸函数(这

时称 f 为 Weyl 函数)，则

$$\sum_{k=1}^{m} f(|\lambda_k(A)|^2) \leqslant \sum_{k=1}^{m} f(\lambda_k(AA^*)), 1 \leqslant m \leqslant n.$$

1949 年 Fan Ky 和 1992 年陈灵分别作了推广，见[339]1992,1:80 ~ 82.

19.　设 A,B 为 n 阶复方阵，则当 $1 \leqslant m < n$ 时，

(1)　$\prod_{k=1}^{m} \sigma_k(AB) \leqslant \prod_{k=1}^{m} \sigma_k(A)\sigma_k(B)$；

(2)　$\prod_{k=1}^{m} |\lambda_k(A)| \leqslant \prod_{k=1}^{n} \sigma_k(A)$.

当 $m = n$ 时，(1)(2) 中等号成立.（证明见[123]171 ~ 172. Yang X. M. 等）进一步证明：设 $A_1,\cdots,A_m$ 是 n 阶复方阵，$1 \leqslant k \leqslant n$，则

(3)　$\prod_{i=1}^{k} \sigma_i(\prod_{j=1}^{m} A_j) \leqslant \prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{m} \sigma_i(A_j)$；

(4)　$\sum_{i=1}^{k} \sigma_i(\prod_{j=1}^{m} A_j) \leqslant \sum_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{m} \sigma_i(A_j)$.

由(3) 推出：

(5)　设 $A_1,\cdots,A_m$ 是 n 阶半正定矩阵，则

$$\prod_{i=1}^{k} \left|\lambda_i\left(\prod_{j=1}^{m} A_j\right)\right| \leqslant \prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{m} \sigma_i(A_j), 1 \leqslant k \leqslant n.$$

（证明见[301]2001,263(1):327 ~ 331）

20.　在本章开头时曾指出 $A = (a_{kj}) \geqslant 0$ 表示 $\forall a_{kj} \geqslant 0$，但有的著作中，$A \geqslant 0$ 则指 A 的所有特征值为非负，这是两个不同的概念. 在后一种意义下，从 $A \geqslant B \geqslant 0$，不能推出 $A^2 \geqslant B^2$，例如取 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$；从 $A \geqslant 0, B \geqslant 0$ 也不能推出 $AB + BA \geqslant 0$，例如：取 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. 1985 年 Chan 等在后一种意义下证明了以下结果：

设 A,B,C,D 为 Hermite 矩阵，A 与 C 可交换，而 B 与 D 可交换，若 $A \geqslant B \geqslant 0, C \geqslant D \geqslant 0$，则 $\forall p,q > 0, p + q \leqslant 1$，成立 $A^pC^q \geqslant B^pD^q$. 对 $\forall p: 0 \leqslant p \leqslant 1$，成立 $A^p \geqslant B^p$.

作者们提出若干猜想. 猜想 1：若 $A \geqslant B \geqslant 0$，则 $(BA^2B)^{1/2} \geqslant B^2$，且 $A^2 \geqslant (AB^2A)^{1/2}$；猜想 2：设 A,B,C 为非负 Hermite 矩阵，若 $A \leqslant C, B \leqslant C$，则

$$(A^2 + B^2)^{1/2} \leqslant \sqrt{2}C.$$

1987 年，Furuta, T.，举出反例，说明猜想 2 不成立. 我们自然要问，$(A^2 + B^2)^{1/2}$ 的最优上下界是什么，进一步当 $p > 0$ 时，$(A^p + B^p)^{1/p}$ 的最佳上下界是什么？

二、　矩阵迹不等式

1.　**Hölder 不等式**：设 A,B 为 n 阶半正定 Hermite 方阵，$A \neq 0, B \neq 0, 1 < p < \infty$，$1/p + 1/q = 1$，则

$$\operatorname{tr}(A^{1/p}B^{1/q}) \leqslant (\operatorname{tr}A)^{1/p}(\operatorname{tr}B)^{1/q},$$

仅当存在正常数 c,使得 $B = cA$ 时等号成立. $p = q = 2$ 时,称为 Cauchy 不等式.

2. **Minkowski 不等式**:设 A,B 为 n 阶半正定 Hermite 方阵,$A \neq 0,B \neq 0$,$1 < p < \infty$,则

$$(\mathrm{tr}(A+B)^p)^{1/p} \leqslant (\mathrm{tr}A^p)^{1/p} + (\mathrm{tr}B^p)^{1/p},$$

仅当 $\exists c > 0, B = cA$ 时等号成立.

No. 1 ~ 2 的证明见 Magnus, J. R. [386]1987, 95:127 ~ 134. 或[30]195 ~ 200.

3. 设 A,B 为 $m \times n$ 复矩阵,则

$$|\mathrm{tr}(A^*B)|^2 \leqslant \mathrm{tr}(A^*A)\mathrm{tr}(B^*B).$$

特别当 A,B 为实对称或 Hermite 方阵时,

$$|\mathrm{tr}(AB)|^2 \leqslant \mathrm{tr}(A^2)\mathrm{tr}(B^2).$$

仅当存在常数 c,使得 $A = cB$ 时,等号成立.

提示:利用 Cauchy 不等式.

设 $A_1,\cdots,A_m$ 为 n 阶复方阵,则

$$\mathrm{Retr}(A_1\cdots A_m) \leqslant |\mathrm{tr}(A_1\cdots A_m)| \leqslant \Big[\prod_{k=1}^m \mathrm{tr}(A_k^*A_k)^{m/2}\Big]^{1/m} \leqslant \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m \mathrm{tr}(A_k^*A_k)^{m/2};$$

推论 1　设 $A_1,\cdots,A_m$ 为 n 阶实对称半正定矩阵,则

$$\mathrm{tr}(A_1\cdots A_m) \leqslant \prod_{k=1}^m [\mathrm{tr}(A_k^m)]^{1/m} \leqslant \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m \mathrm{tr}(A_k^m).$$ ($m = 2$ 时即为 **Bellman 不等式**)

推论 2　(**Ault 不等式**)设 $A_1,\cdots,A_m$ 为 n 阶复方阵,记　$B_m = \prod_{k=1}^m A_k$,则

$$\mathrm{tr}\Big(\frac{1}{2}(B_m + B_m^*)\Big) \leqslant \mathrm{tr}(B_m^*B_m)^{1/2} \leqslant \frac{1}{m}\mathrm{tr}\Big[\sum_{k=1}^m (A_k^*A_k)^{m/2}\Big].$$

([334]1992, 35(5):620 ~ 622)

4. 设 A,B 为 n 阶方阵,$A - B$ 为半正定 Hermite 方阵,则 $\mathrm{tr}A \geqslant \mathrm{tr}B$,仅当 $A = B$ 时等号成立. 特别当 A 为半正定 Hermite 方阵时,$\mathrm{tr}A \geqslant 0$.

5. 设 A,B 为 n 阶 Hermite 方阵.

(1)　若 A,B 均为半正定方阵,则

$$0 \leqslant \mathrm{tr}(AB) \leqslant \lambda_1(B)\mathrm{tr}A \leqslant (\mathrm{tr}A)(\mathrm{tr}B);\ \mathrm{tr}(I_n + AB)A \leqslant [1 + \lambda_1(AB)]\mathrm{tr}A;$$

$$\mathrm{tr}(I_n + AB)A \leqslant [n + \mathrm{tr}(AB)]\lambda_1(A).$$

(2)　若 A 为正定方阵,B 为半正定方阵,则

$$\mathrm{tr}(B) \leqslant \lambda_1(A)\mathrm{tr}(A^{-1}B) \leqslant (\mathrm{tr}A)\mathrm{tr}(A^{-1}B);$$

$$\mathrm{tr}(I_n + AB)^{-1}A \geqslant \frac{\mathrm{tr}A}{1 + \lambda_1(AB)}.$$

式中 $\lambda_1(A)$ 表示 A 的最大特征值. ([30]170 ~ 171)

6. **Neumann 不等式**:设 A,B 为 n 阶 Hermite 方阵.

$\lambda_1(A) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(A);\lambda_1(B) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(B)$,则

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k(A)\lambda_{n-k+1}(B) \leqslant \mathrm{tr}(AB) \leqslant \sum_{k=1}^n \lambda_k(A)\lambda_k(B).$$

证明及其推广见[30]178 ~ 186.其中一个重要的推广的形式就是下述 **BT 不等式**：

$$\sum_{k=1}^{n}[\lambda_k(A)]^m[\lambda_{n-k+1}(B)]^m \leqslant \mathrm{tr}(AB)^m \leqslant \sum_{k=1}^{n}[\lambda_k(A)\lambda_k(B)]^m.$$

式中 m 为任意正整数.([386]1990,132:173 ~ 178)

7. 设 A,B 为 n 阶半正定 Hermite 方阵. $p,q>0,1/p+1/q=1$,则

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n}\lambda_k(A)\lambda_{n+1-k}(B) \leqslant \mathrm{tr}(AB) \leqslant \mathrm{tr}\left(\frac{A^p}{p}+\frac{B^q}{q}\right).$$

(黄礼平,[345]1994,1:33 ~ 35)

8. 设 A,B,C 为 n 阶半正定 Hermite 方阵,则

$$\mathrm{Retr}(ABC) \leqslant \mathrm{tr}[\frac{1}{3}(A+B+C)]^3 \leqslant \mathrm{tr}[\frac{1}{3}(A^3+B^3+C^3)].$$

仅当 $A=B=C$ 时等号成立.(证明及推广见黄礼平,[345]1994,1:33 ~ 35)

设 $A_1,\cdots,A_m$ 为 n 阶半正定矩阵或半正定实对称矩阵,则

$$|\mathrm{tr}(\prod_{k=1}^{m}A_k)|^m \leqslant \prod_{k=1}^{m}\mathrm{tr}(A_k^m),$$

从而利用 A-G 不等式,有

$$|\mathrm{tr}(\prod_{k=1}^{m}A_k)| \leqslant \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\mathrm{tr}(A_k^m).$$ (陈道琦,[334]1988,31(4):565 ~ 569)

9. 设 A 是 n 阶方阵,所有特征值 $\lambda_k(A)$ 都是实数,且 $\mathrm{tr}(A^2)>0$,若 A 恰有 k_1 个正特征值,k_2 个负特征值,则当 $\mathrm{tr}A \geqslant 0$ 时,$(\mathrm{tr}A)^2 \leqslant k_1\mathrm{tr}(A^2)$;当 $\mathrm{tr}A \leqslant 0$ 时,$(\mathrm{tr}A)^2 \leqslant k_2\mathrm{tr}(A^2)$. 从而当 $\mathrm{tr}(A^2)>0$ 时,$\dfrac{(\mathrm{tr}A)^2}{\mathrm{tr}(A)^2} \leqslant \max\{k_1,k_2\} \leqslant r(A)$. ([30]173 ~ 175)

10. 设 A,B 为 n 阶 Hermite 方阵,$\mathrm{tr}(A)>0,\mathrm{tr}(B)>0$,则

$$\frac{\mathrm{tr}(A+B)^2}{\mathrm{tr}(A+B)} \leqslant \frac{\mathrm{tr}(A^2)}{\mathrm{tr}A}+\frac{\mathrm{tr}(B^2)}{\mathrm{tr}B}.$$ (证明见[30]175 ~ 176)

11. 设 A 是 n 阶半正定 Hermite 方阵,它分块为

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}$$

式中 A_{11} 为 k 阶方阵,$1 \leqslant k \leqslant n$. 则

$$\mathrm{tr}(A_{21}A_{12}) \leqslant (\mathrm{tr}A_{11})(\mathrm{tr}A_{22}).$$ (证明见[30]171 ~ 172)

12. 设 A 为 n 阶 Hermite 方阵,$\lambda_1(A)\cdots \geqslant \lambda_n(A)$,$B$ 为 $n\times m$ 阶矩阵且 $B^*B=I_m$. 则

(1) $$\sum_{k=n-m+1}^{n}\lambda_k(A) \leqslant \mathrm{tr}(B^*AB) \leqslant \sum_{k=1}^{m}\lambda_k(A);$$

(2) $$\sum_{k=1}^{m}\lambda_k^{-1}(A) \leqslant \mathrm{tr}(B^*AB)^{-1} \leqslant \sum_{k=1}^{m}\lambda_{n-m+k}^{-1}(A).$$ (证明见[30]189 ~ 191)

13. 设 A 为 n 阶实对称正定方阵,特征值 $\lambda_1(A) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(A)$,$n>2m$,$B$ 为 $n\times m$ 阶矩阵且 $B^*B=I_m$,则

(1) $$0 \leqslant \mathrm{tr}[(B'AB)-(B'A^{-1}B)^{-1}] \leqslant \sum_{k=1}^{m}(\lambda_k^{1/2}-\lambda_{n-k+1}^{1/2})^2;$$

(2) $\frac{\operatorname{tr}(B'AB)}{\operatorname{tr}(B'AB)^{-1}} \leqslant \left[\frac{\sum_{k=1}^{m}(\lambda_k + \lambda_{n-k+1})}{2\sum_{k=1}^{m}(\lambda_k\lambda_{n-k+1})^{1/2}}\right]^2$;

(3) $\operatorname{tr}(B'ABB'A^{-1}B) \leqslant \sum_{k=1}^{m}\frac{(\lambda_k + \lambda_{n-k+1})^2}{4\lambda_k\lambda_{n-k+1}}$.（证明见[30]189 ~ 194）

14. 设 A 为 n 阶正定 Hermite 方阵，B 为正定 Hermite 方阵且 $\det B = 1$，则

$$\operatorname{tr}(AB) \geqslant n(\det A)^{1/n}.$$

15. 设 A 为 n 阶半正定 Hermite 方阵，$1 < p < \infty$，$1/p + 1/q = 1$，B 为满足条件 $\operatorname{tr}(B^p) = 1$ 的半正定 Hermite 方阵，则

$$\operatorname{tr}(AB) \leqslant [\operatorname{tr}(A^p)]^{1/p}.$$

仅当 $B^q = \frac{A^p}{\operatorname{tr}A^p}$ 时等号成立.

16. 设 A 为 n 阶正定 Hermite 方阵，B 为 n 阶半正定 Hermite 方阵，$A—B$ 为半正定阵，则

$$\frac{\operatorname{tr}B}{\operatorname{tr}A} \geqslant \frac{\det B}{\det A}.$$

17. 设 A,B,C 为 n 阶 Hermite 方阵，A 为正定，B,C 为半正定，且 $B-C$ 为半正定，则 $\operatorname{tr}[(A+B)^{-1}B] \geqslant \operatorname{tr}[(A+C)^{-1}C]$.

18. 设 A 为半正定 Hermite 方阵，且分块为

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1m} \\ \cdots & & \\ A_{m1} & \cdots & A_{mm} \end{pmatrix}.$$

式中 A_{kj} 为 n 阶方阵，则 m 阶方阵 $(\operatorname{tr}(A_{kj})) \geqslant 0$.

（上述 No. 14 ~ 18 的证明见[30]195 ~ 202）

19. 设 $A = (a_{kj})$ 为 n 阶正定 Hermite 方阵. I_n 为 n 阶单位方阵，A 的特征多项式为

$$\det(\lambda I_n - A) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\sigma_j\lambda^{n-j},$$

式中 σ_j 是 A 的所有可能的 j 阶主子式之和，即

$$\sigma_j = \sum_{1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_j\leqslant n}\det(A_j),$$

$$\det(A_j) = \begin{vmatrix} a_{k_1k_1} & a_{k_1k_2} & \cdots & a_{k_1k_j} \\ a_{k_2k_1} & a_{k_2k_2} & \cdots & a_{k_2k_j} \\ \cdots & & & \\ a_{k_jk_1} & a_{k_jk_2} & \cdots & a_{k_jk_j} \end{vmatrix},$$

$$\sigma_0 = 1, \sigma_1 = \operatorname{tr}(A), \sigma_n = \det(A), \text{则}$$

(1) $\frac{\operatorname{tr}(A)}{n} \geqslant \left[\frac{1}{\binom{n}{2}}\sum_{1\leqslant k_1<k_2\leqslant n}\det(A_2)\right]^{1/2} \geqslant \cdots \geqslant \left[\frac{1}{\binom{n}{j}}\sum_{1\leqslant k_1<\cdots<k_j\leqslant n}\det(A_j)\right]^{1/j} \geqslant \cdots$

$\geqslant (\det(A))^{1/n}$. 仅当 A 的全部特征值 $\lambda_k(A)$ 相等时等号成立.

(2) $$(\det(A))^{1/n} \leqslant \left(p\int_0^{\infty} \frac{dx}{\det(xI_n + A)^{\frac{p+1}{n}}}\right)^{-1/p} \leqslant \frac{\operatorname{tr}(A)}{n},$$

式中常数 $p > 0$，仅当所有 $\lambda_k(A)$ 相等时等号成立.

(方献亚，[345]1985，6:44；1985，11:35 ~ 37)

三、 矩阵秩不等式

1. 设 A,B 为 $m\times n$ 矩阵，则 $r(A)-r(B)\leqslant r(A-B)$；$r(A)\leqslant\min\{m,n\}$，$r(A+B)\leqslant r(A\,\vdots\,B)\leqslant r(A)+r(B)$.(证明及其推广见[30]56 ~ 57 和 63 ~ 66)

2. 设 A,B 为 n 阶半正定 Hermite 方阵，则

(1) $r(A\circ B)\leqslant r(A)r(B)$.

(2) 若 $r(A)r(B)<n$，则 $A\circ B$ 为奇异阵.([30]46)

3. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times k$ 矩阵，则

$$r(A)+r(B)-n\leqslant r(AB)\leqslant\min\{r(A),r(B)\}.$$

(Sylvester 定律，见[30]58 ~ 61)

4. **Frobenius 不等式：**

$$r(A_1A_2A_3)\geqslant r(A_1A_2)+r(A_2A_3)-r(A_2).$$

等号成立条件及其证明见[30]62 ~ 63.

5. 设 $A=(a_{kj})$ 为 n 阶方阵，令 $S_k=\sum_{j=1}^{n}|a_{kj}|$，则 $r(A)\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{|a_{kk}|}{S_k}$.

(证明见[30]67 ~ 68)

四、 矩阵范数不等式

设 $A=(a_{kj})$ 为 $m\times n$ 阶复矩阵，若存在映射 $T:A\to\|A\|$，使得

(1) $\|A\|\geqslant 0$，$\|A\|=0\Leftrightarrow A=0$；

(2) $\|\alpha A\|=|\alpha|\,\|A\|$，$\alpha\in C^1$；

(3) $\|A+B\|\leqslant\|A\|+\|B\|$.

则 $\|A\|$ 称为 A 的范数，若 A 为 $m\times n$ 阶，B 为 $n\times k$ 阶. 满足 $\|AB\|\leqslant\|A\|\cdot\|B\|$. 则称该范数是相容的. 满足上述条件的范数有：

例 1 欧氏范数(或 Frobenius 范数)：

$$\|A\|_F=(\operatorname{tr}(A^*A))^{1/2}=\Big(\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{kj}|^2\Big)^{1/2}.$$

例 2 谱范数 $\|A\|_2=[\lambda_1(A^*A)]^{1/2}=(\rho(A^*A))^{1/2}$(即 A^*A 的最大特征值 $\lambda_1(A^*A)$ 的平方根).

例 3 列和范数 $\|A\|_1=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{k=1}^{m}|a_{kj}|$；行和范数 $\|A\|_\infty=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant m}\sum_{j=1}^{n}|a_{kj}|$.

例 4 设 $A=(a_{kj})$ 为 n 阶方阵，通过 R^n 中 n 维向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的范数

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k|, & p = \infty. \end{cases}$$

定义矩阵的算子范数,记为

$$\|A\|_p = \sup_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p, 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

上述例 2,3 都是例 4 的特殊情形.

若 A 为 n 阶可逆方阵,$\|A\|$ 为 A 的任一范数,则 $K(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ 称为 A 的**条件数**.

若 n 阶方阵 A 的特征值,奇异值分别为 $\lambda_1(A) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(A)$,$\sigma_1(A) \geqslant \cdots \geqslant \sigma_n(A)$,则 $K(A) = \dfrac{\sigma_1(A)}{\sigma_n(A)}$;当 A 为 Hermite 方阵时,$K(A) = \dfrac{\lambda_1(A)}{\lambda_n(A)}$;若 A 为 $m\times n$ 阶矩阵,$r(A) = k \leqslant n$,则 $K(A) = \dfrac{\sigma_1(A)}{\sigma_k(A)}$.

1. (1) 设 A 为 n 阶方阵,B 为 Hermite 半正定矩阵.U_1,U_2 为酉矩阵,$A = U_1B$,则

$$\|A - U_1\| \leqslant \|A - U_2\| \leqslant \|A + U_1\| \text{ (Fan Ky)}.$$

(2) $|\,\|A\| - \|B\|\,| \leqslant \|A - B\|$.

(3) 设 A 为 n 阶方阵,B 为 n 阶 Hermite 方阵,则

$$\|A - \frac{1}{2}(A + A^*)\| \leqslant \|A - B\| \text{ (Fan Ky)}$$

2. 设 $\|A\|_p < 1, 1 \leqslant p \leqslant \infty$,则 $I - A$ 和 $I + A$ 可逆,且

$$\frac{1}{1+\|A\|_p} \leqslant \|(I\pm A)^{-1}\|_p \leqslant \frac{1}{1-\|A\|_p};\ \|I - (I-A)^{-1}\|_p \leqslant \frac{\|A\|_p}{1-\|A\|_p}.$$

(证明见[30]25 ～ 26)

由此推出:设 A^{-1} 存在,$\|A^{-1}\| \leqslant p$,$\|A - B\| \leqslant q$,$pq < 1$,(A,B 为 n 阶方阵),则 B 可逆,且

$$\|B^{-1}\| \leqslant \frac{p}{1-pq}.$$

3. $\|A\|_2 \leqslant \|A\|_F$.特别当 A 为对称矩阵且迹 $\operatorname{tr}(A) = 0$ 时,下式成立

$$\|A\|_2 \leqslant (1 - \frac{1}{n})^{1/2} \|A\|_F.$$

证　不妨设

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

则 $\|A\|_2^2 = \max\{\lambda_1^2, \lambda_2^2, \cdots, \lambda_n^2\}$,　$\|A\|_F^2 = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2$.由假设 $\operatorname{tr}(A) = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k = 0$,所以,只要证

$$\lambda_k^2 \leqslant \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^2\right). \tag{2.2}$$

由 Cauchy 不等式，有

$$\left|\sum_{j\neq k}\lambda_j\right| \leqslant (n-1)^{1/2}\left(\sum_{j\neq k}\lambda_j^2\right)^{1/2}.$$

从而 $\lambda_k^2 = \left(\sum_{j\neq k}\lambda_j\right)^2 \leqslant (n-1)\left(\sum_{j\neq k}\lambda_j^2\right) = (n-1)\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^2 - (n-1)\lambda_k^2$，由此即得(2.2)式.

4. 设 A 为 n 阶 Hermite 方阵，$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的特征值(按其重数重复计算个数)，

$$\| A \|_F = \left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2\right)^{1/2}，则$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\| A \|_F \leqslant \| A \|_2 \leqslant \| A \|_F.$$

5. 设 A 为 n 阶方阵，则对任意算子范数 $\| A \|$，$\rho(A) \leqslant \| A \|$.

若 $\forall \varepsilon > 0$，则存在算子范数 $\| \cdot \|_\varepsilon$，成立 $\| A \|_\varepsilon \leqslant \rho(A) + \varepsilon$.

(证明见[124]23 ~ 25)

由此推出，$\rho(A) < 1$ 的充要条件是对 A 的某个算子范数 $\| A \| < 1$. 这些结果用于估计解线性方程组的一些迭代法的收敛速度.

6. 设 $|a_{kk}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|$，$1 \leqslant k \leqslant n$，则 A 为非奇异阵且

$$\| A^{-1} \|_\infty \leqslant \frac{1}{\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{|a_{kk}| - \sum\limits_{j\neq k}|a_{kj}|\right\}}.$$

7. **Bauer-Fike 不等式**：设矩阵 A 的 Jordan 标准形是对角阵：$D = P^{-1}AP = \operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，其中 P 为某个非奇异矩阵，矩阵范数满足

$$\| D \| = \max\{|\lambda_k| : 1 \leqslant k \leqslant n\}.$$

δA 是 A 的扰动，λ 是 $A+\delta A$ 的一个特征值，则

$$\min_{1\leqslant k\leqslant n} |\lambda - \lambda_k| \leqslant \| P \| \cdot \| P^{-1} \| \cdot \| \delta A \|.$$

若 A 是 Hermite 矩阵，可取 P 为酉阵，即 $\| P \| = \| P^{-1} \| = 1$，于是

$$\min_{1\leqslant k\leqslant n} |\lambda - \lambda_k| \leqslant \| \delta A \|.$$

当 A 为对称矩阵时，上述结果还可改进. 例如下述：

W-H 不等式(Wielandt-Hoffman 不等式)：设 A 和 B 为 n 阶实对称方阵，定义 $E = A+B$，A,E 的按递减次序排列的特征值分别为 $\lambda_k(A),\lambda_k(E)$，则 $\left\{\sum_{k=1}^{n}[\lambda_k(A) - \lambda_k(E)]^2\right\}^{1/2} \leqslant \| B \|_F$. 1990 年，冷岗松进一步改进为：设 A,B 为 n 阶实矩阵，则

$$\left\{\sum_{k=1}^{n}[\lambda_k^2(E) - 2\sigma_k(E)\sigma_k(A) + \lambda_k^2(A)]\right\}^{1/2} \leqslant \| B \|_F,$$

当 A,B 为 n 阶实对称矩阵时，下式成立

$$\sum_{k=1}^{n}[\lambda_k(A) - \lambda_k(E)]^2 \leqslant \| B \|_F^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n}[\lambda_k^2(E) - 2\lambda_k(E)\lambda_{n-k+1}(A) + \lambda_k^2(A)].$$

([350]1990,6:39)

8. 设 A,B 为同阶方阵,A 为非奇异且 $\|A-B\| \leqslant \frac{1}{\|A^{-1}\|}$,则 B 也是非奇异的,且

$$\|B^{-1}\| \leqslant \frac{\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}\|\,\|A-B\|}.\ \|A^{-1}-B^{-1}\| \leqslant \frac{\|A^{-1}\|^2 \cdot \|A-B\|}{1-\|A^{-1}\| \cdot \|A-B\|}.$$

这些不等式表明,对非奇异矩阵作充分接近的扰动后的矩阵仍是非奇异的.

9. **双随机矩阵不等式**:设 $A=(a_{jk})$ 为 n 阶双随机矩阵,则 A 的积和式 $\mathrm{per}(A) \geqslant n!/n^n$,仅当 $\forall a_{kj}=1/n$ 时等号成立.([99]3:13)

10. **矩阵 Young 不等式**:设 A,B,C 为 n 阶复方阵,A,B 为半正定,$1<p<\infty$,$1/p+1/q=1$,则

$$\left\|\frac{1}{p}A^pC+\frac{1}{q}CB^q\right\|_F^2 \geqslant \frac{1}{r^2}\|A^pC-CB^q\|_F^2+\|ACB\|_F^2,$$

式中 $r=\max\{p,q\}$.([386]2000,308,(1 ~ 3):77 ~ 84)

11. 设 $K(A)$ 为 n 阶可逆方阵的条件数,则

$$1 \leqslant K(A) \leqslant K(AA^*).$$

12. 设 A,B 为 n 阶 Hermite 方阵,则

(1) $K(A+B) \leqslant \max\{K(A),K(B)\}$,特别地,$K(A+I_n) \leqslant K(A)$;

(2) $\max\{\frac{K(A)}{K(B)},\frac{K(B)}{K(A)}\} \leqslant K(AB) \leqslant K(A)K(B)$.

(证明见[30]159 ~ 161)

13. 设 A 为 n 阶 Hermite 正定方阵,且分块为

$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$,其中 A_{11} 为 m 阶方阵,$1 \leqslant m<n$.则

(1) $K(A_{11}) \leqslant K(A)$; (2) $K(A) \geqslant K(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})$.

(证明见[30]160 ~ 161)

14. 设 A 为 n 阶可逆方阵,则对任意 n 阶奇异方阵 B,下式成立

$$K(A) \geqslant \frac{\sigma_1(A)}{\sigma_1(A-B)}.$$

式中 $\sigma_1(\cdot)$ 为最大奇异值.(证明见[30]162 ~ 163)

15. 设 A 为 n 阶复方阵,它的特征值都是实数,按递减次序排列为 $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$,令

$$M=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \lambda_k=\frac{1}{n}\mathrm{tr}(A),\ S^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n(\lambda_k-M)^2=\frac{1}{n}\Big[\sum_{k=1}^n\lambda_k^2-\Big(\sum_{k=1}^n\lambda_k\Big)^2\Big].$$

记 $p=\frac{S}{\sqrt{n-1}}$.

(1) 若 A 为 n 阶 Hermite 正定方阵,则

$$K(A) \geqslant 1+\frac{2p}{M-p},$$

当 $n>2$ 时,仅当 $\lambda_1=\cdots=\lambda_n$ 时等号成立.

(2) 若 A 为 n 阶 Hermite 方阵,$\mathrm{tr}(A)>0$,$(\mathrm{tr}A)^2>(n-1)\mathrm{tr}(A^2)$,则 A 为正定阵

且

$$1+\frac{2p}{M-p}\leqslant K(A)\leqslant 1+\frac{2}{q-1},\text{式中 } q=\frac{M}{S(n-1)^{1/2}},$$

当 $n>2$ 时,仅当 $A=cI_n(c>0)$ 时等号成立.(证明见[30]163 ~ 167)

16. 设 $\lambda_k(A)$ 是 A 的特征值,若 $A,B\in C^{n\times n}$, B 可逆, $\mathrm{Re}(\lambda_k(B^{-1}A))>0$, $k=1,\cdots,n$. 则

$$\|A+B\|^{\frac{2}{n}}>\|A\|^{\frac{2}{n}}+\|B\|^{\frac{2}{n}};\qquad \|A+B\|\geqslant\|A\|+\|B\|.$$

([344]33(9)(2003),123 ~ 125)

17. 设 A,B 分别是 $m\times k$, $k\times n$ 复矩阵, $1\leqslant p,q,r\leqslant\infty$, 则

$$\|AB\|_p\leqslant\lambda_{pq}(m)\lambda_{qp}(k)\lambda_{pr}(k)\lambda_{rp}(n)\|A\|_q\|B\|_r.$$

式中

$$\lambda_{p,q}(m)=\begin{cases}1, & p\geqslant q,\\ m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}, & p\leqslant q.\end{cases}\qquad ([22]224)$$

18. 设 A,B 是 n 阶复方阵,则

$$|+\mathrm{per}(AB)|^2\leqslant\mathrm{per}(AA^*)\,\mathrm{per}(BB^*).\ ([22]225)$$

19. 设 $A=(a_{kj})$, $B=(b_{kj})$ 是 n 阶方阵, $a_{kj},b_{kj}>0$, 若

$$b_{k1}\leqslant b_{k2}\leqslant\cdots\leqslant b_{kn},\quad \frac{a_{k1}}{b_{k1}}\leqslant\frac{a_{k2}}{b_{k2}}\leqslant\cdots\leqslant\frac{a_{kn}}{b_{kn}},\quad k=1,\cdots,n \tag{2.3}$$

则

$$\frac{\mathrm{per}(A)}{\prod_{k=1}^n\prod_{j=1}^n a_{kj}}\leqslant\frac{\mathrm{per}(B)}{\prod_{k=1}^n\prod_{j=1}^n b_{kj}}. \tag{2.4}$$

若(2.3)中所有不等号均反向,则(2.4)仍成立.

(文家金、王挽澜,[386]422(2007),295 ~ 303)

20. 设 A 是 n×n 正定 Hermite 矩阵, λ_1,λ_n 分别是 A 的最大与最小特征值,则

$$\left(\frac{n}{\mathrm{tr}((A+\lambda_nI)^{-1})}-\lambda_n\right)^n<\det(A)\leqslant\left(\frac{n}{\mathrm{tr}((A+\lambda_1I)^{-1})}-\lambda_1\right)^n.$$

([305]116(2009),844)

21. 设 A,B 是 n 阶复方阵,则

$$|\det(A+B)|^2+|\det(I-A\overline{B}')|^2\leqslant\det(I+A\overline{A}')\det(I+\overline{B}'B).$$

([340]29(6)(2009),774 ~ 778)

第十一章　序列与级数不等式

§1　序列不等式

前面各章中，实际上包含了许多数列不等式. 本章作进一步系统的论述，但在内容上不与前面重复.

1. [MCM]. 设$\{a_n\}$为等差数列，首项$a_1>0$，公差$d>0$，则当$n\geqslant 2$时，有

$$2(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n})<\frac{d}{\sqrt{a_n}}<2(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}).$$

提示：因为$a_{n+1}-a_n=d>0$，所以$a_{n+1}>a_n>0$，从而

$$2(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n})=\frac{2(a_{n+1}-a_n)}{\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n}}<\frac{2d}{2\sqrt{a_n}}=\frac{d}{\sqrt{a_n}},$$

$2(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}})=\dfrac{2d}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n-1}}}>\dfrac{d}{\sqrt{a_n}}$. 李胜明的改进见[345]2000，3：28 ~ 29.

2. 设$\{a_k\}$成等差数列，公差$d>0$，则$a_k^2>a_{k-1}a_{k+1}$，$(k\geqslant 2)$.

3. 设$\{a_k\}$成等差数列，$a_k>0$，$k=1,\cdots,2n+1$，则

$$\frac{a_1}{\sqrt{a_2a_{2n}}}<\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{a_3}{a_4}\cdots\frac{a_{2n-1}}{a_{2n}}<\sqrt{\frac{a_1}{a_{2n+1}}}.$$

杨克昌改进为：当公差$d>0$时，

$$\frac{a_1}{a_2}\left(\frac{a_1+a_4}{a_1+a_{4n}}\right)^{1/2}\leqslant\frac{a_1a_3\cdots a_{2n-1}}{a_2a_4\cdots a_{2n}}\leqslant\frac{a_1a_3}{a_2a_{2n+1}}\left(\frac{a_2+a_{4n+1}}{a_2+a_5}\right)^{1/2}.$$

若$d<0$，则不等号反向，仅当$n=1$时等号成立.（[345]2000，7：30 ~ 31）

4. 设$\{a_k\}$为等差数列，$a_k>0$，$k=1,2,\cdots,n+1$，公差$d>0$，则

(1)
$$\frac{n}{d}\left(\sqrt[n]{\frac{a_{n+1}}{a_n}}-1\right)<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}<\frac{1}{a_1}+\frac{n-1}{d}\left[1-\left(\frac{a_1}{a_n}\right)^{1/(n-1)}\right].$$

(2)
$$0<\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k}-\frac{2}{3d}(a_n^{3/2}-a_0^{3/2})<\frac{1}{2}(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_0}).$$

5. 设$\{a_n\}$为等差数列，首项$a_1>0$，公差$d>0$，则

(1) 当$n\geqslant 2$时，有

$$\frac{1}{2\sqrt{a_n}}\leqslant\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}+\sqrt{a_k}}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{a_1}}.$$

(2)
$$\frac{1}{(1-\alpha)d}\left(\frac{1}{a_{n+1}^{\alpha-1}}-\frac{1}{a_1^{\alpha-1}}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1^{\alpha}}-\frac{1}{a_{n+1}^{\alpha}}\right)<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k^{\alpha}}$$
$$<\frac{1}{(1-\alpha)d}\left(\frac{1}{a_n^{\alpha-1}}-\frac{1}{a_1^{\alpha-1}}\right)+\frac{1}{a_1^{\alpha}}-\frac{\alpha d}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{a_k^{\alpha+1}}\qquad(\alpha\neq 1).$$

(李永利:[345]2006(4):61)

(3)　$n\geqslant 2$ 时,下式成立

$$\frac{1}{(m+1)d}[(ma_n+d)a_n^{\frac{1}{m}}-m(a_1-d)a_1^{\frac{1}{m}}]<\sum_{k=1}^{n}a_k^{\frac{1}{m}}$$

$$<\frac{1}{(m+1)d}[a_{n+1}(a_n^{\frac{1}{m}})-(ma_1-d)(a_1^{\frac{1}{m}})];$$

$$\frac{1}{(m-1)d}[ma_{n+1}(a_n^{-\frac{1}{m}})-(ma_1+d)(a_1^{-\frac{1}{m}})]<\sum_{k=1}^{n}a_k^{-\frac{1}{m}}$$

$$<\frac{1}{(m-1)d}[(ma_n+d)(a_n^{-\frac{1}{m}})-(ma_1+(2-m)d)(a_1^{-\frac{1}{m}})].$$

(樊益武,[351]2008(4):410 ~ 412)

(4)　设 $a_1=1$, $d>1$,则

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{a_k}\right)\geqslant\{(2^d-1)n+1\}^{\frac{1}{d}}.$$

([345]2006(7):53)

(5)　设 $a_1>d/2>0$,p 为正实数,则当 $n\geqslant m+1$ 时,下式成立

$$\left(\frac{2a_{n+1}+p}{2a_{m+1}+p}\right)^{p/d}\leqslant\prod_{k=m+1}^{n}\left(1+\frac{p}{a_k}\right)\leqslant\left(\frac{2a_n+d}{2a_{m+1}-d}\right)^{p/d}.$$

(续铁权,[351]2003,2:16 ~ 19)

6.　设 $\{a_k\}$ 是等差正数列,公差 $d\geqslant 0$. 则当 $n\geqslant 2$ 时,有

$\sum_{k=2}^{n}a_k^{-2}\leqslant((n-1)/2)(a_1a_n+a_2a_{n+1})/(a_1a_2a_na_{n+1})$,仅当 $d=0$ 时等号成立.

特别,取 $a_k=k$,$(1\leqslant k\leqslant n+1)$,得

$$\sum_{k=2}^{n}(1/k^2)<\frac{(n-1)(3n+2)}{4n(n+1)}<1,$$

取 $a_k=2k-1$,$(1\leqslant k\leqslant n+1)$,得

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(2k-1)^2}<\frac{(n-1)(4n+1)}{3(4n^2-1)}<\frac{1}{3}.$$

7.　设 $\{a_k\}$ 为等差数列;$\{b_k\}$ 为等比数列,且 $a_1=b_1,a_2=b_2,a_1\neq a_2,a_k>0$　$(k=1,2,\cdots)$,则当 $n\geqslant 3$ 时,$a_n<b_n$.(提示:用数学归纳法).

8.　设 $\{a_n\}$ 是等差数列,若 $a_1>1$,则当公差 $d>0$ 时,$\{\log_{a_n}a_{n+1}\}$ 是严格递减数列,即 $\log_{a_n}(a_n+d)>\log_{(a_n+d)}(a_n+2d)$.

注　自然数列 $\{n\}$ 可看成公差为1的等差数列;因此有关自然数 n 的不等式容易推广到正的公差 d 的等差数列 $\{a_n\}$ 上去. 另见第2章 §1,No. 2 ~ 3.

9.　[MCM] 设 $\{a_n\}$ 满足 $a_0=1/2,a_{k+1}=a_k+(a_k^2/n),k=0,1,2,\cdots,n-1$,则

$$1-(1/n)<a_n<1.$$

这道数学竞赛题的命题者给出的证明太繁,前后用了四次数学归纳法,但若用"加强命题"手法,只用一次数学归纳法,就可证明

$$\frac{n+1}{2n-k+2} < a_k < \frac{n}{2n-k}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

取 $k = n$，即得

$$1-\frac{1}{n} < \frac{n+1}{n+2} < a_n < 1.$$ ([345]1982,3:33)

10. 设$\{a_n\}$满足 $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$，$8/5 \leqslant a_1 \leqslant 9/5$，$(8/5)^2 \leqslant a_2 \leqslant (9/5)^2$，则对于所有 n，成立 $(8/5)^n \leqslant a_n \leqslant (9/5)^n$.

提示：用数学归纳法，还可证明 $\frac{5}{4} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} < \frac{5}{3}$.

11. 设$\{a_n\}$满足 $a_1 > \sqrt{\beta}$，$\beta > 0$，$a_{n+1} = (a_n^2+\beta)/(2a_n)$，则 $a_{n+1} < a_n$，且当 $n > (2^{1/\alpha}-1)^{-1}$ 时，有

$$0 < a_n - \sqrt{\beta} < n^{-\alpha} \quad (\alpha \geqslant 1).$$

这是计算机上常用的计算平方根的牛顿法. 特别，当 $\beta = 2$ 时，有 $\sqrt{2} < a_n < 1+\sqrt{2}$.

12. 设$\{a_k\}$满足：$a_1 = 1$，且 $n \geqslant 1$ 时 $a_{n+1} = a_n + a_n^{-1}$. 则 $\sqrt{2n} < a_n < \sqrt{2n+(1/2)\log n}$，$(n \geqslant 3)$，当 $n > 4$ 时，下限 $\sqrt{2n}$ 可改进为 $\sqrt{2n+(1/2)\log(n/4)}$.

令 $G(n) = 2n + (1/2)\log n - a_n^2$，则 $G(n)$ 严格递增且上有界，从而 $\lim\limits_{n\to\infty} G(n) = c$.

对于上述极限 c 提出了以下三个猜想：

① c 是超越数；

② 对任意整数 $m,n(n \neq 0)$，成立 $|c-(m/n)| > 1/(10n^2)$；

③ 对于任给正数 ε，有无穷多对素数 p,q，使得 $\left|c-\frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{2-\varepsilon}}$. ([348]1991.8)

当 $n \geqslant 14$，还有

$$0 < G(n+1) - G(n) < \frac{\log n}{8n^2};$$

$$0 < G(13) < G(14) < \cdots < G(n) < G(n+1) < G(13) + \sum_{k=13}^{n} \frac{1}{8k^2}(\log k).$$

([67]12 和[305]1988,95(7):654;1990,97(3):244)

若取 $a_1 = 5$，得常见的估计式：$45 < a_{1000} < 45.1$.

13. 设 $1 < a_1 < 2$，$a_{n+1} = 1 + a_n - (a_n^2/2)$，则当 $n \geqslant 3$ 时，有 $|a_n - \sqrt{2}| < 2^{-n}$.

14. 设 $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{2(a_n-1)}$，则当 $2 < a_1 < 3$ 时，$0 < a_n - 2 < 2^{1-n}$，而当 $a_n > 3$ $(\forall n \in N)$ 时，$a_{n+1}/a_n < 3/4$.

提示：用数学归纳法.

15. [MCM] 设 $a_1 = \frac{1}{2}$，$a_n = \left(1-\frac{3}{2n}\right)a_{n-1}$，$n \geqslant 2$，则

$$\sum_{k=1}^{n} a_k < 1.$$ (1988 年 IMO 备选题).

提示:由条件知所有 $a_n>0$ 且当 $k\geqslant 2$ 时 $a_k+(2k-1)a_k=(2k-3)a_{k-1}$. 在上式中依次令 $k=2,3,\cdots,n$ 然后相加.

16. 设 $a_1=3/8, a_n=a_1+(a_{n-1}^2/2)$,则 $3/8<a_{n-1}<a_n<1/2$.

17. [MCM] 设 $a_1>a_0, a_k=3a_{k-1}-2a_{k-2}$,则

$$a_n\geqslant 2^n; a_{n+1}-a_n\geqslant 2^n.$$ (提示:用数学归纳法)

18. [MCM] 设$\{a_n\}$是正的递减数列,且 $\sum_{k=1}^{n}(1/k)a_{k^2}\leqslant 1$,则 $\sum_{k=1}^{n}a_k/k\leqslant 3$.

19. 设 $0<\beta<1, a_1=1+\beta, a_{n+1}=(1/a_n)+\beta$. 则

$$1<a_n<1+\beta,(n\geqslant 2).$$ (提示:用数学归纳法)

20. [MCM] 设 $a_1=1, a_{n+1}=n/a_n$,则 $\sum_{k=1}^{n}(1/a_k)\geqslant 2\sqrt{n}-1$.

21. (1) [MCM] 设 $a_1=1, a_{n+1}=1+\frac{n}{a_n}, n\geqslant 1$,则

$$\sqrt{n}<a_n<\sqrt{n}+1\quad(n\geqslant 2).$$

(2) 设 $a_{n+1}=a_1+\frac{n}{a_n}$, $a_1>0$. 则

$$a_1-c+\sqrt{n+c^2-1}\leqslant a_n\leqslant c+\sqrt{n+c^2},\quad \text{式中 } c=\frac{a_2}{2}.$$

([305]111(2004),729 ~ 731)

22. 设 $a_1>0, a_{n+1}=a_1+(n/a_n)$.

(1) 当 $n>\frac{4}{a_1^3}$ 时,是否成立 $a_{n+1}>a_n$?(陈计提出,见[31]116 ~ 123)

(2) 当 $a_1\geqslant 1$ 时,$\sqrt{n-1+\frac{a_1^2}{4}}+\frac{a_1}{2}\leqslant a_n\leqslant\sqrt{n+\frac{1}{4}a_1^2}+\frac{a_1}{2}, n\geqslant 1$.

([305]1996,103(10):912)

23. 设 $a_1=2$, $a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+\frac{1}{a_n}$, 则$\sqrt{2}<a_n<\sqrt{2}+\frac{1}{n}$.

若 $a_{n+1}=pa_n+qa_n^{-1}$, $p,q>0$, $a_1>0$. a_n 的最佳上下界是什么?

24. [MCM]. 设 $a_0=1, a_n=\frac{\sqrt{1+a_{n-1}^2}-1}{a_{n-1}}$,则 $a_n>\frac{\pi}{2^{n+2}}$.(1990 年匈牙利奥赛试题).

25. [IMO]. 设 $a_0=\frac{\sqrt{2}}{2}, a_{n+1}=a_0\cdot\sqrt{1-\sqrt{1-a_n^2}}, n=0,1,2,\cdots, b_0=1, b_{n+1}=\frac{\sqrt{1+b_n^2}-1}{b_n}$,则

$2^{n+2}a_n<\pi<2^{n+2}b_n, n=0,1,2,\cdots$.(1989 年 30 届 IMO 预选题)

26. [MCM]. 设 $a_k\geqslant 0, a_{n+m}\leqslant a_n+a_m$,则对 $\forall n\geqslant m$,下式成立 $a_n\leqslant ma_1+(\frac{n}{m}-1)a_m$. 特别,若 $a_1=1, a_n>1(n\geqslant 2)$ 且 $a_{n+m}\leqslant a_n+a_m$,则 $a_n<n$.

27.　[MCM]. 设 $\{a_k\}$ 满足 $a_n > 0, a_n^2 < a_n - a_{n+1}$，则 $a_n < \dfrac{1}{n+2}$　$(n \geqslant 2)$.

提示：用数学归纳法，或利用 $f(x) = x - x^2$ 在 $x \leqslant 1/2$ 时递增，于是，

$$a_{k+1} \leqslant a_k - a_k^2 < \frac{1}{k+2} - \left(\frac{1}{k+2}\right)^2 = \frac{k+1}{(k+2)^2} < \frac{1}{k+3}.$$

28.　**Khinchin 不等式**：设 $\{a_k\}$ 为复数列，$\varepsilon_k = \pm 1, 1 \leqslant k \leqslant n, c > 1$，则

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right)^{1/2} \leqslant c2^{-n} \sum_{\{\varepsilon_k\}} \left|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k a_k\right|,$$

式中 $\sum\limits_{\{\varepsilon_k\}}$ 表示对所有 $\varepsilon_k = \pm 1$ 求和.（[125]Vol. 1:186）

29.　(1)　[MCM]. 设 $S_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}$　（n 个根号），令

$$f(n) = \frac{2 - S_n}{2 - S_{n-1}}，则\quad \frac{1}{4} < f(n) < \frac{\pi^2}{27};\quad S_n < S_{n+1} < 2.$$

证　令 $a_n = \dfrac{\pi}{2^{n+2}}$，则 $S_n = 2\cos(2a_n)$. 问题变成要证 $\sqrt{f(n)} = \dfrac{\sin a_n}{\sin(2a_n)} > \dfrac{1}{2}$.

(2)　问题：若 $a > 1$，令 $S_n = \sqrt{a + \cdots + \sqrt{a}}$（$n$ 个根号）.

$g(n) = \dfrac{a - S_n}{a - S_{n-1}}$，我们在第三版中曾提出：$g(n)$ 的最优上、下界是多少？

已知 $a > 0$ 时，S_n 递增且 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{2}(\sqrt{4a+1} + 1)$.

2004 年，章仁江证明：

①　若 $1 < a < 2$，则必存在唯一的 n_0，使得 $S_{n_0} < a < S_{n_0+1}$，而且

$$\frac{a - S_{n_0+1}}{a - S_{n_0}} \leqslant g(n) \leqslant \frac{a - S_{n_0+2}}{a - S_{n_0+1}},$$

②　记 $h_1(a) = \dfrac{a - \sqrt{a + \sqrt{a}}}{a - \sqrt{a}}$，　$h_2(a) = \dfrac{\sqrt{a^2 - 2a}}{2a - (a - \sqrt{a^2 - 2a})^2}$，

则 $a = 2$ 时，下式成立

$$\frac{1}{4} < g(n) \leqslant h_1(2),$$

$a > 2$ 时，下式成立

$$\min\{h_1(a), h_2(a)\} \leqslant g(n) < 1.$$

（中国计量学院学报 2004(3):250 ～ 252. 另见[345]2000(11):21 ～ 22）

我们可以进一步问：设 $a_n > 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，令

$$\sigma_n = \sqrt{a_1 + \cdots + \sqrt{a_n}},\qquad f(n) = \frac{a - \sigma_n}{a - \sigma_{n-1}},$$

$f(n)$ 的上、下界是什么？

(3)　设 $a > 0, t \in R^1, t \neq 0$. 记

$$S_n(t) = \sqrt[t]{a + \sqrt[t]{a + \cdots + \sqrt[t]{a}}}\quad（n 个根号），$$

$$g_n(t)=\frac{a-S_{n+1}(t)}{a-S_n(t)},$$

2003 年祁锋等研究了 $S_n(3)$ 和 $g_n(3)$ 的性质.([303]6(3)(2003),413 ~ 419)

我们问:对于一般的 t, $S_n(t)$ 和 $g_n(t)$ 的最优上下界是什么?

(4) 设 $a>1$, $t>1$,或者 $0<a<1$, $0<t<1$,记

$$\sigma_n(t)=\sqrt[t]{a-\sqrt[t]{a-\cdots-\sqrt[t]{a}}}\quad (n\text{ 个根号}),$$

$$f_n(t)=\frac{a-\sigma_{n+1}(t)}{a-\sigma_n(t)}.$$

2009 年席博彦、张涛研究了 $\sigma_n(t)$, $f_n(t)$ 在 $t=2,3,4,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$ 时的有关性质和不等式,例如

① 当 $a>1$, $t>1$,或者 $0<a<1$, $0<t<1$ 时, $\sigma_{2n-1}(t)$, $f_{2n-1}(t)$ 严格递减, $\sigma_{2n}(t)$, $f_{2n}(t)$ 严格递增,且

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(t)=\sigma(t),\qquad \lim_{n\to\infty}f_n(t)=1,$$

式中 $\sigma(t)$ 是方程 $x^t+x-a=0$ 的根.由此推出

② 当 $a>1$ 时,下式成立

$$\sqrt{a-\sqrt{a}}\leqslant\sigma_{2n}(2)<\sigma_{2n+2}(2)<\sigma(2)<\sigma_{2n+1}(2)<\sigma_{2n-1}(2)<\sqrt{a};$$

$$\frac{a-\sqrt{a-\sqrt{a-\sqrt{a}}}}{a-\sqrt{a-\sqrt{a}}}\leqslant f_{2n}(2)<f_{2n+2}(2)<1<f_{2n+1}(2)<f_{2n-1}(2)\leqslant\frac{a-\sqrt{a-\sqrt{a}}}{a-\sqrt{a}}.$$

③ 当 $0<a<1$ 时,下式成立

$$a^4-2a^3+a^2\leqslant\sigma_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)<\sigma_{2n+2}\left(\frac{1}{2}\right)<\sigma\left(\frac{1}{2}\right)<\sigma_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right)<\sigma_{2n-1}\left(\frac{1}{2}\right)<a^2;$$

$$\frac{1-a[1-a(1-a)^2]^2}{1-a(1-a)^2}\leqslant f_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)<f_{2n+2}\left(\frac{1}{2}\right)<1<f_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right)<f_{2n-1}\left(\frac{1}{2}\right)\leqslant\frac{1-a(1-a)^2}{1-a}.$$

(2009 年第四届全国不等式学术年会交流论文)

我们可以进一步问:对于一般的 t, $g_n(t)$ 与 $f_n(t)$ 的最优上下界是什么?

(5) 设 $a\geqslant 2$, $S_1=\sqrt{a}$, $S_2=\sqrt{a-\sqrt{a}}$, $S_3=\sqrt{a-\sqrt{a+\sqrt{a}}}$, $S_4=\sqrt{a-\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}}$,…,这里,根号套中符号序列 −, +, +,… 按周期 3 出现,则

$$S_{6n+4}<S_{6n+3}<S_{6n+2}<S_{6n+1};S_{6n+4}<S_{6n+5}<S_{6n+6}<S_{6n+7};$$

$$0<S_4<S_{10}<\cdots<S_{6n+4}<S_{6n+7}<S_{6n-1}<\cdots\cdots<S_7<S_1=\sqrt{a}.$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\beta-1}{6}+\frac{2}{3}\sqrt{4a+\beta}\sin\left(\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{2\beta+1}{3\sqrt{3}}\right),$$

式中 $\beta=\sqrt{4a-7}$.([305]1993,100(7):650)

30. 设 $a_0=1$, $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$,则

$0 < 2 - a_n < \frac{1}{(2+\sqrt{3})^n}$.（提示：用数学归纳法.）

31.　[MCM]. 设 $S_n = \sqrt{2 + \sqrt[3]{3 + \cdots + \sqrt[n]{n}}}$，则 $S_{n+1} - S_n < \frac{1}{n!}$　$(n = 2,3,\cdots)$.

（1985 年 IMO 备选试题）（[99](3):49）

32.　设 $a_0 = 1, a_{n+2} = \sin a_n$，则

$$\frac{1}{\sqrt{3n+2}} \leqslant a_n \leqslant \sqrt{\frac{5}{n}}.$$

33.　设 $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{9a_n}{6+a_n}$，则当 $n \geqslant 2$，下式成立

$$3[1 - (\frac{2}{3})^{n/2}] < a_n < 3[1 - (\frac{2}{3})^n].$$（[348]1990,10:33）

34.　[MCM]. 设 $1 = a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots$，令

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}) \frac{1}{\sqrt{a_k}},$$

则　$0 \leqslant S_n < 2, (n = 1,2,\cdots)$.

证　$$0 \leqslant S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{k-1}}{\sqrt{a_k}}\left(\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{k-1}}{\sqrt{a_k}}\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}} + \frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}} - \frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)$$

$$\leqslant 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}} - \frac{1}{\sqrt{a_k}}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{a_0}} - \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right) < 2.$$

35.　设 $F_n(x) = \frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(k - x), n \geqslant 2, I(n) = \int_0^1 F_n(x)\mathrm{d}x$，则当 $n \geqslant 2$ 时，有

$$I(n) > \frac{1}{2\ln 2n},\quad \text{从而}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} I(n) = +\infty.$$（Gabovic，[4]494）

36.　设 $a > 0$，f 在 $[a,\infty)$ 上严格递减和严格凸，$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$，$xf(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上是凹函数. 令 $a_n = \sum_{k=n_0}^{n} f(k) - \int_{n_0}^{n} f(x)\mathrm{d}x$，$\lim_{n\to\infty} a_n = l$. 则

$$\frac{f(n)}{2 + (1/n)} < a_n - l < \frac{f(n)}{2}.$$

（Astra Mat. 1990,1(3):3 ~ 7）

37.　**凸序列不等式**：设 $\{a_n\}$ 为实数列，$\Delta a_n = a_n - a_{n+1}$，$\Delta^2 a_n = \Delta a_n - \Delta a_{n+1}$，若 $\Delta^2 a_n \geqslant 0$，$(\forall n)$，则称 $\{a_n\}$ 为**凸序列**；更一般地，若 $\forall 0 \leqslant m < k < n$，下式成立 $a_k \leqslant \frac{k-m}{n-m} a_n + \frac{n-k}{n-m} a_m$，则称 $\{a_n\}$ 为凸序列；若 $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \mid \Delta^2 a_n \mid < \infty$，则称 $\{a_n\}$ 为**拟凸序列**；若 $\sum_{n=0}^{\infty} \mid \Delta a_n \mid < \infty$，则称 $\{a_n\}$ 为有界变差序列，记为 $\{a_n\} \in BV$. 若 $\{a_n\}$ 是有界拟凸序列，则 $\{a_n\} \in BV$ 且 $\{n\Delta a_n\}$ 是有界序列. 令

$L_r(a_n) = a_{n+2} - (r+1)a_{n+1} + ra_n (r > 0)$.

这是$L_1(a_n)=\Delta^2 a_n$的推广. 若$L_r(a_n)>0$,则称$\{a_n\}$关于算子$L_r(a_n)$是凸的;若$L_r(\ln a_n)\geqslant 0$,($\forall a_n>0$),则称$\{a_n\}$关于$L_r(a_n)$是对数凸的(Copson,E. T. ,Proc. Edinb. Math, Soc. Ⅱ Sec. 1970,17:159 ~ 164).

若φ是$(0,\infty)$上的凸函数,则$a_n=\varphi(n)$为凸序列.

(1) [IMO].(29 届 IMO 备选题):设$\{a_n\}$为非负凸序列,且$\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\leqslant 1$,则

$$0\leqslant a_n-a_{n+1}<2/n^2.$$

提示:令$b_n=\Delta a_n$,由条件可推出$\{a_n\}$递减且$b_n\geqslant b_{n+1}\geqslant 0$,$1\geqslant\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\geqslant\sum\limits_{k=1}^{n}(kb_k)\geqslant(\sum\limits_{k=1}^{n}k)b_n=(1/2)n(n+1)b_n$.

(2) 设$\{a_n\}$为严格凸序列,即$a_n>0$,$\Delta a_n>0$,$\Delta^2 a_n>0$,则

$$\frac{a_0}{2}<\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k<a_0-\frac{1}{2}a_1.$$

(3) **Nanson 不等式**:设$\{a_n\}$为凸序列,则

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_{2k}\leqslant\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}a_{2k+1},$$仅当$\{a_n\}$为等差数列时等号成立.

提示:对$k(n-k+1)\Delta^2 a_{2k-1}\geqslant 0$与$k(n-k)\Delta^2 a_{2k}\geqslant 0$求和.([1]107)

1989 年,Adamovic,D. D. 作了推广(Math,Balkanica(N. S.)1989,3(1):3 ~ 11)

(4) 设$\{a_n\}$是有界凸序列,则

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)\Delta^2 a_k\leqslant a_0.$$

(5) 设$\{a_n\}$为凸序列,$\{p_k\}$是正的对称序列,即$p_k=p_{n-k+1}$,$k=1,\cdots,n$. $[r]$表示r的整数部分. 记$r_1=[(n+1)/2]$,$r_2=[(n+2)/2]$,则

$$\frac{1}{2}(a_{r_1}+a_{r_2})\leqslant\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}p_k a_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}p_k}\leqslant\frac{1}{2}(a_1+a_n).$$

(Toader,Gh. ,Rev. Anal. Numer. Theor. Approx. 1992,21(1):83 ~ 88)

38. **高阶凸序列不等式**:设$\{a_n\}$为实数列,令

$\Delta^0 a_k=a_k$,$\Delta^1 a_k=\Delta a_k=a_{k+1}-a_k$.(注意定义与 No. 37 不同)

$$\Delta^m a_k=\Delta(\Delta^{m-1}a_k)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}a_{n+k},m=2,3,\cdots,$$

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}a_k,\qquad\sigma_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}a_k.$$

(1) 若$\Delta^j a_k>0$ $(j=0,1,\cdots,m)$,$\Delta^0 a_1=a_1$,$\Delta^{m+1}a_k=0$. 则

$$(1+\frac{N}{n})<\frac{S_{N+n}}{S_n}<\binom{N+n}{m+1}\Big/\binom{n}{m+1}.$$

(Markovic, D., Bull. Soc. Math. Phys. Serbie, 1949, 1(2): 17 ~ 21)

(2)　设 $b \geqslant -1, (-1)^n \Delta^n a_0 > 0$，且 $(-1)^{n-k} \Delta^{n-k} a_k \geqslant 0, k = 1, \cdots, n$. 则

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k a_k > 0.$$

(3)　若 $b \leqslant -1, \Delta^n a_0 > 0$，且 $\Delta^{n-k} a_k \geqslant 0, k = 1, \cdots, n$，则

$$(-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k a_k > 0.$$

(4)　设 $b > -1$，f_k 在 $[0, n]$ 上连续，在 $(0, n)$ 上 n 次可微，且 $f_k(n) > 0, k = 1, \cdots, m, j = 1, \cdots, n$. 若　$(-1)^j f_k^{(j)}(x) \geqslant 0, n - j < x < n$，则

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} b^j \prod_{k=1}^{m} f_k(x) > 0.$$

(No. (2) ~ (4)，见 Drazin, M. P., [305]1955, 62: 226 ~ 232)

(5)　若存在常数 m_k, M_k 使得 $m_k \leqslant \Delta^k a_n \leqslant M_k, n = 0, 1, 2, \cdots$，则

$$\frac{1}{k+1} m_k \leqslant \Delta^k \sigma_n \leqslant \frac{1}{k+1} M_k.$$

([305]1985, 92(6): 428)

39.　设 $1/2 < a < 2, b_n = (a^n + a^{-n})/2$，则

$$\sum_{k=1}^{n} b_k < 2^n - 2^{-1}.$$

40.　设 $a_{n_0} > b_{n_0}$，且对所有 $n > n_0$，有 $a_n - a_{n-1} \geqslant b_n - b_{n-1}$，则对所有 $n \geqslant n_0$，有

$$a_n \geqslant b_n.$$

41.　设 $a_n > 0, b_n > 0, a_{n_0} > b_{n_0}$，且当 $n > n_0$ 时 $a_n / a_{n-1} \geqslant b_n / b_{n-1}$，则

$$a_n \geqslant b_n \quad (n \geqslant n_0).$$

([348]1989, 12: 18 ~ 20)

42.　设正数 a_k, b_k，满足　$a_{2k-1} < b_{2k-1} < b_{2k} < a_{2k}, 1 \leqslant k \leqslant n; a_{2k-1} + a_{2k} = b_{2k-1} + b_{2k}$，则

(1)　$\sum_{k=1}^{2n} (\sqrt[n]{b_k} - \sqrt[n]{a_k}) > 0$；　(2)　$\sum_{k=1}^{2n} (b_k^{-1/n} - a_k^{-1/n}) < 0$；

(3)　$\sum_{j=2}^{n} \sum_{k=1}^{2n} (b_k^{1/j} - a_k^{1/j}) > 0$；　(4)　$\sum_{j=2}^{n} \sum_{k=1}^{2n} (b_k^{-\frac{1}{j}} - a_k^{-\frac{1}{j}}) < 0$.

43.　[MCM]. 设 $a_1 = 1, a_k = a_{k-1} + (a_{k-1})^{-1}$，则

$$\sqrt{2n-1} < a_n < \sqrt{3n-2}.$$

证　当 $k > 1$ 时，$a_k^2 = a_{k-1}^2 + 2 + a_{k-1}^{-2}$，且 $a_k > 1$，于是 $a_{k-1}^2 + 2 < a_k^2 < a_{k-1}^2 + 3$，$1 \leqslant k \leqslant n$，将这些不等式相加即可得证.

44.　[MCM]. 已知在数列 $\{a_k\}_{k=1}^n$ 中，$1, 1/2, 1/3, \cdots, 1/n$ 只出现 1 次，且在数列 $\{b_k\}_{k=1}^n$ 中也只出现一次. 此外，还已知 $a_k + b_k \geqslant a_{k+1} + b_{k+1}, 1 \leqslant k \leqslant n - 1$，则 $a_k + b_k \leqslant 4/k, (1 \leqslant k \leqslant n)$.

证 在 m 个数对 $(a_k,b_k)(1\leqslant k\leqslant m)$ 中，$a_k\geqslant b_k$ 或 $b_k\geqslant a_k$ 中之一成立的个数不少于 $m/2$ 对. 例如，设 $b_k\geqslant a_k$ 是在不少于 $m/2$ 个数对中成立的不等式，若 b_i 是这些 b_k 的最大值，则 $b_i\leqslant 2/m$. 所以 $a_i+b_i\leqslant 2b_i\leqslant 4/m$，又 $i\leqslant m$，故 $a_m+b_m\leqslant a_i+b_i\leqslant 4/m$.

45. [MCM]. 有序数组 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 由下面的条件确定：$a_1=0$，

$$|a_k|=|a_{k-1}+1|,\ 2\leqslant k\leqslant n,\quad 则\quad \sum_{k=1}^n a_k\geqslant -n/2.$$

提示：将原式平方再相加，化简后得 $a_{n+1}^2=2(\sum_{k=1}^n a_k)+n\geqslant 0$.

46. [MCM]. 设 $\{a_k\}$ 严格递增无界，则存在 N，使 $\forall n\geqslant N$，有

$$S_n=\sum_{k=1}^n\frac{a_k}{a_{k+1}}<n-1.$$

47. [IMO]. 设 $\{a_k\}$ 为递增数列，$a_0=1$，令 $S_n=\sum_{k=1}^n\left(\frac{a_{k-1}^2}{a_k}\right)$，则当 $n\geqslant 14$ 时，$S_n\geqslant 2^\alpha$，式中 $\alpha=\sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{1}{2}\right)^k$.

48. 设 $a_0=0$，$\{a_n\}$ 递增，$\{a_n-a_{n-1}\}$ 递减，则 $\{a_n/n\}$ 也递减.

49. [MCM]. 设 $\{a_n\}$ 满足 $0\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant 2a_1,a_2\leqslant a_3\leqslant 2a_2,\cdots,a_{n-1}\leqslant a_n\leqslant 2a_{n-1}$，则在和 $S=\sum_{k=1}^n(\pm a_k)$ 中可以适当选择正负号，使得 $0\leqslant S\leqslant a_1$.

证 用数学归纳法. $n=1$ 时，结论显然成立，今设对于 n 个数 $a_2,a_3,\cdots,a_{n+1}$，存在形如和 $S'=\sum_{k=2}^n(\pm a_k)$ 满足 $0<S'<a_2$，则 $0\leqslant S'\leqslant a_1$，此时 $0\leqslant S=a_1-S'\leqslant a_1$ 或 $a_1<S'\leqslant a_2\leqslant 2a_1$，于是 $S=S'-a_1\leqslant a_2-a_1\leqslant a_1$ 都是所求的解.

50. [MCM]. 设 $\{a_1,\cdots,a_n\}$ 是 n 个互不相同的实数，令 $M=\min\{(a_j-a_k)^2:1\leqslant j<k\leqslant n\}$，则

$$\sum_{k=1}^n a_k^2\geqslant\frac{nM}{12}(n^2-1).$$

（单墫在[99]6 ~ 9:12 ~ 14 给出了三种不同的证法）

51. (1) 由 $\{a_k\}$ 与 $\{b_k\}$ 构造两个新的数列：

$$A_k=\begin{cases}1, & k=0,\\ a_1, & k=1,\\ a_kA_{k-1}+A_{k-2}, & k\geqslant 2,\end{cases}\qquad B_k=\begin{cases}1, & k=0,\\ b_1, & k=1,\\ b_kB_{k-1}+B_{k-2}, & k\geqslant 2,\end{cases}$$

$r>1$，s 为非负整数，若 $\forall k\geqslant s+1$，有 $a_k\geqslant rb_{k-s}$，且当 $k\geqslant 2$ 时，$b_k\geqslant 2$，则当 $k\geqslant s$ 时，成立 $A_k\geqslant r^\alpha B_{k-s}$，式中 $\alpha=(k-s)/2$.（证明见[345]1990,2）

(2) 设数列 $\{x_n\}$ 满足条件：$|x_{n+1}|\leqslant p|x_n|+q,n=0,1,2,\cdots$，则

$$|x_n|\leqslant p^n|x_0|+\begin{cases}\alpha q, & p\neq 1,\\ nq, & p=1.\end{cases}\quad 式中\ \alpha=\frac{p^n-1}{p-1}.$$

52. [MCU]. 设 $0\leqslant f(k,m)\leqslant 1,1\leqslant k\leqslant n,1\leqslant m\leqslant kN$，则

$$\sum\left(\frac{f(k,m)}{k}\right)^2 \leqslant 2N\sum f(k,m).$$

式中$\sum$是对所有可能的数对(k,m)求和.

提示:令$a_k = \frac{1}{k}\sum_{m=1}^{kN} f(k,m)$,则$0 \leqslant a_k \leqslant N$,用数学归纳法证明与原命题等价的命题:

$(\sum_{k=1}^{n} a_k)^2 \leqslant 2N(\sum_{k=1}^{n}(ka_k))$.(第39届普特南数学竞赛,[66]409,475 ~ 476)

53. 设$\{a_n\}$由方程$\exp(e^x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$确定,则

$$(e\cdot\ln n)^{-n} < a_n < \left(\frac{e}{\ln n}\right)^n.\ ([67]12,75 \sim 77)$$

54. 设$\{a_n\}$是非负递减数列,令$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$,则$S_{2^n-1} \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} 2^k a_{2^k} \leqslant 2S_{2^n} - 2^n a_{2^n}$.

提示:用数学归纳法.

55. 设$a_k \geqslant 0, q > 0$,令$S_n(q) = \frac{1}{(n+1)^{q+1}}\sum_{k=0}^{n}(k+1)^q a_k$,则存在常数$c_q > 0$,使得

$$\sup_n\{S_n(0)\} \leqslant c_p \sup_n\{s_n(q)\}.\ (\text{转引}[334]1984,27(6):813)$$

56. 设$f(x) = \log_a(x + \sqrt{x^2-1}), x \geqslant 1, a > 0, a \neq 1$,令$b_n = f^{-1}(n)$,$S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$,则当$\frac{1}{2} < a < 2$时,$S_n < 2^n - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$.([345]1991,12:19)

57. 设$\{x_k\}$为实数或复数列,$1 \leqslant m \leqslant n$,$\| x \| = (\sum_{k=0}^{n} | x_k |^2)^{1/2}$,$r = 2([\frac{n}{m}]+1)$,则:

(1) $0 \leqslant (\sum_{k=0}^{n-m} | x_k \pm x_{k+m} |^2)^{1/2} \leqslant c_1 \| x \|$;

(2) $c_2 \| x \| \leqslant (\sum_{k=0}^{n} | x_k \pm x_{k+m} |^2)^{1/2} \leqslant c_3 \| x \|$,

式中,$x_{n+1} = \cdots = x_{n+m} = 0$;

(3) $c_2 \| x \| \leqslant (\sum_{k=-m}^{n-m} | x_k \pm x_{k+m} |^2)^{1/2} \leqslant c_3 \| x \|$,

式中,$x_{-m} = \cdots = x_{-1} = 0$;

(4) $c_4 \| x \| \leqslant (\sum_{k=-m}^{n} | x_k \pm x_{k+m} |^2)^{1/2} \leqslant c_3 \| x \|$,

式中,$x_{-n} = \cdots x_{-1} = x_{n+1} = \cdots = x_{n+m} = 0$;$c_1 = 2\cos(\pi/r)$;

$$c_2 = 2\sin\frac{\pi}{2(r+1)};c_3 = 2\cos\left(\frac{\pi}{r+1}\right);c_4 = 2\sin\left(\frac{\pi}{r+2}\right).\ ([54]5:73 \sim 85)$$

58. **FTT 不等式(Fan-Taussky-Todd 不等式)**:设$z_1,\cdots,z_n$为复数,令$\Delta z_k = z_k - z_{k+1}$,$\Delta^2 z_k = z_k - 2z_{k+1} + z_{k+2}$,$z_0 = z_n$,$z_{n+1} = z_1$,

$$\| z \|_r = (\sum_{k=1}^{n} | z_k |^r)^{1/r},\ \| \Delta z \|_r = (\sum_{k=1}^{n} | \Delta z_k |^r)^{1/r},$$

$$\|\Delta^2 z\|_r = \left(\sum_{k=1}^{n} |\Delta^2 z_{k-1}|^r\right)^{1/r}, 1 \leqslant r < \infty, \|z\|_\infty = \max_{1\leqslant k\leqslant n} |z_k|.$$

(1) 若 $\sum_{k=1}^{n} z_k = 0$，则 $\forall m \in N$，下式成立

$$\|z\|_m \leqslant \left(\frac{n-1}{2}\right)\|\Delta z\|_m; \|z\|_m \leqslant \frac{1}{12}(n^2-1)\|\Delta^2 z\|_m.$$

(2) 设 $a = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$ 是具有周期为 n 的序列，对任意数列 $b = \{b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots\}$，令 $S_m = \sum_{k=1}^{n} a_{k+m} b_k$，$m = 1, 2, \cdots, n$，则 $\forall r \in N$，下式成立

$$\|S\|_r = \left(\sum_{k=1}^{n} |S_k|^r\right)^{1/r} \leqslant \|a\|_r \cdot \|b\|_1.$$

(3) 若 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ 为实数列，且 $\sum_{k=1}^{n} x_k = 0$，$\|x\|_\infty = 1$，$x_{n+1} = x_1$，则

$$\|\Delta x\|_\infty \geqslant c_n.$$

式中当 $n = 2m$ 为偶数时，$c_n = \frac{4}{n}$；而当 $n = 2m-1$ 为奇数时，$c_n = \frac{4n}{n^2-1}$.

上述(1) 是 Bellman 不等式的离散类似，(3) 是 Northcott 不等式的离散类似.

(证明见 Monatshefte für mathematik, 1955, 59(2): 73 ～ 90)

59. [MCM]. 设 $(0, \infty)$ 上的函数列 $\{f_n\}$ 由下式定义：$f_1(x) = x$，$f_{n+1}(x) = (f_n(x) + (1/n))f_n(x)$，则存在唯一的正数 a，使得对于所有 n，$0 < f_n(a) < f_{n+1}(a) < 1$.

60. [MCM]. 设 $x > 0$，定义

$$f_n(x) = x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}\Big\}\text{共 } n \text{ 个 } x.$$

则对所有 $k \geqslant 3$，$f_{n+1}(k) > 2f_n(k+1)$.(用数学归纳法)

1983 年，孙传昆证明：当 $1 \leqslant x < \exp(1/e)$ 时，$f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$；而当 $0 < x < 1$ 时，有 $f_1(x) < f_3(x) < \cdots < f_{2n-1}(x) < \cdots < f_{2n}(x) < \cdots < f_2(x)$.([345]1983, 5: 28 ～ 29)

61. [MCM]. 设 $A_n = 3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}\}n$ 个 3；$B_n = 8^{8^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{8}}}}}\}n$ 个 8，则对所有 n，有

$$A_{n+1} > B_n. \tag{1.1}$$

证 直接用数学归纳法证(1.1)式就很困难，可通过“加强命题”技巧，证明

$$A_{n+1} > 3B_n. \tag{1.2}$$

实际上，$n = 1$ 时(1.2)式显然成立，设 $n = k$ 时(1.2)式成立，即 $A_{k+1} > 3B_k$，于是当 $n = k+1$ 时，$A_{k+2} = 3^{A_{k+1}} > 3^{3B_k} = 27^{B_k} > 24^{B_k} = 3^{B_k} \cdot 8^{B_k} > 3B_{k+1}$.

62. 设数列 $\{x_n\}$ 由 $x_n = f(x_{n-1})$ 递归定义，f 连续且有不动点 a，(即 $f(x) = x$ 有实根 a). 当 f 是递增函数时，若 $x < a$ 时，$f(x) > x$，而 $x > a$ 时 $f(x) < x$，则当 $x_1 < a$ 时，$\{x_n\}$ 是递增数列，而当 $x_1 > a$ 时，$\{x_n\}$ 是递减数列，且 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$；当 f 是递减函数时，若 $x < a$ 时，有 $f[f(x)] > x$，而 $x > a$ 时，有 $f[f(x)] < x$，则

$$x_1 < x_3 < \cdots < x_{2n-1} < \cdots < a < \cdots < x_{2n} < \cdots < x_4 < x_2\text{，且} \lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

利用不动点原理,可以统一证明许多由递推关系式确定的数列不等式,例如,

(1) 设 $x_1>0, x_{n+1}=\dfrac{x_n(x_n^2+3a)}{3x_n^2+a}, a>0$,则当 $0<x_1<\sqrt{a}$ 时,$x_n<x_{n+1}<\sqrt{a}$,$x_1>\sqrt{a}$ 时,不等号反向.

提示:找 $f(x)=\dfrac{x(x^2+3a)}{3x^2+a}$ 的不动点.

(2) 设 $a>0, x_1=\sqrt[3]{a}, x_n=\sqrt[3]{ax_{n-1}}$,则当 $a>1$ 时,$x_n<x_{n+1}<\sqrt{a}$,而当 $0<a<1$ 时,不等号反向.(提示:找 $f(x)=(ax)^{1/3}$ 的不动点.)

(3) 设 $x_1>0, x_{n+1}=\dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}$,则当 $x_1<\sqrt{3}$ 时,$x_n<x_{n+1}<\sqrt{3}$,而当 $x_1>\sqrt{3}$ 时,不等号反向.

63. (1) 设 $a,b,c>0, a+b+c=1, x_0,y_0,z_0>0, x_n,y_n,z_n$ 的加权算术平均,加权几何平均,加权调和平均依次定义为:$x_{n+1}=ax_n+by_n+cz_n, y_{n+1}=x_n^a y_n^b z_n^c, z_{n+1}=\left(\dfrac{a}{x_n}+\dfrac{b}{y_n}+\dfrac{c}{z_n}\right)^{-1}$,则 $z_{n+1}\leqslant y_{n+1}\leqslant x_{n+1}$,且 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$、$\{z_n\}$ 均收敛于同一极限.

([371]1993,66(3))

(2) **Schwab 数列不等式:**由关系式 $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n+b_n)$ 与 $b_{n+1}=\sqrt{b_n a_{n+1}}, n=0,1,2,\cdots, a_0,b_0>0$ 所定义的数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 称为 **Schwab 数列**,不妨设 $b_0>a_0>0$,则 $\{a_n\}$ 递增上有界,$\{b_n\}$ 递减下有界,且 $a_0<a_1<\cdots<a_{n+1}<a_{n+2}<b_{n+2}<b_{n+1}<\cdots<b_0$,$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

(黄友谦,"初等数学研究论文选",上海教育出版社,1992,207 ~ 222)

64. 设 $\forall y_k,q_k>0$,且 $\{\dfrac{x_k}{y_k}\}$ 和 $\{\dfrac{p_k}{q_k}\}$ 同时递增或递减,则

$$\Big(\sum_{k=1}^n p_k y_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^n q_k x_k\Big)\leqslant\Big(\sum_{k=1}^n p_k x_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^n q_k y_k\Big).$$

(Toader, Gh., Rev. Anal. Numer. Theor. Approx. 1992, 21(1): 83 ~ 88)

65. **Meir 不等式:**设 $\{a_k\}$, $\{p_k\}$ 为递增数列,即

$$0=a_0\leqslant a_1\leqslant\cdots\leqslant a_n, a_k-a_{k-1}\leqslant p_k, k=1,\cdots,n;$$

$$p_1\leqslant p_2\leqslant\cdots\leqslant p_n, r\geqslant 1, q_k=\frac{1}{2}(p_k+p_{k+1}), k=1,\cdots,n-1,$$

$$s+1\geqslant 2(r+1),\text{令}$$

$$F(s)=\Big((s+1)\sum_{k=1}^{n-1}q_k a_k^s\Big)^{1/(s+1)},\text{则 } F(s)\leqslant F(r).$$

(Pecaric, J. E. [401]1992, 22(1): 329 ~ 330)

66. **Fourier 系数不等式:**设 f 的 Fourier 系数第 n 部分和为

$$S_n(f,x)=\sum_{k=-n}^n c_k\exp(ikx)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^n(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

式中 $c_k = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x, a_k = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx dx, b_k = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx dx.$

以下若特别声明 f 定义在 $[-\pi,\pi]$ 上，则上述 c_k, a_k, b_k 中的积分限都从 $[0,2\pi]$ 改为 $[-\pi,\pi]$.

(1) 若 f 是 $[0,2\pi]$ 上的凸函数，则 $a_k \geqslant 0$；若 f 是 $[-\pi,\pi]$ 上的凸函数，且 $f'(x)$ 有界，则 $a_{2k} \geqslant 0, a_{2k+1} \leqslant 0$.

(2) 若 f 在 $[0,2\pi]$ 上递减，则 $b_k \geqslant 0$；若 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上递减，则 $b_{2k} \geqslant 0, b_{2k+1} \leqslant 0$.

提示：用积分第二中值定理.

(3) 若 f 在 $(0,2\pi)$ 上的导数 f' 递增有界，则 $a_n \geqslant 0\ (n > 0)$.

(4) 设 f 是以 2π 为周期的连续函数，则

$$|c_k| \leqslant (1/2)\omega(f, \pi/|k|),\ |a_k|, |b_k| \leqslant \omega(f, \pi/k),$$

式中 $\omega(f,h) = \sup\{|f(x) - f(y)|\}: |x-y| < h\}$ 为 f 的连续模.

(5) 设 $f \in C_{2\pi}$，则

$$\frac{|a_0|}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{n}(|a_k| + |b_k|) \leqslant \sqrt{2(2n+1)}\,\|f\|_c.$$

(6) 若 f 是以 2π 为周期的局部可积函数，则

$$|c_k| \leqslant \frac{1}{4\pi}\omega_1(f, \pi/|k|);\ |a_k|, |b_k| \leqslant \frac{1}{2\pi}\omega_1(f, \pi/k),$$

式中 $\omega_1(f,\delta)$ 是 f 的积分连续模：

$$\omega_1(f,\delta) = \sup\left\{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h) - f(x)|\,\mathrm{d}x : 0 \leqslant h \leqslant \delta\right\}.$$

(7) 设 f 在 $[0,2\pi]$ 上有 k 阶连续导数，并且以 2π 为周期，则

$$|c_n| \leqslant \frac{1}{2n^k}\omega\left(f^{(k)}, \frac{\pi}{n}\right)(n > 0).$$

(8) 若 $f^{(k)}$ 是 $[0,2\pi]$ 上有界变差函数，则

$$|c_n| \leqslant \frac{1}{\pi}n^{-(k+1)}V_0^{2\pi}(f^{(k)}),\text{式中 } V_0^{2\pi}(f^{(k)}) \text{ 是 } f^{(k)} \text{ 在} [0,2\pi] \text{ 上的全变差}.$$

(9) 若 $f^{(k)}$ 在 $[0,2\pi]$ 上既连续又属于 $\mathrm{Lip}\alpha\quad(k \geqslant 1, 0 < \alpha \leqslant 1)$，则

$$|a_n|, |b_n| \leqslant cn^{-(k+\alpha)}.$$

(10) **Caratheodory 不等式**：设 f 以 2π 为周期、非负且不恒等于 0，则 $|a_n| < a_0,\ |b_n| < a_0,\ |c_n| < a_0 (n \neq 0)$. ([57]Vol. 1:71)

(11) **Rogosinski 不等式**：设 f 在 $(0,\pi)$ 上是非负的奇函数，且不恒等于 0，则 $|b_n| < nb_1, (n = 2,3,\cdots)$. ([57]Vol. 1:71)

(12) 设 $f \in L^2[0,2\pi], \beta_n = \sum\limits_{k\neq 0}\dfrac{c_{n-k}}{k}$，则

$$\sum_n |\beta_n|^2 \leqslant \pi^2 \sum_k |c_k|^2.$$

提示：令 $g(x) \sim \sum\limits_{k\neq 0}\dfrac{1}{k}\exp(ikx) = i(\pi - x), 0 < x < 2\pi$，则 β_n 是 fg 的 Fourier 系

数，而且有 $\| fg \|_2 \leqslant \pi \| f \|_2$，即

$$\int_0^{2\pi} | fg |^2 \leqslant \pi^2 \int_0^{2\pi} | f |^2. \quad ([141]261)$$

(13) 设 $f \in L\ln L(T), T = (-\pi, \pi]$，则

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{| c_k |}{| k | + 1} \leqslant c_1 + c_2 \int_T | f(x) | \log^+ | f(x) | \mathrm{d}x. \ ([87]162)$$

(14) **H-L 不等式(Hardy-Littlewood 不等式)**：设 $f \in L^p(-\pi, \pi), 1 < p \leqslant 2$，则

$$\left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} | c_k |^p (| k | + 1)^{p-2} \right\}^{1/p} \leqslant A_p \left(\int_{-\pi}^{\pi} | f(x) |^p \mathrm{d}x \right)^{1/p}; \tag{1.3}$$

反之，若复数列 $\{c_k\}$ 满足

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} | c_k |^q (| k | + 1)^{q-2} < \infty, q \geqslant 2,$$

则 c_k 必为某个 $f \in L^q$ 的 Fourier 系数，且

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} | f(x) |^q \mathrm{d}x \right)^{1/q} \leqslant A_q \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} | c_k |^q (| k | + 1)^{q-2} \right\}^{1/q}. \tag{1.4}$$

([57]Vol,2. 109 ~ 110. 另见下节 No. 47(3))

注意：$p = 1$ 时，(1.3) 式不成立，替代的结果是下述著名的 Hardy 不等式.

(15) **Hardy 不等式**：若 $f \in H^1(T)$，则

$$\sum_{k \neq 0} \frac{| c_k |}{k} \leqslant A_1 \| f \|_{H^1}.$$

式中 T 为单位圆周.

证 定义在 T 上的函数 $a(x)$ 称为$(1, \infty, 0)$ 原子，指 $a(x)$ 满足：

i) a 的支集 $\mathrm{supp} a \subset I \subset [-\pi, \pi)$；

ii) $\| a \|_\infty \leqslant | I |^{-1}$；

iii) $\int_I a(x) \mathrm{d}x = 0$.

其中 I 是中心在 x_0 的区间，$| I |$ 表示区间 I 的长，根据 Hardy 空间的实变理论（例如见[87]），只要对任意$(1, \infty, 0)$ 原子 a，证明 $\sum_{k \neq 0} | c_k(a) | \leqslant c$.

实际上，利用$(1, \infty, 0)$ 原子 $a(x)$ 满足的三个条件有：

$$| c_k(a) | = \left| \int_I a(t) \exp(-2\pi ikt) \mathrm{d}t \right| = \left| \int_I a(t) [\exp(-2\pi ikt) - 1] \mathrm{d}t \right|$$

$$\leqslant 2\pi | k | \int_I | a(t) | | t | \mathrm{d}t \leqslant 2\pi | k | | I |.$$

所以，$\frac{1}{| k |} | c_k(a) | \leqslant 2\pi | I |$.

$$\sum_{I \neq 0} \frac{1}{k} | c_k(a) | = \sum_{0 < |k| < |I|^{-1}} \left(\frac{1}{k} | c_k(a) | \right) + \sum_{|k| \geqslant |I|^{-1}} \left(\frac{1}{k} | c_k(a) | \right) = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2.$$

$\sum_1$ 至多有 $| I |^{-1}$ 项，所以，$\sum_1 \leqslant 2\pi | I | \cdot | I |^{-1} = 2\pi$，利用 Cauchy 不等式和 Parseval 等式，有

$$\sum\nolimits_2 \leqslant \Big(\sum_{|k|\geqslant |I|^{-1}} |c_k(a)|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{|k|\geqslant |I|^{-1}} \frac{1}{k^2}\Big)^{1/2}$$

$$\leqslant c\Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(a)|^2\Big)^{1/2} = c\Big(\frac{1}{|I|}\int_I |a(t)|^2 \mathrm{d}t\Big)^{1/2} \leqslant c.$$

于是 $\sum_{k\neq 0} \frac{1}{k} |c_k(a)| \leqslant c$

由此可见，上述方法比 Hardy 原来用的复方法([85]91)要简捷得多.

([376]1977,83(4):569 ~ 645)

(16) **Paley 不等式**：设 $f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k \exp(ikx) \in H^1$，$\{\lambda_k\}$ 为 Hadamard 序列，即 $\inf_k(\lambda_{k+1}/\lambda_k) > 1$，则

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_{\lambda_k}|^2 \leqslant c\|f\|_{H^1}^2. \text{([87]384)}$$

(17) 设 f 以 2π 为周期，且 $f \in \mathrm{Lip}\alpha$，即 $|f(x)-f(y)| \leqslant M|x-y|^\alpha$ $(0<\alpha \leqslant 1)$，则 $|a_n| \leqslant cn^{-\alpha}$，$|b_n| \leqslant cn^{-\alpha}$；

若 f 在 $(-\pi,\pi)$ 上分段单调有界，则 $|a_n| \leqslant c/n$，$|b_n| \leqslant c/n$.

(18) 设 $f \in L^2[0,\pi]$，则 $\forall m > 1$，有

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{m} a_k^2 \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f^2; \qquad \sum_{k=1}^{m} b_k^2 \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f^2. \quad \text{(Bessel 不等式)}$$

(19) 设 $f \in L^2[-\pi,\pi]$，$0 < m \leqslant f(x) \leqslant M$，则

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \leqslant \frac{1}{\pi}\Big(\frac{M-m}{M+m}\Big)^2 \int_{-\pi}^{\pi} f^2,$$

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \leqslant \frac{1}{2}(M-m)^2.$$

(参看[344]37(15)(2007),136 ~ 140)

(20) 设 x，y_k 是复酉空间中的元素，c_k 为任意复数. 记 $\|c\|_2 = \Big(\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$，$M = \max_{1\leqslant k\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |(y_k, y_j)|$，则 Bessel 不等式成立：

① $\sum_{k=1}^{n} |(x, y_k)|^2 \leqslant M\|x\|^2$，

② $\Big|\sum_{k=1}^{n} c_k(x, y_k)\Big|^2 \leqslant \|c\|_2^2 M\|x\|^2$. (Bessel 不等式更多的推广见[22]392 ~ 394)

67. (1) 设 $a_k > 0, 1 \leqslant k \leqslant n$. 令 $G_k(a) = \Big(\prod_{j=1}^{k} a_j\Big)^{\frac{1}{k}}$，$A_n(a) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$，$A_n(G) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} G_k(a)$，则

$$A_n(G) + G_n(a) < eA_n(a).$$

(2) **Schur 不等式**：设 $a_k > 0, k = 1, \cdots, n$，$q_k$ 由下式定义：

$$\prod_{k=1}^{n}(1-a_kx)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}q_kx^k,$$

则除了所有 a_k 相等以外，都有

(1)　$q_k^2<q_{k-1}q_{k+1}$；　(2)　$q_1<q_2^{1/2}<q_3^{1/3}<\cdots$.

68.　**序列 $\{a_n\}$ 的上下极限不等式**：$\{a_n\}$ 的上下极限分别定义为

$$\lim_{n\to\infty}\sup a_n=\inf_{n\geqslant 1}(\sup_{k\geqslant n}\{a_k\}),\liminf_{n\to\infty} a_n=\sup_{n\geqslant 1}(\inf_{k\geqslant n}\{a_k\}).$$

则：(1)　$\inf\limits_n\{a_n\}\leqslant\liminf\limits_{n\to\infty}a_n\leqslant\limsup\limits_{n\to\infty}a_n\leqslant\sup\limits_n\{a_n\}$.

(2)　$\liminf\limits_{n\to\infty}a_n+\liminf\limits_{n\to\infty}b_n\leqslant\liminf\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)\leqslant\liminf\limits_{n\to\infty}a_n+\limsup\limits_{n\to\infty}b_n\leqslant$ $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)\leqslant\limsup\limits_{n\to\infty}a_n+\limsup\limits_{n\to\infty}b_n$.

(3)　**Cauchy 不等式**：设 $a_n>0$，则

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\leqslant\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\leqslant\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

(4)　若 $p_n>0,p_1\geqslant p_2\geqslant p_3\geqslant\cdots,\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_k=\infty,\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varepsilon_kp_k<\infty$，其中 ε_n 只取 $-1,1$ 的值，则

$$\liminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\right)\leqslant 0\leqslant\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\right).$$（证明见[56]33）

(5)　Cauchy 不等式中 $a_n>0$ 可推广为复数列 $\{z_n\}$ 的模，即

$$\liminf_{n\to\infty}|z_{n+1}/z_n|\leqslant\liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z_n|}\leqslant\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z_n|}\leqslant\limsup_{n\to\infty}|z_{n+1}/z_n|.$$

提示：利用 $\left|\frac{z_2}{z_1}\cdot\frac{z_3}{z_2}\cdots\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|=\left|\frac{z_{n+1}}{z_1}\right|$，得

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left|\frac{z_{k+1}}{z_k}\right|=\frac{n+1}{n}\left(\frac{1}{n+1}\log|z_{n+1}|\right)-\frac{1}{n}\log|z_1|.$$

令 $m=\liminf\limits_{k\to\infty}|z_{k+1}/z_k|$，对于任给 $\delta>0$，$\{\log|z_{k+1}/z_k|\}$ 中只有有限项小于 $\log m-\delta$. 同理，若令 $M=\liminf\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z_n|}$，则对任给 $\varepsilon>0$，$\{(1/n)\log|z_n|\}$ 中有无限多项不大于 $\log M+\varepsilon$. 于是对充分大的 n，有

$$(\log m)-\delta<\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log|z_{k+1}/z_k|<\frac{n+1}{n}(\log M+\varepsilon)-\frac{1}{n}\log|z_1|,$$

由 δ,ε 的任意性，令 $n\to\infty$，得 $\log m\leqslant\log M$，即 $m\leqslant M$.

(6)　**Stolz 不等式**：设 $\{b_n\}$ 严格递增到 ∞，$b_n>0$，则对任意实数列 $\{a_n\}$，都有

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\leqslant\liminf_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}\leqslant\limsup_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}\leqslant\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}.$$

当 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ 存在（有限或 $\pm\infty$）时，即得著名的 **Stolz 定理**：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}.$$

(7)　对任意实数列 $\{a_n\}$，有

$$\liminf_{n\to\infty}\{a_{n+1}-a_n\}\leqslant\liminf_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}\leqslant\limsup_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}\leqslant\limsup_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n).$$

(8) 设 $\sigma_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k$，则

$$\liminf_{n\to\infty}a_n\leqslant\liminf_{n\to\infty}\sigma_n\leqslant\limsup_{n\to\infty}\sigma_n\leqslant\limsup_{n\to\infty}a_n.$$

(9) **Toeplitz 不等式**:设给定双向无穷的实数矩阵

$$M=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \cdots\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \cdots\\ \cdots\cdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \cdots\\ \cdots\cdots & & & & \end{pmatrix}$$

满足 ① 对所有 $m\in N$，$\sum_{n=1}^{\infty}|a_{mn}|\leqslant A$； ② $\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn}=1$；

③ 对所有 n，$\lim_{m\to\infty}a_{mn}=0$.

则对于给定的数列 $\{S_n\}$，若 $\lim_{n\to\infty}\inf S_n=\underline{S}$，$\lim_{n\to\infty}\sup S_n=\overline{S}$ 均为有限，令 $\sigma_m=\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn}S_n$，则

$$\frac{1}{2}(\overline{S}+\underline{S})-\frac{A}{2}(\overline{S}-\underline{S})\leqslant\lim_{n\to\infty}\inf\sigma_n\leqslant\lim_{n\to\infty}\sup\sigma_n\leqslant\frac{1}{2}(\overline{S}+\underline{S})+\frac{A}{2}(\overline{S}-\underline{S}).$$

69. [MCU]. 设 $\{a_n\}$ 是正实数序列，则

$$\limsup_{n\to\infty}n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1\right)\geqslant 1.$$ 式中下界是最佳的.

证 用反证法，若存在某个 k，使得 $\forall n\geqslant k$，有

$$n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1\right)\leqslant 1,\tag{1.5}$$

即 $\frac{a_n}{n}\geqslant\frac{1}{n+1}+\frac{a_{n+1}}{n+1}$，于是，对任意自然数 p，有

$$\frac{a_k}{k}\geqslant\frac{1}{k+1}+\frac{a_{k+1}}{k+1}\geqslant\cdots\geqslant\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots\frac{1}{k+p}+\frac{a_{k+p}}{k+p},$$

但由调和级数的发散性即知不等式(1.5)不能成立. 因此，对任一自然数 k，必存在某个 $n\geqslant k$，使得

$$n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1\right)>1，即\quad\lim_{n\to\infty}\sup n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1\right)\geqslant 1.$$

为了证明下界 1 是最好的，我们只要取 $a_n=n\ln n$，则对于 $n\geqslant 2$，有

$$n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1\right)=\frac{1}{\ln n}\left[1+n\ln\frac{n+1}{n}+\ln(n+1)\right]<\frac{1}{\ln n}[2+\ln(n+1)]\to 1\ (n\to$$

$\infty)$. 另一方面，若取 $a_n=n^{1+\varepsilon}$，$(\varepsilon>0)$，则用二项式级数展开式即可证得

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1\right)=1+\varepsilon.$$

70. [MCU]. 设所有 $a_n>0$，则

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{a_1+a_{n+1}}{a_n}\right)^n \geqslant e. \tag{1.6}$$

证 利用 $e=\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n)^n$，可将(1.6) 式变成

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{n(a_1+a_{n+1})}{(n+1)a_n}\right)^n \geqslant 1. \tag{1.7}$$

用反证法，设(1.7) 式不成立，即存在 n_0，使所有 $n\geqslant n_0$，有 $\dfrac{n(a_1+a_{n+1})}{(n+1)a_n}<1$. 从而对所有 $n\geqslant n_0$，有 $\dfrac{a_{n+1}}{n+1}-\dfrac{a_n}{n}<-\dfrac{a_1}{n+1}$.

令 $n=n_0,n_0+1,\cdots$，然后相加得

$$\frac{a_n}{n}-\frac{a_{n_0}}{n_0}<(-a_1)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right).$$

令 $n\to\infty$，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=-\infty$. 但这与所有 $a_n>0$ 的假设相矛盾

用同样的方法，利用 $e^p=\lim\limits_{n\to\infty}(1+p/n)^n$ 可将(1.6) 式推广为：

设所有 $a_n>0,p>0$，则

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{a_1+a_{n+p}}{a_n}\right)^n \geqslant e^p. \tag{1.8}$$

(1.6) 和(1.8) 式中的下界均不能再改进. ([305]1949,56(7):451)

71. **Pachpatte 不等式**：$y(n),f(n),g(n)$ 为非负实数列，$c_1,c_2>0$，若 $\forall n\in N$，$y(n)\leqslant[c_1+\sum\limits_{k=0}^{n-1}f(k)y(k)][c_2+\sum\limits_{k=0}^{n-1}g(k)y(k)]$，而且 $c_1c_2\sum\limits_{k=0}^{n-1}a_kb_k<1$. 式中

$$a_n=g(n)\sum_{k=0}^{n-1}f(k)+f(n)\sum_{k=0}^{n-1}g(k),\quad b_n=\prod_{k=0}^{n-1}[1+c_1g(k)+c_2f(k)].$$

则 $y(n)\leqslant\dfrac{c_1c_2b_n}{1-c_1c_2\sum\limits_{k=0}^{n-1}a_kb_k}$. ([301]1995,195(3):638 ~ 644)

72. [MCM]. 设实系数多项式 $P_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_xx^{n-k}$ 的根全为正根，且 $a_0>0$，则

$$2^n[(-1)^na_0a_n]^{1/2}\leqslant\sum_{k=1}^{n}|a_k|\leqslant a_0\left(1-\frac{a_1}{na_0}\right)^n.$$

(33 届 IMO 中国集训队试题，证明见中等数学 1993.1:13)

注 Copson 不等式及其推广见[320]1988,39(156):385 ~ 400. 级数形式见本章§2No.36(3) 和 No.37(2).

73. 设 $a_j>0$，$G_k(a)=\left(\prod\limits_{j=1}^{k}a_j\right)^{\frac{1}{k}}$，则

$$\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}G_k(a)}{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k}\right)^{\frac{1}{n}}+\frac{G_n(a)}{\sum\limits_{k=1}^{n}G_k(a)}\leqslant 1+\frac{1}{n},$$

仅当 $a_1=\cdots=a_n$ 时等号成立，若去掉上式左边第二项，就得到 Carleman 不等式的加细，

即

$$\sum_{k=1}^{n} G_k(a) \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \sum_{k=1}^{n} a_k < e \sum_{k=1}^{n} a_k.$$ ([307]1122 ～ 26020)

74.　设$\{a_n\}$是严格递增的正数列，且满足：$b_{n+1} \leqslant b_n < (b_{n+1})^{1+\frac{1}{n}}$，式中$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$，令

$A(p,n) = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$，$Q(p,n) = \left(\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$，$p > 0$，则

(1)　$\frac{a_n}{a_{n+m}} < \frac{A(p,n)}{A(p,n+m)}$；

(2)　若$\{a_n\}$满足$\Delta a_k = a_{k+1} - a_k > 0$，$\Delta^2 a_k \geqslant 0$，$a_0 = 0$，则

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{Q(p,n)}{Q(p,n+1)}.$$

([330]36(2005)，219 ～ 222；37(2006)，11 ～ 14)

75.　设$a_k > 0$，$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$，则

$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_{n+m}}{a_n} \geqslant \frac{(m+1)^{m+1}}{m^m}$. ([305]105(5)(1998)，E10433)

§2　级数不等式

1.　[MCU]. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n^{1/p}} < p$，$(p > 1)$.

提示：利用$\frac{1}{(n+1)n^{1/p}} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\frac{n}{n^{1/p}}$.

2.　设$1/p + 1/q = 1$，$1 < p < \infty$，则

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n+k}\left(\frac{n}{k}\right)^{1/p} < \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)} - \frac{1-c}{n^{1/q}}.$$

式中c为Euler常数.

(杨必成，高明哲，[335]1997，26(2)：159 ～ 164 或[308]1998，126(3)：751 ～ 759)

3.　**Mathieu不等式**：1890年，Mathieu猜想

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(n^2+x^2)^2} < \frac{1}{x^2}. \tag{2.1}$$

((2.1)式与固体的弹性研究有关)直到1952年才由Berg证明. 随后许多数学家都在寻求形如不等式

$$\frac{1}{x^2+a} < S(x) < \frac{1}{x^2+b} \quad (x \neq 0) \tag{2.2}$$

中a,b的最佳值，这些最佳值最终为Alzer，H.等1997年得到：$a = \frac{1}{2\zeta(3)} = 0.415\cdots$，其中$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$，$b = \frac{1}{6} = 0.166\cdots$. ([301]1998，218：607 ～ 610)

注 作者认为,利用 Euler 求和公式,可进一步导出

$$S(x) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{B_0}{1} - \frac{B_2}{x^2} + \frac{B_4}{x^4} - \frac{B_6}{x^6} + \frac{B_8}{x^8}\right) + 0\left(\frac{1}{x^{12}}\right)$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{1}{6x^2} - \frac{1}{30x^4} - \frac{1}{42x^6} - \frac{1}{30x^8}\right) + 0\left(\frac{1}{x^{12}}\right).$$

式中 $B_0, B_2, B_4, \cdots$ 为 Bernoulli 数,事实上,1989 年 Russell,D. C. 就证明:

$$S(x) = \frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{B_1}{x^2} - \cdots - \frac{B_n}{x^{2n}} + \frac{(-1)^n}{x^{2n}}\int_0^\infty f^{(2n+1)}(t)\cos tx\,dt\right), \text{式中 } f(t) = \frac{t}{e^t - 1}.$$

若令 $S(\alpha,\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha}{(n^2+x)^\beta}$,式中 $0 \leqslant \alpha < 2\beta - 1$,则

$$S(1, 2\beta - 1) \leqslant (\beta - 1)[S(1,\beta)]^2.$$

特别地,$\beta = 2$ 时,得到 **Alzer-Brenner** 不等式:

$$S(1,3) \leqslant [S(1,2)]^2$$

(Ruehr,O,G. 等,Chapman Hall/CRC Res. Notes Math. 2000,418:286 ~ 291)

4. **Favard 不等式:**

$K_r = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k(r+1)}}{(2k+1)^{r+1}}$ 称为 Favard 常数.

K_r 关于偶数指标严格递增,关于奇数指标严格递减:

$$1 = K_0 < K_2 < K_4 < \cdots < \frac{4}{\pi} < \cdots < K_3 < K_1 = \frac{\pi}{2}.$$ (证明见[61]52)

5. [MCU]. 设 $a > 0$,则

$$e^a < \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a+k}{n}\right)^n < e^{a+1}.$$

证 令 $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a+k}{n}\right)^n$,则

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left(1 + \frac{a-k}{n}\right)^n \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\exp(a-k) < \sum_{k=0}^{\infty}\exp(a-k) = \frac{e^{a+1}}{e-1}.$$

从而 $\limsup_{n\to\infty} S_n \leqslant \frac{e^{a+1}}{e-1}$. 另一方面,对于固定的 m 及 $n > m$,有

$$S_n \geqslant \sum_{k=0}^{m}\left(1 + \frac{a-k}{n}\right)^n, \text{从而} \quad \liminf_{n\to\infty} S_n \geqslant \sum_{k=0}^{m}\exp(a-k).$$

由 m 的任意性,得 $\liminf_{n\to\infty} S_n \geqslant \sum_{k=0}^{\infty}\exp(a-k) = \frac{e^{a+1}}{e-1}$. 所以 $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{e^{a+1}}{e-1}$,

再注意到 $1 < \frac{e}{e-1} < e$,得出 $e^a < \lim_{n\to\infty} S_n < e^{a+1}$. ([66]215 ~ 216)

6. 设 $2x$ 为正整数,则

$$(2\sqrt{e} - 3)\frac{x^{2x}}{(2x)!} \leqslant \sum_{k=2x+1}^{\infty}\frac{x^k}{k!} \leqslant \frac{x^{2x}}{(2x)!}.$$

7. **Szasz 不等式:** 设 $x > 0, r > 0$,则

$$\sum_{|k-x| \geqslant r}\frac{x^k}{k!} \leqslant \frac{x}{r}e^x.$$

8.　(1)　设 $x \geqslant \frac{1}{2}$，则 $c_1 f(x) \leqslant e^{-x} \sum_{k \geqslant 2x} \frac{x^k}{k!} \leqslant c_2 f(x)$，

式中 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{e}{4}\right)^x$，$c_1 = \frac{1}{2}(2\sqrt{e} - 3)$，$c_2 = \sqrt{\frac{e}{4\pi}}$.

(2)　设 $\alpha > 0, x > 0, g_n(x) = (2x+1)/n$，则当 n 充分大时，下式成立

$$\sum_{k > 2x} \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{\alpha k}{n}} e^{-x} \frac{x^k}{k!} \leqslant \frac{3}{2} [g_n(x)]^{\alpha g_n(x)} \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \left(\frac{e}{4}\right)^x.$$

([327]1984,40:226 ～ 241)

9.　设 $p \geqslant 1, \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p < \infty$，则

$$\int_0^{\infty} e^{-px} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!} \right|^p \mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p.$$

当 $p > 1$ 时，仅当 $\forall a_k = 0, (k = 0,1,2,\cdots)$ 时等号成立.([4]495)

10.　**华罗庚不等式**：设 $p > 0$，则存在与 p 有关的正常数 c，使得

$$\frac{n\pi^2}{6p^2} - c\sqrt{n} < \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} m \exp\left(\frac{-pmk}{\sqrt{n}}\right) < \frac{n\pi^2}{6p^2}.$$

([76]217 ～ 218).我们问：c 的最佳值是多少？

2009 年樊益武求出 $c\sqrt{n}$ 是 $\frac{\sqrt{n}}{2p} + \frac{1}{12}$，但仍不知道是否为最佳值.([351]2009(1).142 ～ 147)

11.　设 $x > 0, 0 < p \leqslant 2$，则

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x - k|^p \left(\frac{x^k}{k!}\right) \leqslant e^x \cdot x^{p/2}.$$

12.　当 $x \geqslant 1$ 时，$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^x} \geqslant (\ln 2)^x$，当 $0 < x \leqslant 1$ 时不等号反向.

13.　$\ln n \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} [1 - (1 - \frac{1}{2^k})^n] \leqslant (2 + \frac{3}{\ln 2}) \ln n$.

提示：设 $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (1-x)^k, S = \sum_{k=1}^{\infty} [1 - (1 - \frac{1}{2^k})^n]$.

则　$S = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} f_n(2^{-k})$；$\frac{1}{2}[S - \frac{1}{2} f_n(\frac{1}{2})] \leqslant \int_0^1 f_n \leqslant S$.

14.　设 $a_n = \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2 + n + 1}$，则 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^{1/2}}{k^2} \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{3}}$.

提示：用 Cauchy 不等式：$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^{1/2}}{k^2} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)^{1/2} = \frac{\pi^2}{3\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} < \sqrt{\frac{\pi}{3}}$.

15.　$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{\operatorname{arctg}(k^2 + k + 1)}{k^2 + k}\right)^{1/3} < \frac{(3\pi)^{1/3}}{2} \approx 1.0562$.

提示：两次用 Hölder 不等式.

16. $\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2+kx+1}<\frac{\pi}{\sqrt{4-x^2}}-\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2n+x}{\sqrt{4-x^2}}\right),(0<x<2)$.

提示：令 $f(t)=\frac{1}{t^2+tx+1}$，利用 $\sum_{k=n+1}^{\infty}f(k)<\int_n^{\infty}f$.

17. 设 $a>0,g(a)=(a^2+3a^4+a^6)e^{a^2}$，则

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{na^n}{\sqrt{(n-1)!(n^2+1)}}\leqslant\left(\frac{\pi}{2}g(a)\right)^{1/2}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{na^n}{(n+\sqrt{n^2+1})\sqrt{(n-1)!}}\leqslant\left(\frac{2}{3}g(a)\right)^{1/2}$.

提示：利用 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n!}x^n=(x+3x^2+x^3)e^x$.

18. 设 a,b,c 为正数，x 为任意实数，则

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\log^+\left(\frac{a}{b^2+(ck+x)^2}\right)\leqslant\frac{4\sqrt{a}}{c}+\log^+\left(\frac{a}{b^2}\right).$$

证　若 $a\leqslant b^2$，则不等式左端为零，右端为正，所以不等式成立. 下面设 $a>b^2$，因为不等式左端的和有一项在 $k=-\frac{x}{c}$ 时有唯一的极大值，所以，

$$\text{左端}\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\log\left(\frac{a}{b^2+(ct+x)^2}\right)\mathrm{d}t+\log\left(\frac{a}{b^2}\right)=$$

$$=\frac{4b}{c}\left\{\sqrt{\frac{a}{b^2}-1}-\operatorname{arctg}\left[\left(\frac{a}{b^2}-1\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right\}+\log\left(\frac{a}{b^2}\right)\leqslant\frac{4\sqrt{a}}{c}+\log\left(\frac{a}{b^2}\right).$$

19. **交错级数不等式**：我们熟知，当递减的正数列 $a_n\to0(n\to\infty)$ 时，$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k$ 收敛，且它的和 S 与部分和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k$ 的差满足不等式

$$|S-S_n|\leqslant a_{n+1}. \tag{2.3}$$

若进一步假设 $\{a_n-a_{n+1}\}$ 也递减，则上式可改进为

$$|S-T_n|\leqslant(a_n-a_{n+1})/2. \tag{2.4}$$

式中 $T_n=S_{n-1}-(-1)^na_n/2$. 例如 $S=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{\ln(k+1)}$，取 $n=10$，用(2.3)式得 $|S-S_{10}|<\frac{1}{\ln2}\approx0.4$；而用(2.4)式得 $|S-T_{10}|<(a_{10}-a_{11})/2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\ln11}-\frac{1}{\ln12}\right)\approx0.0073$.

20. [MCM]. 对于给定的数列 $\{a_n\}$，按如下方式定义一个新的数列 $\{b_n\}$：

$$b_1=a_1,b_2=a_2b_1-1;b_{n+2}=a_{n+2}b_{n+1}-b_n,n=1,2,\cdots,$$

则当 $a_n\geqslant2$ 时，$\{b_n\}$ 严格递增，而当 $a_n\geqslant3$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}(1/b_n)<2/3$. ([345]1991,1:35)

21. 设 $\lambda>0$，正项级数 $\sum_{k=0}^{\infty}x_k$ 收敛，且 $\lambda x_n\geqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}x_k,n\geqslant0$，则当 $0<p<1$ 时，下式成立

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k^p \leqslant [(\lambda+1)^p - \lambda^p]^{-1}(\sum_{k=0}^{\infty} x_k)^p$$，仅当 $x_k = \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^k$ 时等号成立.

推论 设 $\{p_k : k \geqslant 0\}$ 为概率分布，使得 $p_k > 0, k \geqslant 0$，

$$\lambda = \sup_{n \geqslant 0}\left\{\frac{1}{p_n}\sum_{k=n+1}^{\infty} p_k\right\} < \infty,$$ 则

$$-\sum_{k=0}^{\infty} p_k \log p_k \leqslant (\lambda+1)\log(\lambda+1) - \lambda\log\lambda,$$

仅当 $p_k = \frac{\lambda^k}{(\lambda+1)^{k+1}} (k \geqslant 0)$ 时等号成立.

(Allouche, J. P. ，等，Tokyo J. Math. 1988, 11(2): 323 ~ 328)

22. [MCU]. 设 $a_k > 0, S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$，则

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{S_n} \leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$； (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{S_n} \leqslant 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$.

([305]1982, 89: 452 ~ 453)

23. **超加性不等式**：设 $p \geqslant 2, x, y > 0$，则

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^p}\right)^{-1} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(y+k)^p}\right)^{-1} < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(x+y+k)^p}.$$

提示：利用 $f(r,s) = \frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r)\Gamma(s)} x^{r-1}(1-x)^{s-1}$，当 $r, s > 0, 0 < x < 1$ 时是严格对数凹性的.(Trimble, S. Y. ，[385]1989, 20(5): 1255 ~ 1259)

24. 设 f 是 $[1,\infty)$ 上正的递减函数，$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) < \infty$，则

(1) $\int_{n+1}^{\infty} f \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \leqslant f(n+1) + \int_{n+1}^{\infty} f.$

(2) 若 $\forall a_k > 0, \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{a_k} = 1$，则 $\sum_{k=1}^{m}\left[\sum_{n=1}^{\infty} f(na_k)\right] \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$

25. 设 $0 < p < 1, 1/p + 1/q = 1, [x]$ 为 x 的整数部分，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} [np]^{-2} + \sum_{n=1}^{\infty} [nq]^{-2} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2},$$

仅当 p 为无理数时等号成立.

26. 设 f 是 $[1,\infty)$ 上正的递增函数，$k, m \in N$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{m}{n}\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{k+m}{n}\right).$$ ([1]333)

27. 设 $0 < x < \pi/2$，则

(1) $\prod_{k=1}^{\infty} |1 - (\cos x)^k e^{ikx}| < 1$； (2) $\prod_{k=1}^{\infty} \left|\frac{1 + (\cos x)^k e^{ikx}}{1 - (\cos x)^k e^{ikx}}\right| < 1.$

由 Jordan, W. B. 给出的证明见 SIAN Review, 1979, 121(1): 140 ~ 141.

28. (1) 设 $x > 1$，令 $\varphi(x) = \lim_{n\to\infty}\{\ln(x+n) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x+k}\}$，

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\left\{\ln\ln(x+n)-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(x+k)\ln(x+k)}\right\}.$$

则对充分大的 x，成立 $g(x)>\ln\varphi(x)$.（证明见[305]1987,94(1):196 ～ 197）

(2)　设 $x>0$, $g(x)=(x+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{x})-1$，则

$$0<\sum_{n=0}^{\infty}g(x+n)<\frac{1}{12x}.$$

提示：利用 $0<g(x)<\frac{1}{12}(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1})$.

29.　设 $a_k>0$, $k=1,2,\cdots$，则

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}n^2a_n\right)^{1/2}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty}a_k\right)^{1/2}.$$

它可看做三角不等式的推广.（[67]7,65）

30.　设 $\{a_n\}$ 是有界的正数列，$p>0$，则

$$\frac{1}{a_1^p}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1a_2\cdots a_n}{a_{n+1}^p}\geqslant\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{p}{p+1}\right)^{n-p}.$$

（证明见[305]1987,94(7):684）

31.　设 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$, $\sigma_n=\sum_{k=n}^{\infty}a_k$，若 $p>1$，则当 $c>1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n^p}{n^c}\leqslant K\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(na_n)^p}{n^c}$.
当 $c<1$ 时，上式中 S_n 换成 σ_n. 当 $0<p<1$ 时，不等号反向.
（[1]287 ～ 288 定理 346）我们问：$K=K(p,c)$ 的最佳值是什么？

32.　设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项收敛级数，$r_n=\sum_{k=n}^{\infty}a_k$, $0<p<1$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{r_n^p}<c_p\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right)^{1-p}.\tag{2.5}$$

式中 c_p 的最佳值为 $c_p=\frac{1}{1-p}$.

证　由第三章 No. 8. Bernoulli 不等式，有

$$1-\frac{r_{n+1}}{r_n}<\frac{1}{1-p}\left[1-\left(\frac{r_{n+1}}{r_n}\right)^{p-1}\right].$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{r_n^p}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{r_{n+1}}{r_n}\right)r_n^{1-p}<\frac{1}{1-p}\sum_{n=1}^{\infty}(r_n^{1-p}-r_{n+1}^{1-p})=\frac{1}{1-p}r_1^{1-p}$，此即(2.5)式. 为证 $c_p=\frac{1}{1-p}$ 是最佳值，可取 $a_n=x^{n-1}$, $0<x<1$，则 $r_n=\frac{x^{n+1}}{1-x}$. 于是

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{r_n^p}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right)^{p-1}=\frac{1-x}{1-x^{1-p}}\to\frac{1}{1-p}\quad(x\to1-0).$$

（[305]1986,93(4):303 ～ 304）

33.　设 $\{a_k\}$ 为实数列，令 $r_n=\sum_{k=n}^{\infty}a_k^2$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\leqslant\frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r_n}{n}\right)^{1/2}.$$

证 利用 Cauchy 不等式,有

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n(n+1)}\Big(\sum_{k=1}^{n}k\Big)=2\sum_{k=1}^{\infty}k\Big(\sum_{n=k}^{\infty}\frac{a_n}{n(n+1)}\Big)$$

$$\leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty}k\Big(\sum_{n=k}^{\infty}a_n^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)^2}\Big)^{1/2}.$$

另一方面,

$$\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)^2}=\sum_{n=k}^{\infty}\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\Big)^2=\sum_{n=k}^{\infty}\Big(\int_n^{n+1}\frac{dx}{x^2}\Big)^2\leqslant\sum_{n=k}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{dx}{x^4}=\int_k^{\infty}\frac{dx}{x^4}=\frac{1}{3k^3}.$$

代入上式,得 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n\leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot r_k^{1/2}\frac{1}{\sqrt{3}k^{3/2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{r_k}{k}\Big)^{1/2}.$

34. **Knopp 不等式:**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\ln\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{a_k^{-1}}\Big)^{-1}<2\sum_{n=1}^{\infty}a_n.\ ([354]1929,30:387\sim413)$$

35. **Carlson 不等式:**设$\{a_k\}$是不全为零的非负数列,$\sum_{k=1}^{\infty}(ka_k)^2<\infty$,则

(1) $$\Big(\sum_{k=1}^{\infty}a_k\Big)^4<\pi^2\Big(\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{\infty}k^2a_k^2\Big).\tag{2.6}$$

常数 π^2 最佳是在下述意义下:存在序列$\{a_n\}$,使得不等式(2.6)的右边任意接近左边.(Ark. Mat. Astr. Fys. ,1934,25B(1):1 ~ 5)

(2) **Landau,E. 证明:**(2.6)式可改进为:

$$\Big(\sum_{k=1}^{\infty}a_k\Big)^4<\pi^2\Big(\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\Big(k-\frac{1}{2}\Big)^2a_k^2\Big).\ ([14]7)$$

(3.5)式还有许多改进和推广,例如

(3) $$\sum_{n=1}^{\infty}a_n<G(p,\lambda)\Big(\sum_{n=1}^{\infty}n^{p-1-\lambda}a_n^p\Big)^{\frac{1}{2p}}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}n^{p-1+\lambda}a_n^p\Big)^{\frac{1}{2p}}.$$

式中$\lambda>0,p>1,\sum_{n=1}^{\infty}n^{p-1+\lambda}a_n^p<\infty$,常数 $G(p,\lambda)=2^{1/p}\left\{\dfrac{\Big[\Gamma\Big(\dfrac{1}{2p-1}\Big)\Big]^2}{2\lambda\Gamma\Big(\dfrac{1}{p-1}\Big)}\right\}^{1-\frac{1}{p}}$ 是最佳的.

(Gabriel,[317]1937,12:130 ~ 132)

(4) 设$\{a_n\}$为实数列,$0<p\leqslant1$,则

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{p}}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}n^{1-p}a_n^2\Big)^{1/4}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}n^{1+p}a_n^2\Big)^{1/4},$$

(杨国胜等,[388]1999,30(10):1031 ~ 1040)

(5) 设 $g(x)=\dfrac{d}{dx}(\ln\Gamma(x))$ 是 $\Gamma(x)$ 的对数导数,c 为 Euler 常数,$p\geqslant1,q\geqslant0$,$0<a_n\leqslant1$,则

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^q\Big[\prod_{k=1}^{n}a_k^{k^p-(k-1)^p}\Big]^{\frac{q+1}{n^p}}\leqslant e^{g(p)+c+\frac{1}{p}}\sum_{n=1}^{\infty}n^qa_n.$$

(Alzer,H. ,[389]1996,32(3 ~ 4):361 ~ 366)

注　(2.6)式及其积分形式在 20 世纪 90 年代之前的改进和推广，系统总结在[21]259 ~ 274. 进一步推广见[329]104(2)(1993),161 ~ 180.

(6)　2002 年,匡继昌 -Debnath. L. 证明下述更一般的结果：

设 $S_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha a_n^p, S_\beta = \sum_{n=1}^{\infty} n^\beta a_n^p, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, 0 < \beta < p-1 < \alpha, a_n \geqslant 0, 0 < S_\alpha, S_\beta < \infty$,则

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)^p < 2\left\{\frac{S_\alpha^{\lambda_\alpha}}{(\alpha-\beta)S_\beta^{\lambda_\beta}} B(\lambda_\beta, (-\lambda_\alpha)) - c(p,\alpha,\beta)\right\}^{p/q} \times \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha a_n^p\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^\beta a_n^p\right),$$

式中 $\lambda_\alpha = \frac{p-\alpha q}{p(\alpha-\beta)}, \lambda_\beta = \frac{p-\beta q}{p(\alpha-\beta)}, c(p,\alpha,\beta) = \int_0^1 \frac{dx}{(S_\beta x^\alpha + S_\alpha x^\beta)^{q/p}} - \frac{1}{(S_\alpha + S_\beta)^{q/p}} > 0$, $B(u,v)$ 为 Beta 函数. 特别，当 $p = q = \alpha = 2, \beta = 0$ 时，上式归结为

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)^4 < (\pi - 2c)^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2\right),$$

式中 $c = G(s) = \operatorname{arctg} S - \frac{S}{1+S^2} > 0, S = \left(\frac{S_0}{S_2}\right)^{1/2}, S_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2$,相应的积分类似见 13 章 No. 5. ([301])2002,267(1):395 ~ 399)

36.　(1)　**Daroczy 不等式**：设 $a_k > 0, 0 < p < 1$,令 $M = \sup_n \left(\frac{1}{a_n}\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\right) < \infty$,则

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)^p \geqslant [(M+1)^p - M^p]\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p + p[M^{p-1} - (M+1)^{p-1}]\sum_{k=1}^{\infty}\left[Ma_k - \sum_{j=k+1}^{\infty} a_j\right]a_k^{p-1},$$

仅当 $a_n = \left(\frac{M}{M+1}\right)^{n-1} a_1$　$(\forall n)$ 时等号成立. ([391]1997,75(1 ~ 2):27 ~ 30)

(2)　**HLP 不等式(Hardy-Littlewood-Polya 不等式)**：设 $\{a_k\}$ 是递减数列，$p > 1$,则

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)^p \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p [n^p - (n-1)^p].$$

若 $0 < p < 1$,则不等号反向.

Cvetan, J. 等作了推广并用于离散概率分布的熵上. (Glas. Mat. Ser. Ⅲ. 1997, 32(52)(2):201 ~ 206)

(3)　**Copson 不等式**：设 $\{a_n\}$ 为实数列，$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n, \Delta^2 a_n = \Delta(\Delta a_n), \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty, \sum_{n=0}^{\infty} (\Delta^2 a_n)^2 < \infty$,则

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} (\Delta a_n)^2\right)^2 \leqslant 4\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} (\Delta^2 a_n)^2\right).$$

式中 4 为最佳常数，仅当 $\forall a_n = 0$ 时等号成立.

Brown, B. M. 等将它推广为以下形式：设 $\{p_k\}, \{q_k\}, \{w_k\}$ 为实数列，$p_n \neq 0$,则

$$\left\{\sum_{n=-1}^{\infty} p_n |\Delta x_n|^2 + \sum_{n=0}^{\infty} q_n |x_n|^2\right\}^2 \leqslant K \sum_{n=-1}^{\infty} w_n |x_n|^2 \sum_{n=0}^{\infty} w_n \left|\frac{Mx_n}{w_n}\right|^2,$$

式中 $Mx_n = -\Delta(p_{n-1}\Delta x_{n-1}) + q_n x_n, w_n > 0, n = 0, 1, \cdots$

([392]1992,121(1 ~ 2):169 ~ 183)

37. **Hardy 不等式**:设 $a_k \geqslant 0$,且不全为零,令 $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, B_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k, p > 1$,则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p < \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p. \tag{2.7}$$

式中常数 $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ 是最佳的.([1]270 定理 326)

该定理已有许多不同的证明、改进和推广,详见[1]270 ~ 274 和[21]143 ~ 185,下面仅介绍若干基本的结果.

(1) 设 $0 < p < 1, \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p < \infty$,则

$$\left(1+\frac{1}{1-p}\right)B_1^p + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{B_n}{n}\right)^p > \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p, \tag{2.8}$$

除非 $\forall a_k = 0$.([1]283 定理 338)

(2) **Copson 不等式**:设 $p > 1$,则 $\sum_{n=1}^{\infty} B_n^p < p^p \sum_{n=1}^{\infty} (na_n)^p$, (2.9)

除非 $\forall a_k = 0$,当 $0 < p < 1$ 时,不等号反向,p^p 为最佳常数.([1] 定理 331 和 344)由此推出,

当 $0 < p < 1$ 时,$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{B_n}{n}\right)^p > p^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$. ([1]287,定理 345)

当 $0 < p \leqslant \frac{1}{3}$ 时,$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{B_n}{n}\right)^p \geqslant \left(\frac{p}{1-p}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$.

(3) 设 $0 < p < 1, 1 \leqslant k < \infty$,则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{B_n}{n}\right)^p < \frac{\pi p}{\sin(\pi p)} \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sup_{k\geqslant n} a_k^p\right),$$

除非 $\forall a_k = 0$.(Grahame,B.[320],1988,39(156):385 ~ 400)

(4) 设 $a_1 > 0$,$\{a_k\}$ 是递减数列,$0 < p < 1$,则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{B_n}{n}\right)^p < \frac{\pi p}{\sin(\pi p)} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p,$$

除非 $\forall a_k = 0$.(Bergh,J.,[354]1989,202(1):147 ~ 149)

(5) 设 $\frac{7}{6} \leqslant p \leqslant 2, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p < q^p \sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{15}{196} \cdot \frac{1}{n^{1/q} + 3436}\right) a_n^p.$$

(黄启亮,中山大学学报 39(3)(2000),20 ~ 24)

(6) $p = 2$ 时,杨必成、朱匀华证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{n}\right)^2 < 4 \sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{3\sqrt{n} + 5}\right) a_n^2.$$

(中山大学学报,1998,37(1):41 ~ 44)

(7)　2001 年 Chen C. P. 等考虑了 Hardy 不等式的一般形式:设 $x = \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in l^p$, $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$,则

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\sum_{k=0}^{\infty}a_{nk}x_k\right|^p \leqslant \|A\|_p \sum_{k=0}^{\infty}|x_k|^p. \tag{2.10}$$

设 $A = (a_{n,k})$ 是下三角矩阵,且 $0 \leqslant a_{n,k} \leqslant a_{n,k+1}$, $0 \leqslant k < n$,则

$\sup\limits_{k\geqslant 0}\left[\inf\limits_{n\geqslant k}\{(n+1)a_{n,k}\}\right]q \leqslant \|A\|_p \leqslant \left[\sup\limits_{n\geqslant 0}\left\{\sum\limits_{k=0}^{n}a_{n,k}\right\}\right]q$,特别,若 $(n+1)a_{n,k}$ 关于 $k\nearrow$,则

$$\|A\|_p = (\sup_{n\geqslant 0}\{(n+1)a_{n,n}\})q,$$

若 $a_{n,k} = \begin{cases}\dfrac{1}{n+1}, n \geqslant k,\\ 0, \quad n < k,\end{cases}$

则 $\|A\|_p = q^p$,这时(2.10)式归结为(2.7)式.

(更一般情形及其他推论详见[301]2002,273:160 ~ 171)

(8)　**Leindler 不等式**:设 $q_k > 0$, $Q_n = \sum\limits_{k=1}^{n}q_k$, $\sigma_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty}q_k$,则当 $p \geqslant 1$ 时,下式成立

$$\sum_{n=1}^{\infty}q_nA_n^p \leqslant p^p\sum_{n=1}^{\infty}q_n^{1-p}a_n^p\sigma_n^p;\quad \sum_{n=1}^{\infty}q_nB_n^p \leqslant p^p\sum_{n=1}^{\infty}q_n^{1-p}a_n^pQ_n^p,$$

当 $0 < p \leqslant 1$ 时,不等号均反向,式中 p^p 为最佳常数.([369]1990,54:285 ~ 289)

(9)　**Bennet 不等式**:设 $a = \{a_n\} \in l^p$, $p > 1$, $a_n \geqslant 0$, $\|a\|_n = \min\{a_k^p : k \leqslant n\}$,则

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}a_k\right)^p \geqslant \zeta(p)\sum_{n=0}^{\infty}\|a\|_n;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{n+k+1}\right)^p \geqslant \zeta(p)\sum_{n=0}^{\infty}\|a\|_n$$

式中常数 $\zeta(p) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^p}$ 是最佳的,仅当 $\forall a_n = 0$ 时等号成立.

([323]1992,44(1):54 ~ 74)

(10)　设 $1 < p_n \leqslant q < \infty$,则

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}a_k\right)^{p_n} \leqslant C\max\left\{\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_k^{p_k}\right)^q, \left(\sum_{k=0}^{\infty}a_k^{p_k}\right)^{1/q}\right\}.$$

(Johnson, J_R. P. D. [360], 1993, 60:157 ~ 163. 该文还提出了三个未解决的问题)

(11)　2009 年张小明、许谦利用最佳单调定理证明:

设 $p > 1$, $a_k > 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^p < \infty$,则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{n=1}^{\infty}\left\{1 - \frac{c_p}{2\left(n-\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{1-\frac{1}{p}}}\right\}a_n^p,$$

式中 $c_p=\begin{cases}(p-1)\left[1-\left(1-\left(\frac{1}{p}\right)\right)2^{\frac{1}{p}}\right], & 1<p\leqslant 2,\\ 1-\left(1-\left(\frac{1}{p}\right)\right)^{p-1}2^{1-\frac{1}{p}}, & p>2.\end{cases}$ ([351]2009(2):180 ~ 191)

当 $p<0$ 时,下式成立

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p\leqslant c_p\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p,$$

式中

$$c_p=\begin{cases}\frac{1}{1-p}2^{(1-p)}, & -1<p<0,\\ \left(\frac{p}{p-1}\right)^p, & p\leqslant -1.\end{cases}$$ ([301]259(2001),219 ~ 225)

(12) 从(2.7)可推出:设 $a_n,b_n\geqslant 0$, $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}b_k\right)<pq\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

式中 p,q 是最佳常数.这只要取 $a_n=n^{-\frac{(1+\varepsilon)}{p}}$, $b_n=n^{-\frac{(1+\varepsilon)}{q}}$ (ε 是充分小的正数)即可看出.

(13) 设 $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $q_n>0$, $Q_n=\sum_{k=1}^{n}q_k$, $a_n\geqslant 0$, $A_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$, 则

① 若 $f^{\frac{1}{p}}$ 是凸函数,则

$$\sum_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}A_n\right)\leqslant q\sum_{n=1}^{\infty}[f(a_n)]^{\frac{1}{p}}\left[f\left(\frac{1}{n}A_n\right)\right]^{\frac{1}{q}}\leqslant q^p\sum_{n=1}^{\infty}f(a_n);$$

② 若 $f^{\frac{1}{p}}$ 是连续的凸函数,$\{q_n\}$ 是正的递减数列,则

$$\sum_{n=1}^{\infty}q_nf\left(\frac{1}{n}A_n\right)\leqslant q\sum_{n=1}^{\infty}q_n[f(a_n)]^{\frac{1}{p}}\left[f\left(\frac{1}{n}A_n\right)\right]^{\frac{1}{q}}\leqslant q^p\sum_{n=1}^{\infty}q_nf(a_n);$$

③ 若 $f^{\frac{1}{p}}$ 是连续的凸函数,则

$$\sum_{n=1}^{\infty}q_nf\left(\frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n}q_ka_k\right)\leqslant q\sum_{n=1}^{\infty}q_n[f(a_n)]^{\frac{1}{p}}\left[f\left(\frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n}q_ka_k\right)\right]^{\frac{1}{q}}\leqslant q^p\sum_{n=1}^{\infty}q_nf(a_n);$$

若加上 $\{q_k\}$ 递减的条件,则上式可改进为

$$\sum_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n}q_ka_k\right)\leqslant q\sum_{n=1}^{\infty}[f(a_n)]^{\frac{1}{p}}\left[f\left(\frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n}q_ka_k\right)\right]^{\frac{1}{q}}\leqslant q^p\sum_{n=1}^{\infty}f(a_n).$$

(Y. C. Chow,[317]14(1939),88 ~ 93)

(14) 加权 Hardy 型不等式.设 a_n, u_n, v_n 均为正数列, $A_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$, 其中 $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ 称为加权数列(是固定的).考虑使不等式

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}A_n^qu_n\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant C\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n^pv_n\right)^{\frac{1}{p}}\tag{2.11}$$

成立的充要条件,分为几种情形:设 $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$, 记

$$S_n = \sum_{k=n}^{\infty} u_k, \qquad \sigma_n = \sum_{k=1}^{n} v_k^{1-p'},$$

① 若 $1 < p \leqslant q < \infty$，则(2.11) 成立的充要条件是：

$$A_1 = \sup_n (S_n)^{\frac{1}{q}}(\sigma_n)^{\frac{1}{p'}} < \infty \quad 或 \quad A_2 = \sup_n (\sigma_n)^{-\frac{1}{p}}\Big(\sum_{k=1}^{n} u_k \sigma_k^q\Big)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

或 $$A_3 = \sup_n S_n^{-\frac{1}{q}}\Big(\sum_{k=n}^{\infty} v_k^{1-p'} S_k^{p'}\Big)^{\frac{1}{p'}} < \infty.$$

② 若 $0 < p \leqslant 1$，$p \leqslant q < \infty$，则(2.11) 成立的充要条件是：

$$A_4 = \sup_n (S_n^{\frac{1}{q}}) v_n^{-\frac{1}{p}} < \infty.$$

③ 若 $1 < p < \infty, 0 < q < p$，$\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$，则(2.11) 成立的充要条件是：

$$A_5 = \sum_{n=1}^{\infty} \{u_n S_n^{\frac{r}{p}} \sigma_n^{\frac{r}{p'}}\} < \infty.$$

④ 若 $q < p = 1$，则(2.11) 成立的充要条件是

$$A_6 = \sum_{n=1}^{\infty} \{u_n S_n^{\frac{q}{1-q}} (\max_{1\leqslant k\leqslant n} v_k^{\frac{q}{q-1}})\} < \infty.$$

⑤ 若 $0 < q < 1 < p < \infty$，$\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$，则(2.11) 成立的充要条件是：

$$A_7 = \Big\{\sum_{n=1}^{\infty} S_n^{\frac{r}{q}} \sigma^{\frac{r}{q'}} v_n^{1-p'}\Big\}^{\frac{1}{r}} < \infty.$$

详见[168] 第 6 章. 我们问：(2.11) 式中 C 的最佳值是多少？

38. **Carleman 不等式：**

设 $a_n \geqslant 0, n = 1,2,\cdots, \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} \leqslant e \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{2.12}$$

仅当所有 $a_n = 0$ 时等号成立，其中系数 e 不能再改进.

证 1　从 Hardy 不等式，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^{1/p}\Big)^p \leqslant \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

令 $p \to \infty$，并利用几何—算术平均不等式 $G_n(a) \leqslant A_n(a)$　以及　$\lim_{p\to\infty}\Big(1 + \frac{1}{p-1}\Big)^p = e$，即可得证.

证 2　$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \cdot \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n}$$

$$< e\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n(n+1)} = e\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Big(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{n}{k(k+1)}\Big) = e\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

系数 e 不能再改善，这只要考虑

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & (n \leqslant N), \\ 0, & (n > N), \end{cases} \qquad 则 \qquad \sum_n a_n \sim \ln N.$$

又由 Stirling 公式：$(a_1a_2\cdots a_n)^{1/n}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}\sim\dfrac{e}{n}$，于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_1a_2\cdots a_n)^{1/n}\sim e\ln N$.

注 Carleman 不等式的有限和形式见第 3 章 No. 111. 积分形式见第 13 章 No. 4. 该不等式已有许多改进和推广，例如：

(1) 设 $a_n>0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n<\infty$，令 $M_n=\max\{(ka_k)^{1/2}:1\leqslant k\leqslant n\}$，$m_n=\min\{(ka_k)^{1/2}:1\leqslant k\leqslant n\}$，则

$$\frac{1}{e}\sum_{n=1}^{\infty}(a_1a_2\cdots a_n)^{1/n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(M_n-m_n)^2}{n(n+1)}<\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

(Alzer, H. , [327], 1998, 95: 497 ～ 499)

(2) 从第 3 章 No. 111. 式，取 $\forall q_k=1$，并令 $n\to\infty$，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\prod_{k=1}^{n}a_k\Big)^{1/n}<e\sum_{n=1}^{\infty}\Big[1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{(n+1)^k}\Big]a_n,$$

式中 $$b_1=\frac{1}{2},\ b_{n+1}=\frac{1}{n+1}\Big(\frac{1}{n+2}-\sum_{n=1}^{n}\frac{b_k}{n+2-k}\Big).\quad(\text{匡继昌})\tag{2.13}$$

它是杨必成 -Debnath, L. 的结果：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\prod_{k=1}^{n}a_k\Big)^{1/n}<e\sum_{n=1}^{\infty}\Big[1-\frac{1}{2(n+1)}\Big]a_n$$

([301]1998, 223: 347 ～ 353) 等一系列结果的改进.

(3) 设 $\{a_n\}$ 是正的递减数列，$x_n\geqslant0$，$p>0$，$\alpha\geqslant1$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha-1}a_n\Big[\prod_{k=1}^{n}x_k^{k^p-(k-1)^p}\Big]^{\frac{1}{n^p}}\leqslant e^{\alpha/p}\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha-1}a_nx_n,$$

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n}=\infty$，则 $e^{\alpha/p}$ 是最佳常数.

(Russell, L. E. Inequalities (Birminghan). 1987, 135 ～ 141, MR92i: 26016).

(4) 设 f,g 是 $(0,1)$ 上正的可积函数，$\{\alpha_n\}$ 是严格递增数列，$\alpha_0=0$，令 $\beta_{m,n}=\alpha_n/\alpha_m$，$\omega_{m,n}=\int_{\beta_{m,n-1}}^{\beta_{m,n}}f(t)\mathrm{d}t$，$\lambda_n>0$，若 $\sum\limits_{m=n}^{\infty}\Big(\dfrac{\lambda_m}{\lambda_n}\Big)\int_{\beta_{m,n-1}}^{\beta_{m,n}}\dfrac{f(t)}{g(t)}\mathrm{d}t\leqslant c\int_0^1f(t)\mathrm{d}t$，则

$$\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_mG_w(x_m)\leqslant cG_f[g(1)]\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_mx_m,$$

式中 $x_n\geqslant0$，$G_w(x_m)=\exp\left(\dfrac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\omega_{m,n}\ln x_n}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\omega_{m,n}}\right)$；$G_f[g(1)]=\exp\left(\dfrac{\int_0^1f(t)\ln g(t)\mathrm{d}t}{\int_0^1f(t)\mathrm{d}t}\right)$.

(文献与(3)同)

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big(\prod\limits_{k=1}^{n}a_k\Big)^{\frac{1}{n}}<\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big(1-\dfrac{1}{2nc+\frac{4}{3}c+\frac{1}{2}}\Big)^{C}a_n$， 式中 $c\geqslant\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

(朱灵, [302]2007: 84104)

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant e\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{c}{n+13c}\right)a_n$, 式中 $c=2.739$.

(张小明,许谦,[351]2009(3):259 ~ 267)

(7) 设 $\alpha=\frac{1}{\ln 2}-1\approx 0.442695\cdots$, $a_k>0$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(n+1)^{\alpha}\prod_{k=1}^{n}a_k\right\}^{\frac{1}{n}}\leqslant e\sum_{k=1}^{\infty}a_k.$$

(金小萍,[351]2008(4):482 ~ 487)

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{d}{n+c}\right)\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^{\frac{1}{n}}\right\}\leqslant e\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, 式中

$$c=\frac{\left[2\sqrt{2}-\left(\frac{3}{2}\right)\right]e-3}{\left[\left(\frac{3}{2}\right)-\sqrt{2}\right]e}\approx 2.62033\cdots,\qquad d=\frac{(e-2)(\sqrt{2}e-3)}{(3-2\sqrt{2})e}\approx 1.300208\cdots.$$

(张小明,褚玉明,[351]2008(3):262 ~ 266)

39. **Van der corput 不等式**:设 $a_n\geqslant 0, S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$,则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}a_k^{1/k}\right)^{1/S_n}\leqslant e^{1+c}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_n.$$

式中 c 为 Euler 常数. 2001 年,胡克改进为:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}a_k^{1/k}\right)^{1/S_n}\leqslant e^{1+c}\sum_{n=1}^{\infty}\left(n-\frac{1}{4}\ln n\right)a_n.$$

([340]2003,23(1):126 ~ 128)

(1) 2009 年,张小明、褚玉明将上述胡克结果中的分母 4 改进为 20/9,并进一步猜想可改进为 2.([351]2009(1):1 ~ 8)2010 年,张小明等又证明当 $a_n>0$ 时,有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}a_k^{\frac{1}{k}}\right)^{\frac{1}{S_n}}<\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(1+c-\frac{\lambda}{n}\right)\left(n-\frac{\ln n}{2}\right)a_n,$$

式中 c 是 Euler 常数, $\lambda=1+c-\ln 3=0.4786033\cdots$. ([351]2010(1):71 ~ 76)

(2) 2005 年,杨必成证明,设 $\alpha\in[0,1]$, $S_n(\alpha)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}$, $a_n\geqslant 0$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}a_k^{k^{-\alpha}}\right)^{S_n(\alpha)^{-1}}<e^{\frac{1}{1-\alpha}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2(n+1)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}a_n.$$

(Taiwanse J. Math. 9(2005),143 ~ 150)

(3) 2007 年,杨必成又证明,设 $\alpha\in(-1,\infty)$, $\sigma_n(\alpha)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+\alpha}$, $a_n\geqslant 0$, $0<\sum_{n=1}^{\infty}(n+1+\alpha)a_n<\infty$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\prod_{k=1}^{n}a_k^{\frac{1}{k+\alpha}}\right]^{\frac{1}{\sigma_n(\alpha)}}<e^{1+c(\alpha)}\sum_{n=1}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}+\alpha\right)a_n,$$

式中

$$c(\alpha)=\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+\alpha}-\ln(n+\alpha)\right\}.$$

(Chin. Quart. J. Math. 22(2007),94 ~ 98)

40. **加权 Hardy 不等式**:设 $a_k \geqslant 0, q_k > 0, Q_n = \sum_{k=1}^{n} q_k, \sigma_n = \sum_{k=n}^{\infty} q_k, S_n = \sum_{k=1}^{n} q_k a_k$, $p > 1$,则

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty} q_n \left(\frac{S_n}{Q_n}\right)^p \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty} q_n a_n^p, \tag{2.14}$$

仅当 $\forall a_n = 0$ 时等号成立.

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty} q_n \left(\prod_{k=1}^{n} a_k^{q_k}\right)^{\frac{1}{Q_n}} \leqslant e \sum_{n=1}^{\infty} q_n a_n, \tag{2.15}$$

仅当 $\forall a_n = 0$ 时等号成立,特别 $\forall q_n = 1$ 时,得到 **Carleman 不等式.**

([1]278,定理 332;288,定理 349)

(3) 1998 年,杨必成在附加条件 $0 < q_{n+1} \leqslant q_n$ 下,将(2.15) 式改进为:

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_{n+1} \left(\prod_{k=1}^{n} a_k^{q_k}\right)^{\frac{1}{Q_n}} \leqslant e \sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{q_n}{2(Q_n + q_n)}\right] q_n a_n.$$

([301]1999,234:717 ~ 722. 进一步改进见[301]252(2000),994 ~ 998 和[302] 2007: 84140)

(4) 从第 3 章(111.2) 式令 $n \to \infty$ 然后将原式中 k 换成 n,得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_{n+1} \left(\prod_{k=1}^{n} a_k^{q_k}\right)^{\frac{1}{Q_n}} \leqslant e \sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_n^k b_k}{(Q_n + q_n)^k}\right] q_n a_n,$$

式中$\{b_n\}$ 由本节(2.13) 式定义.

(5) $$\sum_{n=1}^{\infty} q_n \left(\prod_{k=1}^{n} a_k^{q_k}\right)^{\frac{1}{Q_n}} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n^2}{Q_n} \left(\prod_{k=1}^{n} a_k^{q_k}\right)^{\frac{1}{Q_n}} < e \sum_{n=1}^{\infty} q_n a_n.$$

特别地,$\forall q_k = 1$ 时 $Q_n = n$,得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} < e \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

(Alzer. H. ,Port. Math. 1993,50(3):331 ~ 334)

注 设 $f(k_1, k_2)$ 为二元非负数列,定义二维离散 Hardy 算子 T 为:

$$(Tf)(n_1, n_2) = \sum_{k_1=1}^{n_1} \sum_{k_2=1}^{n_2} f(k_1, k_2).$$

2000 年,Rakotondratsimba,Y. 考虑了二维离散 Hardy 不等式:

$$\left\{\sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} [(Tf)(n_1, n_2)]^q g(n_1, n_2)\right\}^{1/q} \leqslant C \left\{\sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} [f(n_1, n_2)]^p g(n_1, n_2)\right\}^{1/p},$$

式中 $1 < p \leqslant q < \infty$. ([391]2000,86(3):213 ~ 236)

41. $$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{-1}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi(a_k)\right) < K(\varphi) \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

特别,取 $\varphi(x) = x^p, (0 < p < 1)$,即得 Hardy 不等式,取 $\varphi(x) = \ln x$,即得 Carleman 不等式. 关于 φ 的条件的讨论见[354]1929,30:387 ~ 413 或[1]292. 1995 年,Jozsef,N. 考虑了加权形式不等式:

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n\varphi\left(\frac{a_n}{q_n}\sum_{k=n}^{\infty} q_k\right)\leqslant M\sum_{n=1}^{\infty} q_n\varphi\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right).$$

([369]1995,60(3 ~ 4):571 ~ 579)

42. **Hilbert 不等式:** 设 $a_n, b_n \geqslant 0, 1 < p < \infty, 1/p + 1/q = 1$,

$\| a \|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p\right)^{1/p}$, $\| b \|_q = \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q\right)^{1/q}$, $0 < \| a \|_p < \infty, 0 < \| b \|_q < \infty$,则

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n} < \frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\| a \|_p \| b \|_q. \tag{2.16}$$

(1) Hilbert 在他的积分方程课程中证明(2.16)式中 $p = 2$ 的情形,但没有考虑常数的精确性. 1908 年由 Weyl,H. 发表(2.16)式当 $p = 2$ 时的证明,1911 年 Schur 找到(2.16)式中 $p = 2$ 时的精确常数 $c = \pi$. 1925 年 Hardy 与 Riesz 证明了(2.16)式的积分类似(第 13 章 No.2.). 此后,许多著名数学家如 Fejer(1921),Framcis, Littlewood(1928),Hardy(1920),Hardy-Littlewood-Polya(1926),Mulholland(1928, 1931),Owen(1930),Polya 和 Szëgo,Schur(1911),Wiener(1910) 等都作出过贡献. 为此, Hardy 等在[1]中用了专门一章(第 9 章)讨论 Hilbert 不等式及其类似情形和各种推广. [21]第 5 章则总结了到 20 世纪 90 年代为止的研究成果,引用了 59 篇文章. Hilbert 不等式的有限和形式见第 3 章 No. 157,积分形式见第 13 章 No. 2,下面仅介绍无穷级数形式的 Hilbert 不等式的新的研究成果.

(2) 1990 年,徐利治教授通过引入权系数 $\omega(r,n)$ 证明(2.16)式中的系数仍可减少,即可将(2.16)式写成如下形式:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n} < \left(\sum_{n=1}^{\infty}\omega(q,n)a_n^p\right)^{1/p}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\omega(p,n)b_n^q\right)^{1/q}, \tag{2.17}$$

式中 $\omega(r,n) = \frac{\pi}{\sin(\pi/p)} - \varphi(r,n), \varphi(r,n) > 0, r = p$ 或 q,经过不断改进,杨必成、高明哲证明了 $\varphi(r,n) = \frac{1-c}{n^{1-1/r}}$,式中 c 为 Euler 常数. 证明的关键是证明本节 No. 2.

([339]1990,10(4):500; [342]1991,1:75 ~ 77; [335]1997,26(2):156 ~ 164; [308]1998,126(3):751 ~ 759 等). 杨必成 -Debnath,L. 证明

$$\varphi(q,n) = \frac{1}{2n^{1/p} + n^{-1/q}}.$$

([326]1998,21(2):403 ~ 408)

(3) 高明哲通过对内积空间中 Schwarz 不等式的改进(第 1 章 §2 三. No. 5),证明

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n} < \pi\sqrt{1-r}\,\| a \|_2 \| b \|_2,$$

式中 $S(a) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}, r = \frac{1}{\pi^2}\left[\left(\frac{s(a)}{\| a \|_2}\right)^2 + \left(\frac{s(b)}{\| b \|_2}\right)^2\right]$.

([390]1990,18(4):1117 ~ 1122)

(4) 设 $a_n, b_n \geqslant 0$, $\| a \|_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2\right)^{1/2}$, $\| ab \|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$,则

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n-1}\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{2}}\{(\|a\|_2\|b\|_2)^2+(\|ab\|_1)^2\}^{1/2}.$$

(Zhang Kewei,[301]2002,271(1):288 ～ 296)

(5)　2001 年,胡克证明:设 $\lambda\notin Z$,则

$$\left|\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m-n-\lambda}\right|^2+\left|\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n-\lambda}\right|^2\leqslant\left(\frac{\pi}{\sin\lambda\pi}\right)^2\|a\|_2^2\|b\|_2^2$$
$$-\|b\|_2^2\left|\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{m-\lambda}\right|^2.$$ ([356]2002,22(2):1 ～ 6)

(6)　洪勇证明:设 $a_n,b_n\geqslant 0,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,p>1,\alpha\geqslant 1,1-\frac{1}{\alpha r}<\beta\leqslant 1,r=p,q$,则

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{(m^\alpha+n^\alpha)^\beta}\leqslant\left[\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n(q,\alpha,\beta)a_n^p\right]^{1/p}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n(p,\alpha,\beta)a_n^q\right]^{1/q},$$

式中 $\omega_n(r,\alpha,\beta)=n^{\alpha(1-\beta)}\dfrac{\Gamma(1-\frac{1}{\alpha r})\Gamma(\beta+\frac{1}{\alpha r}-1)}{\Gamma(\beta)}-\dfrac{1/8}{n^{\alpha\beta-(1/r)}}$. ([344]2002,32(5):849 ～ 854)

(7)　1936 年,Ingham 证明:设 $a_n\geqslant 0,\|a\|_2=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n^2\right)^{1/2},0<\|a\|_2<\infty,\lambda>0$,则

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_m a_n}{m+n+\lambda}\leqslant M(\lambda)\|a\|_2^2.$$

式中 $0<\lambda\leqslant\frac{1}{2}$ 时 $M(\lambda)=\dfrac{\pi}{\sin(\lambda\pi)}$,$\lambda>\frac{1}{2}$ 时 $M(\lambda)=\pi$. ([317]1936,11:237 ～ 240)

(8)　设 X 为复内积空间,$a_n,b_n\in X$,λ 为实数.

$$\|a\|_2=\left(\sum_{k\in Z}\|a_k\|^2\right)^{1/2}<\infty,\ \|b\|_2=\left(\sum_{k\in Z}\|b_k\|^2\right)^{1/2}<\infty.$$

(a_n,b_m) 为 a_n,b_m 的内积,则

$$\left|\sum_{m,n\in Z}\frac{(a_m,b_n)}{m-n+\lambda}\right|\leqslant\frac{\pi}{|\sin(\pi\lambda)|}\|a\|_2\|b\|_2.$$

(Redheffer,R. M. 等,Mh. Math. 1983,95:137 ～ 148)

(9)　设 $a_n,b_n\geqslant 0$,则

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{\ln(m+n)}\leqslant c\left(\sum_{n=1}^{\infty}na_n^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}nb_n^2\right)^{1/2},$$

式中 $0<c<4e$,上式右边两个级数收敛. ([21]201) 我们问:c 的最佳值是多少?

(10)　2000 年,匡继昌-Debnath,L. 在研究了 Hilbert 不等式的各种参数推广的本质特征后,考虑了一般形式的二重级数 $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}K(m+\lambda,n+\lambda)a_m b_n$ 的估计:

定理 1　设 $a_n,b_n\geqslant 0,1<p<\infty,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\frac{1}{2}\leqslant\lambda\leqslant\frac{1}{2}\min\{p,q\},0<\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)^{1-t}a_n^p<\infty,0<\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)^{1-t}b_n^q<\infty$,$K(x,y)$ 为 $(-t)$ 阶非负齐次函数,$t>0$,$K(1,$

$y)$ 在 $(0,\infty)$ 上有 4 阶连续导数，且 $(-1)^n K^{(n)}(1,y) \geqslant 0, n=0,1,2,3,4, K^{(m)}(1,y)y^{-\frac{2\lambda}{r}} \to 0, y\to\infty, m=0,1,, I(r,\lambda)=\int_0^\infty K(1,u)u^{-\frac{2\lambda}{r}}du < \infty, r=p,q$，则

$$\sum_{m=0}^\infty\sum_{n=0}^\infty K(m+\lambda,n+\lambda)a_m b_n < \left\{\sum_{m=0}^\infty [I(q,\lambda)-\varphi(q,m,t,\lambda)](m+\lambda)^{1-t}a_m^p\right\}^{1/p}$$
$$\times\left\{\sum_{n=0}^\infty [I(p,\lambda)-\varphi(p,n,t,\lambda)](n+\lambda)^{1-t}b_n^q\right\}^{1/q},$$

式中 $\varphi(r,n,t,\lambda)=\left(\dfrac{\lambda}{n+\lambda}\right)^{1-\frac{2\lambda}{r}}$

$$\times\left\{K\left(1,\frac{\lambda}{n+\lambda}\right)\left[\frac{1}{1-\frac{2\lambda}{r}}-\left(\frac{1}{2\lambda}\left(1+\frac{1}{3\lambda}\right)\right)\right]-\frac{1}{24\lambda(n+\lambda)}K'\left(1,\frac{\lambda}{n+\lambda}\right)\right\}>0.$$

$r=p,q$. 当 $0<\lambda<1/2$ 时，也得到了相应的结果，特别地，有

$$\sum_{m=0}^\infty\sum_{n=0}^\infty\frac{a_m b_n}{m+n+1}<\left\{\sum_{m=0}^\infty\left[\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}-\frac{1}{2(2m+1)^{1/p}}\left(p+\frac{1}{3p}-\frac{4}{3}\right)\right]a_m^p\right\}^{1/p}$$
$$\times\left\{\sum_{n=0}^\infty\left[\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}-\frac{1}{2(2n+1)^{1/q}}\left(q+\frac{1}{3q}-\frac{4}{3}\right)\right]b_n^q\right\}^{1/q}.$$

(证明和有关应用详见[301]2000,245:248 ~ 265)

(11) 2003 年，匡继昌-Debnath, L. 研究了 Hilbert 不等式及其反向不等式的一般形式：设 $a_n, b_n \geqslant 0, \alpha_n, \beta_n > 0, 1/p+1/q=1, N<\infty$ 或 $N=\infty$，令

$$f_N(x)=e^{-x}\sum_{m=0}^N a_m\frac{x^{\alpha_m-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\alpha_m+(1/2))}, g_N(x)=e^{-x}\sum_{n=0}^N b_n\frac{x^{\beta_n-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\beta_n+(1/2))}.$$

若 $1<p<\infty$，则

$$\sum_{m=0}^N\sum_{n=0}^N\frac{a_m b_n}{\alpha_m+\beta_n}\leqslant\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\|f_N\|_p\|g_N\|_q.$$

若 $0<p<1$，则不等号反向.

特别当 $\alpha_m=m+(1/2), \beta_n=n+(1/2)$，得到

$$\sum_{m=0}^N\sum_{n=0}^N\frac{a_m b_n}{m+n+1}\leqslant\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\|f_N\|_p\|g_N\|_q\leqslant\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\|a\|_p\|b\|_q.$$

([365]31(2005),163 ~ 173)

(12) 设 $a_n, b_n \geqslant 0$, $p>1$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, $0<\lambda_1<q$, $0<\lambda_2<p$, 则

$$\sum_{m=1}^\infty\sum_{n=1}^\infty\frac{a_m b_n}{m^{\lambda_1}+n^{\lambda_2}}<\frac{\pi}{\lambda_1^{\frac{1}{q}}\lambda_2^{\frac{1}{p}}\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}\left\{\sum_{n=1}^\infty n^{(p-1)(1-\lambda_1)}a_n^p\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\sum_{n=1}^\infty n^{(q-1)(1-\lambda_2)}b_n^q\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

(徐景实,[335]36(2)(2007),189 ~ 202)

(13) $$\sum_{m=0}^\infty\sum_{n=0}^\infty\frac{a_m a_n\cos\frac{1}{2}(m-n)\theta}{m+n+1}\leqslant\frac{\pi}{\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}}\sum_{n=0}^\infty a_n^2.$$

若限制 $m+n$ 是偶数，则上式可改进为

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_m a_n\cos\frac{1}{2}(m-n)\theta}{m+n+1}\leqslant\frac{\pi}{2\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)}\sum_{n=0}^{\infty}a_n^2.$$

它是第 9 章 §2 五 No. 55 的推论，原文见[317]7(3)(1932)，208 ~ 214.

它为我们用复分析方法研究 Hilbert 不等式打开了一条新的思路.

我们要问：上述不等式中的常数是否为最佳？

(14) 设 $p>1$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$a=(a_1,\cdots,a_n,\cdots)$，$\|a\|_p=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$，则

① $$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log\left(\frac{m}{n}\right)}{m-n}a_m b_n<\left(\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}\right)^2\|a\|_p\|b\|_q.$$

② $$\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_m b_n}{mn\log(mn)}<\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{b_n^q}{n}\right)^{\frac{1}{q}}.$$ ([1] 定理 342,343)

注 $\left|\sum_{m\neq n}\frac{a_m b_n}{m-n}\right|<\pi\|a\|_2\|b\|_2$ 在素数理论中有重要应用.

43. 设 $f\in L^2(0,1)$，$f(x)\neq 0$，$0<x<1$，$0<\int_0^1 f^2<\infty$，$a_n=\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x$ 称为 f 在 $(0,1)$ 中的矩，则

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n^2<\pi\int_0^1 f^2. \tag{2.18}$$

(证明用 Hilbert 不等式，详见[1]267 ~ 268)

利用 Hilbert 不等式的改进，高明哲对(2.18) 式改进为

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n^2\right)^2<\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\pi-\frac{\theta(n)}{\sqrt{2n+1}}\right)a_n^2\right\}\int_0^1 f^2.$$

式中 $\theta(n)>0$. ([301]1997，212：316 ~ 323)

杨必成则进一步求出 $\theta(n)=\frac{1}{10(2n+1)}$，并进一步证明，当 $p\geqslant 2$ 时，下式成立

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n^p\right)^{(1+\frac{1}{p})}<\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{p(p-1)}\right\}^{1/p}\int_0^1 f^2.$$

([341]2000，16(3)：279 ~ 286. 另见[164]63 ~ 65)

44. **Littlewood 不等式**：1967 年，Littlewood 提出，是否存在绝对非负常数 C_1，C_2，使得 $\forall a_n\geqslant 0$，下式成立

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^3\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2S_k\right)\leqslant C_1\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^4S_n^2). \tag{2.19}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nS_n^2\left(\sum_{k=n}^{\infty}a_k^{3/2}\right)^2\leqslant C_2\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2S_n^4). \tag{2.20}$$

式中 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$. ([5]I(1967)：151 ~ 162)

(1)　1987 年，Bennet，G. 证明：

定理 1　设 $p,q,r\geqslant 1,a_n\geqslant 0$，则

$$\sum_{m=1}^{n}a_m^pS_m^q\Big(\sum_{k=m}^{n}a_k^{1+\frac{p}{q}}\Big)^r\leqslant\Big(\frac{p(q+r)-q}{p}\Big)^r\sum_{k=1}^{n}(a_k^pS_k^q)^{1+\frac{r}{q}}.\tag{2.21}$$

特别地，取 $p=2,q=r=1$，得到(2.19) 式，其中 $C_1=3/2$；

取 $p=1,q=r=2$，得到(2.20) 式，其中 $C_2=4$.

定理 2　设$\{a_k\}$是非负递增数列，$p\geqslant 1,q,r>0,d=\dfrac{p(q+r)-q}{p}\geqslant N$，则

$$\sum_{m=1}^{n}a_m^pS_m^q\Big(\sum_{k=m}^{n}a_k^{1+\frac{p}{q}}\Big)^r\leqslant\prod_{k=0}^{N-1}(d-k)^{r/N}\sum_{k=1}^{n}(a_k^pS_k^q)^{1+\frac{r}{q}}.\tag{2.22}$$

若 $N=1$，则$\{a_n\}$递增的条件可去掉.

定理 3　设 $p,q\geqslant 1,a_n\geqslant 0$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^pS_n^q)\Big(\sum_{k=n}^{\infty}a_k^r\Big)^2\leqslant c(p,q)\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^pS_n^2)^2.\text{ 式中 } r=1+\frac{p}{q}.$$

还不知道 $c(p,q)=[(2p-1)(q/p)]^2$ 是否为最佳常数？

([308]1987,100(3):474 ～ 476;[320]1987,2:401 ～ 425)

(2)　1996 年，Alzer，H. 在附加条件 $0\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$ 下，证明

$$\sum_{m=1}^{n}a_mS_m^2\Big(\sum_{k=m}^{n}a_k^{3/2}\Big)^2\leqslant 2\sum_{k=1}^{n}a_k^2S_k^4.$$

即将(2.20) 中 $C_2=4$ 改进为 $C_2=2$.([301]1996,199(2):403 ～ 408)

(3)　1998 年，成礼智等将(2.22) 式的 $r>0$ 缩小到 $0\leqslant r\leqslant 1$，$p\geqslant 1$ 扩大到 $p>0$，得到：

定理 4　设$\{a_n\}$是非负递增数列，$p,q>0,0\leqslant r\leqslant 1,p(q+r)\geqslant p+q$，则

$$\sum_{m=1}^{n}a_m^pS_m^q\Big(\sum_{k=m}^{n}a_k^t\Big)^r\leqslant\sum_{k=1}^{n}(a_k^pS_k^q)^{1+\frac{r}{q}},\text{式中 } t=1+\frac{p}{q}.$$

(4)　设 $p,q\geqslant 1,r>0,a_n\geqslant 0,r(p-1)\leqslant 2(q-1)$.

记 $\alpha=\dfrac{(p-1)(q+r)+p^2+1}{p+1},\beta=\dfrac{2q+2r+p-1}{p+1},\delta=\dfrac{q+r-1}{p+q+r}$，则

$$\sum_{m=1}^{n}a_m^p\sum_{k=1}^{m}a_k^qS_k^r\leqslant 2^\delta\sum_{k=1}^{n}a_k^\alpha S_k^\beta.$$

特别取 $p=3,q=2,r=1$，得到

$$\sum_{m=1}^{n}a_m^3\Big(\sum_{k=1}^{n}a_k^2S_k\Big)\leqslant\sqrt[3]{2}\sum_{k=1}^{n}a_k^4S_k^2.$$

即将(2.19) 式中 $C_1=3/2$ 改进为 $C_1=\sqrt[3]{2}$.([344]1998,28(4):314 ～ 319)

(5)　广义 Littlewood不等式：设(x_{ki})，(a_{ij})为实矩阵，$|t_i|\leqslant 1$，$|s_j|\leqslant 1$，且 $\forall m\in N$，$\Big|\sum_{i,j=1}^{m}a_{ij}t_is_j\Big|\leqslant M$；而 $\forall i\in N,x_i=(x_{1i},x_{2i},\cdots,x_{ni},\cdots)\in l^2$，即

$$\|x_i\|_2=\Big(\sum_{k=1}^{\infty}x_{ki}^2\Big)^{1/2}<\infty,\quad\text{则}\quad\sum_{j=1}^{\infty}\Big[\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{i=1}^{\infty}x_{ki}a_{ij}\Big)^2\Big]^{1/2}\leqslant CM\|x_i\|_2.$$

（证明见[104]180 ～ 181）

45.　**HB 型不等式(Hardy-Bennett 型不等式)**：设 $q=\{q_n\}$ 是正数列，令 $Q_n=\sum_{k=n}^{\infty}q_k$，$Q_1<\infty, p>0, c\geqslant 0$，定义两个序列空间：

$$q(p,c)=\{x=\{x_n\}:\|x\|_q<\infty\}, Q(p,c)=\{x=\{x_n\}:\|x\|_Q<\infty\},$$

式中 $\|x\|_q^p=\sum_{n=1}^{\infty}q_nQ_n^{-c}\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|\right)^p$，此处 $\|x\|_q$ 表示 $\|x\|_{q(p,c)}$；

$$\|x\|_Q^p=\sup_n\left\{Q_n^{(p-1)(1-c)}\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right\}，此处 \|x\|_Q 表示 \|x\|_{Q(p,c)}.$$

(1)　设 $p>0, 0\leqslant c<1$，若 $x\in q(p,c)$，则 $x=\{x_n\}$ 存在因子分解：$x=yz$，式中 $y=\{y_n\}, z=\{z_n\}, x=yz$ 表示 $x_n=y_nz_n$，满足：$y\in l^p$，即 $\|y\|_p=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^p\right)^{1/p}<\infty, z\in Q(q,c)$，其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，而且 $\inf\{\|y\|_p\cdot\|z\|_{Q(q,c)}\}\leqslant\|x\|_{q(p,c)}$. 此处下确界是对 x 的所有满足上述条件的分解取的.

(2)　反之，设存在 $\beta>0$，使得

$$n^\beta\sum_{k=n}^{\infty}q_kQ_k^{-c}\leqslant m^\beta\sum_{k=m}^{\infty}q_kQ_k^{-c}, 1\leqslant m\leqslant n.$$

且存在 $M>0$，使得 $\forall n\in N, n\geqslant 2$，下式成立

$$\sum_{k=2}^{n}k\left(\frac{q_{k-1}}{Q_k}\right)\leqslant Mn.$$

若 x 的因子分解满足(1)，则 $x\in q(p,c)$，而且存在正常数 $c=c(q,p,c)$，使得

$$\|x\|_{q(p,c)}\leqslant c\inf\{\|y\|_p\cdot\|z\|_{Q(q,c)}\},$$

式中 $(1/p)+(1/q)=1$. 若将上述 Q_n 换成 $S_n=\sum_{k=1}^{n}q_k$，也可得到类似的不等式.

(Leindler, L. ,[303]. 1998, 1(4): 517 ～ 526)

46.　(1)　**Bessel 不等式**：设 $A=\{e_k\}$ 是内积空间 X 中的标准正交系，则 $\forall x\in X$，$c_k=(x,e_k)$. $c=\{c_k\}\in l^2$ 且 $\|c\|_2=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2\right)^{1/2}\leqslant\|x\|$.

（证明可参看[118]201 ～ 202）

特别，当 $\{e_k\}$ 为三角函数系时，a_n, b_n 为 f 的 Fourier 级数，则 $\forall f\in L_{2\pi}^2$，下式成立

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2.$$

(2)　设 X 为内积空间，$x_1,\cdots,x_n\in X, c>0, \alpha_k$ 为复数，若

$$\left|\sum_{k,j=1}^{n}(x_k,x_j)c_k\overline{c_j}\right|\leqslant c\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2,$$

则　$\sum_{k=1}^{n}|(x,x_k)|^2\leqslant c\|x\|^2, \forall x\in X.$

(3)　设 X 为内积空间，$x_k, x, y\in X$，则成立 Schwarz 型不等式：

$$|\Gamma(x_1,\cdots,x_n)(x,y)|^2 \leqslant \Gamma(x,x_1,\cdots,x_n)\cdot\Gamma(y,x_1,\cdots,x_n).$$

((2)(3) 见 Dragomir,S. S. 等. Mathematica,1995,37(60)(1 ~ 2):93 ~ 102)

47. 设$\{\varphi_n(x)\}$为$[a,b]$上标准正交系,$|\varphi_n(x)|\leqslant M$ (M为常数),$f(x)$ 关于$\{\varphi_n\}$的正交级数为$\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k\varphi_k(x)$,$c=\{c_k\}$ 的 l^q 范数为 $\|c\|_q=\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}|c_k|^q\right)^{1/q}$.

$$\|f\|_p=\left(\int_a^b|f|^p\right)^{1/p}.$$

(1) **Riesz 不等式**:设 $f\in L^p[a,b]$,$1<p\leqslant 2$,$(1/p)+(1/q)=1$,则

$$\|c\|_q\leqslant M^{\frac{2-p}{p}}\|f\|_p;$$

反之,若 $c=\{c_k\}\in l^q$,$1<q\leqslant 2$,则存在 $f\in L^p[a,b]$,使得

$$\|f\|_p\leqslant M^{\frac{2-q}{q}}\|c\|_q.$$

特别当$\{\varphi_n(x)\}$为三角函数系时,上述不等式称为 **Hausdorff-Young 不等式**:$c_k=\hat{f}(k)$ 表示 f 的 Fourier 系数,若 $f\in L_{2\pi}^p$,$1<p\leqslant 2$,$(1/p)+(1/q)=1$.

令 $\|f\|_p=\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f|^p\right)^{1/p}$,$\|\hat{f}\|_q=\left(\sum\limits_{k\in Z}|\hat{f}(k)|^q\right)^{1/q}$,则 $\|\hat{f}\|_q\leqslant\|f\|_p$;

反之,若 $\hat{f}\in L_{2\pi}^q$,则存在 $f\in L_{2\pi}^p$,使得 $\hat{f}(k)=c_k$ 为 f 的 Fourier 系数,且

$$\|f\|_p\leqslant\|\hat{f}\|_q.$$

(2) 设 $f\in L^p[a,b]$,$1<p<2$,则存在正常数 c,使得

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2\cdot k^{(1-\frac{2}{p})}\leqslant c\|f\|_p^2.$$

反之,设 $q\geqslant 2$,且序列 $c=\{c_k\}$ 满足

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2k^{(1-\frac{2}{q})}=M<\infty.$$

则存在 $f\in L^q[a,b]$,使得 c_k 恰好是 f 关于$\{\varphi_n\}$ 的 Fourier 系数,即 $c_k=c_k(f)$,而且

$$\|f\|_q^2\leqslant M.$$

(Ilin,V. A. ,Mat. Inst. Steklova,1997,219:211 ~ 219)

(3) **Paley 不等式**:设将$\{|c_k|\}$按递减顺序重排得到的数列记为$\{c_k^*\}$,若 $f\in L^p[a,b]$,$1<p\leqslant 2$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_n^*)^pn^{p-2}\leqslant c_p\int_a^b|f|^p$;当 $q\geqslant 2$ 时,若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_n^*)^qn^{q-2}<\infty$,则存在 $f\in L^q[a,b]$,使得

$$\int_a^b|f|^q\leqslant c_q\sum_{n=1}^{\infty}(c_n^*)^qn^{q-2}.$$

式中 c_p,c_q 分别是只与 p,q 有关的常数. 特别,当$\{\varphi_n\}$为三角函数系时,上述不等式称为 **Hardy-Littlewood 不等式**.(本章 §1 No. 66(14),[84]. Vol. 2:193)

48. 设 $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_ke^{ikx}$,$f\in L_{2\pi}$,则

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|c_k|}{k+1}\leqslant\pi\int_0^{2\pi}|f|.$$

([305]1984,91(4):263 ~ 264)

49. 设 $f(x)=\sum_{k\in Z}c_k e^{ixk}$,若 f 为绝对连续函数,且导函数 $f'\in L^2_{2\pi}$,则

(1) $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|\leqslant\|f\|_1+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\|f'\|_2$,　式中 $\|f'\|_2=\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f'|^2\right)^{1/2}$;

(2) $\sum_{k\in Z}|c_k|\leqslant|c_0|+\left(\frac{\pi}{6}\int_{-\pi}^{\pi}|f'(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}$,式中 $c_k=\hat{f}(k)$.

50. 设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a^{-n\beta}\cos a^n x$,$-\pi\leqslant x\leqslant\pi$,$a>1$,$0<\beta<1$,则对于 $t\geqslant 0$,有

$$|f(x+a^{-t})-f(x-a^{-t})|\leqslant Aa^{(1-\beta)[t]-t}+Ba^{-\beta[t]},$$

式中$[t]$为 t 的整数部分,A,B 为只依赖于 α,β 的常数.

提示:$f(x+a^{-t})-f(x-a^{-t})=-2\sum_{n=1}^{\infty}a^{-n\beta}\sin a^{n-t}\cdot\sin a^n x$,

于是

$$|f(x+a^{-t})|-|f(x-a^{-t})|\leqslant 2\sum_{n=1}^{[t]-1}a^{(1-\beta)n-t}+2\sum_{n=[t]}^{\infty}a^{-n\beta}$$
$$\leqslant Aa^{(1-\beta)[t]-t}+Ba^{-\beta[t]},$$

式中 $A=2(a^{1-\beta}-1)^{-1}$,$b=2(1-a^{-\beta})^{-1}$.([73]509 ~ 511)

51. 设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(\cos nx)/n^2$,$|x|\leqslant 2\pi$,则 $-\pi^2/12\leqslant f(x)\leqslant\pi^2/6$.

提示:用 Fourier 级数理论证明 $f(x)=x^2/4-|x|(\pi/2)+(\pi^2/6)$,然后求 f 在$[-2\pi,2\pi]$上的最大最小值.

52. 设 $0<x<\pi$,$-\pi<t<\pi$,$|t|\neq x$,$t\neq 0$,则

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}\cdot\frac{\sin[k-(1/2)]t}{2\sin(t/2)}>0;\qquad\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k^p}>0\ (p\geqslant 1).$$

53. 设 $0<x<\pi$,$0<t<\pi$,$t\neq x$,则

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}\cdot\frac{\cos(t/2)-\cos[k+(1/2)]t}{2\sin(t/2)}>0.$$

54. 设$\{a_n\}$是四次单调序列,即

$$\binom{k}{0}a_n-\binom{k}{1}a_{n+1}+\cdots+(-1)^k\binom{k}{k}a_{n+k}\geqslant 0,$$

$k=1,2,3,4$,则对于 $0<x<\pi$,有

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sin kx\leqslant\frac{a_1}{2}\mathrm{ctg}\,\frac{x}{2}.\ (\text{No. }52\sim 54\text{ 见[4]}359\sim 360)$$

55. **Lyness-Moler 不等式:**

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{\sin n\pi x}{n}\right)^{2m}\geqslant 0.$$

对于所有实数 x 及所有自然数 m 成立.(SIAM Review 1967,9:250;1969,11:82 ~ 86)可推广为:

(1) 设 $0 < x_k < \pi, 1 \leqslant m \leqslant N$, $\sum_{n=1}^{m}\prod_{k=1}^{N}\frac{\sin nx_k}{n} > 0$;

(2) $0 < x_k < \pi, N \geqslant 3$,则 $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\prod_{k=1}^{N}\frac{\sin nx_k}{n}\right) > 0$. ([383]1968,15:769)

56. 设 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{x}{4^n}$,则

(1) 当 $x > e$ 时,有 $|f(x)| < C_1\ln\ln x$,式中 $C_1 > 0$ 是与 x 无关的常数,可取 $C_1 = 2.1$.

(2) 存在序列 $\{x_n\}$, $1 < x_n < x_{n+1}$, $x_n \to \infty$,及常数 $C_2 > 0$,使得

$$|f(x_n)| > C_2\ln\ln x_n, n = 1,2,\cdots. \text{ 可取 } C_2 = 0.47.$$

证 (1) 对于 $x > e$,令 $m = [\ln x]$, $f(x) = \sum_{n\leqslant m}\frac{1}{n}\sin\frac{x}{4^n} + \sum_{n>m}\frac{1}{n}\sin\frac{x}{4^n} = S_1(x) + S_2(x)$, $S_1(x) < \sum_{n\leqslant m}\frac{1}{n} < 2\ln\ln x$, $S_2(x) < \sum_{n>m}\frac{x}{n4^n} < x\sum_{n>m}4^{-n} < C_3$.
从以上两式即可证得(1).

为证(2),只要取 $x_n = \frac{2\pi}{3}(4^n - 1)$,则 $\frac{x_n}{2\pi}$ 为整数,于是

$$f(x_n) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\frac{x_n}{4^k} = \left(\sum_{k=1}^{n} + \sum_{k=n+1}^{\infty}\right)\frac{1}{k}\sin\frac{x_n}{4^k} = S_3 + S_4,$$

再证明 $|S_3| > C_4\ln n$, $|S_4| < (2\pi)/9$. ([77]25)

57. 设区间 D 包含 O 点,f 在 D 上有 $n-1$ 阶连续导数,且 $f^{(n)}$ 存在,设 $x \neq 0$,令

$$\theta_n(x) = \sup\left\{\theta: 0 < \theta \leqslant 1, \text{且 } f(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n\right\}.$$

$\mathrm{L}_n(f) = \limsup_{x\to 0}\theta_n(x)$,则

$$\mathrm{L}_n(f) \geqslant \frac{1}{ne^c}(1 + o(1)),$$

式中 c 为 Euler 常数. (Ivanov, V. V. 等, Sibirsk. Mat. Zh. 1995, 36(1): 86 ~ 92).

58. **E-M 求和不等式(Euler-Maclaurin 求和不等式)**:设 $f \in C^{2m}[a,\infty)$,f 为 $2m$ 阶凸函数(定义见第 7 章 §1),且 $f^{(2k-1)}(x) \to 0 (x \to \infty)$, $k = \frac{1}{2}, 1, 2, \cdots, m-1$,$F$ 为 f 的原函数,且 $F(x) \to 0, (x \to \infty)$,则当 m 为奇数时,下式成立

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(x+k) \geqslant \frac{1}{2}f(x) - F(x) - \sum_{k=1}^{m-1}\frac{B_{2k}}{(2k)!}f^{(2k-1)}(x);$$

当 m 为偶数时,不等号反向. 式中 B_{2k} 为 Bernoulli 数. (Pecaric, J. 等, [368]1999, 41(1): 79 ~ 93)

2000 年,匡继昌与 Debnath 证明:设 $f \in C^4(0,\infty)$, $(-1)^n f^{(n)}(x) \geqslant 0$, $n = 0,1,2,3,4$, $f(x), f'(x) \to 0 (x \to \infty)$, 则

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(k) < \int_0^{\infty} f(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}f(0) - \frac{1}{12}f'(0) \tag{2.23}$$

证 利用 Euler-Maclaurin 求和公式

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) = \int_0^n f + \frac{1}{2}[f(n) + f(0)] + \frac{1}{12}[f'(n) - f'(0)]$$

$$+ \frac{1}{24}\int_0^n f^{(4)}(B_4 - B_4(x - [x]))\mathrm{d}x,$$

式中 B_k，$B_k(x)$ 分别是 Bernoulli 数和 Bernoulli 多项式.

因为 $B_4 = -\frac{1}{30}$，$B_4 - B_4(x - [x])$ 与 B_4 同号，所以，

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) < \int_0^n f + \frac{1}{2}[f(n) + f(0)] + \frac{1}{12}[f'(n) - f'(0)].$$

令 $n \to \infty$，即可证得(2.23) 式.([301]245(2000)，248 ～ 265)

徐利治[139] 指出："Euler-Maclaurin 公式是十分有力的解析工具，许多较为困难的问题，通过这个公式变得非常容易，而且结论也更为一般。"我们可以用简单的方法得出 Euler-Maclaurin 求和公式和相应的不等式：

设 $f' \in C[n,m]$，$n,m \in N$，作分部积分：

$$\int_n^m (x - [x])f'(x)dx = \sum_{k=n+1}^{m} \int_{k-1}^{k} (x - (k-1))df(x) = \sum_{k=n+1}^{m} f(k) - \int_n^m f(x)dx,$$ 从而

$$\sum_{k=n}^{m} f(k) = \int_n^m f(x)dx + f(n) + \int_n^m (x - [x])f'(x)dx$$

$$\int_n^m f(x)dx + \frac{1}{2}\{f(m) + f(n)\} + \int_n^m \overline{B}_1(x)f'(x)dx, \tag{2.24}$$

式中，$\overline{B_1}(x) = x - [x] - (1/2)$. 当 $0 < x < 1$ 时，$\overline{B_1}(x) = x - (1/2) = B_1(x)$.

我们用$\overline{B_n}(x)$ 表示在[0,1] 上与 Bernoulli 多项式 $B_n(x)$ 相重合并且以 1 为周期的函数. 若加上条件：$f^{(3)} \in C[n,m]$，又可对(2.24) 式右边的$\int_n^m \overline{B_1}(x)f'(x)dx$ 作分部积分，如此继续下去，就可得出

$$\sum_{k=n}^{m} f(k) = \int_n^m f(x)dx + \frac{1}{2}\{f(m) + f(n)\} + \frac{B_2}{2!}\{f'(m) - f'(n)\} + \frac{B_4}{4!}\{f^{(3)}(m) -$$

$$f^{(3)}(n)\} + \cdots\cdots + \frac{B_{2k}}{(2k)!}\{f^{(2k-1)}(m) - f^{(2k-1)}(n)\} + R_k, \tag{2.25}$$

式中，$R_k = \frac{1}{(2k+1)!}\int_n^m \overline{B}_{2k+1} f^{(2k+1)}(x)dx$，$B_k$ 是 Bernoulli 数. (2.25) 式称为 Euler-Maclaurin 求和公式. 注意到 $B_1 = -\frac{1}{2}$，$B_2 = \frac{1}{6}$，$B_4 = -\frac{1}{30}$，$B_6 = \frac{1}{42}$，$B_{2k+1} = 0$，$k = 1,2,3,\cdots\cdots$，$B_1(x) = x - (1/2)$，$B_2(x) = x^2 - x + (1/6)$，……，(本书第 6 章 §2 六) 于是，若 $f^{(3)} \in C[n,m]$，$(-1)^k f^{(k)}(x) > 0$，$k = 0,1,2,3$，则从(2.25) 式，$R_1 < 0$，从而

$$\sum_{k=n}^{m} f(k) < \int_n^m f(x)dx + \frac{1}{2}\{f(m) + f(n)\} + \frac{1}{12}\{f'(m) - f'(n)\}. \tag{2.26}$$

若加上条件：$f(\infty) = f'(\infty) = 0$，由(2.26)式得到

$$\sum_{k=n}^{\infty} f(k) < \int_{n}^{\infty} f(x)dx + \frac{1}{2}f(n) - \frac{1}{12}f'(n). \tag{2.27}$$

若 $f^{(5)} \in C[n,m]$，$(-1)^k f^{(k)}(x) > 0$，$k = 0,1,2,3,4,5$. 则从(2.25)式，$R_2 > 0$，从而

$$\sum_{k=n}^{m} f(k) < \int_{n}^{m} f(x)dx + \frac{1}{2}\{f(m) + f(n)\} + \frac{1}{12}\{f'(m) - f'(n)\}$$
$$- \frac{1}{720}\{f^{(3)}(x) - f^{(3)}(n)\}. \tag{2.28}$$

若加上条件：$f^{(k)}(\infty) = 0$，$k = 0,1,3$，则

$$\sum_{k=n}^{\infty} f(k) < \int_{n}^{\infty} f(x)dx + \frac{1}{2}f(n) - \frac{1}{12}f'(n) + \frac{1}{720}f^{(3)}(x). \tag{2.29}$$

可见，(2.27)与(2.29)成立的条件是不同的. 再注意到 R_k 的符号是 $(-1)^k$，可得出 Euler-Maclaurin 求和不等式的一般形式：

设 $f^{(4k+1)} \in C[n,m]$，$(-1)^j f^{(j)}(x) > 0$，$j = 0,1,2,\cdots\cdots,(4k+1)$，则

$$\frac{B_{4k}}{(4k)!}\{f^{(4k-1)}(m) - f^{(4k-1)}(n)\} < \sum_{k=n}^{m} f(k) - \{\int_{n}^{m} f(x)dx + \frac{1}{2}(f(m) + f(n))$$
$$+ \sum_{j=1}^{2k-1} \frac{B_{2j}}{(2j)!}(f^{(2j-1)}(m) - f^{(2j-1)}(n))\} < 0. \tag{2.30}$$

59. 设 $a_k > 0$，$0 < \sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{\sum_{k=1}^{n} a_k^{-1}}\right) < 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{3n + \left(\frac{1}{n}\right)}\right)a_n,$$

式中 2 是最佳常数.（杨必成，Soochow J. Math. 32(2006)，553 ~ 560）

60. 设 $0 < p < \infty$，$a_k > 0$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{\sum_{k=1}^{n} a_k^{-p}}\right)^{\frac{1}{p}} < (1 + p)^{\frac{1}{p}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

（Knopp 不等式，[317]1928(3)：205 ~ 211）

61. 设 $p \geqslant 1$，$\beta \geqslant 1$，$\alpha > 0$，$\alpha p > \beta$，$a_k \geqslant 0$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta-1}\left[n^{-\alpha}\sum_{k=1}^{n}(k^{\alpha} - (k-1)^{\alpha})a_k\right]^p \leqslant \left(\frac{\alpha p}{\alpha p - \beta}\right)^p \sum_{k=1}^{\infty} k^{\beta-1} a_k^p.$$

（Houston J. Math. 32(2006)，801 ~ 831）

62. Copson 不等式：设 $q_n, a_n > 0$，令

$$Q_n = \sum_{k=1}^{n} q_k, \qquad A_n = \sum_{k=1}^{n} q_k a_k \to \infty \quad (n \to \infty).$$

(1) 若 $1 < a \leqslant b$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n Q_n^{-a} A_n^b \leqslant \left(\frac{b}{a-1}\right)^b \sum_{n=1}^{\infty} q_n Q_n^{b-a} a_n^b;$$

(2) 若 $0 < b < 1 < a$, $0 < p \leqslant \frac{q_n}{q_{n+1}}$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n Q_n^{-a} A_n^b \geqslant \left(\frac{bp}{a-1}\right)^b \sum_{n=1}^{\infty} q_n Q_n^{b-a} a_n^b.$$

([317]3(1928):49 ~ 51)

63. Copson 不等式:设 $p > 1$, $a_n \geqslant 0$, $q_n > 0$, $Q_n = \sum_{k=1}^{n} q_k$, $\sum_{n=1}^{\infty} q_n a_n^p < \infty$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{q_k a_k}{Q_k}\right)^p \leqslant p^p \sum_{n=1}^{\infty} q_n a_n^p,$$

式中 p^p 是最佳常数,特别当 $q_n = 1$ 时,得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k}{k}\right)^p \leqslant p^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p.$$

([305]113(2006),715 ~ 732)

64. Hardy 型不等式:

(1) 设 $p > 1$, $\alpha > 0$, $\alpha p > 1$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} (k^\alpha - (k-1)^\alpha) a_k \right|^p \leqslant \left(\frac{p\alpha}{p\alpha - 1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p.$$

(2) 若 $p \geqslant 2$, $1 \leqslant \alpha \leqslant 1 + \frac{1}{p}$ 或 $1 < p \leqslant \frac{4}{3}$, $1 + \frac{1}{p} \leqslant \alpha \leqslant 2$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \left(\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha-1}\right)^{-1} \left(\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha-1} a_k\right) \right|^p \leqslant \left(\frac{p\alpha}{p\alpha - 1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p.$$

([301]343(2008),48 ~ 57)

65. 当 $p \geqslant 2$ 时 $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^p}$ 在$[0,\pi]$内是 x 的严格递减函数.

([317]14(1939):198 ~ 202)

66. 设 $\hat{f}(n)$ 是 Hardy 空间中 f 的一、二维 Ciesielski — Fourier 系数,则

$$\left(\sum_{n=2}^{\infty} n^{p-2} |\hat{f}(n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant C_p \| f \|_{H_p}, \quad 0 < p \leqslant 2.$$

([365]31(2005),217 ~ 233)

67. 设 $x_k > 0, p_k \geqslant 0$. 且 $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$. 若 $c \leqslant \sqrt{x_k} \leqslant c + a, k \geqslant 1$,则

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} p_k x_k - \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{x_k}\right)^{-1} \leqslant a^2.$$ ([305]116(10)(2009),E11469)

第十二章　微分不等式

我们在第六章已讨论了多项式的导数不等式，本章讨论一般函数的微分不等式，为了叙述方便，我们还讨论与之有关的连续模和最佳逼近不等式，这些不等式中，也涉及一些积分不等式.

§1　连续模不等式

一、　基本概念

设 Q 是赋范线性空间 $(X, \|\cdot\|)$ 中的凸集，则 f 的**连续模**定义为

$$\omega(f,\delta) = \sup\{\|f(\cdot+h) - f(\cdot)\|\} : \|h\| < \delta\}.$$

特别，若 $f \in C(Q)$，则

$$\omega(f,\delta)_c = \sup\{\|f(\cdot+h) - f(\cdot)\|_c : \|h\| < \delta\}. \tag{1.1}$$

下面将 $\omega(f,\delta)_c$ 简记为 $\omega(f,\delta)$. 若 $f \in L^p(Q)$，$1 \leqslant p < \infty$，则

$$\begin{aligned}\omega(f,\delta)_p &= \sup\left\{\left(\int_Q |f(x+h) - f(x)|^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} : \|h\| < \delta\right\} \\ &= \sup\{\|f(\cdot+h) - f(\cdot)\|_p : \|h\| < \delta\}\end{aligned} \tag{1.2}$$

称为 f 的**积分连续模**.

还可以考虑高阶连续模. 取 $Q = [a,b]$ 或 $T = [0,2\pi]$，并认为 f 可从 Q 延拓到全实数轴，例如当 $x \in R^1 - [a,b]$ 时，规定 $f(x) = 0$.

$$\Delta_h^m(f,x) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}f(x+kh) \tag{1.3}$$

是 f 在 x 点的以 h 为步长的 m 阶差分.

$$\omega_m(f,\delta) = \max\{\|\Delta_h^m(f)\|_c : |h| < \delta\} \tag{1.4}$$

称为 f 的 m 阶连续模，2 阶连续模常称为**光滑模**.

$$\omega_m(f,\delta)_p = \sup\{\|\Delta_h^m(f)\|_p : |h| \leqslant \delta\}, 1 \leqslant p < \infty \tag{1.5}$$

称为 f 的 m 阶积分连续模，若将(1.5)式中 $L^p(Q)$ 范数换成 $H^p(0 < p \leqslant 1)$ 范数，则称为 f 的 m 阶 $\boldsymbol{H^p}$ **连续模**，若将(1.3)中有限和换成无穷和，即

$$\omega_\alpha(f,\delta) = \sup\left\{\left|\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha}{k}f(x+kh)\right| : |h| \leqslant \delta, x \in Q\right\} \tag{1.6}$$

$(\alpha > 0)$ 称为 f 的**分数阶连续模**，这时 $\alpha > 0$ 不一定为整数.

与 f 的连续模有密切联系的是 f 的 K 泛函：

$$K_r(f,t) = \inf\{\|f-g\|_p + t^r\|g^{(r)}\|_p : g^{(r)} \in L^p(Q)\}, \tag{1.7}$$

式中 $t>0, r>0, 1\leqslant p\leqslant\infty, p=\infty$ 时指 $C(Q)$.

更一般地，设 $(X, \|\cdot\|)$ 为赋范线性空间，A 为 X 的稠密子空间，且具有半范数 $|\cdot|_A$，则

$$K_A(f,t)=\inf\{\|f-g\|+t|g|_A : g\in A\}$$

称为 X 上的 K- 泛函，它刻画了用 A 中元素 g 去逼近 X 中元素 f 的逼近程度.

通过 X, A 的各种不同选取，就得到各种不同形式的 K- 泛函. 例如，1972 年，Johnen, H. 引入 Sobolev 范数 $\|g\|_{pr}=\|g\|_p+\|g^{(r)}\|_p$，使得

$$K_{pr}(f,t)=\inf\{\|f-g\|_p+t^r\|g\|_{pr} : g^{(r)}\in L^p(Q)\}$$

成为范数，它与 $K_r(f,t), \omega_r(f,t)$ 的关系是：设 $1\leqslant p\leqslant\infty$，

(1)　$K_r(f,t)\sim\omega_r(f,t)_p$. 即存在两个正常数 c_1, c_2，使得

$c_1\omega_r(f,t)_p\leqslant K_r(f,t)\leqslant c_2\omega_r(f,t)_p$. (**Peetre-Johnen 不等式**)

(2)　$K_{pr}(f,t)\sim\min\{1,t^r\}\|f\|_p+\omega_r(f,t)$.

对于多元函数的连续模可类似地定义，如：设 G 为 R^n 中开集，使得 $\forall x\in G, x+\lambda e\in G$，式中，$e=(e_1,\cdots,e_n)$ 为 R^n 中单位向量，$\lambda>0, 1\leqslant p<\infty, f\in L^p(G)$，则

$$\omega_e(f,\delta)_p=\sup\{\|f(x+\lambda e)-f(x)\|_p : 0<\lambda\leqslant\delta\}$$

称为 f 沿方向 e 的积分连续模，而 $\omega(f,\delta)_p=\sup\{\omega_e(f,\delta)_p : e\in R^n\}$ 称为 f 的积分连续模.

二、　连续模不等式

1.　$\omega(f,\delta)$ 是 $[0,\infty)$ 上非负(关于 δ) 递增函数，即 $0<\delta_1<\delta_2$ 时，

$$\omega(f,\delta_1)\leqslant\omega(f,\delta_2).$$

2.　$\omega(f,\delta)$ 满足次可加性：

$$\omega(f,\delta_1+\delta_2)\leqslant\omega(f,\delta_1)+\omega(f,\delta_2).$$

特别地，　$\omega(f,n\delta)\leqslant n\omega(f,\delta)$.

当 $t,\lambda>0$ 时，$\omega(f,\lambda t)\leqslant([\lambda]+1)\omega(f,t)\leqslant(\lambda+1)\omega(f,t)$;

$$\omega(f,(n+\alpha)\delta)\leqslant n\,\omega(f,\delta)+\omega(f,\alpha\,\delta),\quad 0\leqslant\alpha<1, \delta>0.$$

3.　$\forall t_1,t_2 : 0<t_1<t_2$，存在 $\lambda : 0<\lambda\leqslant 1$，使得

$$\lambda\frac{\omega(f,t_2)}{t_2}\leqslant\frac{\omega(f,t_1)}{t_1}.$$

当 f 不是常值函数时，$\liminf\limits_{t\to 0+}\dfrac{\omega(f,t)}{t}>0$.

4.　设 $1\leqslant p\leqslant q<\infty$，则

$$\omega(f,\delta)_p\leqslant\omega(f,\delta)_q\leqslant\omega(f,\delta).$$

5.　$\omega(f+g,\delta)_p\leqslant\omega(f,\delta)_p+\omega(g,\delta)_p, 1\leqslant p<\infty$.

6.　设 $\omega : [0,\infty)\to R^1$ 满足：

(1)　$\omega(t)$ 递增且 $\omega(0)=0$;

(2)　$\omega(t)$ 满足次可加性：$\omega(t_1+t_2)\leqslant\omega(t_1)+\omega(t_2)$;

(3)　$\omega(t)$ 在 $t=0$ 右连续，则称 $\omega(t)$ 为**连续模函数**.

例如，$\omega:[0,b)\to R^1$ 为递增的连续凹函数且 $\omega(0)=0$，则 $\omega(t)$ 为连续模函数. 反之，虽然连续模函数不一定都是凹的，但是对每个连续模函数 $\omega(t)$，$0\leqslant t\leqslant b$，都存在凹的连续模函数 $\omega_1(t)$，使得

$$\omega(t)\leqslant\omega_1(t)\leqslant 2\omega(t),0\leqslant t\leqslant b.$$

事实上，可取

$\omega_1(t)=\sup\left\{\dfrac{(t-x)\omega(y)+(y-t)\omega(x)}{y-x}:0\leqslant x\leqslant t\leqslant y\leqslant b\right\}$，并称之为连续模 $\omega(t)$ 的最小凹优函数.

(有关连续模不等式的证明可参看[61]160 ～ 167，或[82]157 ～ 216. 单调凸函数的连续模的性质见[326]1995，18(3)：443 ～ 446)

7.　**Bojanic 不等式**：设 $\omega(t)$ 是$[0,\pi]$ 上的连续模，则 $\forall n\geqslant 2$，下式成立

$$\frac{\pi}{n}\int_{\pi/n}^{\pi}\frac{\omega(t)}{t^2}\mathrm{d}t\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\omega(\frac{k+1}{n}\pi)}{k^2}\leqslant\frac{8\pi}{n}\int_{\pi/n}^{\pi}\frac{\omega(t)}{t^2}\mathrm{d}t.$$

三、　光滑模不等式

1.　若 $f\in C(Q)$，则 $\omega_m(f,\delta)$ 是 δ 的递增函数.

2.　$\omega_m(f,\lambda\delta)\leqslant[\lambda+1]^m\omega_m(f,\delta)\leqslant(\lambda+1)^m\omega_m(f,\delta)$，

式中 $\lambda>0$，特别，有 $\omega_m(f,n\delta)\leqslant n^m\omega_m(f,\delta)$.

3.　$0<\delta_1<\delta_2$ 时，$\omega_m(f,\delta_1+\delta_2)\leqslant\omega_m(f,\delta_1)+m2^m\omega_m(f,\delta_2)$.

注　$m\geqslant 2$，$\omega_m(f,\delta_1+\delta_2)\leqslant\omega_m(f,\delta_1)+\omega_m(f,\delta_2)$ 不成立，即 $m2^m$ 不能换成 1.

4.　$\omega_m(f,\delta_1+\delta_2)\leqslant 2^m[\omega_m(f,\delta_1)+\omega_m(f,\delta_2)]$.

5.　$0<\delta_1<\delta_2$ 时，$\dfrac{\omega_m(f,\delta_2)}{\delta_2^m}\leqslant\dfrac{2^m\omega_m(f,\delta_1)}{\delta_1^m}$.

6.　设 $0\leqslant m<n$，则　$\omega_n(f,\delta)\leqslant 2^{n-m}\omega_m(f,\delta)$，　即　$\dfrac{\omega_n(f,\delta)}{2^n}\leqslant\dfrac{\omega_m(f,\delta)}{2^m}$.

7.　设 f 在$[a,b]$ 上有 m 阶连续导数，则

$$\omega_m(f,\delta)\leqslant\delta^m\|f^{(m)}\|_{C(a,b)};\omega_{m+n}(f,\delta)\leqslant\delta^m\omega_n(f^{(m)},\delta).$$

No. 6 ～ 7 说明，可用低阶连续模来估计高阶连续模，反之，也可用高阶连续模来估计低阶连续模，即下述 No. 8 ～ 9.

8.　$\omega_m(f,\delta)\leqslant C_m\delta^m\left\{\displaystyle\int_\delta^c\frac{\omega_{m+1}(f,u)}{u^{m+1}}\mathrm{d}u+\|f\|_c\right\}$，

式中 c,c_m 是与 f,δ 无关的正数，$\|f\|_c=\max\{|f(x)|:a\leqslant x\leqslant b\}$.

特别，有 $\omega(f,\delta)\leqslant c\,\omega_2(f,\sqrt{\delta})$.

9.　**Marchaud 不等式**：设 $f\in C[a,b]$，则对 $m\leqslant n$，下式成立

$$\omega_m(f,\delta)\leqslant C_n\delta^m\left[\int_\delta^p\frac{\omega_{n+1}(f,t)}{t^{m+1}}\mathrm{d}t+\frac{\|f\|_{C[a,b]}}{(b-a)^m}\right],$$

式中 C_n 是仅依赖于 n 的常数，例如 $C_1 = 12, p = \dfrac{b-a}{2m}$.（[82]176 ~ 179）

若 $f \in L^p[a,b]$，则

$$\omega_m(f,\delta)_p \leqslant C\,t^m\left(\|f\|_p + \int_t^\delta \frac{\omega_n(f,u)_p}{u^{m+1}}\mathrm{d}u\right).$$

式中 $m = 1,2,\cdots,n-1, 0 < t < \delta, 1 \leqslant p \leqslant \infty$.

另一方面，若对某个 $\delta > 0$，$\displaystyle\int_0^\delta \frac{\omega_n(f,u)_p}{u^{1+m}}\mathrm{d}u < \infty, 1 \leqslant p < \infty$.

则 $f^{(m-1)}$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续和 $f^{(m)} \in L^p[a,b]$，而且

$$\omega_{n-m}(f^{(m)},t)_p \leqslant C_1\int_0^t \frac{\omega_n(f,u)_p}{u^{m+1}}\mathrm{d}u.$$

式中 $0 < t < \delta$，常数 C_1 仅依赖于 a,b,m,p.（[55]57 ~ 59）

10. $\omega(f,\delta)_q \leqslant (b-a)^s\omega_m(f,\delta)_p$. 式中 $s = 1/p - 1/q, 1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$.

11. $\omega_m(f,\delta)_p \leqslant \delta^m \|f^{(m)}\|_p, 1 \leqslant p < \infty$.

12. **逆定理**：给定连续模函数 $\omega(t)(t \geqslant 0)$，当 $r = 0$ 时满足下述四个条件：

① $\omega(t)$ 连续； ② $\omega(t)$ 递增； ③ $\omega(0) = 0$，

④ 对所有 $t > 0$，有 $\omega(2t) \leqslant c\omega(t)$，$c$ 为常数，当 $r \geqslant 1$ 时还满足第五个条件：

⑤ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t}\mathrm{d}t < \infty$.

若对周期函数 f，存在 n 阶三角多项式序列 $T_n(x)$，满足

$$|f(x) - T_n(x)| \leqslant (A/n^r)\omega(1/n), \tag{1.8}$$

r 为非负整数，则 $f \in C^r$，且 $\forall k \in N$，$f^{(r)}$ 的 k 阶连续模 $\omega_k(f^{(r)},x)$ 满足

$$\omega_k(f^{(r)},x) \leqslant \begin{cases} A_1Ax^k\displaystyle\int_x^1 \frac{\omega(t)}{t^{k+1}}\mathrm{d}t, & r = 0, \\ A_1A\left\{x^k\displaystyle\int_x^1 \frac{\omega(t)}{t^{k+1}}\mathrm{d}t + \int_0^x \frac{\omega(t)}{t}\mathrm{d}t\right\}, & r \geqslant 1, \end{cases}$$

式中 A_1 为常数.（[82]250 ~ 254）

注 1 在函数逼近论中，凡是由函数的最佳逼近值趋于零的速度推出函数（或函数类）光滑阶数的定理，称为逆定理，上述不等式就是最基本的逆定理.

推论 1 设 $\omega(x)$ 为 k 阶连续模，则当 $r = 0$ 时，在 No. 12 的条件下，而当 $r \geqslant 1$ 时，在补充条件

$$\int_0^x \frac{\omega(t)}{t}\mathrm{d}t \leqslant C\omega(x)$$

下，有 $\omega_{k+1}(f^{(r)},x) \leqslant A_1\omega(x)$ （A_1 为常数）.

推论 2 设 $\omega(x) = x^\alpha(0 < \alpha < 1)$，则在 No. 12 的条件下，$f \in C^r$，且对任意整数 $r \geqslant 0$，有

$$\omega(f^{(r)},x) \leqslant At^\alpha, \quad 即 \quad f \in W^rH^\alpha.$$

推论 3 设 $\omega(x) = x$，则在 No. 12 条件下，$f \in C^r$，且对任意整数 $r \geqslant 0$，有

$$\omega_2(f^{(r)},x) \leqslant Ax.$$

注 2 对于$[a,b]$上的非周期函数f,只要将(1.8)式换成:存在n阶代数多项式序列$\{P_n(x)\}$,使得

$$|f(x)-P_n(x)|\leqslant C[\xi_n(x)]^r\omega(f^{(r)},\xi_n(x)),\ \forall x\in[a,b],$$

式中$\xi_n(x)=\left(\frac{1}{n}\right)\sqrt{(b-x)(x-a)}+\frac{1}{n^2}$,常数$C$与$x,n$无关,则逆定理仍成立.([82]286 ~ 289,276 ~ 277)

四、 K-泛函不等式

下面设$1\leqslant p\leqslant\infty,r>0$.

1. 关于t的拟半可加性.

$$K_r(f,t_1+t_2)\leqslant 2^{r-1}[K_r(f,t_1)+K_r(f,t_2)].$$

2. 关于f的半可加性:

$$K_r(f_1+f_2,t)\leqslant K_r(f_1,t)+K_r(f_2,t).$$

3. $K_r(f,t)$关于t递增.

4. $K_r(f,t)\leqslant\|f\|_p$.

5. $K_r(f,t)\leqslant t^r\|f^{(r)}\|_p$.

6. **Marchaud 型不等式**:设$1\leqslant p<\infty,0<t\leqslant 1$,则对于$f\in L^p[a,b]$,有

$$K_j(f,t)\leqslant ct^j\left(\|f\|_p+\int_t^1 s^{-1-j}K_r(f,s)\mathrm{d}s\right),1\leqslant j\leqslant r-1;$$

若加上条件 $\int_0^1 s^{-1-j}K_r(f,s)\mathrm{d}s<\infty$,则 $f^{(j)}\in L^p[a,b]$,

$$\|f^{(j)}\|_p\leqslant C\left(\|f\|_p+\int_0^1 s^{-1-j}K_r(f,s)\mathrm{d}s\right),$$

而且

$$K_{r-j}(f^{(j)},t)\leqslant c\int_0^t s^{-1-j}K_r(f,s)\mathrm{d}s.\quad([55]60 \sim 69)$$

§2 最佳逼近不等式

设(X,d)为距离空间,A为X的非空子集,对于$x\in X$,若存在$y_0\in A$,使得

$$d(x,y_0)=\inf\{d(x,y):y\in A\}.\tag{2.1}$$

则称y_0是x在集A中的最佳逼近元,在赋范线性空间$(X,\|\cdot\|)$中,(2.1)式变成

$$\|x-y_0\|=\inf\{\|x-y\|:y\in A\}.\tag{2.2}$$

设$P_n(x)$与$T_n(x)$分别表示n阶代数多项式和n次三角多项式,若$f\in C[a,b]$,记

$$E_n(f)=\inf_{\{P_n\}}\{\|f-P_n\|_c\}=\|f-P_n^*\|_c;\tag{2.3}$$

若$f\in C_{2\pi}$,记

$$E_n^*(f)=\inf_{\{T_n\}}\{\|f-T_n\|_c\}=\|f-T_n^*\|_c;\tag{2.4}$$

若$f\in L^p(E),1\leqslant p<\infty$,记

$$E_n(f)_p = \inf_{\{P_n\}}\{\|f-P_n\|_p\} = \|f-P_n^*\|_p; \tag{2.5}$$

若 $\in L_{2\pi}^p, 1\leqslant p<\infty$，记

$$E_n(f)_p^* = \inf_{\{T_n\}}\{\|f-T_n\|_p\} = \|f-T_n^*\|_p. \tag{2.6}$$

$E_n(f), E_n^*(f), \cdots$，称为 f 的最佳逼近，$P_n^*(x), T_n^*(x)$ 称为 f 的最佳逼近多项式. 一般地，设 g_k 为赋范线性空间 $(X, \|\cdot\|)$ 中元素列，称它们的有限线性组合 $G_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k g_k(x)$ 为广义多项式，对于 $f\in X$，同样定义

$$E_n(f) = \inf_{\{c_k\}}\{\|f-\sum_{k=1}^n c_k g_k\| = \|f-\sum_{k=1}^n c_k^* g_k\|. \tag{2.7}$$

并称之为 f 关于 $\{g_k\}$ 的最佳逼近，$G_n^*(x) = \sum_{k=1}^n c_k^* g_k(x)$ 称为最佳逼近广义多项式.

若 X 为Banach空间，$\{g_k\}$ 是 X 中线性无关列. 则 $\forall \varepsilon_n \downarrow 0$，存在 $f\in X$，使得 $E_n(f) = \varepsilon_n, n=1,2,\cdots,\quad E_n(f)\leqslant \|f\|$.（证明见[71]25 ~ 28）

设 $\{g_k\}$ 为 $C[a,b]$ 中线性无关函数系，若任一个不恒为零的广义多项式 $G_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k g_k(x)$ 在 $[a,b]$ 上至多有 $n-1$ 个不同的根，则称 $\{g_k\}$ 在 $[a,b]$ 上满足 Haar 条件.

1. 设 $f\in C[0,1]$，则存在两个多项式列 $\{P_n\}$ 和 $\{Q_n\}$，使得 $\forall x\in[0,1]$，成立

$$Q_n(x)\leqslant Q_{n+1}(x)\leqslant f(x)\leqslant P_{n+1}(x)\leqslant P_n(x), \tag{2.8}$$

并且

$$\|P_n-Q_n\|_c\leqslant 42E_n(f). \tag{2.9}$$

当 f 不是多项式时，(2.8) 式中成立严格的不等号.

（谢庭藩，周颂平，[391]1995，67：119 ~ 121 或[71]28 ~ 30）

我们问：(2.9) 式中常数 42 能否减少？其最佳值是什么？

2. **Vallee-Poussin 不等式**：设 $\{g_k\}$ 在 $C[a,b]$ 上满足 Haar 条件，$f\in C[a,b]$. 若存在多项式 $G_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k g_k(x)$，使得 $f(x)-G_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上至少有 $n+1$ 个点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 以正负相间的符号取到值 $a_0, a_1, \cdots, a_n$，则

$$E_n(f)\geqslant \min\{a_0, a_1, \cdots, a_n\}. \tag{2.10}$$

$E_n(f)$ 的这个下界估计在理论和实际上都十分重要. 由此可推出：

若 $\{g_k\}$ 在 $C[a,b]$ 上满足 Haar 条件，则 $\forall f\in C[a,b]$. $G_n^*(x) = \sum_{k=1}^n c_k^* g_k(x)$ 为 f 在 $C[a,b]$ 上的最佳逼近多项式的充要条件是 $f(x)-G_n^*(x)$ 在 $[a,b]$ 上至少有 $n+1$ 个 Chebyshev 交错点 $\{x_k\}_{k=0}^n$，即 $f(x)-G_n^*(x)$ 在这些点上以正负相间的符号取到其绝对值的最大值：

$$\|f-P_n^*\|_c = \max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-P_n^*(x)|.$$（证明见[127]24 ~ 26）

3. **插值不等式**：

(1) 设 $f^{(n+1)}\in C[a,b]$，$x_0<x_1<\cdots<x_n$ 为 $[a,b]$ 上给定的插值结点. $P_n(x) =$

$\sum_{k=1}^{n} l_k(x) f(x_k)$ 为 Lagrange 插值多项式，式中 $l_k(x) = \dfrac{\omega_n(x)}{(x - x_k)\omega'_n(x_k)}$，$\omega_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(x - x_k)$，$h = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n}\{x_k - x_{k-1}\}$，则 $| f'(x) - P'_n(x) | < \dfrac{1}{2} h^n \| f^{(n+1)} \|_c$.

$$\| f^{(k)} - P_n^{(k)} \|_c \leqslant \frac{n! h^{n+1-k}}{(k+1)!(n+1-k)!} \| f^{(n+1)} \|_c, 2 \leqslant k \leqslant n.$$

(2) 设 $f \in C^n[-1,1]$，$\{x_k\}_{k=1}^{n}$ 为 $[-1,1]$ 上的插值结点，$P_n(x)$ 为 Lagrange 插值多项式，则

$$| f(x) - P_n(x) | \leqslant \frac{1}{n!} \| f^{(n)} \|_C \| \omega_n \|_c. \tag{2.11}$$

当插值结点 $\{x_k\}$ 取为 Chebyshev 多项式的零点：

$$x_k = \cos \frac{2k-1}{2n}\pi, k = 1, \cdots, n,$$

则误差(2.11)式变成

$$| f(x) - P_n(x) | \leqslant \frac{1}{n! 2^{n-1}} \| f^{(n)} \|_c. \tag{2.12}$$

(3) 给定 $[a,b]$ 的一个分划 $T = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$，$S(x)$ 满足：

① $S \in C^2[a,b]$；

② $S(x)$ 在每个子区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 上是三次多项式，则称 $S(x)$ 是关于分划 T 的三次样条函数. 若给定连续函数 $y = f(x)$ 在结点 x_k 上的值 $y_k = f(x_k)$ 并使得

③ $S(x_k) = y_k, k = 0, 1, \cdots, n$.

则称 $S(x)$ 是 f 的三次样条插值函数，为确定 $S(x)$，要用 $4n$ 个条件，而 $S(x)$ 的定义中只给出了 $4n-2$ 个条件. 所以需要补充两个边界条件，常用的有：

④ 转角条件：$S'(x_0) = y'_0$，$S'(x_n) = y'_n$；

⑤ 弯矩条件：$S''(x_0) = y''_0$，$S''(x_n) = y''_n$.

若 $f \in C^4[a,b]$，则

$$\| f^{(k)} - S^{(k)} \|_c \leqslant C_k h^{4-k} \| f^{(k)} \|_c. \tag{2.13}$$

式中 $h = \max\{(x_k - x_{k-1}) : 1 \leqslant k \leqslant n\}$.

4. **Jackson 不等式：**

(1) 若 $f \in \mathrm{Lip}_M 1$（即 $| f(x) - f(y) | \leqslant M | x - y |$）且 $f \in C_{2\pi}$，则

$$E_n^*(f) \leqslant \frac{\pi}{2(n+1)} M. \tag{2.14}$$

式中 $\pi/2$ 是最佳常数.（[109]182）

(2) 若 $f' \in C_{2\pi}$，则 $E_n^*(f) \leqslant \dfrac{\pi}{2(n+1)} \| f' \|_c$. (2.15)

式中 $\pi/2$ 也是最佳常数.（[109]179 ～ 182）

(3) 若 $f \in C_{2\pi}$，则 $E_n^*(f) \leqslant \omega(f, \dfrac{\pi}{n+1})$.

若 $f^{(k)} \in C_{2\pi}$，则 $E_n^*(f) \leqslant \dfrac{\pi}{2n^k} \omega(f^{(k)}, \dfrac{\pi}{n})$； (2.16)

$$E_n^*(f) \leqslant \frac{c_k}{(n+1)^k} E_n^*(f^{(k)}). \tag{2.17}$$

([61]216 ~ 223,[109]183 ~ 185)

(4) 设 $f^{(k)} \in C_{2\pi}$,则 $E_n^*(f) \leqslant \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{n+1}\right)^k \| f^{(k)} \|_c$.

式中$\frac{\pi}{2}$是最佳常数.([109]185 ~ 186)

(5) 设 $f \in L_{2\pi}^2$,则 $E^*(f)_2 < \frac{1}{\sqrt{2}}\omega\left(f,\frac{\pi}{n}\right)_2$.

式中$\frac{1}{\sqrt{2}}$不能再改进.若 $f^{(k)} \in L_{2\pi}$,则

$$E_n^*(f)_2 < \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{n^k}\omega(f^{(k)},\frac{\pi}{n})_2. \tag{2.18}$$

(2.18)式中的精确常数问题还未解决,$\omega(f,\delta)_2$ 表示 f 在 $L_{2\pi}^2$ 中的积分连续模.([61]224 ~ 230)

(6) 设 $f^{(k)} \in X = C_{2\pi}$ 或 $L_{2\pi}^p, 1 \leqslant p < \infty. k = 2m-1, m = 1,2,\cdots$,则

$$E_n^*(f)_X \leqslant \frac{C_k}{n^k}\omega(f^{(k)},\frac{\pi}{n})_X. \tag{2.19}$$

式中 $C_k = \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m(k+1)}}{(2m+1)^{k+1}}$ (Favad 常数).

当 $X = C_{2\pi}$ 和 $L_{2\pi}^1 (p=1)$ 时,(2.19)式不能改进.([61]235 ~ 239)

(7) 当 $f^{(k)} \in C[a,b]$ 时也有类似的结果,例如

$$E_n(f) \leqslant \frac{C_k(b-a)^k}{n^k}\omega(f^{(k)},\frac{b-a}{n}),\ (n>k, f^{(0)} = f);\quad E_n(f) \leqslant C_m\omega_m(f,\frac{1}{n}),$$

式中 $\omega_m(f,\frac{1}{n})$ 为 f 的 m 阶连续模,C_m 的最佳值已由 Favard 给出,当$[a,b] = [-1,1]$时,$C_1 = 6$;若 $f^{(n+1)} \in C[a,b]$,则 $E_n(f) \leqslant \frac{2}{(n+1)!}\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1} \| f^{(n+1)} \|_c$.

(8) 设 $f' \in C[0,1]$,$S_n(f)$ 是分段线性函数,使得

$$S_n(f,\frac{k}{n}) = f(\frac{k}{n}), k = 0,1,2,\cdots,n, \quad 则$$

$$\| f - S_n(f) \|_c \leqslant \frac{1}{4n}\sup\{| f'(x+\frac{t}{2}) - f'(x-\frac{t}{2}) | : 0 \leqslant t \leqslant \frac{2-\sqrt{2}}{n}, x \pm \frac{t}{2} \in [0,1]\}.$$

(Vinogradov, O. L. 等. Dokl. Akad. Nauk 2000,373(4):442 ~ 444)

(9) 若 $f \in C[-1,1]$,则 $E_n(f) \leqslant \omega(f,\frac{\pi}{n+1})$;

若 $f \in \mathrm{Lip}_M 1$,即 $| f(x) - f(y) | \leqslant M | x - y |$,则 $E_n(f) \leqslant \frac{M\pi}{2(n+1)}$;

若 $f^{(k)} \in C[-1,1], n \geqslant k$,则

$$E_n(f) \leqslant \left(\frac{\pi}{2}\right)^k \frac{\| f^{(k)} \|_C}{(n+1)n\cdots(n-k+2)}.$$

([109]188 ~ 189)

(10) $\omega_k(f,\frac{1}{n})\leqslant\frac{C_k}{n^k}\sum_{j=0}^{n}(j+1)^{k-1}E_j^*(f)$. (Steckin, S. B)

注 在函数逼近论中,Jackson 不等式也称为**正定理**或 Jackson **定理**.

5. 设 $f\in L_{2\pi}$,则

$$f_h(x)=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}f(x+t)\mathrm{d}t \quad (h>0)$$

称为 f 的 Steklov 函数(位移平均),则当 $f\in L_{2\pi}^p(1\leqslant p<\infty)$ 时,下式成立

(1) $\|f_h\|_p\leqslant\|f\|_p$. (2) $\|f-f_h\|_p\leqslant\omega(f,h)_p$.

(3) $\|f'_h\|_p\leqslant\frac{1}{h}\omega(f,h)_p$. ([61]84 ~ 85, 162)

(4) 设 $1\leqslant q\leqslant p, r=1/q-1/p$,则 $|f_h(x)|\leqslant h^{-1/p}\|f\|_p$; $\|f_h\|_q\leqslant h^r\|f\|_p$.

(5) 若 $f\in C[a,b]$,则 $\|f_k-f\|_c\leqslant\frac{5}{2}\omega(f,h)_2$.

(6) 若 $f\in BV[0,2\pi]$,则 $V_0^{2\pi}(f_h)\leqslant V_0^{2\pi}(f)$.

注 $f_h(x)$ 又称为 f 的位移平均或第一积分平均,或 Riemann-Lebesgue 奇异积分,它实际上是数列算术平均的积分形式,记为 $A_{2h}^1(f,x)$.

f 的 r 阶积分平均可用归纳法依次定义为

$$A_h^r(f,x)=A_h^1(A_h^{r-1}(f,\cdot),x).$$

当 $f\in L_{2\pi}^p(1\leqslant p<\infty)$ 或 $f\in C_{2\pi}$ 时,

$$A_h^r(f,x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin(hk/2)}{hk/2}\right)^r\hat{f}(k)e^{ikx},$$

右边定义了 f 的 Fourier 级数的 r 阶 Riemann 求和法,其中 $k=0$ 时的值为 $\hat{f}(0)$,$\hat{f}(k)$ 为 f 的 Fourier 系数. ([91]49, 56, 80)

6. **Bernstein 不等式**:这是用最佳逼近不等式来刻画函数类,下面用到的函数类是:

$$\mathrm{Lip}\alpha=\{f:|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|^\alpha, 0<\alpha\leqslant 1\},$$

$Z=\{f\in C_{2\pi}:|f(x+h)-2f(x)+f(x-h)|\leqslant Mh\}$,称为 Zygmund 函数类;

$W=\{f:\omega(f,t)\leqslant ct(1+|\ln t|)\}$. $\mathrm{Lip}1\subset Z\subset W\subset\mathrm{Lip}\alpha \quad (0<\alpha<1)$.

(1) 设 $f\in C_{2\pi}$ 且 $E_n^*(f)\leqslant\frac{C}{n^\alpha}, 0<\alpha\leqslant 1$,则当 $0<\alpha<1$ 时,$f\in\mathrm{Lip}\alpha$;$\alpha=1$ 时 $f\in W$.

证明中用到以下不等式:设 $f\in C_{2\pi}$,则

$$\omega(f,\frac{1}{n})\leqslant\frac{c}{n}\sum_{k=0}^{n}E_k^*(f).$$

(2) 设 $f\in C_{2\pi}$ 且 $E_n^*(f)\leqslant\frac{c}{n^{k+\alpha}}, 0<\alpha\leqslant 1, k\in N$,则 $f^{(k)}\in C_{2\pi}$;且当 $0<\alpha<1$ 时,$f^{(k)}\in\mathrm{Lip}\alpha$;当 $\alpha=1$ 时,$f^{(k)}\in W$.

提示:由条件证 $E_n^*(f^{(k)})\leqslant c/n^\alpha$.

(3)　设 $f \in C_{2\pi}$，则 $f \in Z \Leftrightarrow E_n^*(f) \leqslant c/n$.

对于非周期情况，也有类似的结果，其证明见[82]，[68] 或[71].

7.　**Lebesgue 不等式**：设 $f \in C_{2\pi}$，$S_n(f,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$ 为 f 的 Fourier 级数的 n 阶部分和，则

(1)　$\| S_n(f) - f \|_c \leqslant (3 + \ln n)E_n^*(f)$.

(2)　$\| S_n(f) - f \|_c \leqslant (1 + L_n)E_n^*(f)$，式中 L_n 为 Lebesgue 常数.

8.　设 $S_n(f,x)$ 为 f 的 Fourier 级数的 n 阶部分和(本节 No. 7)，S_n 的算术平均(Fejer 平均)为：

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f,x).$$

若 $f \in C_{2\pi} \cap \mathrm{Lip}_M\alpha$，$0 < \alpha < 1$，则

$$\| \sigma_n(f) - f \|_c \leqslant \frac{M}{n^\alpha}\left(\frac{\pi 2^\alpha}{1-\alpha^2}\right).$$

若 $f \in \mathrm{Lip}_M 1$，则　$\| \sigma_{n-1}(f) - f \|_c < \frac{AM\ln n}{n}(n > 1)$.

9.　**Bohr-Favard 不等式**：设

$$f(x) = \sum_{k=n}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

是有 r 阶连续导数 $f^{(r)}(x)$ 的任意周期函数，其中 n 和 r 是给定的自然数，则

$$\| f \|_c \leqslant K(n,r) \| f^{(r)} \|_c.$$

式中 $\| f \|_c = \max\{| f(x) | : x \in [0,2\pi]\}$.

$K(n,r) = \sup\{ \| f \|_c : \| f^{(r)} \|_c \leqslant 1\}$ 是最佳常数.([107]1:384)

10.　**联合逼近不等式**：

(1)　设 $f^{(m)} \in C_{2\pi}$，则存在 n 阶三角多项式 $T_n(x)$，使得

$$\| f^{(k)} - T_n^{(k)} \|_c \leqslant C_m E_n^*(f^{(k)}), k = 0,1,\cdots,m.$$

(2)　设 $f^{(m)} \in C[-1,1]$，则存在 n 阶代数多项式 $P_n(x)$，使得

$$| f^{(k)}(x) - P_n^{(k)}(x) | \leqslant \frac{C_m}{(\Delta_n(x))^k} \cdot \frac{E_n(f^{(k)})}{n^k}, x \in [-1,1], k = 0,1,\cdots,m.$$

$$\Delta_n(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

(3)　设 $f^{(m)} \in C[-1,1]$，则 $\forall n > 2m$，存在 n 阶代数多项式 $P_n(x)$，使得

$$| f^{(k)}(x) - P_n^{(k)}(x) | \leqslant C_{m,k}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^{m-k} E_{n-m}(f^{(m)}), \text{和 } f^{(m)}(\pm 1) - P_n^{(m)}(\pm 1) = 0,$$

$0 \leqslant k \leqslant m$，$| x | \leqslant 1$.(Kilgore, T., Approx, theory. Memphis, TN, 1991, 353 ~ 361)

11.　设 $f^{(n+1)} \in C[-1,1]$，$P_n^*(x)$ 为 f 的最佳逼近多项式，则

$$\| f^{(k)} - (P_n^*)^{(k)} \|_c \leqslant \frac{2^{n+1-k}}{n!} \| f^{(n+1)} \|_c,$$

式中 $0 \leqslant k \leqslant n+1$.

§3 微分不等式

1. **微分中值定理**:在现行数学分析教材中,微分中值定理都写成等式形式:$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$,式中 c 只知道与 b,a,f 有关,并不知道 c 的确切值,实际上,只要知道 f' 的上下确界,即令 $m=\inf\{f'(x):x\in(a,b)\}$,$M=\sup\{f'(x):x\in(a,b)\}$,就得到

$$m(b-a)\leqslant f(b)-f(a)\leqslant M(b-a). \tag{3.1}$$

这就表明,微分中值定理的实质是由不等式(3.1)而非等式的形式所揭示出来,它有以下改进和推广:

(1) 设 $f\in C[a,b]$,f 在开区间 (a,b) 上存在单侧导数 $f'_-(x),f'_+(x)$,则存在 c:$a<c<b$,使得

$$f'_-(c)\leqslant\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leqslant f'_+(c). \tag{3.2}$$

或上式中两个不等号均反向.

(2) 在(3.1)中的 m,M 的定义式中,$f'(x)$ 还可减弱为单侧导数 $f'_-(x),f'_+(x)$,或 Dini 导数,如

$$D^+f(x)=\limsup_{h\to+0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$ ([305]1986,93(6):471 ~ 475)

(3) 设 $f'\in C[a,b]$,$\|f''\|_\infty<\infty$,则

$$M-\frac{b-a}{2}\|f''\|_\infty\leqslant\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leqslant m+\frac{b-a}{2}.$$

(Ostrowski[21]535)

(4) 设 $(X,\|\cdot\|)$ 为Banach空间,区间 $[a,b]$ 为 R^1 中有限闭区间,$f:[a,b]\to X$ 为连续映射,$\varphi:[a,b]\to R^1$ 为连续函数,若存在 $[a,b]$ 的一个可数子集 A,使得 $\forall c\in[a,b]-A$,f,φ 在 c 关于 $[a,b]$ 都存在导数,并且 $\|f'(c)\|\leqslant\varphi'(c)$,则

$$\|f(b)-f(a)\|\leqslant\varphi(b)-\varphi(a). \tag{3.3}$$

(证明见[74]Vol. 1. 171 ~ 175)

2. 设 f 在半开区间 $[0,1)$ 上有连续导数,且 $|f'(x)|\leqslant M(1-x)^{\alpha-1}(0<\alpha\leqslant1)$,则对 $[0,1]$ 中任意 x_1,x_2,有

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\frac{M}{\alpha}|x_1-x_2|^\alpha. \tag{3.4}$$

3. **混合和方向导数不等式**:设 G 是 R^n 中开集,$X(G)$ 表示 $C(G)$ 或 $L^p(G)(1\leqslant p<\infty)$,$\partial f/\partial\zeta$ 表示 f 沿 ζ 方向的方向导数. 若 $f\in X(G)$,且对任意方向 ξ,$D_\xi^k(f)\triangleq\partial^kf/\partial\xi^k\in X(G)$,$\|D_\xi^k(f)\|_X\leqslant M$,则沿任意 k 个方向 $\xi_1,\cdots,\xi_k$,有 $\|D_{\xi_1}\cdots D_{\xi_k}(f)\|_X\leqslant\sup\limits_\xi\|D_\xi^k(f)\|_X$. ([308]1990,108(1):177 ~ 185)

4. **Mahler 不等式**:设 P_n 是复系数 n 次代数多项式,首项系数为 a,零点为 z_k,$1\leqslant k\leqslant n$,P_n 的 Mahler 测度 $M(P_n)$ 定义为

$$M(P_n) = \exp\int_0^1 \log | P_n(\exp(2\pi it)) | \mathrm{d}t = a\prod_{j=1}^{n}\max\{1, | z_j |\}.$$

则 $M(P'_n) \leqslant nM(P_n)$.([305]1991,98:451 ~ 452)

5. **Landau-Kolmogorov 不等式(L-K 不等式)**:

(1) 设$(X, \|\cdot\|)$为Banach空间,$f^{(n)} \in X, 0<k<n$,则古典的 Landau-Kolmogorov 不等式为

$$\| f^{(k)} \| \leqslant C(n,k,X) \| f^{(n)} \|^{k/n} \cdot \| f \|^{1-\frac{k}{n}}. \tag{3.5}$$

当 $X = L^\infty(R^1)$ 时,$C(n,k,L^\infty(R^1))$ 的最佳值于 1938 年由 Kolmogorov 求出为:

$$C(n,k,L^\infty(R^1)) = \frac{K_{n-k}}{K_n^{\frac{(n-k)}{n}}},\text{式中 } K_n = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k}{2k+1}\right)^{n+1} \text{为 Favard 常数.}$$

$$(K_0 = 1, K_1 = \frac{\pi}{2}, K_2 = \frac{\pi^2}{8}, K_3 = \frac{\pi^2}{24}, \cdots,\text{见 Ch11 § 2})$$

$1 < C(n,k,L^\infty(R^1)) < \frac{\pi}{2}$,当 $n \to \infty$ 时,$C(n,1,L^\infty(R^1)) \to 1, C(n,n-1,L^\infty(R^1)) \to \frac{\pi}{2}$.([82]241 ~ 244)

特别地,成立 **Landau-Hadamard 不等式**:

$$\| f' \| \leqslant \sqrt{2} \| f'' \|^{\frac{1}{2}} \| f \|^{\frac{1}{2}}. \tag{3.6}$$

注 若不要求 $C(n,k,L^\infty(R^1))$ 的最佳值,如证 $C(n,k,L^\infty(R^1)) = 2^{k(n-k)}$,证明的难度就大大降低,如在[74]Vol. 1,210 就作为习题出现.

(2) 将上述 R^1 改为 $R^+ = (0,\infty)$ 时,要确定 $C(n,k,L^\infty(R^+))$,似乎更困难些,1955 年,Matorin, A. P. 证明

$$C(n,k,L^\infty(R^+)) \leqslant \frac{T_n^{(k)}(1)}{(n!)^{\frac{k}{n}} 2^{(1-\frac{1}{n})k}}.$$

式中,$T_n(x)$ 为 n 阶 Chebyshev 多项式,1967 年,Steckin, S. B. 证明:当 $1 \leqslant k \leqslant n/2$ 时,下式成立

$$a\left(\frac{n}{k}\right)^k \leqslant C(n,k,L^\infty(R^+)) \leqslant b\left(\frac{e^2 n}{4k}\right)^k,$$

而当 $n/2 \leqslant k < n$ 时,下式成立

$$a(n-k)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{n}{n-k}\right)^{n-k} \leqslant C(n,k,L^\infty(R^+)) \leqslant b\left(\frac{2n}{n-k}\right)^{n-k},$$

式中 a,b 为正的常数.

1975 年,Kupcov, N. P. ,证明了 $L^2(R^+)$ 中的常数 $C(n,k,L^\infty(R^+))$:

$$C(n,k,L^2(R^+)) = \left[\frac{1}{\alpha(n,r)}\left\{\left(\frac{n-k}{n}\right)^{\frac{k}{n}} + \left(\frac{k}{n-k}\right)^{\frac{n-k}{n}}\right\}\right]^{\frac{1}{2}},$$

式中 $0 < \alpha(n,r) < \dfrac{n}{k^{\frac{k}{n}}(n-k)^{\frac{n-k}{n}}}$, $\quad \alpha(n,n-k) = \alpha(n,k)$,

$$\alpha(2,1) = 1, \alpha(3,1) = \alpha(3,2) = \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}} \approx 0.555669.$$

(Proc. Steklov Inst. Math, 1975, 138:94 ~ 117)

又如记 $a=\left(\frac{\|f\|}{\|f''\|}\right)^{1/2}$，在$[0,\infty)$ 或$[0,b]$ $(b\geqslant a)$ 上，(3.6) 式应改为 $\|f'\|\leqslant 2\|f\|^{1/2}\|f''\|^{1/2}$，而在$[0,d](d<a)$ 上则成立 $\|f'\|\leqslant\frac{2}{d}\|f\|+\frac{d}{2}\|f''\|$.

(3) 记$m(f)=\inf\{f(x):x\in R^+\}$，$M(f)=\sup\{f(x):x\in R^+\}$. 设$f\in C^2(R^+)$，$f^{(3)}$ 在 R^+ 上存在，且 f 在R^+ 上非负有界. 若 $m(f')\leqslant 0,M(f^{(3)})<\infty,f''(0)\leqslant 0$，则 $M(f^{(3)})\geqslant 0$ 且

$$-m(f')^3\leqslant\left(\frac{9}{8}\right)\|f\|^2M(f^{(3)});$$

若 $m(f^{(3)})>-\infty,M(f')\geqslant 0,f''(0)\geqslant 0$，则

$$-m(f^{(3)})\geqslant 0\text{ 且 }M(f')^3\leqslant\left(\frac{9}{8}\right)\|f\|^2(-m(f^{(3)})).$$

(Boyadziev, K. N., The Math, Student. 1982, 50: 214 ~ 218)

若令 $\omega(f)=M(f)-m(f)=\sup\{f(x)-f(y):x,y\in R^+\}$，则

$$\|f'\|_\infty^2\leqslant\frac{1}{2}\omega(f)\omega(f'').$$ (Saffari, B. [54]6；另见[54]5：367 ~ 379)

(4) 1987 年，Kuptsov, N. P. 证明

$$\|f\|_c\leqslant C(n,k,L^2(R^+))(\|f\|_2^2+\|f^{(n)}\|_2^2). \tag{3.7}$$

式中 C 范数，L^2 范数均在 $R^+=(0,\infty)$ 上取，而精确常数的渐近估计式为

$$C(n,k,L^2(R^+))=\frac{1}{(2k+1)(k!)^2\left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^{2k+1}}+O(n^{2k-1})\ (n\to\infty).$$

([405], 1987, 41(3): 313 ~ 319, 456)

(5) **Stein 不等式**：设 $1\leqslant k\leqslant n-1,n\geqslant 2,f^{(n)}\in L^1$，则

$$\left(\frac{\|f^{(n-k)}\|_1}{K_k\|f^{(n)}\|_1}\right)^{1/k}\leqslant\left(\frac{\|f\|_1}{K_n\|f^{(n)}\|_1}\right)^{1/n}, \tag{3.8}$$

式中，K_k,K_n 为 Favard 常数. ([311]1957, 65(3): 582 ~ 592)(该不等式的更一般形式见孙永生[68] 上册 463)

(6) 设 $\partial/\partial\varepsilon_k$ 表示沿 ε_k 方向的导数，Laplace 算子的 m 次迭代 $\Delta^m f\in L^\infty(R^n)$，$0<k<2m$，则

$$\left\|\frac{\partial}{\partial\varepsilon_1}\cdots\frac{\partial}{\partial\varepsilon_k}f\right\|\leqslant C(m,k,L^\infty(R^n))\|f\|^{1-\frac{k}{2m}}\|\Delta^m f\|^{\frac{k}{2m}}. \tag{3.9}$$

(Ditzian, Z., Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1989, 105(2): 335 ~ 350)

1998 年，Chen Q. D. Zhou X. L. 证明

$$\|D_{\xi_1}\cdots D_{\xi_k}f\|_q\leqslant C\|f\|_p^{1-\alpha}\|\Delta^m f\|_r^\alpha,$$

式中，Δ 为 R^n 中 Laplace 算子. $0\leqslant k\leqslant 2m,1\leqslant p,q,r\leqslant\infty$，$2m-\frac{n}{r}+\frac{n}{p}>0$，

$\alpha=\frac{2m-k+(n/q)-(n/r)}{2m-(n/r)+(n/p)}>0$. ([301]1998, 226(1): 130 ~ 142)

(7) **分数阶导数不等式**：设 $0<r<1$，定义 f 的 r 阶导数为

$$f^{(r)}(x)=\frac{\Gamma(r+1)\sin(r\pi)}{\pi}\int_0^\infty \frac{f(x)-f(x-t)}{t^{1+r}}\mathrm{d}t.$$

记 $\|f\|_\infty=\sup\{|f(x)|:x\in(-\infty,\infty)\}$,

$$\|f\|_\delta=\sup\left\{\frac{|f'(x)-f'(y)|}{|x-y|}:|x-y|<\delta<\infty,x,y\in R^1\right\},$$

则 $$\|f^{(r)}\|_\infty\leqslant C_r\|f\|_\infty^{1-(\frac{r}{2})}\|f\|_\delta^{r/2},\tag{3.10}$$

式中 $C_r=\dfrac{\Gamma(r+1)\sin(r\pi)}{r(1-r)(2-r)\pi}2^{2-(\frac{r}{2})}(2^{1/(1-r)}-1)^{r-1}$ 为最佳常数.

(Trudi Mat. Meh instituta,1965,50:42 ~ 54 或[21]11)

有限区间上的 L-K 不等式中的精确常数,则呈现出复杂情形,如下述(8) ~ (16).

(8)　设 $D=R^+=(0,\infty)$ 或 $D=R^1$, $f,f''\in L^p(D)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, 则 $f'\in L^p(D)$, 且

$$\|f'\|_p\leqslant C_p(D)\|f\|_p^{\frac{1}{2}}\|f''\|_p^{\frac{1}{2}},\tag{3.11}$$

① 当 $p=\infty$ 时,$C_\infty(R^+)=2$, $C_\infty(R^1)=\sqrt{2}$ 是最佳常数;

② 当 $p=2$ 时,$C_2(R^+)=\sqrt{2}$, $C_2(R^1)=1$ 是最佳常数;

③ 当 $1\leqslant p<\infty$ 时, $C_p(R^+)\leqslant 2$, $C_p(R^1)\leqslant\sqrt{2}$.

([318]13(1913),43 ~ 49) 对于 R^1 的任意子区间和放宽导数 f' 的条件下的 Landau 型不等式见[330]37(2006),301 ~ 308.

我们问:使(3.11) 成立的 $C_p(R^+)$, $C_p(R^1)$ $(1\leqslant p<\infty)$ 的最佳常数是什么?

设 ω 是$(-\infty,\infty)$ 上正的递增的权函数. $\lim\limits_{x\to-\infty}\omega(x)>0$, 则

$$\|f'\|_{2,\omega}\leqslant 2\|f\|_{2,\omega}\|f''\|_{2,\omega},$$

式中 $\|f\|_{2,\omega}=\left(\int_{-\infty}^\infty f^2(x)\omega(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$,2 是最佳常数.

特别,当 $\omega(x)=x$ 时

$$\|f'\|_{2,\omega}\leqslant C\|f\|_{2,\omega}\|f''\|_{2,\omega},$$

式中 $\|f\|_{2,\omega}=\left(\int_0^\infty f^2(x)x\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$, $2.35070<c^2<2.35075$. ([54]5(1987),29 ~ 63)

设 f 在 R^1 上绝对连续,$f''\in L^p(R^1)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, 则

$$\|f'\|_\infty\leqslant C(q)\|f\|_\infty^{\frac{1}{q+1}}\|f''\|_p^{\frac{q}{q+1}},$$

式中 $C(p)=\left(1+\dfrac{1}{q}\right)^{\frac{q}{q+1}}2^{\frac{1-q}{1+q}}$,$p=\infty$ 时归结为 Landau 不等式. (Nonlinear Funt. Anal. Appl. 10(4)(2005),565 ~ 579) 我们问:上述 $C(p)$ 是否为最佳常数?

(9)　**微分插值不等式**:若 f 在[0,1]上二阶连续可微,则必存在与 f 无关的常数 M, 使得

$$\|f'\|^2\leqslant M\|f\|(\|f\|+\|f''\|),$$

式中　$\|f\|=\max\{|f(x)|:0\leqslant x\leqslant 1\}$.

证 不妨设 $f(x)\neq 0$ 且取实数值. 令 $0\leqslant\varepsilon<1/4$,由微分中值定理,必有 $t_1\in(t+\varepsilon,t+2\varepsilon)$,使得

$$\frac{1}{\varepsilon}[f(t+2\varepsilon)-f(t+\varepsilon)]=f'(t_1)=f'(t)+\int_t^{t_1}f''(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

因为 $t_1-t<\varepsilon$,所以,由上式,有

$$|f'(t)|\leqslant\left|\frac{1}{\varepsilon}[f(t+2\varepsilon)-f(t+\varepsilon)]\right|+\int_t^{t_1}|f''(\tau)|\mathrm{d}\tau\leqslant\frac{2}{\varepsilon}\|f\|+\varepsilon\|f''\|,$$

只要令 $\varepsilon=(1/4)\cdot\|f\|^{1/2}(\|f\|+\|f''\|)^{-1/2}$,即可得证.

Whitney-Timan 不等式:若 $f^{(m)}\in L^p[a,b]$,$1\leqslant p<\infty$,则存在仅依赖于 m 和 $[a,b]$ 的常数 C_{mk},使得

$$\|f^{(k)}\|_p\leqslant C_{mk}(\varepsilon^{-k}\|f\|_p+\varepsilon^{m-k}\|f^{(m)}\|_p).\tag{3.12}$$

式中 $0<\varepsilon<\dfrac{b-a}{2}$,$0\leqslant k<m$,当 $f^{(m)}\in C[a,b]$ 时,上述 $\|\cdot\|_p$ 改为 $\|\cdot\|_c$.([81]85)

若 $f\in C^2[a,b]$,$a\leqslant x<y\leqslant b$,则

$$\|f'\|\leqslant\frac{1}{y-x}|f(y)-f(x)|+\frac{1}{2}[b-a+|a+b-x-y|]\|f''\|.$$

(Gavrea, J., Rasa, J., Rev. Anal. Numer. Theor. Approx. 1993, 22(2): 173 ~ 176)

设 $f^{(n-1)}$ 在 R^1 上局部绝对连续(即在每个有限区间上绝对连续),$\varepsilon>0$,S_ε 是 R^1 上具有步长为 ε 的网格,$0\leqslant k<n$,则

$$\|f^{(k)}\|_\infty\leqslant C_n\inf_{\delta\geqslant\varepsilon}\{\delta^{-k}\|f\|_{S_\varepsilon}+\varepsilon^{n-k}\|f^{(n)}\|_\infty\},\tag{3.13}$$

式中 $\|f\|_{S_\varepsilon}=\sup\{|f(x)|:x\in S_\varepsilon\}$,常数 C_n 仅依赖于 n. (Konovalov, V. N., Mat. Zametki, 1980, 27: 209 ~ 215)

Nirenberg, L. 还研究了形如

$$\|f^{(k)}\|_p^p\leqslant\varepsilon\|f^{(n)}\|_p^p+C(\varepsilon)\|f\|_p^p\quad 1\leqslant p<\infty\tag{3.14}$$

和

$$\|f^{(k)}\|_\infty\leqslant\varepsilon\|f^{(n)}\|_\infty+C(\varepsilon)\|f\|_\infty\tag{3.15}$$

的不等式. ([312]1955, 8: 649 ~ 675) 例如:

$$\|f'\|_\infty\leqslant\|f\|_\infty+\frac{1}{6}\|f^{(3)}\|_\infty,\qquad\|f''\|_\infty\leqslant 4\|f\|_\infty+\frac{1}{3}\|f^{(3)}\|_\infty.$$

设 $f^{(n-1)}\in AC[0,1]$,则

$$\|f^{(n-2)}\|_\infty\leqslant 4^{n-2}(n-1)!\|f\|_\infty+(1/2)\|f^{(n)}\|_\infty,n>4.$$

(Babenko, V. F. 等, Ukrain, Mat, Zh, 1995, 47(1): 105 ~ 107)

微分扦值不等式可推广到高维空间,例如,设 A 与 B 为 R^n 中紧子集,f 在 B 附近有二阶连续编导数,则存在与 f 无关的常数 C,使得

$$\Big(\sup_A\sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha f|\Big)^2\leqslant C(\sup_B|f|)[\sup_B|f|+\sum_{|\alpha|=2}\sup_B|D^\alpha f|].$$

(10) **Gorny 不等式**:设 $f^{(n)}\in C[-1,1]$,则

$$\|f^{(k)}\|_c\leqslant n^{2k}\|f\|_c+\frac{2^{n-k}}{(n-k)!}\|f^{(n)}\|_c.\tag{3.16}$$

式中 $0\leqslant k\leqslant n$. 它可推广为:设 $f^{(n)}\in C[a,b]$,则对于 $1\leqslant k\leqslant n-1$,有

$$\| f^{(k)} \|_c \leqslant | T_n^{(k)}(\pm 1) | \cdot \| f \|_c^{1-\frac{k}{n}} \left[\max\left\{ \frac{\| f^{(n)} \|_c}{\| T_n^{(n)} \|_c}, \left(\frac{\varphi}{b-a}\right)^n \| f \|_c \right\} \right]^{k/n}, \tag{3.17}$$

式中 $T_n(x) = \cos(n\arccos x)$ 为第一类 Chebyshev 多项式.

(11) **Hardy 不等式**:设 $f \in L^2(R^1)$,$f^{(n-1)}$ 在 R^1 上局部绝对连续,$0 < m < k < n$,$h > 0$.$\Delta_{\pi h}^m(f)$ 为 f 的步长为 πh 的 m 阶向前差分,则

$$\| f^{(k)} \|_2 \leqslant \frac{n-k}{n} h^{-k} \cdot 2^{-m} \| \Delta_{\pi h}^m(f) \|_2 + \frac{k}{n} h^{n-k} \| f^{(n)} \|_2.$$

式中 $\| f \|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{R^1} | f(x) |^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2}$.$\Delta_h^1(f,x) = f(x+h) - f(x)$,$\Delta_h^m(f,x) = \Delta_h^1(\Delta_h^{m-1}(f,x))$.(Taikov,L. V. [405],1992,52(4):106 ~ 111)

(12) 设区间 $D \subset R^1$,D 的长为 a,记 $\| f^{(k)} \|_\infty = \sup\{ | f^{(k)}(x) | : x \in D \}$,则

$$\| f^{(k-1)} \|_\infty \leqslant \left(\frac{8}{a}\right)^{k-1} \| f \|_\infty + \frac{a}{2} \| f^{(k)} \|_\infty, \tag{3.18}$$

特别,当 $k = 2$,$D = [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$ 时,

$$| f'(x) | \leqslant \frac{2}{a} \| f \|_\infty + \left(\frac{4x^2 + a^2}{4a}\right) \| f'' \|_\infty, x \in D. \tag{3.19}$$

提示:对 $f(\frac{a}{2}) - f(x)$ 与 $f(-\frac{a}{2}) - f(x)$ 作 Taylor 级数展开.([74]Vol. 1. 210)

若 $\mu(E) \geqslant a > 0$,则

$$\| f \|_\infty \leqslant \frac{1}{\sqrt{a}} \| f \|_2 + \sqrt{a} \| f' \|_2. \text{([129]499)}$$

(13) 设区间 $D \subset [-1,1]$,D 的长为 a,记

$$\| f^{(k)} \|_D = \min\{ | f^{(k)}(x) | : x \in D \}.$$

若将 D 分为三个相邻的区间 D_1, D_2, D_3,中间的区间的长为 b,则当 $k \leqslant n$ 时,下式成立

$$\| f^{(k)} \|_D \leqslant \frac{1}{b} (\| f^{(k-1)} \|_{D_1} + \| f^{(k-1)} \|_{D_3}), \tag{3.20}$$

对 k 用归纳法,可推出

$$\| f^{(k)} \|_D \leqslant 2^p \left(\frac{k}{a}\right)^k, \tag{3.21}$$

式中 $p = \frac{1}{2} k(k+1)$.([74]Vol. 1. 202)

(14) 设 $a > 0$,$f^{(3)} \in AC[0,a]$,$f^{(4)} \in L^\infty[0,a]$,则

$$\| f^{(k)} \| \leqslant C_k \| f \|^{1-\frac{k}{4}} \| f^{(4)} \|^{k/4}, k = 1,2,3, \tag{3.22}$$

式中当 $a^4 \| f \|^{-1} \| f^{(4)} \| \geqslant 48(17 + 12\sqrt{2})$ 时,$c_1 = 2^{5/2} \times 3^{-\frac{1}{4}}$,$c_2 = 10 \times 3^{-\frac{1}{2}}$,$c_3 = 2^{3/2} \times 3^{1/4}$.(Zvyagintsev,A. I. ,Latv. Mat. Ezhegodnik,1988,32:187 ~ 189,244)

(15) 设 $f^{(n-1)} \in AC[0,a]$,$f^{(n)} \in L^\infty[0,a]$,$n \geqslant 2$,$0 < k < n$,则

$$\| f^{(k)} \|_{\infty} \leqslant A_{n,k} a^{-k} \| f \|_{\infty} + B_{n,k} a^{n-k} \| f^{(n)} \|_{\infty}, \tag{3.23}$$

特别当 $a^n \| f \|_{\infty}^{-1} \| f^{(n)} \|_{\infty} \geqslant \beta_n$ 时 $\| f^{(k)} \|_{\infty} \leqslant C_{n,k} \| f \|_{\infty}^{1-\frac{k}{n}} \| f^{(n)} \|_{\infty}^{\frac{k}{n}}$.　　(3.24)

式中所有常数 $A_{n,k}, B_{n,k}, C_{n,k}, \beta_n$ 的最佳值均已求出.

(Latv. Mat. Ezhegodnik, 1988, 32: 183 ～ 186, 244)

(16)　设 f 与直至 $f^{(n-1)} \in AC[a,b]$，则

$$\| f^{(k)} \|_{c} \leqslant C(n,k) \| f \|_{c} M^k, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n-1, \tag{3.25}$$

式中　$M = \max\left\{\frac{2}{b-a}, \left(\frac{\| f^{(n)} \|_{\infty}}{\| f \|_{c}}\right)^{1/n}\right\}$，　$C(n,k) \leqslant T_m^{(k)}(1)(1 + \frac{1}{n!}) + \frac{1}{(n-k)!}$，

$T_m(x) = \cos(m\arccos x)$ 为第一类 Chebyshev 多项式. 当 x 远离 a 与 b 时，不等式仍可改进. ([82]238 ～ 241)

(17)　设 f 在 $[a,b]$ 上 n 阶可导，$0 < k < n$，则

$$\| f^{(k)} \|_{\infty} \leqslant 4e^{2k} \binom{n}{k}^{k} \| f \|_{\infty}^{1-(\frac{k}{n})} M^{\frac{k}{n}}, \tag{3.26}$$

式中　$M = \max\{ \| f^{(n)} \|_{\infty}, \frac{n!}{(b-a)^n} \| f \|_{\infty}\}$. 若 $[a,b]$ 换成 $(0,\infty)$ 或 R^1，则 $M = \| f^{(n)} \|_{\infty}$. ([322]1939, 71: 318 ～ 358 或[21]7)

(18)　1990 年，Brown，. R. C. 和 Hinton，D. B. 研究了形如

$$\left(\int_E | x^{\beta} f^{(k)}(x) |^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \leqslant C\left(\int_E | x^{\varepsilon} f(x) |^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{1-\lambda}{q}} \left(\int_E | x^{\alpha} f^{(n)}(x) |^r \mathrm{d}x\right)^{\lambda/r} \tag{3.27}$$

成立的充分条件，其中 $1 \leqslant p,q,r \leqslant \infty$，$0 \leqslant k \leqslant n-1$，$f^{(n-1)}$ 绝对连续. ([21]51 ～ 52)

(19)　1998 年，Ilyin，A. A. 还得出 $\| f^{(k)} \|_{\infty} \leqslant C(k,m) \| f \|_2^{1-\alpha} \| f^{(m)} \|_2^{\alpha}$ 中 $C(k, m)$ 的最佳值.

式中 $\alpha = \frac{2k+1}{2m}$，$-\frac{1}{2} < k < m - \frac{1}{2}$. ([317](2), 1998, 58(1): 84 ～ 96)

[21] 整个第一章详细总结了从 1913 年到 1990 年对 L-K 不等式研究的历史，各种改进和推广，列出参考文献达 217 篇，但这 217 篇文献远非完整. 例如上面一些结果和[61][68]，[82] 等，就不在这些文献中，特别是没有收录我国学者的工作. 孙永生的专著[68] 上册用了一章(第六章)120 页的篇幅讨论了到 20 世纪 80 年代初期为止对L-K 不等式的种种改进和推广，以及在函数逼近论中的广泛而深刻的应用，收集了我国学者，包括孙永生、黄达人、王建忠等的重要贡献.

1990 年后，这方面的研究仍在不断深化，继 Stein，E. M. 将 L-K 不等式推广到 L^p 空间后，1996 年，Ha Huy Bang 又将其推广到 Orlicz 空间. ([301]1996, 203(3): 861 ～ 867)2000 年，Bang Ha Huy，Babenko 等又将其推广到其他的抽象空间. ([359]2000, 61(1): 153 ～ 159 和 Dokl. Akad. Nauk 1997, 356(4): 439 ～ 441)2000 年，Ditzian，Z. 概述了 L-K 不等式新的研究成果和未解决的问题，提出了若干猜想，并证明了当 $\mathrm{X} = \mathrm{L}^{\mathrm{p}}(\mathrm{R}^1)$，$0 < \mathrm{p} < 1$ 时 L-K 不等式不成立. ([303]2000, 3(1): 15 ～ 24)[21] 还收集了半群和群上算子的 L-K 不等式. 1995 年，Rassias，T. M. 推广了这些结果.

设 X 为复 Banach 空间，$t \to T(t)$ ($\| T(t) \| \leqslant 1, t > 0$) 是 X 上强连续收缩半群，它

的无穷小生成算子是 A. 则 $\| Ax \|^2 \leqslant \frac{4}{3}\| x \| \| A^2 x \|, x \in D(A^2)$;

$$\| Ax \|^3 \leqslant \frac{9}{8}\| x \|^2 \| A^3 x \|, \| A^2 x \|^3 \leqslant 3 \| x \| \| A^3 x \|^2, x \in D(A^3);$$

$$\| Ax \|^4 \leqslant \frac{1024}{3}\| x \|^3 \| A^4 x \|, \| A^2 x \|^4 \leqslant \frac{10}{9}\| x \|^2 \| A^4 x \|^2,$$

$\| A^3 x \|^4 \leqslant 192 \| x \| \| A^4 x \|^3, x \in D(A^4)$. ([301]1996,202(1):280 ~ 301)

综上所述,L-K不等式的研究从1913年Landau发表从“$|f(x)| \leqslant 1, |f''(x)| \leqslant 1 \Rightarrow |f'(x)| \leqslant 2$”算起,已经历了将近一个世纪,而且从20世纪60年代以来一直是不等式的研究热点之一. 分析其原因,我们认为:

第一,L-K不等式研究的内涵十分丰富.

孙永生在[68]497 ~ 498提出了关于 L^p 空间中的 L-K 不等式的一般形式:

给定 $k, n \in N, 0 \leqslant k < n, 1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$,区间 D 表示$[0,a]$、$R^+ = (0,\infty)$ 或 R^1,$f^{(n-1)}$ 在 D 上局部绝对连续,$f^{(n)} \in L^p(D), \alpha, \beta > 0, \alpha + \beta = 1, \alpha = (n - k - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})/(n - \frac{1}{p} + \frac{1}{r})$,则

$$\| f^{(k)} \|_q \leqslant C \| f \|_r^{\alpha} \| f^{(n)} \|_p^{\beta}. \tag{3.28}$$

式中常数 C 与 n,k,p,q,r,α,β,f 有关,还与区间 D 有关,如何确定 C 的最佳值是一个复杂的问题,至今还没有完全解决. 将 $L^p(D)$ 空间换成其他函数空间,相应的结果还不多. 将 f 换成不同的算子、算子半群,还有将(3.28)式右边换成两个范数之和或换成三个或三个以上范数的积或和,例如,1997年,Babenko等研究了在有限区间上形如

$$\| f^{(k)} \|_q \leqslant C_1 \| f \|_p + C_2 \| f^{(n)} \|_r$$

的不等式,其中 $1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty, 0 < k < n$. (Ukrain Mat. Zh. 1997,49(5):619 ~ 628)说明还有许多工作值得进一步去做,研究范围是十分广泛的.

第二,L-K不等式研究的深化,需要新的数学工具. 例如,可微函数类的L-K不等式的证明,用到著名的Kolmogorov比较定理(见下面No. 6);而对常系数线性微分算子的L-K不等式的证明用到函数重排;周期卷积类的L-K不等式的证明用到卷积变换技巧,而逼近论中样条理论的发展使得人们对 L-K 不等式有了新的认识,尤其是完全样条为L-K不等式的研究提供了新的工具.

第三,随着对最佳逼近极值问题研究的进展,逐步揭示了L-K不等式与逼近论的极值问题有着深刻的联系,包括宽度问题,最佳求积问题,函数类的最佳逼近问题等,这类问题在数值分析、应用数学、计算机科学中都有广泛的应用背景. 例如,L-K不等式与最佳数值微分问题及 k 重微分(无界)算子 D^k 的稳定计算有关,它还反映了可微函数类的嵌入性质. 这就说明,L-K不等式在21世纪仍是值得关注的研究方向.

6.　**Kolmogorov 比较定理**(1939):设 $\lambda > 0$,令

$$\varphi_{\lambda,0}(x) = \mathrm{sgn}(\sin \lambda x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)\lambda x}{2k+1};$$

当 $r = 2m+1, m = 0,1,2,\cdots$,时,

$$\varphi_{\lambda,r}(x) = \int_{\frac{\pi}{2\lambda}}^{x} \varphi_{\lambda,r-1}(t)\mathrm{d}t = \frac{4}{\pi\lambda^r}(-1)^{\frac{r+1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)\lambda x}{(2k+1)^{r+1}};$$

当 $r = 2m, m = 1,2,\cdots$,时,

$$\varphi_{\lambda,r}(x) = \int_{0}^{x} \varphi_{\lambda,r-1}(t)\mathrm{d}t = \frac{4}{\pi\lambda^r}(-1)^{r/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\lambda x}{(2k+1)^{r+1}},$$

于是当 $r \geqslant 1$ 时,$\varphi_{\lambda,r}(x)$ 是 $\varphi_{\lambda,0}(x)$ 的 r 次积分,其周期为$\dfrac{2\pi}{\lambda}$,周期平均值为零.

设 f 的 $r-1$ 阶导数在 R^1 上局部绝对连续(即在每个有限区间上绝对连续),且 $\| f^{(r)} \|_\infty \leqslant 1$,若 $\exists \lambda > 0$,使得

(1) $\| f \|_c \leqslant \| \varphi_{\lambda r} \|_c$,

(2) 存在两点 $x_1, x_2 \in R^1$,使得 $f(x_1) = \varphi_{\lambda r}(x_2)$.

则 $\quad | f'(x_1) | \leqslant | \varphi'_{\lambda r}(x_2) |. \qquad (3.29)$

([61]100 ~ 104)

推论 设 $f^{(r-1)}$ 在 R^1 上局部绝对连续,且 $\| f^{(r)} \|_\infty \leqslant 1$,若 $\exists \lambda > 0$,使得 $\| f \|_c \leqslant \| \varphi_{\lambda r} \|_c$,则

(1) $\| f^{(k)} \|_\infty \leqslant \| \varphi_{\lambda,r-k} \|_\infty, k = 1,\cdots,r. \qquad (3.30)$

(2) R^1 上的连续模满足:$\omega(f,t) \leqslant \omega(\varphi_{\lambda r},t), 0 \leqslant t < \infty$; $\qquad (3.31)$

(3) 若 $\exists x_0, y_0$,使得 $f(x_0) = \varphi_{\lambda,r}(y_0)$,$[a,b]$ 是包含 y_0 的区间,$\varphi_{\lambda,r}$ 在$[a,b]$ 上单调.

若 $\varphi_{\lambda,r}(t)$ 在$[a,b]$ 上递增,则

$$f(x_0+x) \leqslant \varphi_{\lambda,r}(y_0+x), 0 \leqslant x \leqslant b-y_0, \qquad (3.32)$$

$$f(x_0-x) \geqslant \varphi_{\lambda,r}(y_0-x), 0 \leqslant x \leqslant y_0-a. \qquad (3.33)$$

若 $\varphi_{\lambda,r}(t)$ 在$[a,b]$ 上递减,则(3.32) 与(3.33) 式中的不等号均反向. 特别地,若 $f(x_0) = \varphi_{\lambda,r}(y_0) = 0$,则

$$| f(x_0+x) | \leqslant | \varphi_{\lambda,r}(y_0+x) |, \quad | x | \leqslant \frac{\pi}{2\lambda}. \qquad (3.34)$$

Kolmogorov 比较定理是证明当 $X = L^\infty(R^1)$ 时的 L-K 不等式(3.5) 的基本工具,它在逼近论极值问题中也有许多应用.

$L^p(R^1)$ 中的 Kolmogorov 比较定理:设 $f^{(r-1)}$ 在 R^1 上局部绝对连续,$\| f^{(r)} \|_\infty \leqslant 1$,且

$$\| f \|_c \leqslant \| \varphi_{nr} \|_c, \quad \max_{a,b} \left| \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right| \leqslant 2 \| \varphi_{n,(r+1)} \|_c,$$

则 $\quad \| f \|_p \leqslant \| \varphi_{nr} \|_p, 1 \leqslant p < \infty. \qquad (3.35)$

(证明见[61]105 ~ 108,比较定理推广到线性微分算子,见[68] 上册 439 ~ 453)

7. 设 $f,g \in AC[a,b]$,g 在$[a,b]$ 上还严格递增且为凹函数,若 $f(a) = g(a)$,$f(b) > g(b)$,或 $f(b) = g(b)$,$f(a) < g(a)$,则 $\exists x,y \in (a,b)$,使得 $f(x) = g(y)$,且

$$f'(x) > g'_-(y). \qquad (3.36)$$

式中 $g'_-(y)$ 是 g 在 y 点的左导数.

(证明见[61]98 ~ 99,这是证明 No. 6 比较定理的引理)

8. 设 f 在 R^1 上非负可微,$0 < p \leqslant 1$,则

$$|f'(x)|^{p+1} \leqslant \left(1+\frac{1}{p}\right)^p [f(x)]^p \sup\left\{\frac{|f'(x\pm h)-f'(x)|}{h^p}: h>0\right\}, \quad (3.37)$$

式中 $f'(x\pm h)$ 在 $f'(x) \leqslant 0$ 时取"+"号,在 $f'(x) \geqslant 0$ 时取"−"号,常数 $(1+\frac{1}{p})^p$ 是最佳的.([392]1989,112A:331 ~ 341)

9. **Wirtinger 不等式**:设 $f^{(n-1)} \in AC[a,b]$,$f^{(n)} \in L^q[a,b]$,f 在 a 点有 k 重零点,在 b 点有 $n-k$ 重零点,$0 \leqslant k \leqslant n$,$1 \leqslant p,q \leqslant \infty$,则

$$\|f\|_p \leqslant C(n,k,p,q)(b-a)^{n+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f^{(n)}\|_q, \quad (3.38)$$

式中

$$C(n,k,p,\infty) = \frac{B(pk+1,pn-pk+1)}{n!}, 1 \leqslant p < \infty,$$

$$C(n,k,\infty,\infty) = \frac{k^k(n-k)^{n-k}}{n!(n-k)!},$$

$$C(n,k,1,\infty) \leqslant C(n,k,p,q) \leqslant C(n,k,\infty,1);\ C(2,1,2,2,) = \frac{1}{\pi^2}.$$

但在一般情形下,如何求出 $C(n,k,p,q)$ 的最佳值却是一个十分庞大的研究课题.[21] 第二章 66 ~ 113 专门介绍了相关的不等式,并引用了 218 篇论文,下面几个不等式和下一章的某些积分不等式实际上仍然涉及这一研究课题,例如,Traple,J. 给出 **Wirtinger 不等式的加权形式**:设 $f,g \in AC[0,a]$,$f(0)=f(a)=0$,$g(0)=g(a)=0$,ω 在$[0,a]$ 上非负连续,则$\int_0^a |fg|\omega \leqslant \frac{a}{8}\left(\int_0^a \omega\right)\left[\int_0^a (|f'|^2+|g'|^2)\right]$.

当 $f=g\equiv 0$ 或 $\omega(x)=0$ a. e. 于$[0,a]$ 时等号成立.([21]95)

(1) 设 $f' \in L^2[0,2\pi]$,$\int_0^{2\pi} f = 0$,则 $\|f\|_2 \leqslant \|f'\|_2$.

仅当 $f(x) = c_1\cos x + c_2\sin x$ 时等号成立.([1]207,定理 258)

对于非周期情形,设 $f' \in L^2[a,b]$,$f(a)=f(b)=0$,则 $\|f\|_2 \leqslant \frac{b-a}{\pi}\|f'\|_2$.

(2) 若 $f'' \in L^2[a,b]$,$f(a)=f(b)=0$,$\int_a^b f = 0$,则

$$\|f\|_2 \leqslant \left(\frac{b-a}{\pi}\right)^2 \|f''\|_2.$$

若 $f \in AC(a,b)$,f 的 Fourier 级数在(a,b) 上一致收敛,$f(a)=f(b)$,$\int_a^b f = 0$,则上式可改进为

$$\|f\|_2 \leqslant \left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^2 \|f''\|_2. \quad ([21]68)$$

(3) 设导数 f' 在(a,b) 上有界,$f(a)=f(b)=0$. 将(a,b) 分解为两个互不相交的可测子集 A,B,则

$$\int_a^b f^2 \leqslant \frac{(b-a)^2}{8}\int_A (f')^2 + \|f\|_\infty (b-a)\int_B |f'|;$$

$$\int_a^b |ff'| \leqslant \frac{(b-a)^2+8}{16}\int_A (f')^2 + \|f\|_\infty \left(\frac{b-a}{2}+1\right)\int_B |f'|.$$ ([21]68 ~ 69)

(4) **Northcott 不等式**：设 $f^{(k-1)} \in AC[0,2\pi]$，$\int_0^{2\pi} f = 0$，则 $\|f\|_\infty \leqslant \frac{4}{\pi}K_k \|f^{(k)}\|_\infty$，式中 $K_k = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m(k+1)}}{(2m+1)^{k+1}}$ 为 Favard 常数.([317]1939,14:198 ~ 202)

(5) 设 $f' \in L^{2n}[-\pi,\pi]$，$f(\pi) = f(-\pi)$，$\int_{-\pi}^{\pi} f^{2n-1} = 0$，则

$$\|f\|_{2n} \leqslant \left(\frac{1}{2n-1}\right)^{1/2n}\left(n\sin\frac{\pi}{2n}\right)\|f'\|_{2n}.$$

等号成立的情形见 Trans. Roy. Soc. Canada Sect. Ⅲ. 1959,53(3):21 ~ 30.

(6) 设 $f \in AC[0,\pi/2)$，$f(0) = 0$，$p > 1$，则

$$\|f\|_p \leqslant \left(\frac{1}{p-1}\right)^{1/p}\left(\frac{p}{2}\sin\frac{\pi}{p}\right)\|f'\|_p,$$

等号成立和更一般的情形见 Beesack[313]1961,11:39 ~ 61.

(7) **Schmidt 不等式**：设 $0 < p \leqslant \infty$，$1 \leqslant q \leqslant \infty$，$a \leqslant x_0 \leqslant b$，$f \leqslant AC[a,b]$，$f' \in L^p[a,b]$，$r = 1 + (1/p) - (1/q)$，$f(x_0) = 0$，则

$$\|f\|_p \leqslant W\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q},\frac{x_0-a}{b-a}\right)C(p,q)(b-a)^r\|f'\|_q,$$

式中 $W(t,x) \in [1/2,1]$ 定义为

$$W(t,x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}+\left|\frac{1}{2}-x\right|\right)^{1+t}, & -1 \leqslant t \leqslant 0, \\ \left(x^{1+(1/t)}+(1-x)^{1+(1/t)}\right]^t, & 0 < t < \infty, \end{cases}$$

$C(p,q) \in (0,1]$ 定义为 $C(p,q) = A(p,q)B(p,q)$，

$A(p,q) = \left(\frac{1}{p}\right)^{1/p}\left(\frac{1}{q'}\right)^{1/q'}u^{-u}$，式中 $u = \frac{1}{p}+\frac{1}{q'}$，

$B(p,q) = \Gamma\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{q'}\right)\left[\left(\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{q'}\right)\right]^{-1}$，$\frac{1}{q}+\frac{1}{q'} = 1$.

(Waldron, Shayne, East J. Approx. 1997,3(2):117 ~ 135)

(8) **W-B 不等式(Wirtinger-Beesack 不等式)**：设 $f \in AC[a,b]$，ω_1,ω_2 为非负可积权函数，则

$$\|f\|_{2,\omega_1} \leqslant \|f''\|_{2,\omega_2}.$$

(Demonstr. Math. 1999,32(3):495 ~ 502)

(9) 设 $f' \in C[0,2\pi]$，$\int_0^{2\pi} f = 0$，则

$$\|f\|_\infty \leqslant \sqrt{\pi/6}\,\|f'\|_2.$$

(Alzer, H., Math. Pannonica, 1999,3(1):83 ~ 89)

(10) **加权 Wirtinger 不等式**：设 f,f_k,g 都在$[0,a]$上绝对连续，w 是$[0,a]$上正的

可积权函数，$\alpha,\beta\geqslant 1$，则

$$\|wfg\|_1\leqslant(a/8)\|w\|_1(\|f'\|_2^2+\|g'\|_2^2);$$

$$\|wf^{\alpha}g^{\beta}\|_1\leqslant a^{\alpha+\beta-1}\cdot 2^{-(\alpha+\beta+1)}\|w\|_1(\|f'\|_{2\alpha}^{2\alpha}+\|g'\|_{2\beta}^{2\beta});$$

$$\|wf_1^2\cdots f_n^2\|_1\leqslant(a/4)^n\|w\|_1\|f'_1\|_2^2\cdots\|f'_n\|_2^2;$$

$$\|wfg'\|_1+\|wf'g\|_1\leqslant(\sqrt{a}/2)\|w\|_2(\|f'\|_2^2+\|g'\|_2^2);$$

$$\|wf^{2\alpha}\|_1\leqslant a^{2\alpha-1}\cdot 2^{-2\alpha}\|w\|_1\|f'\|_{2\alpha}^{2\alpha}.$$

([301]1986，117，(2)：318 ~ 325，[330]1986，17(1)：69 ~ 73)

(11) **Poincare 不等式**：[4]§2.23.1 对于 Wirtinger 不等式的历史发展和各种推广作了详细的讨论，其中高维 Wirtinger 不等式又称为球面上的 Poincare 不等式.

10. **Hardy 不等式**：设 $p>1,q>0,w_0,w_k$ 是(0，1)上 a. e. 为正的可测函数，Kufner Alois 研究了下述高阶 Hardy 不等式：

$$\|f\|_{q,w_0}\leqslant c\|f^{(k)}\|_{p,w_k},$$

式中 $\|f^{(k)}\|_{p,w_k}=\left(\int_0^1|f^{(k)}(x)|^p w_k(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}$，

$f^{(0)}$ 表示 f，c 为正常数. (Bayreuther Math. Schr，1993，44：105 ~ 146)

1986 年，Mingarelli，A. B. 对于 R^1 上权函数 $\omega(x)=\exp(\alpha x^2)(\alpha>0)$，证明

$$\|f\|_{2,\omega}\leqslant(2\alpha)^{(-1/2)}\|f'\|_{2,w}.$$

(Bull，Inst. Math. Acad，Sinica，1986，14(3)：287 ~ 288)

我们在第 13 章 No. 3 再详细讨论 Hardy 不等式.

11. **Levin 不等式**：设 $f\in C^n[a,b]$，且满足 $f(x_1)=f'(x_2)=\cdots=f^{(n-1)}(x_n)=0$，$\forall x_k\in[a,b]$，则

$$\|f\|_c\leqslant C_n(b-a)^n\|f^{(n)}\|_c,\tag{3.39}$$

式中 $C_{2n-1}=\dfrac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n}{(2n)!}$，$C_{2n}=\dfrac{E_n}{(2n)!}$，

B_n,E_n 分别为 Bernoulli 数和 Euler 数. (Soviet Math. 1961，2：523 ~ 524)

12. 设 $f\in C^n[a,b]$，f 在$[a,b]$内有 n 个零点(包括在 a 和 b 的零点)，则

$$\|f\|_c\leqslant\frac{(n-1)^{n-1}(b-a)^n}{n!n^n}\|f^{(n)}\|_c;\tag{3.40}$$

$$\|f^{(k)}\|_c\leqslant\frac{k(b-a)^{n-k}\|f^{(n)}\|_c}{n(n-k)!}.\ 1\leqslant k\leqslant n-1.\tag{3.41}$$

([21]80) 特别，$\|f\|_c\leqslant\dfrac{(b-a)^2}{8}\|f''\|_c$，$\|f'\|_c\leqslant\dfrac{b-a}{2}\|f''\|_c$.

13. **Sobolev 不等式**：

Sobolev 不等式的原始框架是指用函数的高阶导数去估计低阶导数，这种估计至今已发展成为偏微分方程解的存在性和正则性理论、变分学、几何测度论及分析数学的众多分支中的标准工具，并在此基础上，又发展了许多新的理论.

(1) 最基本的 Sobolev 不等式是 f 的梯度 ∇f 的 $L^2(R^n)$ 范数和 f 的 $L^q(R^n)$ 范数之间的联系：

① 当 $n \geqslant 3$ 时，$\| \nabla f \|_p \geqslant C(p,n) \| f \|_q$，式中

$$1 < p < n,\quad q = \frac{pn}{n-p},\quad C(2,n) = \frac{\sqrt{n(n-2)}}{2} \mid S^n \mid^{\frac{1}{n}},\quad \mid S^{n-1} \mid = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

是 R^n 中单位球面 S^{n-1} 的面积.

当 $\| f \|_2 = 1$ 时，对任意 $n \geqslant 1$，下式成立

$$\int_{R^n} \mid \nabla f(x) \mid^2 \mathrm{d}x \geqslant C(p,n) \int_{R^n} (\mid f(x) \mid^2)^{1+\frac{2}{n}} \mathrm{d}x.$$

当 $p \neq 2$ 时，$C(p,n)$ 的最佳值见 Ann, Math. Pura Appl. 110(1976):353 ~ 372.

② 当 $n \geqslant 2$ 时，$(f, \mid p \mid f) \geqslant C_n \| f \|_q^2$，式中 $q = \dfrac{2n}{n-1}$，$\mid p \mid$ 是相对论动能.（第 13 章 No. 26）

$$C_n = \frac{n-1}{2} \mid S^n \mid^{\frac{1}{n}}.$$

仅当 $f(x) = C_1 (C_2^2 + \mid x - a \mid^2)^{-\frac{n-2}{2}} (C_2 > 0, a \in R^n)$ 时等号成立.

③ 当 $n = 2$ 时，$\| \nabla f \|_2^2 + \| f \|_2^2 \geqslant C(2,q) \| f \|_q^2$，$2 \leqslant q < \infty$，式中，

$$C(2,q) > \left[q^{1-\frac{2}{q}} (q-1)^{-1+\frac{1}{q}} \left(\frac{q-2}{8\pi} \right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} \right]^{-2}.$$

我们问：$C(2,q)$ 的最佳值是多少？

④ 当 $n = 1$ 时，$\| f' \|_2^2 + \| f \|_2^2 \geqslant 2 \| f \|_\infty^2$.

⑤ 当 $n = 1$ 时，$(f, \mid p \mid f) + \| f \|_2^2 \geqslant C(1,q) \| f \|_q^2$，$2 \leqslant q < \infty$，式中，

$$C(1,q) > \left[(q-1)^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2q}} \left(\frac{q(q-2)}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} \right]^{-2}.$$

我们问：$C(1,q)$ 的最佳值是多少？

以上不等式的要点在于它们都体现了不确定性原理，即它们以函数的“外展”给出了函数平均梯度的下界，这些原理还可推广到高阶导数，即推广到 Sobolev 空间 $W^{m,p}(R^n)$，还可将其中的 R^n 换成 R^n 中的更一般的区域 Ω（开集）：

$$W^{m,p}(\Omega) = \{ f: \Omega \to C, f \text{ 及其直到 } m \text{ 阶导数均属于 } L^p(\Omega) \}.$$

这时，要求对区域 Ω 加以限制：即 Ω 具有关于张角 θ 和半径 r 的锥性质，即锥 $\{ x \in R^n : x \neq 0, x_n > \mid x \mid \cos\theta \}$ 与球 $B(0,r)$ 的交集.

设 $1 \leqslant p \leqslant q$，$m \geqslant 1$，$k \leqslant m$，$f \in W^{m,p}(\Omega)$.

① 若 $kp < n$，$p \leqslant q \leqslant \dfrac{np}{n-kp}$，则

$$\| f \|_{W^{m-k,q}(\Omega)} \leqslant C \| f \|_{W^{m,p}(\Omega)}.$$

② 若 $kp = n$，则

$$\| f \|_{W^{m-k,q}(\Omega)} \leqslant C \| f \|_{W^{m,p}(\Omega)},\quad p \leqslant q < \infty.$$

③ 若 $kp > n$，则

$$\max_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m-k} \{ \sup_{x \in \Omega} \mid D^\alpha f(x) \mid \} \leqslant C \| f \|_{W^{m,p}(\Omega)}.$$

式中常数 $C = C(m,k,q,p,\theta,\gamma)$ 与 Ω, f 无关.([167] 第八章)

(2) Nash 不等式:设 $f \in H^1(R^n) \cap L^1(R^n)$,则

$$\| f \|_2^{1+\frac{2}{n}} \leqslant C(n) \| \nabla f \|_2 \| f \|_1^{\frac{2}{n}},$$

式中

$$[C(n)]^2 = 2n^{-1+\frac{2}{n}}\left(1+\frac{n}{2}\right)^{1+\frac{2}{n}} \lambda_N^{-1} |S^{n-1}|^{-\frac{2}{n}}, \qquad \lambda_N = min\left\{\frac{\| \nabla f \|_2^2}{\| f \|_2^2}\right\} = \alpha^2,$$

而 α 是 $u(r) = c r^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(\alpha r)$ 的导数 $u'(1) = 0$ 的最小非零数.(证明见[167]:198 ~ 199)

(3) 对数型 Sobolev 不等式:设 $f \in H^1(R^n)$,$a > 0$,则

$$\frac{a^2}{\pi}\int_{R^n} |\nabla f(x)|^2 dx \geqslant \int_{R^n} |f(x)|^2 \log\left(\frac{|f(x)|^2}{\| f \|_2^2}\right) dx + n(1+\log a) \| f \|_2^2.$$

(证明见[167]:201 ~ 202)

(4) CKN(Caffarelli-Kohn-Ninenberg) 不等式:

$$\left(\int_{R^n} \frac{|\nabla u|^2}{|x|^{2b}} dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{R^n} \frac{|u|^2}{|x|^{2a}} dx\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant C(a,b)\int_{R^n} \frac{|u|^2}{|x|^{a+b+1}} dx,$$

式中 $u \in C_0^\infty(R^n - \{0\})$,$a,b \in R^1$,$C(a,b) = \frac{1}{2} | n - (a+b+1) |$ 是最佳常数.

当 $a = 1$,$b = 0$ 得到 Hardy 不等式.另见([330]40(2009),401 ~ 403)

(5) 加权 Sobolev 插值不等式:

$$\| \nabla^k f \|_{q,w} \leqslant C \| f \|_{r,w}^{1-\frac{1}{h}} \| \Delta^j f \|_{p,v}^{\frac{1}{h}},$$

式中 $0 \leqslant k \leqslant j$,$p,r,q \in [1,\infty)$,$h > 1$,$\frac{1}{q} \leqslant \frac{h-1}{rh} + \frac{1}{ph}$,$v,w$ 为双倍权.([307]1090 ~ 26014)

(6) 设 $B \subset R^n$,$q^{-1} = p^{-1} - n^{-1}$,则

$$\left(\int_B |f|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C\left(\int_B \sum_{k=1}^n \left|\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

(7) 设 $p \leqslant \frac{n}{s}$,$q^{-1} = p^{-1} - \left(\frac{s}{n}\right)$,$1 \leqslant r \leqslant q$,则

$$\left(\int_B |f|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C_1\left(\int_B |f|^r\right)^{\frac{1}{r}} + C_2\left\{\int_B \sum_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n} \left|\frac{\partial^\alpha f}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}, \quad |\alpha| = s.$$

Sobolev 在 Bull. Acad. Sci. URSS4(1940),4 ~ 16 中仅证明(6)(7) 中存在常数 C, C_1,C_2,我们问:C, C_1, C_2 的最佳值是多少?

(8) 设 $f \in AC[0,a]$,$f(0) = f(a) = 0$,$1 \leqslant q < \infty$,$1 < p < \infty$,$1/p + 1/p' = 1$,则

$$\| f \|_q \leqslant a^t \frac{q\left(1+\frac{p'}{q}\right)^{1/p}}{2\left(1+\frac{q}{p'}\right)^{1/q} B\left(\frac{1}{q},\frac{1}{p'}\right)} \| f' \|_p, \tag{3.42}$$

式中 $B(\alpha,\beta)$ 为 Beta 函数,$t = (1/q) + (1/p')$.

(9) 设 f 在 R^n 上具有紧支集且充分光滑,$1 < p < n$,则

$$\| f \|_q \leqslant C(n,p) \| \nabla f \|_p, \tag{3.43}$$

式中 $|\nabla f|$ 是 f 的梯度 ∇f 的长度：$|\nabla f| = \left(\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$，$q = \frac{np}{n-p}$，

$$C(n,p) = \frac{1}{\pi^{1/2}n^{1/p}}\left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{1-\frac{1}{p}}\left[\frac{\Gamma(1+\frac{n}{2})\Gamma(n)}{\Gamma(\frac{n}{p})\Gamma(1+n-\frac{n}{p})}\right]^{1/n}.$$

仅当 $f(x) = (a+b|x|^{\frac{p}{p-1}})^{1-\frac{n}{p}}, a,b>0$ 时等号成立，其中 $|x| = \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2\right)^{1/2}$，(8)、(9) 中的常数都是最佳的.

(Talenti, G.. Istit. Mat. Univ, Firenze, 1974 ~ 75, 22: 1 ~ 32)

14. (1) **反向 Poincare 不等式**：设 f 在 $[0,a]$ 上非负递增且有一阶连续导数，$p>2$，$m\geqslant 1$，则

$$\left[\int_0^a (f')^{1/p}\right]^p \leqslant \frac{a^{p-m-1}}{m^{p-2}}B\left(\frac{1}{m},\frac{p-2}{p-1}\right)^{p-1}\left(\int_0^a f(x)x^{m-1}\mathrm{d}x\right),$$

式中 $B(\cdot,\cdot)$ 为 Beta 函数 . (Benguria, R. D. 等[302]2000, 5(1): 91 ~ 96)

(2) 设 f'' 在 $[0,\infty)$ 上连续，$\alpha\geqslant 0$，则

$$\left(\int_0^\infty [f'(t)]^2 t^{1+\alpha}\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant 4\left(\int_0^\infty [f(t)]^2 t^\alpha \mathrm{d}t\right)\left(\int_0^\infty t^\alpha[(1+\alpha)(f'(t))^2 + t^2(f''(t))^2]\mathrm{d}t\right).$$

设式中的积分均收敛. (Pachpatte, B. G. , Stud, Univ. Babes-Bolyai, Math. 1993, 38(4): 25 ~ 29)

(3) 设 $f\in C^1[a,b]$，$f(a)=f(b)$，$p>1$ 且 p 是奇整数之商，若 $f\not\equiv 0$，$\int_a^b f^p = 0$，则

$$\|f'\|_p \geqslant c(p)\left(\frac{4}{b-a}\right)\|f\|_p. \tag{3.44}$$

式中 $c(1)=1$，$c(p) = (p-1)^{1/p}\frac{(\pi/p)}{\sin(\pi/p)}$，$p>1$. (Feinberg, J. M. , [385]1979, 10: 1258 ~ 1271)

15. 设 $f\in AC[0,2\pi]$，$f'\in L^2(0,2\pi)$，$f(0)=f(2\pi)$，

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x = 0, k=0,1,\cdots,n-1, \text{则}$$

$$\|f'\|_2 \geqslant n\|f\|_1^{1/2}. \tag{3.45}$$

仅当 $f(x) = C_1\cos nx + C_2\sin nx$，$x\in[0,2\pi]$ 时等号成立.

(Everitt, W. N. , Lecture Notes Math, 1976, 564: 93 ~ 105)

16. 设 $f\in C^2[a,b]$，$f(a)=f(b)=0$，则

$$\|f\|_\infty \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}\left(\frac{p-1}{2p-1}\right)^{1-(1/p)}\|f''\|_p,\ p>1. \tag{3.46}$$

这相当于 No. 9. (3.38) 中，$C(2,1,\infty,p) = \frac{1}{4}\left(\frac{p-1}{2p-1}\right)^{1-(1/p)}$.

(Lupas, A. , [331]1980, 678 ~ 715: 24 ~ 28 或[21]247 ~ 257)

17. 设 $f\in C^2(-\infty,\infty)$，$\lambda>0$，则

$$\| f \|_{\infty} \leqslant \frac{1}{\lambda} \| f'' - \lambda f \|_{\infty}; \quad \| f' \|_{c} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \| f'' - \lambda f \|_{c}.$$

(Muldowney, J. S., Proc. roy, Irish Acad., Sect. A 1976, 76: 85 ~ 100)

18. **Aumann 不等式**:设 $f \in C^2[a,b]$, $f(a) = 0$. $f(b) \geqslant 0$, $\| f \|_c > 0$,则

$$\min_{x \in [a,b]} \left| \frac{[f'(x)]^2}{f''(x)} \right| \leqslant \max\left\{ \| f \|_c, \frac{[f(b)]^2}{8 \| f \|_c} + \frac{\| f \|_c}{2} \right\}.$$

若 f 为复函数,则上式中 $\| f \|_c$ 换成 $\| \mathrm{Im} f \|_c$. ([354]1933, 37: 578 ~ 581)

19. **Borel 不等式**:设 $f \in C^{\infty}[0,1]$, $f(1) = 1$, $f^{(k)}(0) = 0$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $\| f^{(k)} \|_{\infty} = \sup\{ | f^{(k)}(x) | : x \in [0,1] \}$,则存在与 f, n 无关的常数 M,使得

$$\sum_{k=1}^{n} \| f^{(k)} \|_{\infty}^{-1/k} \leqslant M.$$

20. **Turan 不等式**:设 $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, w 是 (a,b) 上正的可积函数, $\int_a^b t^n w(t) \mathrm{d}t < \infty$, $(\forall n \geqslant 0)$. $\| f \|_{2,w} = \left(\int_a^b | f(t) |^2 w(t) \mathrm{d}t \right)^{1/2}$. $P_n(x)$ 为 n 阶复系数多项式,令

$$C_n^{(k)} = \sup\left\{ \frac{\| P_n^{(k)} \|_{2,w}}{\| P_n \|_{2,w}} : P_n \right\},则$$

(1) $$\frac{1}{n-k+1} \sum_{j=1}^{n-k} \binom{n-j}{k}^2 \leqslant (C_n^{(k)})^2 \leqslant \sum_{j=0}^{n-k} (j+1) \binom{n-j-1}{k-1}^2;$$

(2) $$\frac{1}{k! \sqrt{2k+1}} \leqslant \liminf_{n \to \infty} \frac{C_n^{(k)}}{n^k} \leqslant \limsup_{n \to \infty} \frac{C_n^{(k)}}{n^k} \leqslant \frac{1}{(k-1)! \sqrt{2k(2k-1)}}.$$

(Monatsh Math. 1990, 109(2): 113 ~ 122)

21. 设 f 在 $[a,b]$ 上存在 $n+1$ 阶导数, $f^{(k)}(a) = 0$, $0 \leqslant k \leqslant n$, $f(b) = 0$,则 $\exists c \in (a,b)$,使得

$$f^{(n+1)}(c) \geqslant f(c).$$

提示:用反证法,若 $\forall x \in (a,b)$. $f^{(n+1)}(x) < f(x)$. 用数学归纳法可证

$$f(x) \leqslant \frac{M(x-a)^{k(n+1)}}{(k(n+1))!}, a < x < b. \quad ([305]1989, 96(8): 740)$$

22. **Picone 不等式**:设 f 是以 $2T$ 为周期的函数,而且有 $m+n+1$ 阶连续导数,则

$$\| f^{(n)} \|_c \leqslant 2T \left(\frac{T}{\pi} \right)^m \| f^{(m+n+1)} \|_c.$$

(Boll. Un. Mat. Ital, 1927, 6: 251 ~ 253)

23. **Boas 不等式**:设 $f^{(n)}(x) \geqslant c > 0$, $x \in [a,b]$,则

$$\| f \|_{\infty} \geqslant \frac{2c}{n!} \left(\frac{b-a}{4} \right)^n.$$

([305]1971, 78: 1085 ~ 1093)

24. 设 f 在 $[0,1]$ 上有二阶导数且 $f(0) = f(1) = 0$,若 $\max\{ f(x) : x \in [0,1] \} = 2$,则 $\min\{ f(x) : x \in [0,1] \} \leqslant -16$,若 $\min\{ f(x) : x \in [0,1] \} = -1$,则存在 $\xi: 0 < \xi < 1$,使得 $f''(\xi) \leqslant 1/8$.

25. [MCU] 设 f 在区间[0,1]上二次可微，且 $f(0)=f(1)=0$，以及

$$\min\{f(x):0\leqslant x\leqslant 1\}=-1,$$

则 $\max\{f''(x):0\leqslant x\leqslant 1\}\geqslant 8$ 和 $\min\{f''(x):0\leqslant x\leqslant 1\}\leqslant \frac{1}{8}$.

证　用 Taylor 公式：设 x_0 为 f 的极小值点，且 $0<x_0<1$，则 $f'(x_0)=0$，$f(x_0)=-1$，于是

$$f(x)=-1+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2.$$

分别令 $x=0,x=1$，相应的 $f''(\xi)$ 分别 $f''(\xi_0),f''(\xi_1)$，则

$$f''(\xi_0)=\frac{2}{x_0^2},f''(\xi_1)=\frac{2}{(1-x_0)^2},$$

所以，当 $x_0<1/2$ 时，$f''(\xi_0)\geqslant 8$，而当 $x_0>1/2$ 时，$f''(\xi_1)\geqslant 8$，从而不等式得证.

26. 设在区间$[0,a]$上，$|f''(x)|\leqslant M$，且 f 在开区间$(0,a)$内取得最大值，则

$$|f'(0)|+|f'(a)|\leqslant Ma.$$

证　设 f 在 $x_0\in(0,a)$ 取得最大值，则 $f'(x_0)=0$，对于 f' 用微分中值定理，得

$$|f'(0)|=|0-f''(\xi_1)x_0|\leqslant Mx_0;$$

$$|f'(0)|=|0+f''(\xi_2)(a-x_0)|\leqslant M(a-x_0).$$

两式相加即可得证.

27. 设 $G=(x_0-\delta,x_0+\delta)$，$f$ 在 G 上的四阶导数有界：$|f^{(4)}(x)|\leqslant M$，则 $\forall x\in G-\{x_0\}$，有

$$\left|f''(x_0)-\frac{f(x)-2f(x_0)+f(x_1)}{(x-x_0)^2}\right|\leqslant (M/12)(x-x_0)^2,$$

式中 x_1 与 x 关于点 x_0 对称.

28. **数值微分不等式**：设 $f(x)$ 是[0,1]上光滑函数，$T=\{0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=1\}$，对于给定的插值 y_k 和 $\delta>0$，满足 $|f(x_k)-y_k|\leqslant\delta$，$f(x_0)=y_0$，$f(x_n)=f(1)=y_n$. 若光滑函数 g 满足 $g(0)=f(0)$，$g(1)=f(1)$，且

$$\left(\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}(y_k-g(x_k))^2\right)^{1/2}<\delta,$$

则取极小化元 g_* 的导数 g'_* 作为 $f'(x)$ 的逼近. 若 $f''\in L(0,1)$，则

$$\|g'_*-f'\|_2\leqslant\sqrt{8}\left(h\|f''\|_2+\sqrt{\delta}\|f''\|_2^{1/2}\right).$$

式中 $h=x_k-x_{k-1}$，g_* 实际上是在 T 上的三次自然样条. ([305]2001,108(6):512～521)

29. 设导数 f' 严格递增，则

$$f'(x)<f(x+1)-f(x)<f'(x+1).$$

提示：利用微分中值定理：$f(x+1)-f(x)=f'(x+\theta)$，$0<\theta<1$.

30. 设三阶导数 $f^{(3)}$ 在(a,b)内严格递增，$a+1<b-1$，则

$$f''(x)<f(x-1)+f(x+1)-2f(x),\quad x\in(a+1,b-1).$$

特别，当 $f(x)=x\ln x$. $x>1$ 时，$(x-1)\ln(x-1)+(x+1)\ln(x+1)-2x\ln x>1/x$.

31. 设非线性函数 f 在闭区间$[a,b]$内可导，则 $\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$|f'(\xi)| > \left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|.$$

若加条件 $f(a)=0$,则 $|f'(\xi)| > \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f$.

设 $f(x)\not\equiv 0$, f 在$[a,b]$上可微, $f(a)=f(b)=0$, 则存在 $\xi\in[a,b]$, 使得

$$|f'(\xi)| > \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b |f|.$$

32. [MCU]. 设 f 在闭区间$[a,b]$上二次可导,且 $f'(a)=f'(b)=0$,则 $\exists\xi\in(a,b)$,使得

$$|f''(\xi)| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

提示:利用微分中值定理,或 Taylor 公式.

33. 设 $f\in C[a,b]$,右导数 f'_+ 在半开区间$[a,b)$上存在,则当 $f(b)>f(a)$ 时,$\exists\xi\in[a,b)$,使得

$$f'_+(\xi) \geqslant \frac{f(b)-f(a)}{2(b-a)}.$$

当 $f(b)<f(a)$ 时,不等号反向.

提示:考虑辅助函数

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{2(b-a)}(x-a).$$

34. 设 f 在$[0,1]$上二阶连续可微,则

(1) $\|f'\|_c \leqslant 9\int_0^1 |f(x)|\,dx + \int_0^1 |f''(x)|\,dx$;

(2) 设 $0<a<1/3$, $2/3<b<1$,则

$$\|f'\|_c \leqslant 3|f(b)-f(a)| + \int_0^1 |f''(x)|\,dx.$$

35. 若 $f\in C^2[0,\infty)$,则

$$\int_0^\infty \{|f(x)|+|f''(x)|\}dx \geqslant \sqrt{2}|f(0)|.$$

式中$\sqrt{2}$是最佳常数.([21]544)

36. 设 $f\in C[a,b]$,$f'\in C(a,b)$,则

(1) $\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b |f| + \frac{1}{2}\int_a^b |f'|$.

(2) $\|f\|_c \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b |f| + \int_a^b |f'|$.([21]565)

37. 设 $f'\in C[0,1]$,$f(0)=f(1)=0$,则

$$\|f^2\|_\infty \leqslant \left(\frac{1}{2}\operatorname{th}\frac{1}{2}\right)\int_0^1 (|f|^2+|f'|^2).$$

式中$\frac{1}{2}\operatorname{th}\frac{1}{2}$是最佳常数.([21]547～548)

38. 设 f,g 是$[1,\infty)$上正的递增函数,使得

$$\frac{f''(x)}{f(x)} \geqslant \frac{g''(x)}{g(x)},$$

则

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \geqslant \frac{g'(x)}{g(x)} - \left|\frac{f'(1)}{f(1)} - \frac{g'(1)}{g(1)}\right|.$$

(证明见[21]551)

39. 设 $p,q \in C(0,\infty)$,使得 $p(x) > 0$,$(p(x)q(x))' = 0$. f,g 是微分方程 $(p(x)y')' + q(x)y = 0$ 的线性无关实解,若 $x_2 > x_1 > 0$,$f(x_1) = f(x_2) = 0$. 则

$$|g(x_1)| \geqslant |g(x_2)| > 0.$$

(证明见[21]554 ~ 555)

40. 设 $f \in AC[0,2\pi]$,$f' \in L^p[0,2\pi]$,$1 < p \leqslant 2$. 若 $\exists n > 1$,使 f 的 Fourier 系数头 $n-1$ 项为零,即 $a_k = 0, 0 \leqslant k \leqslant n-1$,$b_k = 0, 1 \leqslant k \leqslant n-1$,$1/p + 1/q = 1$,则

$$|f(x)| \leqslant \left(\frac{q}{\pi}\right)^{1/p} \cdot n^{1/q} \| f' \|_p.$$

(Luxemburg, W. A. J., Nieuw Arch. Wisk., 1973, 21(3): 108 ~ 109) Jagers, A. A. 改进为

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{2^{1/p} n^{1/q}} \| f' \|_p. \text{ ([21]540)}$$

41. 设 f 在$[a,b]$上二阶可导,$f'(x) \neq 0$,$\dfrac{f''(x)}{f'(x)}$ 在$[a,b]$上递减,则

$$|f(x) - f(b)| \geqslant |a-b| [f'(a)f'(b)]^{1/2}. \text{ ([21]536)}$$

42. 设 $f \in AC[0,2\pi]$,$f' \in L^2(0,2\pi)$,则

$$|f(x)^2 - f(y)^2| \leqslant 2\pi\left(\int_0^{2\pi} f^2\right)\left(\int_0^{2\pi} (f')^2\right).$$

(Warschawski, S. E. [393]1945, 3; 12 ~ 28)

若 $f' \in L^q[0.2\pi]$,$q > 1$,$\exists y \in [0,2\pi]$,$f(y) = \dfrac{0.1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$,$a > 1$,则

$$|f(x)|^a \leqslant \frac{a}{2}\int_0^{2\pi} |f(t)|^{a-1} |f'(t)| \, dt \leqslant \frac{a}{2} \| f^{(a-1)} \|_p \| f' \|_q.$$

特别若 $a = p = q = 2$,则

$$\| f \|_\infty \leqslant \sqrt{2\pi} \| f \|_2 \| f' \|_2. \text{ ([21]537 ~ 538)}$$

43. 设 f 在$[0,\infty)$上非负递减且局部绝对连续,若 $p > 0$,$|b| \leqslant a$,$x \geqslant a+b$,则

$$f(x) \leqslant \left(\frac{a+b+px}{(a+b)(1+p)}\right)^{-1/p}.$$

(更一般的上界见[331]1996, 7: 55 ~ 67)

44. 设 $M(f,x) = \sup\limits_{t>0} \dfrac{1}{2t}\displaystyle\int_{x-t}^{x+t} |f(y)| \, dy$,则

$$|f'(x)|^2 \leqslant 8M(f,x)M(f'',x).$$

(Mazya, Vladimir 等, Math. Bohem 1999, 124(2 ~ 3): 131 ~ 148)

45. 设 $f, f^{(k)}, f^{(n)} \in L^2(R^1), 1 \leqslant k < n, h > 0, \Delta_h(f,x) = f(x+\frac{h}{2}) - f(x-\frac{h}{2})$，则

$$\| f^{(k)} \|_2 \leqslant \frac{1}{2}(1-\frac{k}{n})h^{-k} \| \Delta_{\pi h}(f) \|_2 + \frac{k}{n}h^{n-k} \| f^{(n)} \|_2.$$

(Taikov, L. V., [405], 1991, 50(4): 114 ~ 122)

46. **Taylor 公式余项估计：**

(1) 设 $f^{(n)} \in AC[a,b], x \in [a,b]$.

$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a)}{x-a} + G_n(f;a,x)$，则

$| G_n(f;a,x) | \leqslant \frac{1}{4} \frac{(x-a)^{n+1}}{n!} [\sup_{t \in [a,x]} f^{(n+1)}(t) - \inf_{t \in [a,x]} f^{(n+1)}(t)]$.

(Dragomir, S. S., [303] 1999, 2(2): 183 ~ 193)

(2) Taylor 公式余项的积分形式：

$R_n(f;a,x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$，则

$$R_n(f;a,x) \leqslant \begin{cases} \frac{|x-a|^n}{n!} \| f^{(n+1)} \|_1, & p = 1, f^{(n+1)} \in L^1[a,b], \\ \frac{|x-q|^{n+(1/q)}}{n!(nq+1)^{1/q}} \| f^{(n+1)} \|_p, & 1 < p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, f^{(n+1)} \in L^p[a,b], \\ \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \| f^{(n+1)} \|_\infty, & f^{(n+1)} \in L^\infty[a,b]. \end{cases}$$

(Anastassiou, G. A. 等[301] 2001, 263(1)). 提示：用 Hölder 不等式.

(3) 设 $R_n(x)$ 是 f 的 Marclaurin 展开式的余项：$R_n(f) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$. 若 f 有对数凸导数，则

$$\frac{R_{n-1}(x)R_{n+1}(x)}{[R_n(x)]^2} \geqslant \frac{f^{(n)}(0)f^{(n+2)}(0)}{[f^{(n+1)}(0)]^2}\left(\frac{n+1}{n+2}\right).$$

(Merkle, M. J. 等. [360] 1996, 66(3): 194 ~ 196)

47. [MCU]. 设 f 的三阶导数 $f^{(3)}$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上连续且 $\forall \in R^1, f^{(k)}(x) > 0$, $k = 0,1,2,3$，若 $f^{(3)}(x) \leqslant f(x)$，则 $f'(x) < 2f(x), \forall x \in R^1$.

(1999 年第 60 届 Putnam 数学竞赛试题)

证 1 $\forall c \in R^1$，令 $g(x) = f(x) - f'(x)(x-c) + \frac{1}{2}f''(x)(x-c)^2$.

$$\forall y > 0, g(c+y) > g(c-y) > \frac{1}{2}y^2 f''(c-y).$$

由微分中值定理，$\exists \xi \in (c-y, c+y)$，使得

$$f''(c+y) - f''(c-y) = 2yf^{(3)}(\xi) \leqslant 2yf(\xi) < 2yf(c+y).$$

所以 $$f(c+y) - f'(c+y)y + f(c+y)y^3 > 0.$$

取 $y = 1$，即得 $f'(c+1) < 2f(c+1)$.

令 $x=c+1$,(因为 c 是任取的) 得 $f'(x)<2f(x)$.

证 2　从 $f^{(k)}>0$ 和 $f^{(3)}(x)\leqslant f(x)\Rightarrow f''(x)f^{(3)}(x)\leqslant f''(x)f(x)<f(x)f''(x)+[f'(x)]^2$. 将它从 a 到 x 积分,再令 $a\to-\infty$,得$[f''(x)]^2\leqslant 2f(x)f'(x)$. 又由 $f^{(3)}(x)\leqslant f(x)$,得到　$[f''(x)]^2f^{(3)}(x)\leqslant 2[f(x)]^2f'(x)$. 将它从 a 到 x 积分,再令 $a\to-\infty$,得出

$f''(x)\leqslant\sqrt[3]{2}f(x)f'(x)$,两边乘上 $f'(x)$,再次使用积分并取极限这一技巧,即得 $f'(x)\leqslant\sqrt[6]{2}f(x)<2f(x)$.

([305]2000,107:721 ～ 732. 我们问:如何从 $f^{(n)}(x)\leqslant f(x)$ 推出类似的不等式?)

48.　**Chaplygin 不等式**:设 $y(x)$ 是 Canchy 问题 $y'=f(x,y),y(x_0)=y_0,(x,y)\in D=\{(x,y):|x-x_0|\leqslant a,|y-y_0|\leqslant b\}$ 的解,并设曲线$\begin{cases}y=g(x)\\y=h(x)\end{cases}$全部位于 D 内,且通过点(x_0,y_0),对 $x>x_0$ 满足不等式 $g'(x)-f(x,g(x))<0,h'(x)-f(x,h(x))>0$,则

$$g(x)<y(x)<h(x),x>x_0.\tag{3.47}$$

若选取满足(3.47) 的初始近似 $g_0(x),h_0(x)$,根据上述不等式可以构造出一对更好的近似 $g_1(x),h_1(x)$,满足

$$g_0(x)<g_1(x)<y(x)<h_1(x)<h_0(x).$$

由此可构造出$\{g_n\}$ 与$\{h_n\}$,满足:

$$g_{n-1}(x)<g_n(x)<y(x)<h_n(x)<h_{n-1}(x),$$

$$h_n(x)-g_n(x)\leqslant\frac{c}{2^{2^n}}.$$

式中常数 c 与 x,n 无关. 这是近似求解一阶常微分方程初值问题(Cauchy 问题) 的有效方法.

(Collatz,L. ,The numerical treatment of differential equations,Springer,1966)

49.　设 $f(x)=\begin{cases}\exp(-x^{-a}-(1-x)^{-a}), & 0<x<1,a>0,\\0, & x=0,1.\end{cases}$ 则

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant cn^{n(1+(1/a))},0\leqslant x\leqslant 1.$$

式中常数 c 与 a,n 有关,$n=0,1,2,\cdots$. ([4]485)

50.　设 $f(x)=(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}$. $g(x)=x^{-\alpha}e^x$. $\alpha,\beta>0$,则当 $-1<x<1$ 时,$f^{(2n)}(x)>0$,而当 $x>0$ 时,$g^{(2n)}(x)>0,n=0,1,2,\cdots$

([391]1984,44(3 ～ 4):351 ～ 353)

51.　设 $f(x)=\dfrac{e^{ix}}{e^{ix}-a}$,$x$ 为实数,a 为复数,$|a|\neq 1$,则 f 在 x 无穷次可微,且

当 $|e^{ix}-a|<1$ 时,$|f^{(n)}(x)|\leqslant 2^nn!\,|e^{ix}-a|^{-n}$;

当 $|e^{ix}-a|\geqslant 1$ 时,$|f^{(n)}(x)|\leqslant 2^n\cdot n!$.

(Yabuta,K. ,Tôhoku Math. J. 1973,25:89 ～ 102)

52.　设 $x>a$ 时,$|f^{(n)}(x)|\leqslant|g^{(n)}(x)|$,且 $g(x)\neq 0$. 若 $\exists m<n,y_n\to\infty(n\to$

∞) 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(y_n)}{y_n^m}=c_1,\lim_{n\to\infty}\frac{g(y_n)}{y_n^m}=c_2 \text{ 存在,令 } F(x)=\prod_{k=0}^{n}(x-x_k),G(f;x_0,x_1,\cdots,x_n)=$$

$\sum_{k=0}^{n}\frac{f(x_k)}{F'(x_k)}$,则当 $\forall x_k>a$ 时,有

$$|G(f;x_0,x_1,\cdots,x_m)-c_1|\leqslant|G(g;x_0,x_1,\cdots x_m)-c_2|.$$

([21]540 ~ 541)

53. 设 f 由下式定义:

$xf(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{k-1}}{k!}(xe^{-x})^k,x>1$,则对 $n=0,1,2,3,4,(-1)^n f^{(n)}(x)\geqslant 0$ 成立.

1970 年出版的[4]:498 指出 $n>4$ 时,上式不成立,但 1972 年 Askey 和 Boas 指出仍未证明.

54. 设 $f(x)=\sqrt{x^2-1},x>1$,则当 n 为奇数时,$f^{(n)}(x)>0$;而当 n 为偶数时,$f^{(n)}(x)<0$.

提示:$f^{(n)}(x)=g_n(x)(x^2-1)^{-(n-\frac{1}{2})}$,其中 g_n 为 $n-2$ 次多项式,当 n 为奇数时,g_n 为奇函数且它的一切系数都是非负数;而当 n 为偶数时,g_n 为偶函数,且它的一切系数非正.([152]55)

55. $f_0(x)=\frac{1}{1-x},f_{n+1}(x)=xf'_n(x)$,

则当 $0<x<1$ 时,$f_{n+1}(x)>0$.([152]57)

56. 设 $f(x)=e^{-x^2}P_n(x)$,式中 $P_n(x)$ 为 n 阶实多项式.若 $|f(x)|\leqslant M,x\in R^1$,则

(1) $|f'(x)<(1+\varepsilon(x))4e|x|M,x\in R^1$,式中 $\lim_{|x|\to\infty}\varepsilon(x)=0$.

(2) $|f'(x)|<[1+\varepsilon(n)]\times 1.0951\sqrt{n}M$,式中 $\lim_{n\to\infty}\varepsilon(n)=0$.

(Milne, W. E., [309]1931, 33:143 ~ 146. [21]526)

57. 设 f 是二次可微的实值函数,且满足

$$f(x)+f''(x)=-xg(x)f'(x),\text{其中 } g(x)\geqslant 0,\forall x\in R^1,$$

则 $[f(x)]^2+[f'(x)]^2\leqslant[f(0)]^2+[f'(0)]^2$.

这表示 $|f(x)|$ 有界.

(1997 年,第 58 届 Putman 竞赛.[305]1998,105:744 ~ 755)

58. Halanay 不等式:设 $r>0$, $a>b>0$,非负实值函数 u 满足微分不等式:

$$D^+u(t)\leqslant -au(t)+b\sup\{u(\theta):t-r\leqslant\theta\leqslant t\},\quad t\geqslant t_0,$$

式中 D^+ 为右导数算子,则

$$u(t)\leqslant\sup\{u(t_0+\theta):-r\leqslant\theta\leqslant 0\}e^{-\mu(t-t_0)},\quad t\geqslant t_0,$$

式中 $0<\eta<a$ 满足超越方程 $\eta-a+be^{\eta r}=0$.

(Halanay, A., Differential Equations, New York, Academic Press, 1966)

59. 杨港苍不等式:它是 Dirichlet 问题:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & \text{在 } D \text{ 中} \\ u = 0, & \text{在 } \partial D \text{ 上} \end{cases} \tag{3.48}$$

的最佳不等式

$$\sum_{k=1}^{m}(\lambda_{m+1}-\lambda_k)\left[\lambda_{m+1}-\left(1+\frac{4}{n}\right)\lambda_k\right]\leqslant 0. \tag{3.49}$$

式中 D 是 R^n 中有界连通域,Δ 是 R^n 上的 Laplace 算子,λ_k 是上述 Dirichlet 问题的第 k 个特征值.

2009 年,赵、吴将以上结果推广到 p 阶 Laplace 算子的 Dirichlet 问题.

$$\begin{cases} (-\Delta)^p u = \lambda u, & \text{在 } D \text{ 中,} \\ u = \dfrac{\partial u}{\partial n} = \cdots = \dfrac{\partial^{p-1} u}{\partial n^{p-1}} = 0, & \text{在 } \partial D \text{ 上.} \end{cases} \tag{3.50}$$

设 λ_k 是(3.50) 的第 k 个特征值

$$0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_k\leqslant\cdots,$$

p 为正整数,(3.50) 中的 n 是边界 ∂D 的外法向量,则

$$\sum_{k=1}^{m}(\lambda_{m+1}-\lambda_k)\left[\lambda_{m+1}-\left(1+\frac{4p}{n+2p-2}\right)\lambda_k\right]\int_D |\nabla^{p-1}u_k|^2\leqslant 0 \tag{3.51}$$

$p=1$ 时,(3.51) 归结为(3.49). $p=2$ 时,得到

$$\lambda_{m+1}-\lambda_m\leqslant\frac{8(n+2)}{n^2}\cdot\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\lambda_k. \tag{3.52}$$

([334]52(2009),387 ~ 392)

60. Hardy 不等式:设 $p\in R^1$,$p\neq 0$,$f\in C_0^{\infty}(0,\infty)$,则

$$\int_0^{\infty}|f(x)|x^{p-1}\mathrm{d}x\leqslant C(p)\int_0^{\infty}|f'(x)|x^p\mathrm{d}x. \tag{3.53}$$

式中 $p\to 0$ 时 $C(p)\to\infty$. ([27])

已知 $p=0$ 时(3.53) 不成立,我们问:$C(p)$ 的最佳值是什么?

61. 设 $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k x^k(1-x)^{n-k}$,式中 $0\leqslant a_k\leqslant 1$,$0<x<1$,则

$$[f'(x)]^2\leqslant\frac{nf(x)[1-f(x)]}{x(1-x)}. \tag{3.54}$$

用概率方法证明:设 ξ 是有二项分布的随机变量,它的参数是(n,x),即

$$p\{\xi=k\}=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k},\quad 0\leqslant k\leqslant n,$$

于是,利用 $a(\xi)$ 的数学期望 $E(a(\xi))$. 可以记

$$f(x)=E[a(\xi)],\qquad f'(x)=\frac{E[(\xi-nx)a(\xi)]}{x(1-x)},$$

因为 $E(\xi-nx)=0$,所以,$\forall$ 实数 t,下式成立

$$E[(\xi-nx)a(\xi)]=E[(\xi-nx)(a(\xi)-t)],$$

取 $t=f(x)=E[a(\xi)]$,并用 Cauchy 不等式,得到

$$\{E[(\xi-nx)a(\xi)]\}^2\leqslant D(\xi)D[a(\xi)]=nx(1-x)D[a(\xi)].$$

因为 $\forall k$，$0 \leqslant a_k \leqslant 1$，$a(\xi)^2 \leqslant a(\xi)$，于是

$$D[a(\xi)] = E[a(\xi)^2] - \{E[a(\xi)]\}^2 \leqslant E[a(\xi)] - \{E[a(\xi)]\}^2$$
$$= f(x)[1 - f(x)].$$

所以

$$[f'(x)]^2 \leqslant \frac{n}{x(1-x)} D[a(\xi)] \leqslant \frac{nf(x)[1-f(x)]}{x(1-x)}.$$

([305]111(5)(2004),447.问题 10985)

62. 设 $f^{(n)} \in C[a,b]$，$f^{(k)}(a) = 0$，$k = 0,1,\cdots,n-1$，则

$$\| f^{(k)} \|_2 \leqslant \left(\frac{b-a}{\sqrt{2}}\right)^{m-k} \| f^{(m)} \|_2.$$

式中 $0 \leqslant k < m \leqslant n$，　$\| f^{(m)} \|_2 = \left(\int_a^b | f^{(m)} |^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

第十三章　积分不等式

在前面的十二章中，除第二、三、四章外都涉及到许多积分不等式，特别是第一章的 Hölder 不等式，Minkowski 不等式，各种平均的积分不等式，第八章中单调函数，BV 及其他特殊函数的积分不等式，第十二章中与微分有关的积分不等式等。本章讨论的积分不等式与前面已收入的不等式不重复.

1. **Opial-华罗庚不等式**：1960 年 Opial，Z. 证明：

设 $f' \in C[0,a]$，$f(0) = f(a) = 0$，$f(x) > 0$，$x \in (0,a)$，则

$$\int_0^a |ff'| \leqslant \frac{a}{4}\int_0^a (f')^2. \tag{1.1}$$

式中 $a/4$ 是最佳的.（Ann. Polon. Math.，1960，8：29 ～ 32）. Olech，C. 减弱了上述条件，指出 $f(x) > 0$，$x \in (0,a)$ 是不必要的，即若 $f \in AC[0,a]$，$f(0) = f(a) = 0$，则(1) 成立，且仅当

$$f(x) = \begin{cases} cx, & 0 \leqslant x \leqslant a/2, \\ c(a-x), & a/2 \leqslant x \leqslant a, \end{cases}（c \text{ 为常数}）$$

时等号成立，为此，只要证明：设 $g \in AC[0,a]$，$g(0) = 0$，则

$$\int_0^a |gg'| \leqslant \frac{a}{2}\int_0^a (g')^2. \tag{1.2}$$

式中 $a/2$ 是最佳的，仅当 $g(x) = cx$（c 为常数）时等号成立.（Ann. Polon. Math. 1960，8：61 ～ 63）

Opial 最初是将(1.1) 式作为研究常微分方程的工具，随即发现它有重要的理论价值和多方面的应用，导致 40 多年来对它的研究兴趣至今未减，[21]114 ～ 142 用了专门一章（第 3 章）讨论对(1.1) 式的各种改进和推广，引用了前 30 年(1960 ～ 1990 年) 发表的有关文献达 83 篇，但仍不完整，特别是中国学者的工作。事实上，1964 年，华罗庚在"中国科学"(外文版) 发表他对 Opial 不等式的重要推广以来，一直有中国学者从事这方面的研究，陈文忠等对我国学者前 20 年的研究成果在[339]1982，2(4)：151 ～ 166 进行了综述. 在最近 30 年，胡克、杨国胜、杨恩浩、马庆华等仍陆续发表他们的重要研究成果. 1995 年出版的专著[131] 专门收集了 Opial-华罗庚不等式的研究成果及其在微分方程和差分方程中的应用，达 393 页.

(1)　设 $\omega(x)$ 在 $(0,a)$ 上连续且为正，$\int_0^a \omega(x)^{1-q}\mathrm{d}x < \infty$，$q > 1$，$f \in AC[0,a]$，$f(0) = 0$，$1/p + 1/q = 1$，则

$$\int_0^a |ff'| \leqslant \frac{1}{2}\left(\int_0^a \omega^{1-q}\right)^{2/q}\left[\int_0^a \omega |f'|^p\right)^{1/p}.$$

仅当存在常数 c，使 $f'(x) = c\int_0^x \omega^{1-q}$ 时等号成立.

杨国胜推广了上述结果.(Proc. Japan Acad. 1966,42:7883)

若 ω 还满足 $\int_0^a \frac{1}{\omega(x)}\mathrm{d}x < \infty, f(0) = f(a) = 0$,则

$$\int_0^a | ff' | \leqslant \frac{c}{2}\left(\int_0^a \omega | f' |^p\right)^{1/p},$$

式中由 $c = \int_0^b \omega^{1-q} = \int_b^a \omega^{1-q}$ 定义 c 与 b.([21]:116 ~ 118)

(2)　**华罗庚不等式**:设 $f \in AC[0,a], f(0) = 0, p \geqslant 0, q \geqslant 1$,则

$$\int_0^a | f |^p | f' |^q \leqslant \frac{qa^p}{p+q}\int_0^a | f' |^{p+q}. \tag{1.3}$$

华罗庚证明(1.3)式对 $q = 1$,p 为正整数时成立,并猜测 p 为正实数时也应该成立,陈道琦证明了这个猜测.([333]1965,3:251;1980,8:383.)杨国胜等对 $p,q \geqslant 1$ 证明(1.3)式成立.([330]1985,16(4):123 ~ 129.其余见[21]:118.)若加上条件 $f(a) = 0$,则(1.3)式可改进为

$$\int_0^a | f |^p | f' |^q \leqslant \frac{q}{p+q}\left(\frac{a}{2}\right)^p\int_0^a | f' |^{p+q}.$$

相应的加权形式是:

$$\int_0^a (| f |^p | f' |^q\omega) \leqslant c(a,p,q)\int_0^a (| f' |^{p+q}u).$$

([21]:118 ~ 121)1994年,何兴钢对(1.3)式给出了一个简捷的证明:将(1.3)式中 a 换成变量 t,即令

$$F(t) = \frac{q}{p+q}t^p\int_0^t | f' |^{p+q} - \int_0^t | f |^p | f' |^q.$$

利用 Hölder 不等式证 $F'(t) \geqslant 0$,从而得出

$F(a) = \int_0^a F'(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$.([301]1994,182(1):299 ~ 300.)1985年,戚征给出了形如 $\int_0^a F(| f |)G(| f' |)$ 的不等式.式中 $F(u)$ 在 $(0,\infty)$ 上递增,$G(u)$ 在 $(0,\infty)$ 上递增且凸.$F(0) = G(0) = 0$.([334]英文版 1985,1(3):196 ~ 200)

(3)　设 $f \in AC[0,a], f(0) = 0, p > 0, 0 \leqslant \alpha < \beta < a$,则

$$\int_\alpha^\beta | f |^p | f' | \leqslant \frac{\beta^p}{p+1}\int_0^\beta | f' |^{p+1} - \frac{\alpha^p}{p+1}\int_0^\alpha | f' |^{p+1}.$$

([339]1982,1:61 ~ 62)

它的加权形式是:

$$\int_\alpha^\beta f^p | f' | \omega \leqslant (p+1)^r\left(\int_\alpha^\beta | f' |^{p+1}\omega_1\right)^{\frac{1}{p+1}}\left(\int_\alpha^\beta f^p | f' | \omega_2\right)^r,$$ 式中 $r = \frac{p}{p+1}$

(Fiedler, B(ed.) Internat. conference on differential equations, Vol. 1. Singapore, 2000;556 ~ 557)

(4)　**胡克不等式**:设 $f \in AC[0,a], f(0) = 0, p,q > 0, p+q > 1, 0 \leqslant \beta < a$,则

$$\int_\beta^a | f |^p | f' |^q + \frac{p(q-1)}{p+q}\int_\beta^a x^{-q} | f |^{p+q} + \frac{pqs}{2(p+q)}\omega(\beta,a)$$

$$\leqslant \frac{q}{p+q}\left\{a^{p}\int_{0}^{a}|f'|^{p+q}-\beta^{p}\int_{0}^{\beta}|f'|^{p+q}\right\},$$

式中

$$\omega(\beta,a)=\int_{\beta}^{a}t^{p-1}\left\{\int_{0}^{t}|f'|^{p+q}\left[\frac{1}{t}\int_{0}^{t}g-\left(\int_{0}^{t}g|f'|^{p+q}\right)\left(\int_{0}^{t}|f'|^{p+q}\right)^{-1}\right]^{2}\right\}dt,$$

$1-g(x)+g(y)\geqslant 0, s=\min\{1,(p+q-1)\}$. 仅当 $f(x)=cx$ 时等号成立.（[29]:25～26）

胡克还证明：设 $f\in AC[0,a], f(0)=f(a)=0, p>0, q>1, s=\dfrac{p}{p+q-1}$，则

$$\int_{0}^{a}|f|^{p}|f'|^{q}\leqslant\frac{1}{(p+q)^{s}}\left(\frac{a}{2}\right)^{p}\left(\int_{0}^{a}|f'|^{p+q}\right)$$
$$\times\left\{1-\frac{1}{4}\left[\int_{0}^{a}|f'|^{p+q}(\cos\frac{2\pi x}{a})/(\int_{0}^{a}|f'|^{p+q}\right]^{2}\right\}^{\beta}.$$

式中

$$\beta=\begin{cases}s/2, & p+q>2,\\ p/2, & 1<p+q<2.\end{cases}$$

（[339]1994,14(2):249～254.[29]:13～16）

1995年，胡克又证明：

$$\int_{0}^{a}|ff'|\leqslant\frac{1}{2}(\frac{a}{2})^{2/q}(\int_{0}^{a}|f'|^{p})^{r}\left\{(\int_{0}^{a}|f'|^{p})^{2}-\frac{1}{4}(\int_{0}^{a}|f'|^{p}\cos(\frac{2\pi x}{a}))^{2}\right\}^{\frac{1}{q}},$$

式中 $1<p\leqslant 2, 1/p+1/q=1, r=2/p-2/q$.（江西师大学报，1995，19(1)：23～26）

(5)　设 $f\in AC[0,a], \int_{0}^{a}|f'|^{p+1}<\infty, g(x)=(p+1)\int_{0}^{x}|f|^{p}|f'|-|f|^{p+1}\geqslant 0, 0\leqslant x\leqslant a, f(0)=a, p>0$，则

$$\int_{0}^{a}|f|^{p}|f'|+\frac{pa^{p}}{p+1}\int_{0}^{a}\frac{g(x)}{x^{p+1}}dx\leqslant\frac{a^{p}}{p+1}\int_{0}^{a}|f'|^{p+1}.\tag{1.4}$$

若 $\int_{0}^{a}|f|^{p}|f'|<\infty, -1<p<0$ 或 $p<-1$ 且加上 $\int_{0}^{a}|f'|^{p+1}<\infty$，则不等式(1.4)反向.（Shum, D. G., [374]1974, 17(3):385～389，或[21]127）

(6)　设 $p,q>0, p+q>1, f^{(n-1)}\in AC[0,a]. f^{(k)}(0)=0, 0\leqslant k\leqslant n-1$，$\int_{0}^{a}|f^{(n)}|^{p+q}<\infty$，则

$$\int_{0}^{a}|f^{(k)}|^{p}|f^{(n)}|^{q}\leqslant M(k)a^{(n-k)p}\left(\int_{0}^{a}|f^{(n)}|^{p+q}\right).$$

式中 $M(k)=\lambda q^{\lambda q}\left(\dfrac{(n-k)(1-\lambda)}{n-k-\lambda}\right)^{p(1-\lambda)}[(n-k)!]^{-p}, \lambda=1/(p+q)$.

（Agarwal, R. P.，等.[21]:132）杨国胜则进一步证明：将上述 $[0,a]$ 改为 $[a,b]$ 并加上条件 $q_k\geqslant 0, \sum\limits_{k=0}^{n-1}q_k=1$，则

$$\int_{a}^{b}\left(\prod_{k=0}^{n-1}|f^{(k)}|^{q_k}\right)^{p}|f^{(n)}|^{q}\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}M(k)q_k(b-a)^{(n-k)p}\left(\int_{a}^{b}|f^{(n)}|^{p+q}\right).\tag{1.5}$$

([330]1987,18(4):101 ~ 104,(1.5) 式的加权形式则是在两边被积式中各乘上递减的权函数 $\omega(x)$,由此可得出一系列有用的推论,详见 Mathematika,1990,37:136 ~ 142)

(7) 设 $f^{(n)} \in C[0,a]$,$f^{(k)}(0) = f^{(k)}(a) = 0$,$0 \leqslant k \leqslant n-1$,则

$$\int_0^a |ff'| \leqslant C_n a^{2n-1}\int_0^a [f^{(n)}]^2.$$

([54]4:25 ~ 36)

(8) 设 $f^{(n-1)} \in AC[0,a]$,$f^{(k)}(0) = 0$,$0 \leqslant k \leqslant n-1$,则

$$\int_0^a |ff^{(n)}| \leqslant C_n a^n \int_0^a |f^{(n)}|^2.$$

式中 $C_n = \dfrac{b_n}{2n!}$,$\dfrac{1}{2} \leqslant b_n \leqslant \left[\dfrac{n}{4n-2} + \begin{pmatrix}2n\\ n\end{pmatrix}^{-1}\right]^{1/2}$,$b_n \to \dfrac{1}{2}$,$(n \to \infty)$.([21]:122)

(9) 设 $f \in AC[0,a]$,$f(0) = 0$,$\omega(x)$ 递增,$\omega(0) = 0$,当 $u > 0$ 时,$\varphi(u)$ 与 $F(u)$ 为递增的凸函数,$F(0) = 0$,$Q(u)$ 为递增的凸函数,$g(u)$ 递增,$g(0) = 0$,

$$h(x) = \int_0^x \omega'\varphi\left(\frac{|f'|}{\omega'}\right),\text{若}$$

$$F'(h(x))h'(x)g\left(\frac{1}{h'(x)}\right) \leqslant \left(\frac{F(h(a))}{h(a)}\right)g'\left(\frac{x}{h(a)}\right),\text{则}$$

$$\int_0^a F'\left(\omega\varphi\left(\frac{|f|}{\omega}\right)\right)G\left(\omega'\varphi\left(\frac{|f'|}{\omega'}\right)\right) \leqslant H\left[\int_0^a \omega'\varphi\left(\frac{|f'|}{\omega'}\right)\right],$$

式中 $G(u) = uQ[g(1/u)]$,$H(u) = F(u)Q[g(a/u)]$.特别,当 $f'(x) > 0$,$f(a) = b$,$\varphi(u) = u$,$F(u) = g(u) = u^2$,$Q(u) = \sqrt{1+u}$,$f(x) \leqslant xf'(x)$,则得到 **Polya 不等式**:

$$2\int_0^a f[1 + (f')^2]^{1/2} \leqslant b(a^2 + b^2)^{1/2}.$$

仅当 $f(x) = (b/a)x$ 时等号成立.([21]:125 ~ 126)

(10) **Pachpatte 不等式**:设 $f_k \in AC[a,b]$,$f_k(a) = f_k(b) = 0$,$k = 1,2,3$ 则

$$\int_a^b \left\{\left(\prod_{k=1}^3 f_k\right)\left(\sum_{k=1}^3 |f'_k|\right) + \left(\sum_{k=1}^3 |f_k|\right)\left(|f'_1 f_2 f_3| + |f_1 f'_2 f_3| + |f_1 f_2 f'_3|\right)\right\}$$

$$\leqslant \frac{b-a}{2}\int_a^b \left(\sum_{k=1}^3 |f'_k|^4\right).$$ ([357]1987,13(2):211 ~ 214)

(11) 设 $f_k \in AC[a,b]$,$f_k(a) = 0$;g_k 是$[0,\infty)$上非负连续可微严格递增函数,$g_k(a) = 0$;F_k 是$[0,\infty)$上非负可微函数,$F_k(0) = 0$,F'_k 非负递增可积,φ_k 是$(0,\infty)$上正的连续递增的凸函数,则

$$\int_a^b \sum_{k=1}^n F'_k\left[g_k\varphi_k\left(\frac{|f_k|}{g_k}\right)\right]\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^n F_j\left[g_j\varphi_j\left(\frac{|f_j|}{g_j}\right)\right]g'_k\varphi_k\left(\frac{|f'_k|}{g'_k}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{k=1}^n F_k\left[\int_a^b g'_k\varphi_k\left(\frac{|f'_k|}{g'_k}\right)\right].$$

(Pachpatte,B. G. [330]1993,24(2):229 ~ 235)

(12) **Godunova-Levin 不等式**:设 f 在$[a,b]$上绝对连续,$f(a) = 0$,F 是$(0,\infty)$上递增的凸函数,$F(0) = 0$,则

$$\int_a^b F'(|f(t)|)|f'(t)|\mathrm{d}t \leqslant F\left(\int_a^b |f'(t)|\mathrm{d}t\right).$$

([405],1967,2:221 ~ 224)1997 年,Pecaric 等将其推广到多元函数.([301]1997,215(1):274 ~ 282)

(13) 设 $f \in AC[0,a]$,$g \in C[0,a]$,$f(0)=f(a)=0$,$p \geqslant 1$,则

$$\int_0^a g|f|^p \leqslant \left(\int_0^a [t^{1-p}+(a-t)^{1-p}]^{-1} g(t)\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^a |f'|^p\right).$$

(Brnetic,I. 等.[303]1998,1(3):385 ~ 390)

(14) 设 $f,g \in AC[0,a]$,$f(0)=f(a)=0$,$g(0)=g(a)=0$,ω 是$[0,a]$上有界且正的递减函数,$p \geqslant 0$,$q \geqslant 1$,则

$$\int_0^a \omega|f|^p|g|^p(|f|^q|g'|^q+|f'|^q|g|^q)$$
$$\leqslant \frac{q}{2(p+q)}\left(\frac{a}{2}\right)^{2p+q}\int_0^a \omega(|f'|^{2(p+q)}+|g'|^{2(p+q)}).$$

([330]1985,16(4):123 ~ 129)

(15) 设 f,g 在$[a,b]$上的 $n-1$ 阶导数绝对连续,且 $f^{(k)}(a)=f^{(k)}(b)=g^{(k)}(a)=g^{(k)}(b)=0$. $0 \leqslant k \leqslant n-1$,$\omega_k$ 在$[a,b]$上非负连续,则

$$\int_0^a \left(\sum_{k=1}^n \omega_{k-1}|f^{(k-1)}g^{(k-1)}|\right) \leqslant \frac{b-a}{8}\sum_{k=1}^n \left(\int_a^b \omega_{k-1}\right)\int_0^a (|f^{(k)}|^2+|g^{(k)}|^2).$$

([301]1986,117:318 ~ 325)

(16) 2001 年,Koliha,J. J. 和 Pecaric,J. 给出了加权 Opial 型不等式的若干非常一般的形式,例如,设 D 为 R^1 中闭区间,a 为 D 中一固定点,$K(x,y)$ 在 $D\times D$ 上非负连续. $f,g \in C(D)$,并且满足 $|f(x)| \leqslant \left|\int_0^x K(x,y)|g(y)|\mathrm{d}y\right|$,$x \in D$. 若 $\alpha,\beta > 0$,$r > \max\{1,\alpha\}$,$u,v \in C(D)$,使得 $u(x) \geqslant 0$,$v(x) > 0$,$\forall x \in D$,则

$$\left|\int_a^x u|f|^\beta|g|^\alpha\right| \leqslant C(x)\left|\int_a^x v|g|^r\right|^{(\alpha+\beta)/r},$$

式中 $C(x) = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha/r}\left(\int_a^x (u^r v^{-\alpha})^{1/(r-\alpha)} G^{\frac{\beta(r-1)}{r-\alpha}}\right)^{\frac{r-\alpha}{r}}$,$G(x) = \left|\int_a^x v^{-\frac{1}{r-1}}K(x,\cdot)^{\frac{r}{r-1}}\right|$,

$$\left|\int_a^x u|f|^\beta|g|^\alpha\right| \leqslant \int_a^x u(t)\left|\int_a^x v(y)K(t,y)\mathrm{d}y\right|^{\frac{r-\alpha}{r}}\mathrm{d}t\,\|v\|_\infty^{\beta}\,\|g\|_\infty^{\alpha+\beta},$$

式中 $\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)|: t \in [a,x]\cup[x,a]\}$,有关进一步结果和对分数阶导数的应用.([330]2002,33(1):93 ~ 102)

(17) **杨国胜不等式**:设 $f(x,y)$,f'_x,f''_{xy},在$[0,a]\times[0,b]$上连续,若 $f(0,y)=f'_x(x,0)=0$,$0 \leqslant x \leqslant a$,$0 \leqslant y \leqslant b$,则

$$\int_0^a\int_0^b |f\cdot f''_{xy}| \leqslant \frac{ab}{2}\int_0^a\int_0^b |f''_{xy}|^2;$$

$$\int_0^a\int_0^b |f|^m|f''_{xy}|^n \leqslant \frac{n}{m+n}a^m b^m\int_0^a\int_0^b |f''_{xy}|^{m+n},\ (m,n \geqslant 1);$$

若 $f(0,y)=f(a,y)=f'_x(x,0)=f'_x(x,b)=0$,$0 \leqslant x \leqslant a$,$0 \leqslant y \leqslant b$,$m,n \geqslant 1$,则

$$\int_0^a\int_0^b |f|^m |f''_{xy}|^n \leqslant \frac{n}{m+n}\left(\frac{a}{2}\right)^m\left(\frac{b}{2}\right)^m\int_0^a\int_0^b |f''_{xy}|^{m+n}.$$

杨国胜等还得到了这些不等式的加权形式.([330]1982,13:255 ~ 259;1984,15:115 ~ 122;1986,17(2):31 ~ 36)

(18) 设 $f(x,y),f'_x,f'_y,f''_{xy}$ 在 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上连续, $f(a,y)=f(b,y)=f'_x(x,c)=f'_x(x,d)=0.(x,y)\in D,1\leqslant p_k<\infty,k=1,2,3,4$,则

$$\int_a^b\int_c^d |f|^{p_1}|f'_x|^{p_2}|f'_y|^{p_3}|f''_{xy}|^{p_4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant C(p_k)\prod_{k=1}^4\left(\int_a^b\int_c^d |f''_{xy}|^{2p_k}\right)^{1/2},$$

式中 $C(p_k)=\dfrac{(b-a)^{p_1+p_3-1}(d-c)^{p_1+p_2-1}}{2^{(2p_1+p_2+p_3)}}$.

(Pachpatte,B. G.[388]1992,23(9):657 ~ 661)

(19) 设 f,g 及其二阶偏导数在 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上连续. $0<m<\omega(x,y)\leqslant M$. $(x,y)\in D$, h 在 D 上为正的连续函数, $f(a,y)=f(b,y)=f'_x(x,c)=f'_x(x,d)=0$, $g(a,y)=g(b,y)=g'_x(x,c)=g'_x(x,d)=0,p\geqslant 0,q\geqslant 1$,则

$$\int_a^b\int_c^d\omega |fg|^p(|fg''_{xy}|^q+|f''_{xy}g|^q)\leqslant C\frac{q}{2(p+q)}\left(\frac{(b-a)(d-c)}{4}\right)^{2p+q-1}$$

$$\cdot\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{2p+q}{2(p+q)}}\int_a^b\int_c^d h\omega(|f''_{xy}|^{2(p+q)}+|g''_{xy}|^{2(p+q)}),$$

式中 $C=\max\left\{\int_a^{x_0}\int_a^{y_0}\left(\frac{1}{h}\right);\int_a^{x_0}\int_{y_0}^d\left(\frac{1}{h}\right);\int_{x_0}^b\int_c^{y_0}\left(\frac{1}{h}\right);\int_{x_0}^b\int_{y_0}^d\left(\frac{1}{h}\right)\right\}$,

$x_0=\dfrac{1}{2}(a+b),y_0=\dfrac{1}{2}(c+d)$.([330]1991,22(1):43 ~ 50)

(20) 2002 年,杨国胜等给出了二元 Opial 型不等式的一般形式. 设 $f(x,y),g(x,y),f'_x,g'_x,f''_{xy},g''_{xy}$ 都在 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上连续, $f(a,y)=f(b,y)=f'_x(x,c)=f'_x(x,d)=0,g(a,y)=g(b,y)=g'_x(x,c)=g'_x(x,d)=0,(x,y)\in D$. F,G 是 $[0,\infty)$ 上递增的凸函数,且 $F(0)=G(0)=0$,则当 $p\geqslant 1$ 时,成立

$$\int_a^b\int_c^d[F(|f|^p)G'(|g|^p)|g''_{xy}|^p+G(|g|^p)F'(|f|^p)|f''_{xy}|^p]$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^4\frac{1}{c_k}\left[F\left(c_k\int_{a_k}^{x_k}\int_{c_k}^{y_k}|f''_{xy}|^p\right)+G\left(c_k\int_{a_k}^{x_k}\int_{c_k}^{y_k}|g''_{xy}|^p\right)\right],$$

式中 $k=1$ 时, $c_1=[(x_0-a)(y_0-c)]^{p-1},a_1=a,c_1=c,x_1=x_0,y_1=y_0,(x_0,y_0)\in D$; $k=2$ 时, $c_2=[(x_0-a)(d-y_0)]^{p-1},a_2=a,c_2=y_0,x_2=x_0,y_2=d$; $k=3$ 时, $c_3=[(b-x_0)(y_0-c)]^{p-1},a_3=x_0,c_3=c,x_3=b,y_3=y_0$; $k=4$ 时, $c_4=[(b-x_0)(d-y_0)]^{p-1},a_4=x_0,c_4=y_0,x_4=b,y_4=d$.([330]2002,33(4):379 ~ 386)

(21) **三元 Opial 型不等式**:设 $D=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]$,若 $f(x_1,x_2,x_3)$, $f'_{x_k},f'''_{x_1x_2x_3}$ 在 D 上连续, $f(a_1,x_2,x_3)=f(b_1,x_2,x_3)=f(x_1,a_2,x_3)=f(x_1,b_2,x_3)=f(x_1,x_2,a_3)=f(x_1,x_2,b_3)=0,x=(x_1,x_2,x_3)\in D$,则称 $f\in \mathrm{F}(D)$. 设 $f_k\in \mathrm{F}(D),1\leqslant p_k<\infty,\mu(D)=\prod_{k=1}^3(b_k-a_k)$,则

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_3}^{b_3}\left(\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{3}|f_i|^{p_i}|f_j|^{p_j}\right)\leqslant\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_3}^{b_3}\left(\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\mu(D)}{8}\right)^{2p_k}|(f_k)'''_{x_1x_2x_3}|^{2p_k}\right).$$

(Pachpatte,B. G. ,Fasc. Math. 1999,30:113－129.)　2001 年,Pachpatte,B. G. 又证明:

$$\int_D|fg|\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{\mu(D)}{8}\right)^2\int_D(|f'''_{x_1x_2x_3}|^2+|g'''_{x_1x_2x_3}|^2).$$

(MR2001a:26017)

(22)　**多元 Opial- 华罗庚不等式**:设 $Q=\{x=(x_1,\cdots,x_n):a_k\leqslant x_k\leqslant b_k,1\leqslant k\leqslant n\}$. u 在 Q 上有连续偏导数,且在 Q 的边界上为零,$p,q\geqslant 1$,则

$$\int_Q|u|^p|\nabla u|^q\leqslant M\int_Q|\nabla u|^{p+q}.$$

式中　$M=\frac{1}{n2^p}\left[\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)^{\alpha}\right]^{\beta},\alpha=\frac{p(p+q)}{q},\beta=\frac{q}{p+q}.$

(Pachpatte,B. G. ,[301]1987,126(1):85 ～ 89)

(23)　多元加权 Opial－华罗庚不等式:设 $r>0$, $n\geqslant 1$, $B(0,r)$ 是 R^n 中以原点为中心,r 为半径的球. $p\in R$ 且 $p+n\geqslant 1$. 若 $f\in C^1\,\overline{(B(0,r))}$, $f(\partial B(o,r))=0$, 则

$$\int_{B(0,r)}|x|^p|f(x)||\nabla f(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{r}{2}\int_{B(0,r)}|x|^p|\nabla f(x)|^2\mathrm{d}x,$$

式中 ∇ 为梯度算子. ([418]85(5)(2006),579 ～ 591)

(24)　设 Ω 是 R^n 中有界凸域, $\mathrm{d}(x)=\mathrm{dist}(x,\partial\Omega)$, $\mathrm{d}=2\sup\{\mathrm{d}(x):x\in\Omega\}$.

若 $f\in W_0^{1,p}(\Omega)$, 则

$$\int_\Omega|\nabla f|^p\mathrm{d}x-\left(1-\frac{1}{p}\right)^p\int_\Omega\frac{|f|^p}{(\mathrm{d}(x))^p}\mathrm{d}x\geqslant C\mathrm{d}^{-\frac{p(\alpha+n)}{q-n+p}}\left(\int_\Omega|f|^q(\mathrm{d}(x))^{\alpha}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{q}},$$

式中 $1<p\leqslant q\leqslant\frac{np}{n-p}$, $n>p$, $\alpha>\frac{q}{p}(n-p)-n$.

(Calc. Var. ,Partial Differ. Equ. 35(4)(2006),491 ～ 501)

(25)　设 $1\leqslant p<\infty$, $s>0$, $sp-n<\gamma<n(p-1)$, $\alpha=\gamma-sp$, 则

$$\int_{R^n}|f(x)|^p|x|^{\alpha}\mathrm{d}x\leqslant C^p\int_{R^n}|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}f(x)|^p|x|^{\gamma}\mathrm{d}x,$$

式中 $C=2^{-s}\dfrac{\Gamma\left(\frac{n(p-1)-\gamma}{2p}\right)\Gamma\left(\frac{n+\gamma-sp}{2p}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+\gamma}{2p}\right)\Gamma\left(\frac{n(p-1)+sp-\gamma}{2p}\right)}$ 是最佳常数.

此外,见[330]35(2004),145 ～ 157,36(2005),111 ～ 117. [301]1991,162(2):317 ～ 321; [301]1995,189:85 ～ 103; 1995,190:559 ～ 577;Internat. ser. Num. Math. 1997,123: 157 ～ 178; Tohoku Math. J. 1995,47:567 ～ 593. Math. Nachr,1995, 174:5 ～ 20. Applicable Analysis,1995,56:227 ～ 242; [403],1996,26(2):179 ～ 210, [415] 19(2) (1986), 281 ～ 291; [304]2000,1(2):No. 20;专著[131] 等.

2.　**Hilbert 不等式**:Hilbert 不等式的有限和与级数形式分别见第 3 章 No. 157 和 11 章 § 2No. 42. 此处是有关积分形式的基本结果及其新的研究成果.

(1)　设 $f \in L^p(0,\infty)$，$g \in L^q(0,\infty)$，$f,g \geqslant 0$，$p > 1$，$(1/p)+(1/q)=1$，则

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \left(\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\right) \| f \|_p \| g \|_q . \tag{2.1}$$

(除非 $f \equiv 0$ 或 $g \equiv 0$)，式中系数 $\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}$ 是最佳的.(Hardy-Riesz,[1]:255)

(2)　在(1)的条件下，成立

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{\max\{x,y\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y < pq \| f \|_p \| g \|_q ;$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\ln\left(\frac{x}{y}\right)}{x-y} f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \left(\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\right)^2 \| f \|_p \| g \|_q .$$

除非 $f \equiv 0$ 或 $g \equiv 0$，[1] 定理 341，342.

注　我们可以定义 Hilbert 算子 $T(f,x) = \int_0^\infty \frac{f(y)}{x+y}\mathrm{d}y$，则

$$\| Tf \|_p \leqslant C_p \| f \|_p , 1 < p < \infty ,$$

式中　$C_p = \| T \| = \int_0^\infty \frac{1}{(x+1)x^{1/p}}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin(\pi/p)}$.

(3)　**Hilbert-Riesz 不等式**：设 $f \in L^p(0,\infty)$，$g \in L^q(0,\infty)$，$f,g \geqslant 0$，$p,q > 1$，$(1/p)+(1/q) > 1$，$\lambda = 2-(1/p)-(1/q)$. $0 < \lambda < 1$，则

$$\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{f(x)g(y)}{|x+y|^\lambda}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant c(p,q) \| f \|_p \| g \|_q , \tag{2.2}$$

如何求出 $c(p,q)$ 的最佳值，至今仍然是一个没有完全解决的问题，例如：Levin 将(2.2)式中的积分区间改为 $(0,\infty)$ 时，求出

$$c(p,q) = \left(\frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{\lambda p'}}\right)^\lambda ，式中 \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

但它仍不是最佳值(见 J. Indian Math. Soc. 1937，11：111 ～ 115)；若记 f^* 为 f 的递减重排，(定义见本章 No. 20 或[132]：228 ～ 245)，$F = \sup\{x[f^*(x)]^p : x > 0\}$，类似定义 $G = \sup\{x[g^*(x)]^q : x > 0\}$. p'，q' 分别为 p，q 的共轭指数，则

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{(x+y)^\lambda}\mathrm{d}x\mathrm{d}y < c(p,q) F^{(1-\lambda)/\lambda p'} G^{(1-\lambda)/\lambda q'} \| f \|_p^{p/(\lambda q')} \| g \|_q^{q/(\lambda P')} ,$$

式中 $C(p,q) = \frac{\Gamma(1/p')\Gamma(1/q')}{\Gamma(\lambda)}$ 为最佳常数，在积分区间 $(-\infty,\infty)$ 上也有类似的不等式.([317]1936，11(1)：119 ～ 124)

(2.2)式可写成以下等价形式：

$$\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{f(x)g(y)}{|x-y|^\lambda}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant K(p,q) \| f \|_p \| g \|_q . \tag{2.3}$$

已知仅当 $p = q = \frac{2}{2-\lambda}$ 时，$K(p,q) = \pi^{(\lambda-\frac{1}{2})}\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)/\Gamma\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)$.

(Lieb，E. H.，[311]. 1983，118：349 ～ 374)

但当 p，q 不满足上述关系时，$K(p,q)$ 的最佳值为何求？

[173]:409 求出

$$K(p,q)=\frac{4}{1-\lambda}\left\{\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p(1-\frac{1}{q})}+\left(\frac{q}{q-1}\right)^{q(1-\frac{1}{p})}\right\}$$

但不知它是否为最佳值.

(4)　设 f,g,h 在 $[0,\infty)$ 上非负可测，a,b,c 为实数. $1\leqslant p,q,r<\infty$，p',q',r' 分别为 p,g,r 的共轭指数. $\lambda=2-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-\frac{1}{r'}=a+b+c$，$0\leqslant\lambda\leqslant1$，若以下三个条件之一成立：

① $\min\{p,q,r'\}>1$，$\max\{ap',bq'\}<1$，$\max\{a,b\}\leqslant\lambda$；

② $\min\{p,q,r'\}=1$，$\max\{ap',bq'\}<1$，$\lambda>0$，$\max\{a,b\}<\lambda$；

③ $\min\{p,q,r'\}=1$，$\max\{a,b\}\leqslant\lambda=0$，则

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{f(x)g(y)h(x+y)}{x^a y^b(x+y)^c}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant C(p,q,r,a,b)\|f\|_p\|g\|_q\|h\|_{r'}\tag{2.4}$$

(2.4) 式又称为 **Hardy-Littlewood 不等式**.（式中系数的讨论及其证明见 Pitt, H. R., [317]1938, 13:95 ~ 101）

(5)　设 f,g 在 $(0,\infty)$ 上非负可测，$p,q>1$，$(1/p)+(1/q)\geqslant1$，$\lambda=2-(1/p)-(1/q)$，$\alpha<1-(1/p)$，$\beta<1-(1/q)$，$\alpha+\beta\geqslant0$，而当 $(1/p)+(1/q)=1$ 时，$\alpha+\beta>0$，则

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{f(x)g(y)}{x^\alpha y^\beta|x-y|^{\lambda-\alpha-\beta}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant C(p,q,\alpha,\beta)\|f\|_p\|g\|_q.\tag{2.5}$$

([1]334 ~ 335，定理 401.) 常数 $C(p,q,\alpha,\beta)>0$ 的最佳值已由匡继昌求出，见北京联合大学学报 2008(2):62 ~ 65，或见本段后匡继昌的综合报告第七部分.

([21]187 ~ 215 用了一章（第 5 章）的篇幅介绍了 Hilbert 不等式到 20 世纪 80 年代末的研究成果，共收录了 59 篇文献.) 1990 年，徐利治首先引入权系数：

$\omega(r,n)=\dfrac{\pi}{\sin(\pi/r)}-\phi(r,n)$　（式中 $\phi(r,n)>0$，$r=p$ 或 q），使得 (2.1) 式中的最佳常数还可改进，其级数形式见第 11 章 §2. No. 42.，下面是积分形式：

(6)　1992 年，胡克通过引入实函数 $\varphi(x)$，使得 $1-\varphi(x)+\varphi(y)\geqslant0$，$x,y>0$，$f,g\in L^2(0,\infty)$，$f,g$ 非负，则

$$\left|\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{f(x)g(y)}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|^4\leqslant\pi^4(\|f\|_2^4-\|f\|_{2,\omega}^4)(\|g\|_2^4-\|g\|_{2,\omega}^4),\tag{2.6}$$

式中 $\omega(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty\frac{\varphi(t^2x)}{1+t^2}\mathrm{d}t-\varphi(x)$，

$$\|f\|_2=\left(\int_0^\infty|f|^2\right)^{1/2},\ \|f\|_{2,\omega}=\left(\int_0^\infty|f|^2\omega\right)^{1/2}.$$ ([29]:28 ~ 29).

1979 年，胡克还证明

$$\left(\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{f(x)f(y)}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^2$$

$$\leqslant\pi^2\left\{\|f\|_2^4-\frac{1}{4}\left(\int_0^\infty f^2(x)\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x-\int_0^\infty f^2(x)e^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x\right)^2\right\}.\tag{2.7}$$

可由此改进 Hardy 不等式，Widder 不等式等.（见江西师范学院学报 1979，1:3 ~ 4）

(7)　高明哲等证明:设 f,g 在 $(0,\infty)$ 上非负平方可积,则

$$\left(\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^2 \leqslant \pi^2\|f\|_2^2\|g\|_2^2 - G(\xi,\eta,\delta), \tag{2.8}$$

式中 $\xi = \dfrac{1}{(x+y)^{1/2}}\left(\dfrac{x}{y}\right)^{1/4}f(y),\eta = \dfrac{1}{(x+y)^{1/2}}\left(\dfrac{y}{x}\right)^{1/4}g(y)$,

$\delta = \delta(t)$ 为 $L^2[(0,\infty)\times(0,\infty)]$ 中某个单位向量.

$G(\xi,\eta,\delta) = \|\xi\|^2(\eta,\delta)^2 - 2(\xi,\eta)(\eta,\delta)(\xi,\delta) + \|\eta\|^2(\xi,\delta)^2 > 0.$

([301]1999,229:682 ~ 689.)1999 年,高明哲还建立了以下形式的不等式:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \pi\sqrt{1-R}\,\|f\|_2\|g\|_2,$$

式中 $R = \dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{u}{\|g\|} - \dfrac{v}{\|f\|}\right)^2, u = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}(g,e), v = \sqrt{2\pi}(f,e^{-x}), e(y) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x+y}\mathrm{d}x.$

([390]1999,18(4):1117 ~ 1122)

(8)　杨必成证明:设 $f,g \geqslant 0, 0 < \|f\|_{p,w} = \left(\int_0^\infty |f|^p\omega\right)^{1/p} < \infty, 0 < \|g\|_{q,\omega}$ $= \left(\int_0^\infty g^q\omega\right)^{1/q} < \infty, \omega(x) = x^{1-\lambda}, p > 1, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1, \lambda > 2 - \min\{p,q\}$,则

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{(x+y)^\lambda}\mathrm{d}x\mathrm{d}y < B\left(\frac{p+\lambda-2}{p},\frac{q+\lambda-2}{q}\right)\|f\|_{p,\omega}\|g\|_{q,\omega}, \tag{2.9}$$

(式中 $B(u,v)$ 为 Beta 函数,更一般情形和证明见[336]2000,21A(4):401 ~ 408,$p = q =$ 2 时见[301]1998,220:778 ~ 785)

(9)　1998 年,匡继昌证明:设 $f \in L^p(0,\infty), g \in L^q(0,\infty), f,g \geqslant 0$, $(1/p) + (1/q) = 1, 1 < p < \infty, \max\{(1/p),(1/q)\} < \lambda \leqslant 1$,则

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{(x+y)^\lambda}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \frac{\pi}{\lambda(\sin(\pi/p\lambda))^{1/p}(\sin(\pi/q\lambda))^{1/q}}\|f\|_{p,\omega}\|g\|_{q,\omega}. \tag{2.10}$$

式中 $\omega(x) = x^{1-\lambda}, \|f\|_{p,\omega} = \left(\int_0^\infty |f|^p\omega\right)^{1/p}.$

(更一般情形及其证明见[301]1999,235:608 ~ 614)

1999 年,匡继昌与 Rassias,T. M. 证明:在上述条件下,成立

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{(x+y)^\lambda}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant B\left(\frac{1}{p},\lambda-\frac{1}{p}\right)^{1/p}B\left(\frac{1}{q},\lambda-\frac{1}{q}\right)^{1/q}\|f\|_{p,\omega}\|g\|_{q,\omega}.$$

更一般地设 $K(x,y)$ 是非负对称且为 $-t$ 次齐次的核,$K(1,y)$ 是 y 的严格递减函数,$1 < p < \infty. \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1, \max\left\{\dfrac{1}{p},\dfrac{1}{q}\right\} < t.$ 令 $M(r) = \int_0^\infty K(1,y)y^{-\frac{1}{r}}\mathrm{d}y < \infty, r = p,q$, $\omega(x) = x^{1-t}$,若 f,g 是 $(0,\infty)$ 上非负可测函数,则

$$\int_0^\infty\int_0^\infty K(x,y)f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant [M(q)]^{1/p}[M(p)]^{1/q}\|f\|_{p,\omega}\|g\|_{q,\omega}. \tag{2.11}$$

(证明及其他情形见[303]2000,3(4):497 ~ 510)

(10)　杨必成证明:设 $\lambda > 0, 1 < p < \infty, 1/p + 1/q = 1. f,g \geqslant 0, \omega_p(x) =$ $x^{(p-1)(1-\lambda)}$.

$$0<\|f\|_{p,\omega_p}=\left(\int_0^\infty |f|^p\omega_p\right)^{1/p}<\infty, 0<\|g\|_{q,\omega_q}=\left(\int_0^\infty g^q\omega_q\right)^{1/q}<\infty.$$

则
$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{x^\lambda+y^\lambda}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\frac{\pi}{\lambda\sin(\frac{\pi}{p})}\|f\|_{p,\omega_p}\|g\|_{q,\omega_q}. \tag{2.12}$$

(式中常数是最佳的,见[336],2002,23A(2):247 ~ 254)

(11) 2003 年,匡继昌与 Debnath,L. 证明了 Hilbert 不等式及其逆的一般形式:设 f,g 在$(0,a)$ 上非负可测,$\alpha(x),\beta(y)$ 是$(0,a)$ 上正的可测函数,$1/p+1/q=1,a<\infty$ 或 $a=\infty$,令

$$F(u)=e^{-u}\int_0^a f(x)\frac{u^{\alpha(x)-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\alpha(x)+1/2)}\mathrm{d}x,\qquad G(u)=e^{-u}\int_0^a g(x)\frac{u^{\beta(x)-1/2}}{\Gamma(\beta(x)+1/2)}\mathrm{d}y,$$

若 $1<p<\infty$,则

$$\int_0^a\int_0^a \frac{f(x)g(y)}{\alpha(x)+\beta(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\|F\|_p\|G\|_q.$$

若 $0<p<1$,则不等号反向.

该文还将上述结果推广到更一般形式

$$\int_0^a\int_0^a\cdots\int_0^a \frac{\prod_{k=1}^n f_k(x_k)}{\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k(x_k)\right)^\lambda}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\leqslant\prod_{k=1}^n\Gamma(1-\frac{1}{p_k})\|F_k\|_{p_k}, \tag{2.13}$$

式中 $F_k(u)=a^{-u}\int_0^a f_k(x)\frac{u^{(\alpha_k(x))^\lambda-\frac{1}{2}}}{\Gamma((\alpha_k(x))^\lambda+1/2)}\mathrm{d}x, 1<p_k<\infty, \sum_{k=1}^n\frac{1}{p_k}=1,\lambda\geqslant 1.$

(2.14)

当 $0<\lambda<1$ 时(2.14) 式中$\{\alpha_k(x)\}^\lambda$ 要换成 $n^{\lambda-1}\{\alpha_k(x)\}^\lambda$. ([365]31(2005),163 ~ 173)

(12) 1998 年,Pachpatte,B. G. 证明了 Hilbert 不等式的积分类似:设 f,g 在$(0,\infty)$ 上连续可微. $f(0)=g(0)=0$,则

$$\int_0^a\int_0^b \frac{|f(x)g(y)|}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\frac{\sqrt{ab}}{2}\left(\int_0^a(a-x)|f'(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$
$$\times\left(\int_0^b(b-x)|g'(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}. \tag{2.15}$$

([301]1998,226:166 ~ 179,[330]1999,30(2):139 ~ 146. 赵长键与 Debnath,L. 又作了进一步推广与改进,例如见[301]2001,262:411 ~ 418)

(13) 设 f,g 在$(0,\infty)$ 上非负可测,则

$$\left(\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{x+y}dxdy\right)^2\leqslant\frac{\pi^2}{2}\left[\left(\int_0^\infty f^2\right)\left(\int_0^\infty g^2\right)+\left(\int_0^\infty fg\right)^2\right]. \tag{2.16}$$

(Zhang Kewei,[301]2002,271(1):288 ~ 296)

(14) 2009 年,洪勇证明:设 $p,r>1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ \frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1,\ \lambda>0,\ -1<\alpha<-\lambda,\ f,g\geqslant 0$, 则

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|x-y|^\alpha}{\min\{x^\lambda,y^\lambda\}}f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant C(\alpha,\lambda,r,s)\,\|f\|_{p,w_1}\,\|q\|_{q,w_2},$$

式中 $C(\alpha,\lambda,r,s)=B\Big(1+\alpha,-\Big(\dfrac{\lambda+\alpha}{s}\Big)\Big)+B\Big(1+\alpha,-\Big(\dfrac{\lambda+\alpha}{r}\Big)\Big)$,

$w_1(x)=x^{p}(\frac{\alpha}{r}-\frac{\lambda}{s}+1)^{-1}$, $w_2(x)=x^{q}(\frac{\alpha}{s}-\frac{\lambda}{r}-1)^{-1}$.

(证明及更一般的情形见[164]25 ～ 31)

我们要问:若将上述 f,g 的加权范数 $\|f\|_{p,w_1}$, $\|g\|_{q,w_2}$ 改为非权范数 $\|f\|_p$, $\|g\|_q$,那么,相应的 $C(\alpha,\lambda,r,s)$ 是什么?

(有关 Hilbert 不等式的研究成果综述文章可见[303]6(4)(2003):625 ～ 658,[339]25(2)(2005):227 ～ 243 和专著[162]) 我们自然要问:为什么一个看似简单特殊的不等式,竟然可以引出如此丰富多彩的研究成果?既然在这个方向上已发表了好几百篇论文,今后还值不值得在这个方向上继续做文章?我们不可能去罗列这几百篇文章的基本结果,却有必要从这几百篇论文中,探索其中有哪些值得关注的新的思想方法和新的分析技巧,他对我们今后的研究工作有什么新的启示?今后的研究方向是什么,等等.2009 年 10 月,匡继昌在湖州师范学院讲学时,结合本人的研究工作,试图从下述 11 个方面来探讨这些问题.

第 1.　参量化

例如见(2.9),(2.10),(2.12) 和杨必成的综述文章[335]38(3)(2009),257 ～ 269.

第 2.　权系数方法

在这方向上,开创性的工作是徐利治教授 1991 年([339]11(1)(1991),143 ～ 144) 作出的.他通过引入权系数 $\omega(r,n)$,证明了级数形式的 Hilbert 不等式可以写成:

$$\sum_{m=1}^\infty\sum_{n=1}^\infty \frac{a_m b_n}{m+n} \leqslant \Big(\sum_{n=1}^\infty \omega(q,n)a_n^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\sum_{n=1}^\infty \omega(p,n)b_n^q\Big)^{\frac{1}{q}}, \tag{2.17}$$

式中 $\omega(r,n)=\dfrac{\pi}{\sin\Big(\dfrac{\pi}{p}\Big)}-\varphi(r,n)$, $\varphi(r,n)>0$, $r=p,q$. 由此引发了一系列工作,经过不断改进,1996 年,杨必成和高明哲([335]26(2)(1997),159 ～ 164) 得到一个十分漂亮的结果:$\varphi(r,n)=\dfrac{1-c}{n^{1-\frac{1}{r}}}$ 式中,c 是 Euler 常数,$1-c=0.42278433^+$ 是最佳值.他们证明的基本工具是改进的 Euler-Macraurin 求和公式和 Hölder 不等式,所用的基本技巧是 Hardy 的“compensating difficulties”(inserting a term and its reciprocal)(即“补偿难题”,插入一项及其倒数).这种求最佳常数的工作,在 Hilbert 不等式的研究中,所占的比重最大.胡克、高明哲、赵长健,Pachpatte B. G. 等通过对著名的 Hölder 不等式,Cauchy 不等式的改进等新的分析技巧,从另一角度改进和推广了 Hilbert 不等式.可见(2.6),(2.7),(2.8),(2.15) 和(2.16) 等.

第 3.　最佳单调性定理

2008 年,张小明和褚玉明得到了一个称为最值单调性的定理,它对研究 Hilbert 不等式等方面往往起着意想不到的独特作用,令我们耳目一新.例如,将级数形式的 Hilbert 不

等式改进为

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n}\right)^{p+q}$$
$$<\left(\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}\right)^{p+q}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p\right)^q\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n^q\right)^p-\left[\left(\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}\right)^{p+q}-\left(\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}-\lambda\right)^{p+q}\right](a_1b_1)^{p+q},\tag{2.18}$$

式中 $\lambda=1-c$，$c=0.57721566\cdots$ 为 Euler 常数.([351]2008:1 ~ 8,469 ~ 475.[163],[164])

第 4.　寻求 Hilbert 不等式的一般形式

2003 年，匡继昌和 L. Debnath 的工作见(2.13)，(2.14). 2006 年，Sulaiman([413]3(2006)No. 1 artice 15) 证明：设 f,g,α,β 及其导数 α',β' 都是 $(0,\infty)$ 上的正函数，$1<p<\infty$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$c=a+1,b+1$，$0<c<\lambda$，令

$$r=\frac{aq-bp}{q+(1-\lambda)},\qquad s=\frac{bq-ap}{p+(1-\lambda)},\quad B(u,v)\text{ 是 Beta 函数},$$

则

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{f(x)g(y)}{(\alpha(x)+\beta(y))^{\lambda}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$\leqslant C(p,q,\lambda)\left(\int_0^{\infty}\frac{f^p(x)\alpha^r(x)}{(\alpha'(x))^{\frac{p}{q}}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\infty}\frac{g^q(x)\beta^s(x)}{(\beta'(x))^{\frac{q}{p}}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}.\tag{2.19}$$

式中 $C(p,q,\lambda)=B^{\frac{1}{p}}(a+1,\lambda-a-1)B^{\frac{1}{q}}(b+1,\lambda-b-1)$.

第 5.　推广到齐次核的情形

Hardy 等在[1] 中就引入了非负且为 -1 次齐次核 $K(x,y)$，得到

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}K(x,y)f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant C(p)\left(\int_0^{\infty}f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\infty}g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}},\tag{2.20}$$

式中 $C(p)=\int_0^{\infty}K(x,1)x^{-\frac{1}{p}}\mathrm{d}x$，$1<p<\infty$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$f\in L^p(0,\infty)$，$g\in L^q(0,\infty)$，$f,g$ 在 $(0,\infty)$ 上非负.

1999 年，匡继昌和 T. M. Rassias 研究了带一般齐次核的 Hilbert 积分算子

$$T_{\lambda}(f,g)=\int_a^b\int_a^b K(x+\lambda,y+\lambda)f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\tag{2.21}$$

的一系列不等式(其中 a 可以是 0，b 可以是 ∞).

例如，设 $1<p<\infty$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$\lambda\geqslant 0$，$0<1-\frac{2\lambda}{r}<t$，$K(x,y)$ 是非负对称且为 $(-t)$ 次齐次核，$K(1,y)$ 是 y 的严格递减函数，f,g 是 $(0,\infty)$ 上非负可测函数，若

$$I(r,\lambda)=\int_0^{\infty}K(1,y)y^{\frac{-2\lambda}{r}}\mathrm{d}y<\infty\quad r=p,q,$$

则

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}K(x+\lambda,y+\lambda)f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\leqslant \left\{\int_0^\infty \left[I\left(q,\frac{1}{2}\right)-(2x+1)^{-\frac{1}{p}}\int_0^1 K(1,u)\mathrm{d}u\right]\left(x+\frac{1}{2}\right)^{1-t} f^p(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}$$
$$\times \left\{\int_0^\infty \left[I\left(p,\frac{1}{2}\right)-(2x+1)^{-\frac{1}{q}}\int_0^1 K(1,u)\mathrm{d}u\right]\left(x+\frac{1}{2}\right)^{1-t} g^q(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{q}}. \quad (2.22)$$

([303]3(4)(2000),497 ~ 510. 另见杨必成[335]38(2009),257 ~ 269)

第 6. 推广到非齐次核的情形

2007 年，徐景实证明：设 $1 < p < \infty$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$0<\lambda_1<q$，$0<\lambda_2<p$，$\omega_1 = x^{(p-1)(1-\lambda_1)}$，$\omega_2 = x^{(q-1)(1-\lambda_2)}$，$f,g$ 在$(0,\infty)$ 非负，且 $f\in L^p(\omega_1)$，$g\in L^q(\omega_2)$，则

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{x^{\lambda_1}+y^{\lambda_2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \frac{\pi}{\lambda_1^{\frac{1}{q}}\lambda_2^{\frac{1}{p}}\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}\| f\|_{p,\omega_1}\| g\|_{q,\omega_2}. \quad (2.23)$$

([335]36(2007),189 ~ 202. 多重积分的相应结果见鲁圣洁、陶祥兴[338]29(A)(2009),597 ~ 606)

第 7. 推广到非共轭情形

[1]P334 ~ 335 定理 401 指出，要求出(2.5) 式中的常数 $C(p,q,\alpha,\beta)$ 的值，特别是最佳值，是一个困难的问题. 为此，匡继昌在第 3 版中将它列为第 109 个未解决的问题. 2008 年，匡继昌利用新的分析技巧求出了(2.5) 式中的最佳常数是：

$$C(p,q,\alpha,\beta) = \left\{B\left(\frac{\alpha+\beta}{\lambda},1-\frac{1}{\lambda}\left(1+\beta-\frac{1}{p}\right)\right)+B\left(\frac{\alpha+\beta}{\lambda},\frac{1}{\lambda}\left(1-\alpha-\frac{1}{p}\right)\right)\right\}^{1-\frac{1}{q}}$$
$$\times\left\{B\left(\frac{\alpha+\beta}{\lambda},1-\frac{1}{\lambda}\left(1+\alpha-\frac{1}{q}\right)\right)+B\left(\frac{\alpha+\beta}{\lambda},\frac{1}{\lambda}\left(1-\beta-\frac{1}{q}\right)\right)\right\}^{1-\frac{1}{p}}.$$

若加上条件：$1+\alpha-\frac{1}{q}<\lambda<1+\alpha+\beta$，$\alpha+\beta>0$，则(2.5) 中的最佳常数是：

$$C(p,q,\alpha,\beta) = B\left(1-\beta-\frac{1}{q},1+\alpha+\beta-\lambda\right)+B\left(\lambda-1-\alpha+\frac{1}{q},1+\alpha+\beta-\lambda\right).$$

(北京联合大学学报,22(2)(2008),62 ~ 65). 2008 年，匡继昌和 L. Debnath 利用函数重排等新的分析技巧，得到了具有最佳常数的更一般的结果：

设 $1<p,q<\infty$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\geqslant 1$，$0<\lambda=2-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{1}{r}+\frac{1}{s}<1$，$\lambda s>1$，$\lambda p\geqslant 1$，$K(x,y)$ 是$(0,\infty)\times(0,\infty)$ 非负可测函数，并且满足以下条件：

(1) $K(tx,ty)=t^{-\lambda}K(x,y)$，$t>0$，$\lambda>0$；

(2) $K(1,u)$ 是 u 的递减函数；

(3) $\int_0^\infty K(1,u)u^{-\frac{1}{q}}\mathrm{d}u<\infty$，$\int_t^\infty K(1,u)u^{-\frac{c}{q}}\mathrm{d}u = O(t^{-\frac{c}{r}})$，$t\to\infty$，$c=1,2$.

若 f,g 都是$(0,\infty)$ 上非负可测函数，$f\in L^p(0,\infty)$，$g\in L^q(0,\infty)$，则

$$\int_0^\infty\int_0^\infty K(x,y)f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant C(p,q)[f]_q^{\frac{p(1-\lambda)}{r\lambda}}[g]_q^{\frac{q(1-\lambda)}{s\lambda}}\| f\|_p^{\frac{p}{s\lambda}}\| g\|_q^{\frac{q}{r\lambda}}$$
$$\leqslant C(p,q)\| f\|_p\| g\|_q, \quad (2.24)$$

式中 $C(p,q)=\int_0^\infty K(1,u)u^{-\frac{1}{q}}\mathrm{d}u$ 是最佳常数. $[f]_p = \sup\{t^{\frac{1}{p}}f^*(t):t>0\}$，$f^*$ 是 f 在

$(0,\infty)$ 上的递减重排. 从(2.24) 可得出一系列重要而有趣的结果. 例如,取 $K(x,y)=(x+y)^{-\lambda}$, $1-\frac{1}{q}<\lambda\leqslant 1$, 得出

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{(x+y)^\lambda}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant C(p,q)\|f\|_p\|g\|_q. \tag{2.25}$$

式中 $C(p,q)=B\left(1-\frac{1}{q},1-\frac{1}{p}\right)$是最佳常数. 这就解决了在[1] 中定理 339 ～ 340 所提出的问题. 当 $\lambda=1$ 时,归结为共轭情形: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 这时,

$$C(p,q)=\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}$$

即(2.25) 归结为(2.1).

第 8. 将求最佳常数转化为求相应算子的范数

(2.1) 式等价于以下算子范数不等式:定义 Hilbert 算子 T 为

$$T(f,x)=\int_0^\infty\left(\frac{1}{x+y}\right)f(y)\mathrm{d}y \tag{2.26}$$

则

$$\|Tf\|_p\leqslant\|T\|\ \|f\|_p \tag{2.27}$$

式中,最佳常数就是算子 T 的范数: $\|T\|=\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}$. 于是,我们可以考虑具有一般核 $K(x,y)$ 的广义 Hilbert 算子:

$$T(f,x)=\int_0^\infty K(x,y)f(y)\mathrm{d}y \tag{2.28}$$

若核 $K(x,y)$ 是$(0,\infty)\times(0,\infty)$ 上非负可测函数,且满足

$$K(tx,ty)=t^{-\lambda}K(x,y),\qquad t>0,\quad \lambda>0, \tag{2.29}$$

则

$$\|Tf\|_p\leqslant C_p\|f\|_{p,\omega} \tag{2.30}$$

式中 $\|f\|_{p,\omega}=\begin{cases}\left(\int_0^\infty |f(x)|^p\omega(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}, w(x)=x^{(1-\lambda)p}, 1\leqslant p<\infty,\\ \operatorname{esssup}\{|f(x)|x^{1-\lambda}\}, \qquad p=\infty.\end{cases}$

范数 $\|T\|=C_p=\begin{cases}\int_0^\infty K(1,u)u^{\lambda-\frac{1}{p}-1}\mathrm{d}u, & 1\leqslant p<\infty\\ \int_0^\infty K(1,u)u^{\lambda-1}\mathrm{d}u, & p=\infty\end{cases}$ 是最佳常数.

(匡继昌[351]2009(4):386 ～ 395. 对于带对称负一次齐次核的 Hilbert 型序列算子的范数,见金建军[334]52(2009),799 ～ 806)

第 9. 复分析方法

1934 年,H. Frazer([317]9(2)(1934),90 ～ 94) 先证明了一个解析不等式:设 $f(z)$ 在圆 Γ 及其内部正则,D_0,D_1 为 Γ 的任意两条直径,$\lambda>0$, θ 为直径之间的锐角,则

$$\int_{D_0\cup D_1}|f(z)|^{\lambda}|\mathrm{d}z|\leqslant\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}\int_{\Gamma}|f(z)|^{\lambda}|\mathrm{d}z|,\tag{2.31}$$

由此推出

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_m a_n\cos(\mathrm{m}-\mathrm{n})\left(\frac{\theta}{2}\right)}{m+n+1}\leqslant\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}\sum_{n=0}^{\infty}a_n^2.\tag{2.32}$$

当 $\theta=0$ 时，得到 Hilbert 不等式. 而当 $m+n$ 为偶数时，(2.32) 还可改进为：

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_m a_n\cos(\mathrm{m}-\mathrm{n})\left(\frac{\theta}{2}\right)}{m+n+1}\leqslant\frac{\pi}{2\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}\sum_{n=0}^{\infty}a_n^2.\tag{2.33}$$

(见第 9 章 §2. 五. No. 55 和第 11 章 §2. No. 42(13)). 在这个方向上，胡克[159] 有一系列的工作. 但总的来说，这方面的工作还不多.

第 10.　Fourier **分析方法**

1912 年，Teoplitz 利用 Fourier 分析方法直接证明：

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n}\leqslant\pi\|a\|_2\|b\|_2.\tag{2.34}$$

事实上，由 $\frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi}(\pi-t)e^{\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t=\frac{1}{n}$ 即可得出

$$\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{a_m b_n}{m+n}=\frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi}(\pi-t)\sum_{k=1}^{N}a_k e^{ikt}\sum_{k=1}^{N}b_k e^{ikt}\mathrm{d}t.\tag{2.35}$$

对 (2.35) 式中的积分用 Cauchy-Schwarz 不等式，即得 (2.34).

恒等式 (2.35) 有一个二次的对应：

$$\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{a_m b_n}{(m+n)^2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\zeta(2)-\frac{t\pi}{2}+\frac{1}{4}\right)\sum_{k=1}^{N}a_k e^{ikt}\sum_{k=1}^{N}b_k e^{ikt}\mathrm{d}t.,$$

式中 $\zeta(t)$ 是 Riemann zeta 函数. 对于正整数 λ，我们有

$$\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{a_m b_n}{(m+n)^2}=\frac{1}{(2\pi)i^{\lambda}}\int_0^{2\pi}g_{\lambda}\left(\frac{t}{2\pi}\right)\sum_{k=1}^{N}a_k e^{ikt}\sum_{k=1}^{N}b_k e^{ikt}\mathrm{d}t,\tag{2.36}$$

式中 $g_{\lambda}(x)=(-1)^{[\frac{1+\lambda}{2}]}B_{\lambda}(x)\frac{(2\pi)^{\lambda}}{2\lambda!}$，$(0<x<1)$，$B_{\lambda}(x)$ 是 Bernoulli 多项式，

$$g_{2n}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k\pi x)}{k^{2n}},\qquad g_{2n+1}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k\pi x)}{k^{2n+1}}.$$

于是，我们由 (2.36) 得出

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{(m+n)^{\lambda}}\leqslant\|g_{\lambda}\|\|a\|_2\|b\|_2,\tag{2.37}$$

式中，$\|g_{\lambda}\|=\sup\{|g_{\lambda}(x)|:0<x<1\}$. 我们可以求出

$$\|g_{2n}\|=g_{2n}(0)=\zeta(2n)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}},\qquad\|g_{2n+1}\|=g_{2n+1}\left(\frac{1}{4}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^{2n+1}}.$$

我们注意到这些上界中的大多数不是最优的.

第 11. 将 Hilbert 不等式从 L^p 空间推广到其他函数空间

(1) **Orlicz** 空间

2006 年,匡继昌和 L. Debnath 证明了一个在加权 Orlicz 空间上的一般性的结果:设 φ,ψ 是 $(0,\infty)$ 上的共轭杨格函数,非负核 $K(x,y)$ 满足 $K(tx,ty)=t^{-\lambda}K(x,y)$, $\lambda>0$, 则

$$\int_0^\infty\int_0^\infty K(x,y)f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant C(\varphi,\psi)\,\|f\|_{\varphi,\omega}\,\|g\|_{\psi,\omega},\tag{2.38}$$

式中

$$C(\varphi,\psi)=\int_0^\infty K(1,u)\psi^{-1}\left(\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u+\int_0^\infty K(u,1)\psi\left(\frac{1}{\varphi^{-1}(\psi^{-1}(u))}\right)\mathrm{d}u,$$

$\|f\|_{\varphi,\psi}=\inf\left\{\lambda>0:\int_0^\infty\varphi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)\omega(x)\mathrm{d}x\leqslant 1\right\}$ 是加权 Luxemburg 范数. (Pacific J. Appl. Math. 1(1)(2008), 89 ~ 97)

(2) **Herz** 空间

我们先给出 Herz 空间的定义:

定义 1 设 $\alpha\in R^1$, $B_k=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n:|x|\leqslant 2^k\}$, $D_k=B_k-B_{k-1}$, $\varphi_k=\varphi_{D_k}$ 是 D_k 的特征函数. $0<p,q<\infty$. 则齐次 Herz 空间 $\dot{K}_q^{\alpha,p}(R^n)$ 定义为

$$\dot{K}_q^{\alpha,p}(R^n)=\{f\in L^q_{\mathrm{loc}}(R^n-\{0\}):\|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(R^n)}<\infty\},\tag{2.39}$$

式中

$$\|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(R^n)}=\left\{\sum_{k\in Z}2^{k\alpha p}\,\|f\varphi_k\|_q^p\right\}^{\frac{1}{p}}.\tag{2.40}$$

我们可以类似定义非齐次 Herz 空间. 当 $p=\infty$ 或 $q=\infty$ 时,上述定义将作通常的修改. $\dot{K}_p^{0,p}(R^n)=L^p(R^n)$, $\dot{K}_p^{(\alpha/p),p}(R^n)=L^p(|x|^\alpha\mathrm{d}x)$. 因此,Herz 空间也是 $L^p(R^n)$ 空间的一种推广. 下面将 $\dot{K}_q^{\alpha,p}(R^n)$ 简记为 K. 匡继昌的主要结果如下.

定理 1 设 $\alpha\in R$, $0<p<\infty$, $\lambda>0$, $1\leqslant q<\infty$, $\omega(x)=x^{(1-\lambda)q}$, $K(x,y)$ 是 $(0,\infty)\times(0,\infty)$ 上非负可测函数,且满足 $K(tx,ty)=t^{-\lambda}K(x,y)$, $t>0$; $K(1,t)$ 在 $(0,\infty)$ 上有紧支集; $\|T\|$ 是由 (2.28) 所定义的广义 Hilbert 算子 $T:K\to K$ 的范数.

(1) 若 $G(t)=K(1,t)t^{\lambda-1-\frac{1}{q}}$ 是 $(0,\infty)$ 上的凹函数,且

$$\int_0^\infty t^{\lambda-\alpha-1-\frac{1}{q}}K(1,t)\mathrm{d}t<\infty,\tag{2.41}$$

则

$$\|T\|\leqslant C(p,\alpha)\int_0^\infty t^{\lambda-\alpha-1-\frac{1}{q}}K(1,t)\mathrm{d}t,\tag{2.42}$$

式中

$$C(p,\alpha)=\begin{cases}2^{\frac{1}{p}-2}(1+p)^{\frac{1}{p}}(1+2^{|\alpha|}), & 0<p<1,\\ 2^{1-\frac{2}{p}}\left(1+\dfrac{1}{p}\right)(1+2^{|\alpha|}), & 1\leqslant p<\infty.\end{cases}\tag{2.43}$$

(2) 若 $\|T\|<\infty$,则

$$\int_0^{\infty} t^{\lambda-\alpha-1-\frac{1}{q}} K(1,t)\mathrm{d}t \leqslant \| T \|. \tag{2.44}$$

我们定义 K 的子空间：

$$KF = \{f \in K : F(t) = \sup_{x\in(0,\infty)} |f(tx)| K(1,t) \text{ 是}(0,\infty)\text{ 上的凹函数}\}.$$

定理 2　设 $0 < q < 1$，$\alpha, p, K(x,y)$ 都满足定理 1 的条件，$\| T \|$ 是由(2.28) 所定义的广义 Hilbert 算子 $T: KF \to K$ 的范数. 若 $G(t) = K(1,t)t^{\lambda-1-\frac{1}{q}}$ 是$(0,\infty)$ 上的凹函数，且

$$\int_0^{\infty} t^{\lambda-\alpha-1-\frac{1}{q}} K(1,t)\mathrm{d}t < \infty,$$

则

$$\| T \| \leqslant C(p,q,\alpha)\int_0^{\infty} t^{\lambda-\alpha-1-\frac{1}{q}} K(1,t)\mathrm{d}t, \tag{2.45}$$

式中

$$C(p,q,\alpha) = \begin{cases} 2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-2} q^{-\frac{1}{p}} (1+q)^{\frac{1}{q}} (p+q)^{\frac{1}{p}} (1+2^{|\alpha|}), & 0 < p \leqslant q < 1 \\ 2^{\frac{1}{q}-2} (1+q)^{\frac{1}{q}} (1+2^{|\alpha|}), & 0 < q \leqslant p < 1 \\ 2^{\frac{1}{q}-\frac{2}{p}-1} (1+q)^{\frac{1}{q}} \left(1+\frac{1}{p}\right)(1+2^{|\alpha|}), & 0 < q < 1 \leqslant p < \infty \end{cases}$$

若 $\| T \| < \infty$，则

$$\int_0^{\infty} t^{\lambda-\alpha-1-\frac{1}{q}} K(1,t)\mathrm{d}t \leqslant \| T \|.$$

([330]40(2009)，193～200). 匡继昌还在其他的函数空间上来研究 Hilbert 不等式.

第 12.　对我们今后研究工作的启示

1.　从以上的分析不难看出，尽管在 Hilbert 不等式的研究中已发表了几百篇的论文，还是有大量的研究工作在等待我们去做. 例如，除了以上 11 个方面以外，多重 Hilbert 积分算子

$$T(f,x) = \int_{R^n} K(x,y)f(y)\mathrm{d}y, \quad x \in R^n \tag{2.46}$$

和多重积分

$$\int_{R^n}\int_{R^n} K(x,y)f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2.47}$$

的不等式在上面就完全没有谈到. 写成以下形式：

$$\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty} K(x_1,\cdots,x_n)f(x_1)\cdots f(x_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n \tag{2.48}$$

与一元情形没有本质的区别. 就是在前面提到的不等式中，例如，将(2.12)、(2.23) 中，不等式右边函数 f,g 的加权范数改为非权范数 $\| f \|_p$，$\| g \|_q$，相应的最佳常数是什么？仍未解决. 在本书第 3 版中提出的(2.2)(2.3) 中的最佳常数问题也没有解决. 在高维情况，有著名的 Hardy－Littlewood－Sobolev 不等式(或称为弱型 Young 不等式)：

设 $p,q > 1$，$0 < \lambda < n$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{\lambda}{n} = 2$，$f \in L^p(R^n)$，$g \in L^q(R^n)$，则存在最佳

常数 $C(p,\lambda,n)$，使得

$$\left|\int_{R^n}\int_{R^n}\frac{f(x)g(y)}{|x-y|^\lambda}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leqslant C(p,\lambda,n)\|f\|_p\|g\|_q, \tag{2.49}$$

式中最佳常数 $C(p,\lambda,n)$ 满足

$$C(p,\lambda,n)\leqslant\frac{n}{n-\lambda}\left(\frac{|S^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{\lambda}{n}}\frac{1}{pq}\left\{\left(\frac{\frac{\lambda}{n}}{1-\frac{1}{p}}\right)^{\frac{\lambda}{n}}+\left(\frac{\frac{\lambda}{n}}{1-\frac{1}{q}}\right)^{\frac{\lambda}{n}}\right\}, \tag{2.50}$$

$|S^{n-1}|$ 是 R^n 中单位球面的体积. 当 $p=q=\dfrac{2n}{2n-\lambda}$ 时，可以求出最佳常数为

$$C(p,\lambda,n)=C(\lambda,n)=\pi^{\frac{\lambda}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(n-\frac{\lambda}{2}\right)}\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(n)}\right\}^{-1+\frac{\lambda}{n}}. \tag{2.51}$$

但当 $p\neq q$ 时，最佳常数是多少?仍未解决.([311]118(1983),349 ～ 374)Hilbert 曾经说过，探索一个难题的解决，常常使人闯入新的研究领域中，他把费马猜想比作一只下金蛋的母鸡，不要杀掉这只经常为我们下金蛋的母鸡. Hilbert 不等式的研究也像一只下金蛋的母鸡.

2. 我们在研究工作中常常碰到如何选题的问题，而且希望选择有重要意义的问题. 首先，就有一个如何来评价 Hilbert 不等式的各种不同类型的改进和推广的问题. 为此，徐利治在[339]24(3)(2004),569 ～ 570 中提出了衡量不等式价值的三条标准，即真正很有价值的不等式应具有三个条件：普适性(普遍可应用性)，优美性(简单性)和精确性(不可改进性). 他指出，不等式的研究文献中，一个常见的现象是，许多基本重要的而又十分优美的不等式，经过多次拓广后其结构形式往往变得越来越复杂，以至失去了由简单性与对称性来保证的优美性. 对此，我们的观点是，如果拓广后并没有增加新的应用面，则这些结果虽然也能在海内外一般刊物上发表出来，但其真正价值毕竟是不大的.(全文见"北京联合大学学报"24(1)(2010),53 ～ 59)

3. **Hardy 不等式**：设 $p>1$，f 在 $(0,\infty)$ 上非负可积，$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则

$$\int_0^\infty\left(\frac{F(x)}{x}\right)^p\mathrm{d}x\leqslant\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\int_0^\infty[f(x)]^p\mathrm{d}x. \tag{3.1}$$

仅当 $f(x)\equiv 0$ 时等号成立，其中 $\left(\dfrac{p}{p-1}\right)^p$ 是最佳常数.

自从 1920 年 Hardy 首先证明这个不等式以来，已有大量的改进和推广工作. 专著[27]和[21]第 4 章 143 ～ 186 有专门讨论，收集了到 1990 年为止的 174 篇论文，但收录并不全，1990 年以后仍继续有大量新的结果发表，[168]则收录了到 2005 年为止的 296 篇论文. 下面仅整理出常用的基本结果和最新的结果(离散形式见第 3 章 No. 110 和第 11 章 §2).

(1) 设 f 在 $(0,\infty)$ 上非负可测，$p>1$，$r\neq 1$，当 $r>1$ 时，令 $F_1(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，当

$r < 1$ 时，令 $F_2(x) = \int_x^{\infty} f(t)\mathrm{d}t$，则

$$\left\{\int_0^{\infty} x^{-r}[F_k(x)]^p \mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\frac{p}{|r-1|}\right)\left\{\int_0^{\infty} x^{-r}(xf(x))^p \mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{3.2}$$

当 $0 < p < 1$ 时，(3.2) 中不等号反向，仅当 $f(x) \equiv 0$ 时等号成立. 式中 $k = 1,2, r = p$ 时又得(3.1) 式([1]276，定理 330)

当 $p \geqslant 1, r > 0$ 时，我们用到以下的方便形式：

$$\left(\int_0^{\infty} x^{-r-1}[F_1(x)]^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \leqslant \frac{p}{r}\left(\int_0^{\infty} x^{-r-1}(xf(x))^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}; \tag{3.3}$$

$$\left(\int_0^{\infty} x^{r-1}[F_2(x)]^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \leqslant \frac{p}{r}\left(\int_0^{\infty} x^{r-1}(xf(x))^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}. \tag{3.4}$$

((3.3) 式可用 Jensen 不等式的积分形式证明，而(3.4) 式可由(3.3) 式推出，证明细节参看[65]209 ～ 210)

(2)　若 $f \in L^p(0,\infty)$，令

$$Tf(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(y)\mathrm{d}y, Sg(x) = \int_x^{\infty} y^{-1}g(y)\mathrm{d}y, \| f \|_p = \left(\int_0^{\infty} | f |^p\right)^{1/p}.$$

$1/p + 1/q = 1, 1 < p \leqslant \infty$，则 Hardy 不等式可写成：

$$\| Tf \|_p \leqslant \frac{p}{p-1} \| f \|_p, \tag{3.5}$$

$$\| Sg \|_q \leqslant \frac{p}{p-1} \| f \|_q. \tag{3.6}$$

其中$\frac{p}{p-1}$是最佳系数. 下面以(3.5) 式的证明为例：

固定 $a > 0$，令 $y = \frac{x}{a}u$，则当 $y = x$ 时，$u = a$，所以，

$$Tf(x) = \frac{1}{a}\int_0^a f\left(\frac{xu}{a}\right)\mathrm{d}u = \frac{1}{a}\int_0^a f\left(\frac{x}{a}y\right)\mathrm{d}y.$$

$$\| Tf \|_p = \left(\int_0^a | Tf(x) |^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \leqslant \frac{1}{a}\int_0^a \left\{\int_0^a \left| f\left(\frac{x}{a}y\right)\right|^p \mathrm{d}x\right\}^{1/p} \mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^a \left\{\int_0^y | f(t) |^p \frac{a}{y}\mathrm{d}t\right\}^{1/p} \mathrm{d}y \leqslant \frac{1}{a}\int_0^a \left\{\int_0^{\infty} | f(t) |^p \mathrm{d}t\right\}^{1/p} \left(\frac{a}{y}\right)^{1/p} \mathrm{d}y$$

$$= a^{(1/p)-1} \| f \|_p \int_0^a y^{-(1/p)} \mathrm{d}y = \frac{p}{p-1} \| f \|_p.$$

(另一种证法见[73]363 ～ 364)

(3)　设 f 在 $(0,\infty)$ 上非负可积，且不恒等于零，令

$F(x) = \int_x^{\infty} f(t)\mathrm{d}t$, $\| f \|_p = \left(\int_0^{\infty} | f |^p\right)^{1/p}$，则

当 $p > 1$ 时，　$\| F \|_p < p \| xf(\cdot) \|_p$；

当 $0 < p < 1$ 时，　$\left\| \frac{F(\cdot)}{x} \right\|_p > \frac{p}{p-1} \| f \|_p$.

1989 年，Bergh, J. 证明. 若 $0 < p < 1$，则

$$\left\| \frac{F(\cdot)}{x} \right\|_p \leqslant \left(\frac{\pi p}{\sin(\pi p)}\right)^{1/p} \| f \|_p.$$

仅当 $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & x \geqslant 1 \end{cases}$ 时等号成立. 系数是最佳的. ([354]. 1989,202(1):147 ～ 149)

(4)　设 f 是 $(0,\infty)$ 上非负可测函数, $p > 1, \alpha \neq p-1$, 则

$$\left(\int_0^\infty x^{\alpha-p}(F(x))^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \leqslant \frac{p}{|\alpha - p + 1|}\left(\int_0^\infty x^\alpha (f(x))^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

式中　$F(x) = \begin{cases} \int_0^x f(t)\mathrm{d}t, \text{若 } \alpha < p-1, \\ \int_x^\infty f(t)\mathrm{d}t, \text{若 } \alpha > p-1. \end{cases}$

(Kufner, A., Pokroky Mat. Fyz. Astronom, 1984, 29(1): 29 − 40).

$\alpha = p$ 时, 得 $\| F \|_p \leqslant p \| x f(\cdot) \|_p$.

Boyd 利用 Hardy 不等式证明了下述结果:

设 f 在 (a,∞) 上非负可测, $a \geqslant 0, \lambda > 0, p, q \geqslant 0$, 使得 $p + q > 1, q\lambda < 1$, 则

$$\int_a^\infty x^{(p+q)\lambda-2}[f(x)]^p \left\{\int_x^\infty [f(t)]^q \mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{1-q\lambda}\int_a^\infty x^{(p+q)\lambda-1}[f(x)]^{p+q}\mathrm{d}x.$$

式中 $\frac{1}{1-q\lambda}$ 是最佳常数. 见[323]1971,23:355 ～ 363.

设 f 在 $(0,1)$ 上非负可测, $1 < p < \infty$, 则

$$\left[1 - p^{-(\frac{1}{p-1})}\right]\int_0^1 \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^p \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 [f(x)]^p \mathrm{d}x + \frac{1}{p-1}\left[\int_0^1 [f(x)]^p \mathrm{d}x - \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^p\right].$$

(MR97c:26020)

(5)　设 $p > q > 1$, f 在 $(0,\infty)$ 上非负, $f \in L^q(0,\infty)$, $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. $r = \frac{p}{q} - 1$, 则

$$\left(\int_0^\infty x^{r-p}[F(x)]^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \leqslant \left(\frac{1}{p-r-1}\right)^{1/p}\left(\frac{r\Gamma(p/r)}{\Gamma(1/r)\Gamma((p-1)/r)}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \| f \|_q.$$

Bliss, G. A., [317]1930, 5: 40 − 46.

(6)　设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $bp < -1$, f 在 $(0,\infty)$ 上非负可测, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, 则

$$\left(\int_0^\infty x^b [F(x)]^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \leqslant \left(\frac{-p}{bp+1}\right)\left\{\int_0^\infty x^{b+1}[f(x)]^p \mathrm{d}x\right\}^{1/p},$$

([338]1985, 5(1): 86)

(7)　设 f 在 $(0,\infty)$ 上非负递减, $0 < r < p \leqslant \infty$, $q = \min\{1, p\}$, $\alpha = p/q$, $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, 则

$$\int_0^\infty \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p x^{r-1}\mathrm{d}x \leqslant \left(\frac{p}{p-r}\right)^\alpha \int_0^\infty x^{r-1}(f(x))^p \mathrm{d}x.$$

([133]300 ~ 301)

(8)　设 $F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t, r\geqslant 1, \frac{1}{\alpha}=\frac{1}{p}+\frac{1}{r}-1\geqslant 0, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \beta=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{q}$, 则当 $\alpha\geqslant p$ 时

$$\left\{\int_0^\infty x^{(\alpha/p)-1}[F(x)]^\alpha \mathrm{d}x\right\}^{1/\alpha}\leqslant\left(\frac{q}{\alpha}+1\right)^\beta \|f\|_p.$$

当 $\alpha=p$ 时,又得到(3.1)式.(证明见[73]364 ~ 367)

(9)　设 f 在 $(0,\infty)$ 上非负可测, $F_1(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, $F_2(x)=\int_x^\infty f(t)\mathrm{d}t$.

①　设 $q\geqslant p\geqslant 1, \lambda\neq -1, F(x)=\frac{1}{x}F_k(x)$. 式中 $\lambda>-1$ 时取 $k=1$, $\lambda<-1$ 时取 $k=2$,则

$$\left[\int_0^\infty x^{-1-q\lambda}[F(x)]^q\mathrm{d}x\right]^{1/q}\leqslant C(p,q,\lambda)\left[\int_0^\infty x^{-1-p\lambda}[f(x)]^p\mathrm{d}x\right]^{1/p}.$$

(Flett, T. M., Proc. Glasgow Math. Assoc. 1959, 4:7 ~ 15. 在某些特殊情形下,常数的确定见[21]150 及所引用的文献.)在一般情况下, $c(p,q,\lambda)$ 的最佳值如何确定?

②　设 $q\leqslant p<0$, $(1/p)+(1/p')=1$ 若 $\alpha<0$,则

$$\left\{\int_0^\infty x^{\alpha q-1}(F_1(x))^q\mathrm{d}x\right\}^{1/q}\leqslant\frac{|p|}{|\alpha q||\alpha|^{q/p'}}\left\{\int_0^\infty x^{(\alpha+1)p-1}(f(x))^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p};$$

若 $\alpha>0$,则

$$\left\{\int_0^\infty x^{\alpha q-1}(F_2(x))^q\mathrm{d}x\right\}^{1/q}\leqslant\frac{|p|}{|\alpha q||\alpha|^{q/p'}}\left\{\int_0^\infty x^{(\alpha+1)p-1}[f(x)]^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p}.$$

(见 Heinig, H., Real Analysis Exchange, 1979 ~ 1980, 5:61 ~ 81, [21]168)

(10)　任意区间上的 Hardy 不等式:设 $0\leqslant a<b\leqslant\infty$, $1<p<\infty$,则当 $\alpha<1-1/p$ 时,

$$\int_a^b\left|x^{\alpha-1}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right|^p\mathrm{d}x\leqslant c\int_a^b|x^\alpha f(x)|^p\mathrm{d}x;\tag{3.7}$$

而当 $\alpha>1-1/p$ 时,

$$\int_a^b\left|x^{\alpha-1}\int_x^b f(t)\mathrm{d}t\right|^p\mathrm{d}x\leqslant c\int_a^b|x^\alpha f(x)|^p\mathrm{d}x.\tag{3.8}$$

它可推广为:

$$\int_a^b\left|u(x)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right|^p\mathrm{d}x\leqslant c\int_a^b|v(x)f(x)|^p\mathrm{d}x;\tag{3.9}$$

$$\int_a^b\left|u(x)\int_x^b f(t)\mathrm{d}t\right|^p\mathrm{d}x\leqslant c\int_a^b|v(x)f(x)|^p\mathrm{d}x.\tag{3.10}$$

若 $a=0, b=\infty$,则仅当

$$\sup_{x>0}\left(\int_x^\infty|u(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}\left(\int_0^x|v(t)|^{-p}\mathrm{d}t\right)^{1/p}<\infty$$

时,(3.9)式成立;而仅当

$$\sup_{x>0}\left(\int_a^x|u(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}\left(\int_x^\infty|v(t)|^{-p}\mathrm{d}t\right)^{1/p}<\infty$$

时，(3.10) 式成立.([107]2:819.) 我们问：上述常数 c 的最佳值是多少？

1968 年，Izumi 证明：设 f 在 $[0,\pi]$ 上是正的可积函数，$p,q>1$，则

$$\left\{\int_0^\pi x^{-q}\left(\int_{x/2}^x f(t)\mathrm{d}t\right)^p \mathrm{d}x\right\}^{1/p} \leqslant \left(\frac{p}{q-1}\right)\left\{\int_0^\pi x^{-q}\left|f\left(\frac{x}{2}\right)-f(x)\right|^p \mathrm{d}x\right\}^{1/p}.$$

([396]1968,21:277 ～ 291)

1979 年，Kokilasvili, V. M. 证明

$$\left(\int_0^\infty \left|u(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right|^q \mathrm{d}x\right)^{1/q} \leqslant C\left(\int_0^\infty |v(x)f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \tag{3.11}$$

成立的充要条件是

$$B=\sup_{x>0}\left(\int_x^\infty |u(t)|^q \mathrm{d}x\right)^{1/q}\left(\int_0^x |v(t)|^{-p'}\mathrm{d}x\right)^{1/p'}<\infty, \tag{3.12}$$

式中 $1<p\leqslant q<\infty, 1/p+1/p'=1$.(Soobšc. Akad. Nauk Gruzin, 1979, SSR96(1):37 ～ 40)

若 C^* 表示(3.11) 式中 C 的最佳常数，则

$$B\leqslant C^*\leqslant Bp^{1/q}(p')^{1/p'}\qquad (1<p\leqslant q<\infty).$$

而当 $p=1$ 或 $p=\infty$ 时，$C^*=B$. (3.11) 式中 $\int_0^x f$ 换成 $\int_x^\infty f$ 仍成立.(类似的结果见[21]157 ～ 160 及 166 ～ 171)

(11)　设 $1<p<\infty$，f 在 $(0,1)$ 上非负可测，使得 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t<\infty$，$x\in(0,1)$，则

$$\left(\int_0^1 \frac{1}{x}(F(x))^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \leqslant p\left\{\int_0^1 x^{p-1}(|\ln x|\ f(x))^p \mathrm{d}x\right\}^{1/p}.$$

Pachpatte, B. G. 还利用 Fubini 定理考虑了多元情形.

(Fasc. Math. 1999, 30:107 ～ 112). 1992 年，作者还证明：

$\int_a^b [F(x)]^p \frac{\mathrm{d}x}{x}\leqslant C\int_a^b [f(x)\ln x]^p \frac{\mathrm{d}x}{x}$，式中 $F(x)=\frac{1}{\omega(x)}\int_{I_x}\omega(t)f(t)\frac{\mathrm{d}t}{t}$，

$1<b\leqslant\infty$. 当 $(a,b)=(1,b)$ 时，$I_x=(x,b)$，当 $(a,b)=(0,1)$ 时，$I_x=(0,x)$.([388]1992,23:773 ～ 776)

(12)　设 $p>1$，$K(x)>0$，$L(f,x)=\int_0^\infty K(xy)f(y)\mathrm{d}y$ 是 f 的广义 Laplace 变换. $\int_0^\infty K(x)x^{\alpha-1}\mathrm{d}x=\varphi(\alpha)<\infty, 0<\alpha<1$. 则

$$\|L(f)\|_p<\varphi(1/p)\,\|x^{1-(2/p)}f(\cdot)\|_p,$$

$$\|x^{1-(2/p)}L(f)\|_p<\varphi(1/p')\,\|f\|_p.$$

特别当 $K(x)=e^{-x}$ 时，$\varphi(1/p)=\Gamma(1/p)$，$\varphi(1/p')=\Gamma(1/p')$，$1/p+1/p'=1$. 这时 $L(f,x)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-xy}f(y)\mathrm{d}y$ 是 f 的 Laplace 变换. 当 $1<p\leqslant 2$ 时，成立

$$\|L(f)\|_{p'}\leqslant\left(\frac{2\pi}{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\|f\|_p.$$

(Hardy, G. H., [317]1933, 8: 114 ~ 119 和[1] 定理 350, 352)

我们问：$\left(\frac{2\pi}{p'}\right)^{1/p'}$ 是否为最佳常数？

若 f, g 和 K 是$(0,\infty)$ 上非负可测函数，$1 < p < \infty, 1/p + 1/q = 1$. 则

$$\int_0^\infty\int_0^\infty K(xy)f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \varphi\left(\frac{1}{p}\right)\left[\int_0^\infty x^{p-2}[f(x)]^p\mathrm{d}x\right]^{1/p}\left[\int_0^\infty [g(x)]^q\mathrm{d}x\right]^{1/q}.$$

([64]196)

(13) **Schur-Hardy 不等式**：设 $K(x,y)$ 是$(0,\infty)\times(0,\infty)$ 上非负可测函数，并且为 -1 次齐次，使得

$C(p) = \int_0^\infty K(x,y)y^{-1/p}\mathrm{d}y < \infty$. $1 \leqslant p < \infty$，则下述积分算子 $T: L^p(0,\infty) \to L^p(0,\infty)$：$T(f,x) = \int_0^\infty K(x,y)f(y)\mathrm{d}y$，成立

$$\| Tf \|_p \leqslant C(p) \| f \|_p.$$

特别地，若 $K(x,y) = x^{-r}\varphi_E(y)$，$E = [0,x]$，$1/p \leqslant r \leqslant 1$，则

$$\| Tf \|_p \leqslant \left(\frac{1}{1+(1-r)p}\right)^{1/p}\left(\frac{p}{pr-1}\right)^2 \| f \|_q.$$

式中 $q = \frac{p}{1+p(1-r)}$.

(它们的推广见[54]2: 277 ~ 286, 459 ~ 460, [21]171 ~ 172 及所引用的文献)

(14) **Levinson 不等式**：设 $p > 1, f(x) \geqslant 0, \omega(x) > 0, x > 0, \omega$ 在$(0,\infty)$ 上绝对连续，若 $\exists\lambda > 0$，使得

$$1 - \frac{1}{p} + \frac{x\omega'(x)}{\omega(x)} \geqslant \frac{1}{\lambda} \quad \text{a. e. } x \in (0,\infty).$$

记

$$F(x) = [x\omega(x)]^{-1}\int_0^x f(t)\omega(t)\mathrm{d}t. \quad \| f \|_p = \left(\int_0^\infty | f |^p\right)^{1/p}.$$

则

$$\| F \|_p \leqslant \lambda \| f \|_p.$$

([324]1964, 31: 389 ~ 394, [21]150 ~ 151)

1987 年，Pachpatte, B. G. 将上述结果推广为：

$$\left\{\int_0^\infty x^{-\alpha}\left(\frac{1}{\omega(x)}\int_E \frac{\omega(t)f(t)}{t}\mathrm{d}t\right)^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p} \leqslant \frac{\lambda p}{|\alpha - 1|}\left\{\int_0^\infty x^{-\alpha}[f(x)]^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p}.$$

式中当 $\alpha > 1$ 时 $E = [0,x]$，当 $\alpha < 1$ 时 $E = [x,\infty)$. 还可用满足 $\varphi\varphi'' \geqslant (1-1/p)(\varphi')^2$ 的 φ 来代替 p 幂. ([357]1987. 13(2): 203 ~ 210)

(15) 设 f, g 在$(0,\infty)$ 上非负可测，并对 $x > 0$，积分 $G(x) = \int_0^x g(t)\mathrm{d}t, F(x) = \int_0^x f(t)g(t)\mathrm{d}t\ (c > 1)$ 或 $F(x) = \int_x^\infty f(t)g(t)\mathrm{d}t\ (c < 1)$ 存在. 则：

① 若 $0<b\leqslant\infty, p\geqslant 1, c>1, \int_0^b [F(x)]^p[G(x)]^{-c}g(x)\mathrm{d}x$ 收敛,则

$$\left\{\int_0^b [F(x)]^p[G(x)]^{-c}g(x)\mathrm{d}x\right\}^{1/p}\leqslant\left(\frac{p}{c-1}\right)\left\{\int_0^b [f(x)]^p[G(x)]^{p-c}g(x)\mathrm{d}x\right\}^{1/p};$$

若 $0<p\leqslant 1, c<1$ 则不等号反向,其中系数 $\frac{p}{c-1}$ 换成 $\frac{p}{1-c}$.

② 若 $a>0, p\geqslant 1, c<1. \int_a^\infty [F(x)]^p[G(x)]^{-c}g(x)\mathrm{d}x$ 存在,则

$$\left\{\int_a^\infty [F(x)]^p[G(x)]^{-c}g(x)\mathrm{d}x\right\}^{1/p}\leqslant\left(\frac{p}{1-c}\right)\left\{\int_a^\infty [f(x)]^p([G(x)]^{p-c}g(x)\mathrm{d}x\right\}^{1/p};$$

若 $0<p\leqslant 1, c>1$,则不等号反向,其中常数 $\frac{p}{1-c}$ 换成 $\frac{p}{c-1}$.

当 $c=1$ 时,将 $F(x)$ 改记为

$F(x)=\int_0^x f(t)g(t)\mathrm{d}t (p\geqslant 1)$ 或 $F(x)=\int_x^\infty f(t)g(t)\mathrm{d}t, (0<p\leqslant 1)$.

若 $p\geqslant 1, b>0, \int_0^b [F(x)]^p[G(x)]^{-1}g(x)\mathrm{d}x$ 收敛,则

$$\left\{\int_0^b [F(x)]^p[G(x)]^{-1}g(x)\mathrm{d}x\right\}^{1/p}$$
$$\leqslant p\left\{\int_0^b [f(x)]^p[G(x)]^{p-1}\left[\log\frac{G(b)}{G(x)}\right]^p g(x)\mathrm{d}x\right\}^{1/p};$$

若 $0<p\leqslant 1, a>0, \int_a^\infty [F(x)]^p[G(x)]^{-1}g(x)\mathrm{d}x$ 收敛,则

$$\left\{\int_a^\infty [F(x)]^p[G(x)]^{-1}g(x)\mathrm{d}x\right\}^{1/p}$$
$$\geqslant p\left\{\int_a^\infty [f(x)]^p[G(x)]^{p-1}\left[\log\frac{G(x)}{G(a)}\right]^p g(x)\mathrm{d}x\right\}^{1/p}.$$

(Copson, E. T., [392]1975 ~ 1976, 75, 13: 157 ~ 164)

(16) 设 f 在 $[0,\infty)$ 上非负递增连续, $g(0)=0, g(\infty)=\infty, x>0$ 时 $g(x)>0$,令

$$F(x)=\int_0^x f\mathrm{d}g \quad (\alpha>1) \text{ 或 } F(x)=\int_x^\infty f\mathrm{d}g \quad (\alpha<1).$$

若 $p\geqslant 1$,则当 $\alpha>1$ 时,

$$\int_0^b g^{-\alpha}F^p dg+\frac{p}{\alpha-1}g(b)^{1-\alpha}[F(b)]^p\leqslant\left(\frac{p}{\alpha-1}\right)^p\int_0^b g^{p-\alpha}f^p\mathrm{d}g;$$

而当 $\alpha<1$ 时,

$$\int_a^\infty g^{-\alpha}F^p\mathrm{d}g+\frac{p}{1-\alpha}g(a)^{1-\alpha}[F(a)]^p\leqslant\left(\frac{p}{1-\alpha}\right)^p\int_a^\infty g^{p-\alpha}f^p\mathrm{d}g.$$

当 $0<p\leqslant 1$ 时,上述不等号均反向. 仅当 $p=1$ 或 $f\equiv 0$ 时等号成立. (Imoru, C. O., [374]1977, 20: 307 ~ 312)

(17) **高维 Hardy 不等式**:设 $p>1$, $r>\frac{2}{p}$, $F(x)-F(0)=F(r,\theta)-F(0,0)=\int_0^r f(t,\theta)dt$, $f(x)=f(r,\theta)$. $|x|=r$,则

$$\left(\int_{R^2}\frac{|F(x)-F(0)|^p}{|x|^{pr}}dx\right)^{1/p}\leqslant\frac{p}{pr-2}\left\{\int_{R^2}\frac{|f(x)|^p}{|x|^{p(r-1)}}dx\right\}^{1/p},$$

(Ding. Y. [340]1981,1(1):31 ～ 39，此外见[338]1985,15(1):85 ～ 86. [21]172. [54]7:3 ～ 16)

(18)　**加权 Hardy 不等式**：令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt.\ \|f\|_{p,u}=\left(\int_a^b|f|^pu\right)^{1/p}$，则

$$\|F\|_{p,\omega}\leqslant c\|f\|_{p,u}$$

Oguntuase 等就 $w(x)=x^{-(p/r')}$，$u(x)=1$，$0<a<b\leqslant\infty$，$1<p,r<\infty$，$1/p+1/q+1/r=1$，p',q',r' 分别为 p,q,r 的共轭指数，求出

$$c=q^{1/r'}(r')^{-1/r'}[1-(a/b)^{r'/q}]^{1/r'}$$ ([301]2000,241(1):73 ～ 82)

设 f 在 $(0,\infty)$ 上非负递增. $1<p\leqslant q<\infty$. ω,u 为非负权函数，$F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$. 则

$\|F\|_{q,\omega}\leqslant c\|f\|_{p,u}$ 成立的充要条件是　$\max\{B_0,B_1\}<\infty$，

式中 $B_0=\sup\limits_{x>0}\left(\int_x^\infty(t-x)^qt^{-q}w(t)dt\right)^{1/q}\left(\int_x^\infty u(t)dt\right)^{-1/p}$，

$$B_1=\sup_{x>0}\left\{\int_x^\infty t^{-q}w(t)dt\right\}^{1/q}\left\{\int_0^x(x-t)^{p'}\left(\int_t^\infty u\right)^{-p'}u(t)dt\right\}^{1/p'}.$$

(Heinig, H. P. 等，[323]1993,45(1):104 ～ 116)

1997 年，Burenkov, V. I. 等证明了**差分型加权 Hardy 不等式**：

设 $0<p<\infty$，$0<a\leqslant\infty$，$0\leqslant b<\infty$，w,u 是 $(0,a)$ 上非负权函数，使得

$$u(x)=b+\int_x^a w(t)dt,\quad \int_0^x u(t)dt\leqslant cxu(x),x\in(0,a).$$

若存在 $\alpha>0$，$0<\beta<1$，使得

$u\left(\frac{x}{\alpha+1}\right)-u\left(\frac{x}{\alpha}\right)\leqslant\beta u(x)$，$x\in(0,\min\{1,\alpha\}a)$，$f$ 在 $(0,x)$ 上可测，$x\in[0,a]$，则 ∃ 常数 c_1，使得

$$\left(\int_0^x|f(t)|^pu(t)dt\right)^{1/p}$$
$$\leqslant c_1\left\{\left[u(x)\int_0^x|f(t)|^pdt\right]^{1/p}+\left(\int_0^x\int_0^x|f(t)-f(y)|^pw(|t-y|\,dtdy\right)^{1/p}\right\}.$$

([302]1997,1(1):1 ～ 10)

1999 年，Peter, W. 等证明了**三维加权混合范数 Hardy 不等式**：设 $1\leqslant p_1\leqslant p_2\leqslant p<\infty$，$0<\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3<\infty$，$0<a<b\leqslant\infty$，$q=1-1/p_1+1/p_2$，则

$$\int_0^b\left\{\int_0^a x^{-1-\alpha_1-\alpha_2\alpha_3p_2}\int_0^{x^{\alpha_1}}\left[\int_0^{x^{\alpha_2}}y^{-1+\alpha_3+\frac{1}{p_1}}|f(y,t+z)|dy\right\}^{p_2}dzdx\right\}^{p/p_2}dt$$
$$\leqslant\left(\frac{p}{p_2\alpha_2}\right)^{p/p_2}\left(\frac{q}{\alpha_3}\right)^{pq}\int_0^{b+a^{\alpha_1}}\left[\int_0^{a^{\alpha_2}}|f(y,z)|^{p_1}dy\right]^{p/p_1}dz.$$

([301]1999,234(1):287 ～ 292)

加权弱型 Hardy 不等式：设 $1\leqslant p,q<\infty$，$x=(x_1,x_2)\in R_+^2=(0,\infty)\times(0,\infty)$.

$f(x),w(x),u(x)$ 在 R_+^2 上非负可测，记

$$(T_1f)(x)=\int_0^{x_1}\int_0^{x_2}f(t_1,t_2)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2,\quad (T_2f)(x)=\int_{x_1}^{\infty}\int_{x_2}^{\infty}f(t_1,t_2)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2.$$

T_1,T_2 称为二维 Hardy 算子，下面统一记为 T.

$$\|f\|_{p,u}=\left(\int_{R_+^2}|f(x)|^p u(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

若 $\exists c>0$，使得

$$\|Tf\|_{q,w}\leqslant c\|f\|_{p,u},\tag{3.13}$$

则称 (w,u) 关于算子 T 为强 (p,q) 型权对.

$$若\left(\int_{E_\alpha}u\mathrm{d}x\right)^{1/q}\leqslant\frac{c}{\alpha}\|f\|_{p,u},\tag{3.14}$$

则称 (w,u) 关于算子 T 为弱 (p,q) 型权对，式中

$$E_\alpha=\{x=(x_1,x_2):(Tf)(x)>\alpha\}.$$

使(3.13),(3.14)式成立的 c 的下确界，分别称为算子 T 的强、弱范数. 记为 $\|T\|$，$\|T\|_w$.

Muckenhoupt, B. 证明：若 (w,u) 关于算子 T_1 为强 (p,p) 型权对，则

$$\sup_{x_1,x_2>0}\left(\int_{x_1}^{\infty}\int_{x_2}^{\infty}w(t_1,t_2)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\right)\left(\int_0^{x_1}\int_0^{x_2}[u(t_1,t_2)]^{\frac{-1}{p-1}}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\right)^{p-1}<\infty.$$

但已找到满足上式的 (w,u) 不能使(3.13)式对于所有 f 成立 $(1<p<\infty)$. 因此，作者分别于1978,1984年指出，给出高维形式的加权 Hardy 不等式的权函数特征，是一个有意义而又困难的问题. 1989年，丁勇证明：

① 若 $1\leqslant p,q<\infty$，则 (w,u) 关于算子 T_1 为弱 (p,q) 型权对的充要条件是

$$\|T_1\|_w=\sup_{x_1,x_2>0}\left(\int_{x_1}^{\infty}\int_{x_2}^{\infty}w(t_1,t_2)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\right)^{1/q}\left(\int_0^{x_1}\int_0^{x_2}u(t_1,t_2)^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\right)^{\frac{1}{p'}}<\infty;$$

② 若 $1\leqslant p,q<\infty$，则 (w,u) 关于算子 T_2 为弱 (p,q) 型权对的充要条件是

$$\|T_2\|_w=\sup_{x_1,x_2>0}\left(\int_0^{x_1}\int_0^{x_2}w(t_1,t_2)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\right)^{1/q}\left(\int_{x_1}^{\infty}\int_{x_2}^{\infty}u(t_1,t_2)^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\right)^{\frac{1}{p'}}<\infty,$$

式中 $1/p+1/p'=1$. ([339]1989,9(4):569～575)

其他文献见[368]1984,33(2):257～270;33(3):360～361;[329]1972,34:31～38;1988,88(3):209～219;[308]1990,109(1):85～95;[301]1990,149:17～25;1987,122(1):7～15,1991,160:434～445;[374]1981,24(4):393～400;[388]1990,21(7):617～620.[21]176 和专著[27](列出84篇参考文献);[50]271～288等.

(19) **高阶导数 Hardy 不等式**：Kheinig-Kufner 指出：设 $1<p\leqslant q<\infty$，f 为 $(0,\infty)$ 上非负可测函数，ω_0,ω_1 为非负权函数. 令

$$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t.\ \|f\|_{p,\omega_1}=\left(\int_0^{\infty}|f(x)|^p\omega_1(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

则

$$\|F\|_{q,\omega_0}\leqslant C\|f\|_{p,\omega_1}\tag{3.15}$$

$$\Rightarrow\quad \|F\|_{q,\omega_0}\leqslant C\|F'\|_{p,\omega_1},\tag{3.16}$$

于是,(3.15),(3.16) 式成立的充要条件是

$$\sup_{0<x<\infty}\left(\int_0^x \omega_0(t)\mathrm{d}t\right)^{1/q}\left(\int_0^x \omega_1^{1-p'}(t)\mathrm{d}t\right)^{1/p'} = C_1 < \infty, \tag{3.17}$$

式中 $p' = \dfrac{p}{p-1}$,$F(0) = 0$,若将(3.15) 式中 F 换成$\int_x^\infty f(t)\mathrm{d}t$,则(3.17) 式中

$\left(\int_0^x [\omega_1(t)]^{1-p'}\mathrm{d}t\right)^{1/p'}$ 换成$\left(\int_x^\infty [\omega_1(t)]^{1-p'}\mathrm{d}t\right)^{1/p'}$,以及 $F(0) = 0$ 换成 $F(\infty) = 0$.

更一般地,设 $1 < p \leqslant q < \infty, m, n \in N$. F 满足 $F^{(k)}(0) = 0, 0 \leqslant k \leqslant m-1$. 式中约定 $F^{(0)}(0) = F(0)$. 当 $m \leqslant k \leqslant m+n-1$ 时 $F^{(k)}(\infty) = 0$,则

$$\| F \|_{q,\omega_0} \leqslant C \| F^{(m+n)} \|_{p,\omega_{nm}},$$

成立的充要条件是非负权函数 ω_0, ω_{nn} 满足:

$$\sup_{0<x<\infty}\left(\int_x^\infty \omega_0(t)t^{(m-1)q}\mathrm{d}t\right)^{1/q}\left(\int_0^x \omega_{mn}^{1-p'}(t)t^{np'}\mathrm{d}t\right)^{1/p'} = C_1 < \infty \quad 和$$

$$\sup_{x>0}\left(\int_0^x \omega_0(t)t^{mq}\mathrm{d}t\right)^{1/q}\left(\int_0^\infty \omega_{mn}^{1-p'}(t)t^{(n-1)p'}\mathrm{d}t\right)^{1/p'} = C_2 < \infty,$$

式中 $1/p + 1/p' = 1, 1/q + 1/q' = 1$.

(Proc. Steklov Institute of Math. 1990,192(2):113 ~ 121)

Kufner 等在[54]6 中还给出了形如

$$\| f \|_{q,\omega_0} \leqslant C \| f^{(k)} \|_{p,\omega_k}$$

的高阶导数 Hardy 不等式成立的充要条件,式中 ω_0, ω_k 为非负权函数.

$$\| f \|_{q,\omega_0} = \left(\int_0^1 | f(x) |^q \omega_0(x)\mathrm{d}x\right)^{1/q}, 1 < p \leqslant q < \infty.$$

类似的结果见[27],[21]176,近期工作见 Nasyrova, Masha 等[302]1997,1(3):223 ~ 238,MR94h:26018,MR97i:26021,MR98g:26017; [392]1999,129(5):947 ~ 958. Math. Bohem,1998,123(3):279 ~ 293 等.

(20)　**分数阶 Hardy 不等式**:设 f 在$(0,\infty)$ 上局部可积,$p \geqslant 1$,当 $x \to 0$ 或 $x \to \infty$ 时$\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \to 0$. 若 $\alpha > 0, 1/p < \beta < 1$,或 $\alpha < 0, 0 < \beta < 1/p$,则

$$\int_0^\infty | f(x) |^p x^{-\alpha p-1}\mathrm{d}x \leqslant c(\alpha)\int_0^\infty \left| f(x) - \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \right|^p x^{-\alpha p-1}\mathrm{d}x; \tag{3.18}$$

$$\int_0^\infty | f(x) |^p x^{-\beta p}\mathrm{d}x \leqslant c(p,\beta)\int_0^\infty\int_0^\infty | f(x) - f(y) |^p | x - y |^{-\beta p-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{3.19}$$

(Krugljak. Natan 等,[308]2000,128(3):727 ~ 734.) 我们要问,式中 $c(\alpha)$,$c(p,\beta)$ 的最佳值是多少? 此外,见[302]1997,1(1):25 ~ 46)

(21)　1998 年以来,杨必成等对 Hardy 不等式作了一系列改进和推广. 例如,设 $0 < a < b < \infty, 1 < p < \infty, 1/p + 1/q = 1, f(x) \geqslant 0, f \not\equiv 0, f \in L^p(0,\infty)$,令

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t.\quad \| f \|_p = \left(\int_a^b | f |^p\right)^{1/p},则$$

① $\| F \|_p < q[1 - (a/b)^{1/q}] \| f \|_p$.

② $\| F \|_p < q\, C_p(a,b) \| f \|_p$.

式中　$C_p(a,b)=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\left\{\frac{1}{q}x^{1/q}\int_x^b t^{-1-(1/q)}\left[1-\left(\frac{a}{t}\right)^{1/q}\right]^{p-1}\mathrm{d}t\right\}^{1/p}$，

$$p^{-\frac{1}{p}}[1-(a/b)^{1/q}]<C_p(a,b)<1-(a/b)^{1/q}.$$

③　$a=0$ 时，

$$\|F\|_p<q\left\{\int_0^b\left[1-\left(\frac{t}{b}\right)^{1/q}\right][f(t)]^p\mathrm{d}t\right\}^{1/p}.$$

④　$\left\{\int_a^\infty\left(\int_x^\infty f(t)\mathrm{d}t\right)^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p}<p\left\{\int_a^\infty[1-(a/t)^{1/p}][tf(t)]^p\mathrm{d}t\right\}^{1/p}.$

([301]1998,217(1):321 ～ 327;[326]1999,22(3):535 ～ 542)

(22)　胡克对 Hardy 不等式的改进和推广见江西师大学报 2000,24(2):95 ～ 98.

(23)　设 f 在$(0,\infty)$ 上局部可积，$1\leqslant p\leqslant\infty$，则

$$\frac{1}{C(\alpha)}\left(\int_0^\infty\left|\frac{f(x)}{x^\alpha}\right|^p\frac{\mathrm{d}x}{x}\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left\{\int_0^\infty\left|\frac{f(x)-\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x^\alpha}\right|^p\frac{\mathrm{d}x}{x}\right\}^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqslant\left(1+\frac{1}{\alpha+1}\right)\left(\int_0^\infty\left|\frac{f(x)}{x^\alpha}\right|^p\frac{\mathrm{d}x}{x}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.20}$$

右边不等式对 $\alpha>-1$ 成立，而左边不等式对 $\alpha\neq0$ 成立，式中 $C(\alpha)=1+|\alpha|^{-1}$，当 $\alpha>0$ 时，$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0$，而当 $\alpha<0$ 时，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0$.

由此推出，(3.20) 中左边不等式对 $\alpha\neq0$ 和$(0,\infty)$ 上有紧支集的局部可积函数成立.

特别取 $\alpha=-\frac{1}{2}$，$p=2$，得到

$$\frac{1}{3}\left(\int_0^\infty|f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\int_0^\infty\left|f(x)-\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant3\left(\int_0^\infty|f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

若 f 在$(0,\infty)$ 上局部可积，$1\leqslant p\leqslant\infty$，$\alpha\in R^1$，则

$$\left(\int_0^\infty\left|\frac{f(x)}{x^\alpha}\right|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant C(\alpha,p)\left(\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{\alpha p+1}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{3.21}$$

式中

$$C(\alpha,p)=2^{-\frac{1}{p}}\left(1+\frac{1}{\left|\alpha-\frac{1}{p}\right|}\right),$$

而且当 $\frac{1}{p}<\alpha<1$ 时，$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0$，而当 $0<\alpha<\frac{1}{p}$ 时，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0$.

([308]128(3)(1998),727 ～ 734)

(24)　设 f 在$(0,\infty)$ 上绝对连续，$1<p<\infty$，$0<\alpha<1$，则

$$\left(\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{p\alpha+1}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant C\left(\int_0^\infty|f'(x)|^p x^{(1-\alpha)p}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.22}$$

文献同(23). 我们问 C 的最佳值是多少？

(25)　设 $0<x<a$，$p<2$ 时 $f(a)=0$，$p>2$ 时 $f(0)=0$.

若 $f\in W_p^1(\Omega)$(Sobolev 空间,其定义可见[75]).则

$$\int_0^a |f(x)|^p x^{1-p}\mathrm{d}x \leqslant \left(\frac{p}{|2-p|}\right)^p \int_0^a |f'(x)|^p x\,\mathrm{d}x. \tag{3.23}$$

([75]74)

(26) 设 f,u,w 是 R^n 上正的可测函数,$B(x)$ 是中心在原点半径为 x 的球.记

$$T(f,x) = \exp\frac{1}{|B(x)|}\int_{B(x)}\log f(y)\mathrm{d}y,$$

则

$$\|Tf\|_q \leqslant C\|f\|_{p,v} \tag{3.24}$$

式中 $\|f\|_{p,v} = \left(\int_{R^n} f^p(x)v(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$, $0<p\leqslant q<\infty$.

(Proc. A. Razmadze Math. Inst 129(2002),17 ~ 27)

(27) 设 f 在$(0,\infty)$ 上非负可积,φ 是$(0,\infty)$ 上的凸函数,则$\int_0^\infty \varphi\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t')\mathrm{d}t\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}$ $\leqslant \int_0^\infty \varphi(f(x))\frac{\mathrm{d}x}{x}$.

[303]8(3)(2005),403 ~ 417

4. **Carleman 不等式.** 设 $f(x)>0$,则

$$\int_0^\infty \exp\left\{\frac{1}{x}\int_0^x \ln f(t)\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}x < e\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x. \tag{4.1}$$

它是 No. 3 中 Hardy 不等式(3.1)当 $p\to 1$ 的情形,系数 e 是最佳的.1928 年,Knopp 证明.(见[317]1928,3:205 ~ 211)离散形式见第 11 章 §2. No. 38.

Carleman 不等式有许多改进和推广.

(1) **Levin 不等式:** 非负函数 f 的加权几何平均定义为

$$G(f,\omega) = \exp\left\{\frac{1}{\omega(x)}\int_0^x \omega'(t)\ln f(t)\mathrm{d}t\right\}.$$

式中权函数 ω 满足:$\omega'(t)\geqslant 0,\omega(0)=0$. $x\to\infty$ 时 $\omega(x)\to\infty$,$x\to 0$ 时 $\omega(x)\ln\omega'(x)\to 0$,于是 $\omega(x)=\int_0^x \omega'(t)\mathrm{d}t$. 若 $g(x)\geqslant 0$,g 是 g' 的积分,ω' 是 ω'' 的积分且 $\omega(x)\ln g(x)\to 0(x\to 0)$,则

$$\int_0^\infty g(x)G(f(x);\omega)\mathrm{d}x < \int_0^\infty F(x)f(x)dx. \tag{4.2}$$

式中 $F(x) = g(x)\exp\left\{1-\frac{\omega(x)\omega''(x)}{[\omega'(x)]^2}+\frac{\omega(x)g'(x)}{\omega'(x)g(x)}\right\}$,

特别,设 $\lambda>0$,α 为实数,则

$$\int_0^\infty x^\alpha G(f(x);x^\lambda)\mathrm{d}x < \exp\left\{\frac{\alpha+1}{\lambda}\right\}\int_0^\infty x^\alpha f(x)\mathrm{d}x. \tag{4.3}$$

式中系数 $\exp\left\{\frac{\alpha+1}{\lambda}\right\}$ 是最佳的.(Matem. Sbornik 4,1938,46(2):325 ~ 331)

(类似情形见[21]149 ~ 150)

(2)　设 f 在[0,1]上非负可测，则

$$\int_0^1\left(\frac{1}{x}\int_0^x f\right)<\frac{e}{e-1}\int_0^1 f\left[1+\ln\frac{f}{\int_0^1 f}\right]. \tag{4.4}$$

(MR97c:26020)

(3)　设 $\omega(x)$ 满足：① $\omega(0)=0$，　② $\omega(\infty)=\infty$，　③ $\omega'(x)>0, x>0$.

若

$$\int_0^\infty \varphi(x)\exp\left\{\frac{1}{x}\int_0^r \ln f(t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}t \leqslant \int_0^\infty h(x)f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{4.5}$$

则

$$\int_0^\infty \varphi_1(y)\exp\left\{\frac{1}{\omega(y)}\int_0^y \omega'(t)\ln g(t)\,\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}y \leqslant \int_0^\infty h_1(y)g(y)dy, \tag{4.6}$$

式中 $h_1(g)=h[\omega(y)]\omega'(y)$，　$\varphi_1(y)=\omega'(y)\varphi[\omega(y)]$. ([21]153 ～ 154)

5.　**Carlson 不等式**：设 $f(x)\geqslant 0, f(x)\not\equiv 0, f, xf\in L^2(0,\infty)$，则

$$\left(\int_0^\infty f\right)^4 \leqslant \pi^2\left(\int_0^\infty f^2\right)\left(\int_0^\infty x^2 f^2\right). \tag{5.1}$$

式中 π^2 是最佳常数，相应的级数形式见第 11 章 § 2. No. 35.

证　令 $s=\int_0^\infty f^2$，　$\sigma=\int_0^\infty (xf)^2$，用 Cauchy 不等式，有

$$\left(\int_0^\infty f\right)^2 = \left[\int_0^\infty \left(f\sqrt{\sigma+sx^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\sigma+sx^2}}\right)\right]^2$$

$$\leqslant \left[\int_0^\infty f^2(\sigma+sx^2)\right]\left[\int_0^\infty (\sigma+sx^2)^{\ 1}\mathrm{d}x\right]=\pi\sqrt{\sigma s}.$$ 证毕.

(5.1)式已有许多改进和推广.[21]第 8 章专门讨论了 1935 ～ 1990 年的一部分成果.

(1)　1936 年，Hardy 证明(5.1)式与下式等价：

$$[f(0)]^4 \leqslant 4\left(\int_0^\infty f^2\right)\left(\int_0^\infty (f')^2\right). \tag{5.2}$$

仅当 $f(x)=c_1\exp(-c_2 t)$ 时等号成立.

(5.2)式的推广是下述 **Sz-Nagy 不等式**：设 $a>0, p>1, r=1+a(1-p)/p$，则

$$\| f\|_\infty \leqslant (r/2)^{1/r}\| f\|_a^{1-(1/r)}\| f'\|_p^{1/r};$$

$$\| f\|_{a+b}^{a+b} \leqslant \left[\frac{r}{2}H\left(\frac{r}{b},\frac{p-1}{p}\right)\right]^{b/r}\| f\|_a^{a+b-\frac{b}{r}}\| f'\|_p^{\frac{p}{br}}.$$

式中 $b>0, H(u,v)=\dfrac{(u+v)^{-(u+v)}\Gamma(1+u+v)}{u^{-u}\Gamma(1+u)\Gamma(1+v)}$.

设 f 在$[a,b]$上非负递增，g_k 在$[a,b]$上非负递增连续可微，$p_k>0$，$\sum_{k=1}^n p_k=1$，则

$$\int_a^b\left(\prod_{k=1}^n g_k^{p_k}\right)'f \geqslant \prod_{k=1}^n\left(\int_a^b g'_k f\right)^{p_k}. \tag{5.3}$$

若 f 改为递减，$g_k(a)=0$，$\forall k$，则不等号反向，见 Pearce, C. E. M. 等，Handbook of analytic-computational methods in applied mathematics, 465 ～ 505, Chapman, FL, 2000.

(2)　设 f,g 在 $(0,1)$ 上非负递增，$a,b\geqslant -1/2$，则

$$2(a+b+1)^2\left(\int_0^1 fx^{a+b}\right)\left(\int_0^1 gy^{a+b}\right)$$
$$\geqslant (2a+1)(2b+1)\left\{\left(\int_0^1 x^{2a}f\right)\left(\int_0^1 y^{2b}g\right)+\left(\int_0^1 x^{2b}f\right)\left(\int_0^1 y^{2a}g\right)\right\}, \tag{5.4}$$

仅当 $f(x)=f(0),g(y)=g(0)$ 时等号成立.(更一般的情形见[21]261 ~ 262)

(3)　设 f 在 $(0,\infty)$ 上非负可积，$p>1,\lambda>0$，则

$$\int_0^\infty f\leqslant C(p,\lambda)\left\{\int_0^\infty x^{p-1-\lambda}f^p\right\}^{\frac{1}{2p}}\left\{\int_0^\infty x^{p-1+\lambda}f^p\right\}^{\frac{1}{2p}}. \tag{5.5}$$

式中 $C(p,\lambda)=2^{1/p}\left\{\dfrac{\left[\Gamma(\frac{1}{2p-1})\right]^2}{2\lambda\Gamma(\frac{1}{p-1})}\right\}^{1-\frac{1}{p}}$.

(Gabriel, R. M., [317]1937, 12: 130 ~ 132)

(4)　设 f 是 $(0,\infty)$ 上非负函数. $p,q>1,\lambda,\mu>0,\alpha=\dfrac{\mu}{p\mu+q\lambda},\beta=\dfrac{\lambda}{p\mu+q\lambda}$，则

$$\int_0^\infty f\leqslant c\left(\int_0^\infty x^{p-1-\lambda}f^p\right)^\alpha\left(\int_0^\infty x^{q-1+\mu}f^q\right)^\beta, \tag{5.6}$$

式中　$C=\left(\dfrac{1}{p\alpha}\right)^\alpha\left(\dfrac{1}{q\beta}\right)^\beta\left[\dfrac{\Gamma(\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta})\Gamma(\frac{\beta}{1-\alpha-\beta})}{(\lambda+\mu)\Gamma(\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta})}\right]^{1-\alpha-\beta}$ 是最佳常数.

当 $p\to 1,q\to 1$ 时，得到

$$\int_0^\infty f<\left(\int_0^\infty x^{-\lambda}f\right)^\alpha\left(\int_0^\infty x^\mu f\right)^\beta. \tag{5.7}$$

式中　$\alpha=\dfrac{\mu}{\mu+\lambda},\beta=\dfrac{\lambda}{\mu+\lambda}$.(我们假设上述所有积分均为有限.)

(Levin, V. I. [21]P263 ~ 266. [2]176 ~ 177 利用 Holder 不等式给出一个简洁的证明)

(5)　设 f 在 $(0,\infty)$ 上非负可积，则

$$\int_0^\infty f\leqslant 2\left(\int_0^\infty \sqrt{x}f\right)^{1/2}\left(\int_0^\infty f^2\right)^{1/4}. \tag{5.8}$$

(Klefsjö, B., [21]269)

(6)　设 f 在 $(0,\infty)$ 上非负递减，$a,b\geqslant 0,p>1,1/p+1/q=1$. 则

$$\int_0^\infty x^{a+b}f\leqslant C\left(\int_0^\infty x^{ap}f\right)^{1/p}\left(\int_0^\infty x^{bq}f\right)^{1/q}, \tag{5.9}$$

式中 $C=\dfrac{(ap+1)^{1/p}(bq+1)^{1/q}}{1+a+b}$. (Volkov, V. N., (5.9) 式的进一步推广见[21]269 ~ 273)

(7)　设 f,g 在 $(0,\infty)$ 上可测，g 可微，$g(0)=0,g(\infty)=\infty$，而且 $0<\alpha=\inf\{g'(x):x\in(0,\infty)\}<\infty$，则

$$\left(\int_0^\infty f\right)^4\leqslant\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2\left(\int_0^\infty f^2\right)\left(\int_0^\infty (gf)^2\right).$$

(Barza,Sorina,[330]1998,29(1):59 ~ 64)

(8) 设 f 在 $(0,\infty)$ 上非负可测,$0<\alpha<1,1\leqslant p,q<\infty$,则

$$\int_0^\infty \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x \leqslant C\left(\int_0^\infty \frac{1}{x}\left(\frac{f(x)}{x^\alpha}\right)^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1-\alpha}{p}}\left(\int_0^\infty \frac{(f(x)x^{1-\alpha})^q}{x}\mathrm{d}x\right)^{\frac{\alpha}{q}},$$

(证明见[301]1984,100(1):302 ~ 306)

(9) 设 f 在 $(0,\infty)$ 上非负可测,$a>0$,则

$$\int_0^\infty f \leqslant \sqrt{2\pi}\left(\int_0^\infty f^2\right)^{1/4}\left(\int_0^\infty (x-a)^2 f^2\right)^{1/4}. \tag{5.10}$$

$\sqrt{2\pi}$ 也是最佳常数.(Barza,S. 等[302]1998,2(2):121 ~ 135)

(10) 2001 年,匡继昌 -Debnath,L. 证明:设 f 在 (a,∞) 上非负可测,$a>0,0<\beta<p-1<\alpha,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,S_\alpha=\int_0^\infty x^\alpha f^p,S_\beta=\int_a^\infty x^\beta f^p$. 若 $0<S_\alpha,S_\beta<\infty$,则 $f\in L(a,\infty)$,且

$$\left(\int_a^\infty f\right)^p \leqslant 2\left\{\frac{S_\alpha^{\lambda_\alpha}}{(\alpha-\beta)S_\beta^{\lambda_\beta}}B(\lambda_\beta,(-\lambda_\alpha))-C(p,\alpha,\beta)\right\}^{p/q}\left(\int_a^\infty x^\alpha f^p\right)\left(\int_a^\infty x^\beta f^p\right), \tag{5.11}$$

仅当 $f(x)=(S_\beta x^\alpha+S_\alpha x^\beta)^{-q/p}$ 时等号成立. 式中

$$C(p,\alpha,\beta)=\int_0^a (S_\beta x^\alpha+S_\alpha x^\beta)^{-q/p}\mathrm{d}x>0.$$

$\lambda_\alpha=\frac{p-\alpha q}{p(\alpha-\beta)},\lambda_\beta=\frac{p-\beta q}{p(\alpha-\beta)}$. $B(u,v)$ 为 Beta 函数.

特别 $p=q=\alpha=2,\beta=0$ 时,(5.11) 式归结为

$$\left(\int_a^\infty f\right)^4<\left\{\pi-2\arctan\left(\frac{S_0}{S_2}\right)^{1/2}a\right\}^2\left(\int_a^\infty f^2\right)\left(\int_a^\infty x^2 f^2\right).$$

仅当 $f(x)=(S_2+S_0x^2)^{-1}$ 时等号成立.([301]2002,267(1):395 ~ 399)

杨国胜等的工作见[388]1999,30(10):1031 ~ 1040.

6. **Grüss 型不等式**:我们在第一章 §3 介绍了 Grüss 不等式(3.133) 及其改进和推广,由于这类不等式在统计、编码理论、数值分析等领域均有重要应用,本章介绍它的进一步推广,称为 Grüss 型不等式.

(1) 设 $f,g\in L[a,b]$,记 $A(f)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f$, 则

$$|A(fg)-A(f)A(g)|\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b[f(x)-A(f)][g(x)-A(g)]\mathrm{d}x,$$

取 $f(x)=g(x)=\mathrm{sgn}(x-\frac{a+b}{2})$,可看出不等式是最佳的,由此导出**梯形不等式**:

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-A(f)\right|\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{p+1}\right)^{1/p}\left\{\int_a^b\left|f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|^q\mathrm{d}x\right\}^{1/q}.$$

$1<p,q<\infty,1/p+1/q=1$. 令 $p\to1$ 得

$$\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-A(f)\right|\leqslant\frac{b-a}{4}\sup_{x\in(a,b)}\left|f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|,$$

令 $p\to\infty$,得

$$\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-A(f)\right|\leqslant\frac{1}{2}\int_a^b\left|f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|\mathrm{d}x.$$

(Dragomir-Mcandrew,[330]2000,31:193 ~ 201,和 2002,33(3):241 ~ 244)

设　$M=\sup\{f'(x):x\in[a,b]\}<\infty,m=\inf\{f'(x):x\in[a,b]\}>-\infty,m<M$,则

$$\left|A(f)-\frac{f(b)+f(a)}{2}\right|\leqslant\frac{[f(b)-f(a)-m(b-a)][M(b-a)-f(b)+f(a)]}{2(M-m)(b-a)}$$
$$\leqslant\frac{(M-m)(b-a)}{8};$$

特别若 $\|f'\|_\infty=\sup\{|f'(x)|:x\in[a,b]\}<\infty$,则

$$\left|A(f)-\frac{f(b)+f(a)}{2}\right|\leqslant\frac{(b-a)}{4}\|f'\|_\infty.$$

(Agarwal,R. P. 等. Computers Math. Applc. 1996,32(6):95 ~ 99)

1998 年,Dragomir. S,S,等证明:设 f 在$[a,b]$上 RS 可积,$m\leqslant f(x)\leqslant M$, $|g(x)-g(y)|\leqslant C|x-y|,x,y\in[a,b]$,则

$$\left|\int_a^b f\mathrm{d}g-\frac{g(b)-g(a)}{b-a}\int_a^b f\right|\leqslant\frac{C}{2}(M-m)(b-a);$$

$$\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q|f(x)-f_Q|\,dx\right)^2\leqslant\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q(f(x)-f_Q)^2\mathrm{d}x$$
$$\leqslant(M-f_Q)(f_Q-m)\leqslant\frac{(M-m)^2}{4}.$$

式中　$Q=[a,b]$,　$\mu(Q)=b-a,f_Q=\dfrac{1}{\mu(Q)}\displaystyle\int_Q f$. ([330]1998,29(4):287 ~ 292)

2000 年,Dragomir,S. S. 证明:设 f,g 满足 Hölder 型连续:

$$|f(x)-f(y)|\leqslant M_1|x-y|^\alpha,\ |g(x)-g(y)|\leqslant M_2|x-y|^\beta,$$

$0<\alpha,\beta\leqslant1$,则

$$|A(fg)-A(f)A(g)|\leqslant\frac{M_1M_2(b-a)^{\alpha+\beta}}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)}.$$

([330]2000,31(1):43 ~ 47)

下面设$(X,\sum,\mu)$为测度空间,$E\subset X,\mu(E)=1$.

(2)　若 $f\in L(E)$,则

$$\int_E\left|f-\int_E f\right|\leqslant\|f\|_2.$$

(3)　设 $f,g\in L^2(E)$,则

$$\left|\int_E fg-\left(\int_E f\right)\left(\int_E g\right)\right|\leqslant\|f\|_2\|g\|_2.$$

(4)　设 $f,g\in L^\infty(E)$,且 $m_1\leqslant f(x)\leqslant M_1,m_2\leqslant g(x)\leqslant M_2$　a. e. $x\in E$. 则

$$\left|\int_E fg-\left(\int_E f\right)\left(\int_E g\right)\right|\leqslant\frac{1}{4}(M_2-m_2)(M_1-m_1).$$

若$\displaystyle\int_E f=0$,则$\displaystyle\int_E|f|\leqslant\frac{1}{2}(M_1-m_1)$.

推广到加权情形:设 ω 是 E 上非负权函数,记 $\omega(E)=\displaystyle\int_E\omega(x)\mathrm{d}\mu$,则

$$\left|\left(\int_E fg\omega\right)\omega(E)-\left(\int_E f\omega\right)\left(\int_E g\omega\right)\right|\leqslant\frac{1}{4}(M_2-m_2)(M_1-m_1)(\omega(E))^2.$$

($E=[a,b]$ 时见楼宇同[353]1991,4:24 ~ 28)

(5) 设 $E_{n,p}(f)=\inf\limits_{\{P_n\}}\{\|f-P_n\|_p\}$,式中 $P_n(x)$ 为 n 次代数多项式,若 $f,g\in L^2(E)$,则

$$\left|\int_E fg-\left(\int_E f\right)\left(\int_E g\right)\right|\leqslant E_{0,2}(f)E_{0,2}(g);$$

若 $f,g\in L^\infty(E)$,则

$$\left|\int_E fg-\left(\int_E f\right)\left(\int_E g\right)\right|\leqslant E_{0,\infty}(f)E_{0,\infty}(g).$$

若 $\int_E f=0$,则 $\int_E|f|\leqslant E_{0,\infty}(f)$.

(Li Xin 等,[301]2002,267(2):434 ~ 443. Pachpatte 还得出二重积分的 Grüss 型不等式,见[301]2002,267(2):454 ~ 459)

(6) 设 $\alpha(t)$ 在$[a,b]$上递增,若 f,g 在$[a,b]$上同时递增或递减,则

$$\left(\int_a^b f\mathrm{d}\alpha\right)\left(\int_a^b g\mathrm{d}\alpha\right)\leqslant[\alpha(b)-\alpha(a)]\int_a^b fg\mathrm{d}\alpha.$$

若 f 递增而 g 递减,则不等号反向.

(7) 利用(1)中的记号,设 f,g 在(a,b)上二次可微且

$$\|f''\|_\infty=\sup\{|f''(x)|:x\in(a,b)\}<\infty,\qquad \|g''\|_\infty<\infty,$$

则

$$\left|A(fg)-A(f)A(g)-\frac{1}{2(b-a)}\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(f(x)g(x))'\mathrm{d}x\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{2(b-a)^2}\int_a^b(\|f''\|_\infty|g(x)|+\|g''\|_\infty|f(x)|)B(x)\mathrm{d}x,$$

式中

$$B(x)=\int_a^b|K(x,t)|\mathrm{d}t,\qquad K(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}(t-a)^2, & a\leqslant t\leqslant x,\\ \frac{1}{2}(b-t)^2, & x<t\leqslant b.\end{cases}$$

([330]34(2003),365 ~ 369,38(2007),111 ~ 120)

(8) 设 f,g 在$[0,1]$上可积,$0\leqslant f,\ g\leqslant 1$,则

$$\int_0^1 fg-\left(\int_0^1 f\right)\left(\int_0^1 g\right)+\left(\int_E|f-g|\right)\left(\int_B|f-g|\right)\leqslant\frac{1}{4},$$

式中 $E=\{x\in[0,1]:f(x)\geqslant g(x)\}$, $B=[0,1]-E$. ([304]2005(4))

7. **Heisenberg 不等式**:设 $f,f',xf\in L^2(R^1)$,$\|f\|_2=\left(\int_{R^1}|f|^2\right)^{1/2}$,$\hat{f}(w)=\int_{R^1}f(t)e^{-2\pi iwt}\mathrm{d}t$ 为 f 的 Fourier 变换,则

(1) $\|f\|_2^2\leqslant 2\|xf\|_2\|f'\|_2.$ (7.1)

(2) $\forall t_0, \omega_0 \in R^1$,成立

$$\left(\int_{R^1}(t-t_0)^2 \mid f(t) \mid^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2}\left(\int_{R^1}(\omega-\omega_0)^2 \mid \hat{f}(\omega) \mid^2 \mathrm{d}\omega\right)^{1/2} \geqslant \left(\frac{\| f \|_2^2}{4\pi}\right). \tag{7.2}$$

注 设 $f \in L^2(R^1)$ 且 $tf(t) \in L^2(R^1)$,称 f 为窗函数.

$t_0 = \dfrac{1}{\| f \|_2^2}\displaystyle\int_{R^1} t \mid f(t) \mid^2 \mathrm{d}t$ 称为窗函数 f 的中心.

$\sigma_f = \dfrac{1}{\| f \|_2}\left\{\displaystyle\int_{R^1}(t-t_0)^2 \mid f(t) \mid^2 \mathrm{d}t\right\}^{1/2}$ 称为窗函数 f 的半径. $2\sigma_f$ 称为 f 的宽度,于是(7.2)式可写成

$$\sigma_f \cdot \sigma_{\hat{f}} \geqslant \frac{1}{4\pi}, \tag{7.3}$$

仅当 f 为 Gauss 函数 g_α 时等号成立,其中

$$g_\alpha(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}}\exp\left\{-\frac{t^2}{4\alpha}\right\}, \alpha > 0.$$

(7.3) 式在量子力学中称为**测不准原理**,在信号分析中,时间 t 与频率 ω 的最高分辨率受到 Heisenberg 测不准原理的制约. 在小波分析中,为了得到小波正交基,需要对时域 t 与频域 ω 双重局部化,一般先对频域 ω 作局部化,再对时域 t 作局部化,为使第二次局部化不致破坏第一次局部化,就应当遵循上述测不准原理,而多尺度分析恰好就能满足这些要求. (7.2) 式可写成为:

$$\left(\int_{R^1}(t-t_0)^2 \mid f(t) \mid^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2}\left(\int_{R^1}(\omega-\omega_0)^2 \mid \hat{f}(\omega) \mid^2 \mathrm{d}\omega\right)^{1/2} \geqslant \frac{\| f \|_2 \| \hat{f} \|_2}{4\pi},$$

式中 $t_0 = \displaystyle\int_{R^1} t \mid f(t) \mid^2 \mathrm{d}t, \omega_0 = \int \omega \mid \hat{f}(\omega) \mid^2 \mathrm{d}\omega$

([311]1975,102(1):159 ~ 182. 另见[366]2001,33(1):52 ~ 58)

(3) 若将(7.1) 中积分限改为$(0,\infty)$,就得到 **Weyl 不等式**:

$$\int_0^\infty f^2 \leqslant 2\left(\int_0^\infty x^2 f^2\right)^{1/2}\left(\int_0^\infty (f')^2\right)^{1/2}. \tag{7.4}$$

仅当 $f(x) = c\exp(-\alpha x^2)$ 时等号成立.

更一般地,设 $\alpha > 1, \beta > -1$, f 为正的可积函数.

$p = \dfrac{\alpha(\beta+1)}{\alpha-1}, q = \dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-1}, \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\alpha'} = 1$,则

$$\int_0^\infty (x^\beta f^\alpha) \leqslant \frac{\alpha}{\beta+1}\left\{\int_0^\infty x^p f^\alpha\right\}^{\frac{1}{\alpha'}}\left\{\int_0^\infty \mid f' \mid^\alpha\right\}^{1/\alpha}. \tag{7.5}$$

仅当 $f(x) = c_1\exp\{-c_2 x^q\}$ 时等号成立,式中 $c_1 \geqslant 0, c_2 > 0$. ([1]184,定理 226)

(4) 1998 年,高明哲通过 Cauchy-Schwarz 不等式的改进,将(7.1) 式改进为

$$\| f \|_2^4 \leqslant 4 \| xf \|_2^2 \| f' \|_2^2 - a^2, \tag{7.6}$$

式中 $a = 2(x_0 \| xf \|_2 - y_0 \| f' \|_2) > 0$,

$$x_0 = \int_{R^1} \frac{\mid tf(t) \mid}{\sqrt{\pi(1+t^2)}}\mathrm{d}t, \quad y_0 = \int_{R^1} \frac{\mid f'(t) \mid}{\sqrt{\pi(1+t^2)}}\mathrm{d}t,$$

(7.6) 式中仅当 $f(t)=c_1\exp\{-c_2t^2\}(c_2>0)$ 时等号成立，而将 Weyl 不等式(7.4) 式改进为

$$\|f\|_2^4\leqslant 4\|tf\|_2^2\|f'\|_2^2-4(x_0\|tf\|_2-y_0\|f'\|_2)^2. \tag{7.7}$$

式中

$$\|f\|_2=\left(\int_0^\infty f^2\right)^{1/2}, x_0=\left(\frac{4}{\pi}\right)^{1/4}\int_0^\infty f'(t)e^{-(\frac{1}{2})t^2}\mathrm{d}t, y_0=\left(\frac{4}{\pi}\right)^{1/4}f(0)+x_0, \tag{7.8}$$

$f(0)=\lim\limits_{t\to 0}f(t)$ 存在.

由(7.7) 式还可导出一个新的不等式：设 $tf', f''\in L^2(0,\infty), f'(t)f''(t)\leqslant 0$，则

$$\|f'\|_2^4\leqslant 4\left(\int_0^\infty[f(t)-f(0)]^2\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^\infty(f'')^2\right)-a^2. \tag{7.9}$$

式中 $a=2(x_0\|tf'\|_2-y_0\|f''\|_2)$，

$$x_0=\left(\frac{4}{\pi}\right)^{1/4}\int_0^\infty f''(t)\exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}\mathrm{d}t, y_0=\left(\frac{4}{\pi}\right)^{1/4}f'(0)+x_0.$$

(5) 设 $f\in AC(R^1)$，且 $\int_{R^1}(x|f|)^2<\infty, \int_{R^1}|f'|^2<\infty$，则 $\forall x\geqslant 0$ 成立

$$x|f(x)|^2\leqslant 4\left(\int_x^\infty(t|f(t)|)^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}\left(\int_x^\infty|f'(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}. \tag{7.10}$$

证 令 $\alpha=(\int_x^\infty(t|f(t)|)^2\mathrm{d}t)^{1/2}, \beta=(\int_x^\infty|f'(t)|^2\mathrm{d}t)^{1/2}$， $\forall x\geqslant 0, t\geqslant 0$，由 Cauchy 不等式，有

$$|f(x+t)-f(x)|=\left|\int_x^{x+t}f'(u)\mathrm{d}u\right|\leqslant\beta\sqrt{t}.$$

取 $0\leqslant h\leqslant(1/\beta|f(x)|)^2, 0\leqslant t\leqslant h$，则 $|f(x+t)|\geqslant|f(x)|-\beta\sqrt{h}\geqslant 0$.
从而 $\alpha\geqslant x\sqrt{h}(|f(x)|-\beta\sqrt{h})$，取 $h=\left(\frac{1}{2\beta}|f(x)|\right)^2$，即得 $x|f(x)|^2\leqslant 4\alpha\beta$.

([73]297 ~ 298)

(6) **Hardy-Littlewood 型不等式**：

$$\int_{R^1}\{|f'(x)|^2+(x^2-t)|f(x)|^2\}\mathrm{d}x\leqslant$$
$$C(t)\left\{\int_{R_1}|f''(x)-(x^2-t)f(x)|^2\mathrm{d}x\right\}^{1/2}\|f\|_2,$$

式中 $\|f\|_2=\left(\int_{R^1}|f|^2\right)^{1/2}$.(Evans 等.[396]1986,46:118 — 147)

(7) 设 ω 为 $[a,b]$ 上正的权函数，则

$$\int_a^b[p(f')^2+qf^2]\leqslant C\left(\int_a^b\omega^{-1}[(pf')'-qf]^2\right)^{1/2}\|f\|_{2,\omega},$$

式中 p,q 为实值函数，$\|f\|_{2,\omega}=\left(\int_a^b|f|^2\omega\right)^{1/2}$.(Everitt, W. N. [307]582 — 26006)

(8) 设 $-\infty\leqslant a<\infty$，$\omega$ 是 (a,∞) 上正的递增函数，则

$$\|f'\|_{2,\omega}\leqslant 2\|f\|_{2,\omega}\|f''\|_{2,\omega},$$

式中 $\|f\|_{2,\omega}=\left(\int_0^\infty |f|^2\omega\right)^{1/2}$.（[54]5:29 ~ 63）

（9）　设 $f\in L^p(R^1)$，$f''\in L^q(R^1)$，$f\neq 0$，$1<p<\infty$，$1/p+1/q=1$，则

$$\|f'\|_2\leqslant \|f\|_p\|f''\|_q.$$

8.　**Ostrowski 不等式**（1938 年）：设 f 在 (a,b) 上可微，且 $\|f'\|_\infty=\sup\{|f'(x)|:x\in(a,b)\}<\infty$. 则 $\forall x\in(a,b)$，成立

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right|\leqslant\left[\frac{1}{4}+\left(\frac{x-\frac{a+b}{2}}{b-a}\right)^2\right](b-a)\|f'\|_\infty. \tag{8.1}$$

（Comment, Math. Helv. 1938, 10:226 ~ 227）

（8.1）式已有许多改进和推广：

（1）　设 $f'\in L[a,b]$，记 $\|f'\|_1=\int_a^b|f'|\mathrm{d}x$，则

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right|\leqslant\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{(b-a)}\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right]\|f'\|_1,\ \forall x\in[a,b], \tag{8.2}$$

（Dragomir, S. S.，[330]1997, 28(3):239 ~ 244）

1995 年，Anastassiou, G. A. 证明：设 $f^{(n+1)}\in C[a,b]$，$\exists y\in[a,b]$，使得 $f^{(k)}(y)=0$，$k=1,2,\cdots,n$，则

$$\left|f(y)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right|\leqslant\frac{1}{(n+2)!}\left(\frac{(y-a)^{n+2}+(b-y)^{n+2}}{b-a}\right)\|f^{(n+1)}\|_\infty;$$

若 $f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$，$1\leqslant k\leqslant n$，则成立中点不等式：

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right|\leqslant\frac{1}{(n+2)!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}\|f^{(n+1)}\|_\infty.$$

（[308]1995, 123(12):3775 ~ 3781. [330]2005(2):132）

（2）　将（8.1）式推广到多元函数；设 f 在 $Q=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ 上可微.

$\|f'_{x_k}\|_\infty=\sup\{|f'_{x_k}(x)|:x=(x_1,\cdots,x_n)\in Q\}<\infty$,

$\omega(x)$ 是 Q 上正的可积函数，$\omega(Q)=\int_Q\omega(t)\mathrm{d}t$. 则 $\forall x=(x_1,\cdots,x_n)\in Q$，成立

$$\left|f(x)-\frac{1}{\omega(Q)}\int_Q f(y)\omega(y)\mathrm{d}y\right|\leqslant\frac{1}{\omega(Q)}\sum_{k=1}^n\|f'_{x_k}\|_\infty\int_Q|x_k-y_k|\omega(y)\mathrm{d}y. \tag{8.3}$$

式中 $y=(y_1,\cdots,y_n)$.（Milovanovic, G. V. [331]1975.(498 ~ 541):119 ~ 124）

（3）　设 $\|f^{(n)}\|_\infty=\sup\{|f^{(n)}(x)|:x\in[a,b]\}<\infty$,

$F_k(x)=\frac{(n-k)}{k!(b-a)}[f^{(k-1)}(a)(x-a)^k-f^{(k-1)}(b)(x-b)^k]$. 则

$$\left|\frac{1}{n}\left(f(x)+\sum_{k=1}^{n-1}F_k(x)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right|\leqslant\frac{(x-a)^{n+1}+(b-x)^{n+1}}{n(n+1)!(b-a)}\|f^{(n)}\|_\infty, \tag{8.4}$$

$x\in[a,b]$.　（[331]1976, 544 ~ 576:155 ~ 158，或[21]469 ~ 470）

特别，当 $n=2$ 时，得到

$$\left|\frac{1}{2}\left[f(x)+\frac{(x-a)f(a)+(b-x)f(b)}{b-a}\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right|\leqslant$$

$$\frac{1}{4}(b-a)^2\left[\frac{1}{12}+\left(\frac{x-\frac{a+b}{2}}{b-a}\right)^2\right]\|f''\|_\infty, \forall x\in[a,b]. \tag{8.5}$$

1999 年，Cerone，P. 等利用下述引理对(8.4)式作了进一步改进：

引理 设 $f^{(n-1)}\in AC[a,b]$，则

$$\int_a^b f=\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{(b-x)^{k+1}+(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}\right]f^{(k)}(x)+(-1)^n\int_a^b K_n(x,t)f^{(n)}(t)\mathrm{d}t,$$

式中 $$K_n(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{n!}(t-a)^n, t\in[a,x],\\ \frac{1}{n!}(t-b)^n, t\in[x,b]\end{cases} \quad x\in[a,b].$$

设 $f^{(n-1)}\in AC[a,b]$，$f^{(n)}\in L^\infty[a,b]$，则 $\forall x\in[a,b]$，

$$\left|\int_a^b f-\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{(b-x)^{k+1}+(-1)^k(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}\right]f^{(k)}(x)\right|\leqslant$$

$$\frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{(n+1)!}[(x-a)^{n+1}+(b-x)^{n+1}]\leqslant\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\|f^{(n)}\|_\infty.$$

(Demonstratio Math. 1999,32(4):697 ～ 712. Fink，A. M. 对(8.4)式的推广见[21]470 ～ 471.)2001 年，Hanna，G. 等将上述不等式推广到二元函数的积分.([330]2002,33(4):319 ～ 333. [302]2005(1):67 ～ 80)

(4) 2000 年，Dedic，Lj 等利用著名的 Euler 公式：

$$f(x)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(b-a)^{k-1}}{k!}B_k\left(\frac{x-a}{b-a}\right)[f^{(k-1)}(b)-f^{(k-1)}(a)]$$

$$-\frac{(b-a)^{n-1}}{n!}\int_a^b f^{(n)}(t)\left[B_n^*\left(\frac{x-t}{b-a}\right)-B_n^*\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right]\mathrm{d}t, x\in[a,b].$$

式中 $f^{(n)}$ 连续，$B_k(\cdot)$ 为 k 阶 Bernoulli 多项式. $B_k=B_k(0)=B_k(1)$ 为 Bernoulli 数，$B_k^*(\cdot)$ 是 Bernoulli 多项式的一种周期性扩充，当 $f:[a,b]\to R$ 是 $(2r+2)$ 阶凸函数时，成立

$$\frac{(b-a)^{2r}|B_{2r}|}{(2r)!}f^{(2r)}\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\leqslant(-1)^r\left\{\frac{1}{b-a}\int_a^b f-\frac{1}{2}[f(a)+f(b)]+\sum_{k=1}^{r-1}\frac{(b-a)^{2k-1}}{(2k)!}B_{2k}[f^{(2k-1)}(b)-f^{(2k-1)}(a)]\right\}$$

$$\leqslant(b-a)^{2r}\frac{|B_{2r}|}{(2r)!}\frac{1}{2}[f^{(2r)}(b)+f^{(2r)}(a)]. \tag{8.6}$$

当 f 为 $(2r+2)$ 阶凹函数时，(8.6)式中不等号反向.([303]2000,3(2):211 ～ 221)

(5) 设多项式 $\{P_n\}$ 满足：$P'_n=P_{n-1}$，$n\geqslant1$，$P_0=1$，$f^{(n-1)}\in \mathrm{Lip}_M1$. 令

$$G_{n-1}(x)=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^kP_k(x)f^{(k)}(x);$$

$$F_k(x)=\frac{(-1)^k(n-k)}{b-a}[P_k(a)f^{(k-1)}(a)-P_k(b)f^{(k-1)}(b)],$$

$$H_{n-1}(x)=\sum_{k=1}^{n-1}F_k(x); K(t,x)=\begin{cases}t-a, a\leqslant t\leqslant x\\ t-b, x<t\leqslant b,\end{cases} \quad 则$$

$$\left|\frac{1}{n}[f(x)+G_{n-1}(x)+H_{n-1}(x)]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right|$$
$$\leqslant \frac{1}{n(b-a)}\int_a^b |P_{n-1}(t)K(t,x)|\,\mathrm{d}t. \tag{8.7}$$

特别当 $P_k(t)=\dfrac{(t-x)^k}{k!}, k\geqslant 0, n=1$ 时，(8.7) 式就是原来的 Ostrowski 不等式.

(Dedic, Li.，等[303]，2000，3(1)：1 ～ 14)

(6)　设 $f\in BV[a,b], g:[a,b]\to R^1$ 满足：

$|g(x)-g(y)|\leqslant M|x-y|^\alpha, x,y\in[a,b], 0<\alpha\leqslant 1, M>0$，则

$$|f(x)[g(b)-g(a)]-\int_a^b f(t)dg(t)|\leqslant M[(x-a)^\alpha V_a^x(f)+(b-x)^\alpha V_x^b(f)], x\in[a,b];$$

$$\left|f(a)[g(b)-g(a)]-\int_a^b f(t)dg(t)\right|\leqslant M(b-a)^\alpha V_a^b(f). \tag{8.8}$$

(Dragomir, S. S., Korean J. Comput. Appl. Math. 2000, 7(3)：611 ～ 627)

(7)　设 $f''\in L[a.b]$，则

$$\left|f(x)-(x-\frac{a+b}{2})f'(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right|$$
$$\leqslant \frac{1}{2(b-a)}\left[\left|x-\frac{a+b}{2}\right|+\frac{1}{2}(b-a)\right]^2\|f''\|_1$$
$$\leqslant \frac{1}{2}(b-a)\|f''\|_1.\ \forall x\in[a,b]. \tag{8.9}$$

(Cerone, P. 等. Honam Math. J. 1999, 21(1)：127 ～ 137)

(8)　设 $m\leqslant f'(x)\leqslant M, x\in[a,b]$，则

$$\left|f(x)-\left(\frac{x-(a+b)/2}{b-a}\right)[f(a)-f(b)]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right|\leqslant\frac{1}{8}(b-a)(M-m). \tag{8.10}$$

(Dragomir, S. S. 等, [330]38(2007)：37 ～ 49)

(9)　设 $m\leqslant f''(x)\leqslant M. x\in[a,b]$，则

$$\left|f(x)-(x-\frac{a+b}{2})f'(x)+\left[\frac{(b-a)^2}{24}+\frac{1}{2}(x-\frac{a+b}{2})^2\right]\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right|\leqslant\frac{1}{8}(M-m)\left[\frac{b-a}{2}+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right]^2. \tag{8.11}$$

(Cerone, P., [395]1999, 39(2)：333 ～ 341)

(10)　设 $T=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$ 为$[a,b]$ 的分划，$\alpha_0=a, \alpha_k\in[x_{k-1}, x_k], k=1,2,\cdots,n. \alpha_{n+1}=b$，若 $f\in BV[a,b]$，则

$$\left|\int_a^b f-\sum_{k=1}^{n+1}(\alpha_k-\alpha_{k-1})f(x_{k-1})\right|\leqslant\|T\|V_a^b(f). \tag{8.12}$$

式中 $\|T\|=\max\{x_k-x_{k-1}:k=1,\cdots,n\}$. $V_a^b(f)$ 是 f 在$[a,b]$ 上的全变差.

(Dragomir, S. S., [359]1999, 60(3)：495 ～ 508. 此外还可见[303]2000, 3(3)：337 ～ 353；[330]1997, 28(3)：239 ～ 244, 1999, 30(3)：203 ～ 211)

下述(11) ～ (15) 也称为 Ostrowski 型不等式.

(11) 设 g 在 $[a,b]$ 上递减, $g(a)g(b)\geqslant 0$, $f\in L[a,b]$, 则

$$\left|\int_a^b fg\right|\leqslant |g(a)|\max_{a\leqslant\xi\leqslant b}\left|\int_a^{\xi}f(x)\mathrm{d}x\right|. \tag{8.13}$$

更一般地, 设 $f\in L[a,b]$, g 在 $[a,b]$ 上单调可积, 则

$$\left|\int_a^b fg\right|\leqslant |g(a)|\max_{a\leqslant\xi\leqslant b}\left|\int_a^{\xi}f(x)\mathrm{d}x\right|+|g(b)|\max_{a\leqslant\xi\leqslant b}\left|\int_{\xi}^{b}f(x)\mathrm{d}x\right|. \tag{8.14}$$

([4]414)

(12) 设 g 在 $[a,b]$ 上单调可积, 则

$$\left|\int_a^b g(x)\cos x\mathrm{d}x\right|\leqslant 2(|g(a)-g(b)|+|g(b)|). \quad ([4]413) \tag{8.15}$$

(13) 设 $0<a<b$, $f(x)\geqslant 0$, $(xf(x))'\geqslant 0$, 则

$$\left|\int_a^b f(x)\cos(\ln x)\mathrm{d}x\right|\leqslant 2bf(b). \qquad ([4]412)$$

(14) 设 $f\in L^2[a,b]$, 则

$$\left|\left[f(x)-\frac{1}{2}(f(a)+f(b))\right]^2-\frac{1}{4}[f(b)-f(a)]^2\right|$$
$$\leqslant\left\{\int_a^b\left[f(x)-\frac{1}{2}(f(a)+f(b))\right]^2\mathrm{d}x\right\}^{1/2}\|f'\|_2,\ \forall x\in[a,b].$$

([4]411)

(15) 设 $f\in AC[0,1]$ 则

$$\int_0^1\int_0^1\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|^{\lambda}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant(\ln 4)\int_0^1|f'|^{\lambda},\lambda\geqslant 1. \ ([21]533) \tag{8.16}$$

2000 年, Fink, A. M. 将(8.16)式推广到 n 阶差分的 n 重积分. ([303]2000,3(3):327 ～ 336)

(16) 设 $f,g\in AC[a,b]$, $f',g'\in L^p[a,b]$, $p>1$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, 令

$$F_k(x)=f(x)g(x)-\frac{1}{k(b-a)}\left[g(x)\int_a^b f+f(x)\int_a^b g\right],$$
$$B(x)=\frac{1}{q+1}[(x-a)^{q+1}+(b-x)^{q+1}],$$

则 $\forall x\in[a,b]$, 成立

① $|F_2(x)|\leqslant\dfrac{1}{2(b-a)}[B(x)]^{\frac{1}{q}}\{|g(x)|\,\|f'\|_p+|f(x)|\,\|g'\|_p\}$,

② $|F_1(x)+A(f)A(g)|\leqslant\dfrac{1}{(b-a)^2}[B(x)]^{\frac{2}{q}}\|f'\|_p\|g'\|_p$,

式中 $A(f)=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f$.

([330]38(2007),335 ～ 339,111 ～ 120,253 ～ 259;40(2009),117 ～ 127)

(17) 设 $f\in BV[a,b]$, 则

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right|\leqslant\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right]V_a^b(f),$$

若 $-\infty<m\leqslant f'(x)\leqslant M<\infty$, a.e. $x\in[a,b]$. 则

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{m+M}{2}\right)\right|$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}+\left(\frac{x-\frac{1}{2}(a+b)}{b-a}\right)^2\right](M-m)(b-a).$$

([330]34(2003):213 ～ 222;37(2006):301 ～ 308;[359]60(1999):145 ～ 156)

(18)　摄动中点不等式:设 $m\leqslant f''(x)\leqslant M,\ x\in[a,b]$,则

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f-f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{b-a}{24}[f'(b)-f'(a)]\right|\leqslant\frac{M-m}{9\sqrt{3}}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

更一般地,设 $m\leqslant f^{(n)}(x)\leqslant M,\ x\in[a,b]$,则

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f-f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1+(-1)^k}{(k+1)!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^k f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1+(-1)^n}{(n+1)!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^n\left(\frac{f^{(n-1)}(b)-f^{(n-1)}(a)}{b-a}\right)\right]\right|$$
$$\leqslant\frac{M-m}{2(n+1)!}\left[\frac{1-(-1)^n}{2}+\frac{(1+(-1)^n)n}{(n+1)\sqrt[n]{n+1}}\right]\left(\frac{b-a}{2}\right)^n.$$

(刘证[330]36(2005):131 ～ 136)

(19)　广义梯形不等式的摄动形式:设 $f\in AC[a,b],\ m\leqslant f'(x)\leqslant M,\ a.e.\ x\in[a,b]$,则

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)-\left[\left(\frac{x-a}{b-a}\right)f(a)+\left(\frac{b-x}{b-a}\right)f(b)\right]\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{8}(M-m)(b-a).$$

([330]38(2007),37 ～ 49)

(20)　设 f,g 的二阶导数在 (a,b) 上有界,记

$$A(f)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f,\qquad G(f)=f(x)-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f'(x),$$
$$T(f)=\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right),\qquad E(x)=\frac{1}{24}(b-a)^2+\frac{1}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2,$$
$$B(x)=\frac{1}{2}\left\{\left[\left(\frac{x-\frac{1}{2}(a+b)}{b-a}\right)^2+\frac{1}{4}\right]^2+\frac{1}{12}\right\}(b-a)^2.$$

则①　$|2A(f)A(g)-G(f)A(g)-G(g)A(f)|$
$\leqslant E(x)[A(g)\|f''\|_\infty+A(f)\|g''\|_\infty]$;

②　$|A(f)g(x)+A(g)f(x)+G(fg)-2f(x)g(x)|$
$\leqslant E(x)[|g(x)|\ \|f''\|_\infty+|f(x)|\ \|g''\|_\infty]$;

③　$|f(x)A(g)+g(x)A(f)-2A(f)A(g)-[T(f)A(g)+T(g)A(f)]|$
$\leqslant B(x)\{\|f''\|_\infty A(|g|)+\|g''\|_\infty A(|f|)\}$;

④　$|2f(x)g(x)-\{A(f)+T(f)+A(g)+T(g)\}|$
$\leqslant B(x)\{\|f''\|_\infty|g(x)|+\|g''\|_\infty|f(x)|\}$.

([330]35(2004):219 ～ 226)

(21)　设 f,g 的二阶导数有界,则

① $\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f'(x)\right|$

$$\leqslant\left[\frac{1}{24}(b-a)^2+\frac{1}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]\|f''\|_\infty\leqslant\frac{1}{6}(b-a)^2\|f''\|_\infty.$$

② $\left|f(x)g(x)-\frac{1}{2(b-a)}\left\{g(x)\int_a^b f+f(x)\int_a^b g\right\}-\frac{1}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)[f(x)g(x)]'\right|$

$$\leqslant\frac{1}{2(b-a)}\{|g(x)|\ \|f''\|_\infty+|f(x)|\ \|g''\|_\infty\}\int_a^b|K(x,t)|\,\mathrm{d}t,$$

式中 $K(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}(t-a)^2, & t\in[a,x]\\ \frac{1}{2}(b-t)^2, & t\in(x,b]\end{cases}$

([330]35(2004),87 ～ 93;38(2007),111 ～ 120)

(22)　设 f,g,h 在$[a,b]$上的导数均有界,则

$$\left|f(x)g(x)h(x)-\frac{1}{3(b-a)}\left[g(x)h(x)\int_a^b f+h(x)f(x)\int_a^b g+f(x)g(x)\int_a^b h\right]\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{3}\{\|f'\|_\infty|g(x)h(x)|+\|g'\|_\infty|h(x)f(x)|+\|h'\|_\infty|f(x)g(x)|\}$$

$$\times\left\{\frac{1}{4}+\left(\frac{x-\frac{1}{2}(a+b)}{b-a}\right)^2\right\}(b-a).$$

([307]1115 ～ 26010;[330]38(2007),111 ～ 120)

(23)　设 f,g 在$[a,b]$上连续,导数 f',g' 在(a,b)上有界.记

$M(x)=\frac{1}{4}(b-a)^2[h^2+(h-1)^2]+\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2$,　$a+h\left(\frac{b-a}{2}\right)\leqslant x\leqslant b-h\left(\frac{b-a}{2}\right)$,

$h\in[0,1]$,　$T(f)=\left[f(x)(1-h)+\frac{1}{2}(f(a)+f(b))h\right](b-a)$,

则

① $\left|g(x)T(f)+f(x)T(g)-g(x)\int_a^b f-f(x)\int_a^b g\right|$

$$\leqslant M(x)\{|g(x)|\ \|f'\|_\infty+|f(x)|\ \|g'\|_\infty\},$$

② $\left|T(f)T(g)-T(f)\int_a^b g-T(g)\int_a^b f+\left(\int_a^b f\right)\left(\int_a^b g\right)\right|$

$$\leqslant[M(x)]^2\|f'\|_\infty\|g'\|_\infty.$$

([330]34(2003),249 ～ 253)

(24)　设 $f^{(n-1)}\in AC[a,b]$, $\omega:[a,b]\to[0,\infty)$ 是概率密度函数,即$\int_a^b\omega=1$.则

$$\left|f(x)-\int_a^b f(x)\omega(x)\mathrm{d}x+\sum_{k=0}^{n-2}\frac{f^{(k+1)}(x)}{(k+1)!}\int_a^b(t-x)^{k+1}\omega(t)\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{(n-1)!}\left\{\int_a^b|T(x,t)|^q\mathrm{d}t\right\}^{\frac{1}{q}}\|f^{(n)}\|_p.$$

式中 $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，

$$T(x,t)=\begin{cases}\displaystyle\int_a^t (u-t)^{n-1}\omega(u)\mathrm{d}u, & a\leqslant t\leqslant x,\\ \displaystyle-\int_t^b (u-t)^{n-1}\omega(u)\mathrm{d}u, & x<t\leqslant b.\end{cases}$$

([330]36(2005),199 ~ 218,279 ~ 301,[302]1(2005),67 ~ 80;[304]6(3) (2005); N. Z. J. Math. 34(1)(2005),31 ~ 34)

9. **Iyengar 不等式**：设在区间 $[a,b]$ 上，f 的导数 f' 的绝对值有界：$|f'(x)|\leqslant M$，则

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}[f(a)+f(b)]\right|\leqslant\frac{1}{4}M(b-a)\left[1-\frac{(f(b)-f(a))^2}{M(b-a)}\right]. \tag{9.1}$$

提示：利用微分中值定理，此外，1938 年，Mahajani, G. S. 用几何方法也证明了这个不等式，见 Math. Student. 1938,6:75 ~ 76,125 ~ 128.

(9.1) 式有许多改进和推广：

记 $\Delta(f)=\left|\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\dfrac{1}{2}[f(a)+f(b)]\right|$，

$$R(f)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}[f(a)+f(b)]+\frac{1}{8}(b-a)[f'(b)-f'(a)],$$

$$D_1=f'(a)-2f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'(b),$$

$$D_2=f'(a)-2\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)+f'(b).$$

(1) 若 $f\in C^2[a,b]$，$|f''(x)|\leqslant M$，$x\in[a,b]$，则

① $|R(f)|\leqslant\dfrac{M}{24}(b-a)^2-\dfrac{|D_1|^2}{24M^2(b-a)}$；

② $|R(f)|\leqslant\dfrac{M}{24}(b-a)^2-\dfrac{(b-a)D_2^2}{8[M(b-a)+f'(a)-f'(b)]}$；

③ $$-\frac{M}{24}(b-a)^2+\frac{M}{3(b-a)}(C_1^3+C_2^3)\leqslant R(f)$$
$$\leqslant\frac{M}{24}(b-a)^2-\frac{M}{3(b-a)}\left\{\left(\frac{b-a}{2}-C_1\right)^3+\left(\frac{b-a}{2}-C_2\right)^3\right\}.$$

式中 $C_1=\dfrac{1}{2M}\left[f'\left(\dfrac{a+b}{2}\right)-f'(a)\right]+\dfrac{1}{4}(b-a)$，

$$C_2=\frac{1}{2M}\left[f'(b)-f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]+\frac{1}{4}(b-a).$$

([399]19(7)(2006),665 ~ 668)

(2) 设 $m\leqslant f'(x)\leqslant M$，$x\in[a,b]$，记 $S=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，则

$$\Delta(f)\leqslant\frac{(b-a)}{2(M-m)}(S-m)(M-s)\leqslant\frac{1}{8}(M-m)(b-a).$$

([394]32(1996),95 ~ 99.)2003 年，刘证将它推广到加权形式.([330]35(2004),227 ~ 234)

(3)　设导数 f' 在$[a,b]$上可积，$|f'|^q$ 是$[a,b]$上的凹函数，$q>1$，则

$$\Delta(f)\leqslant\frac{b-a}{4}\left(\frac{q-1}{2q-1}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left\{\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|+\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|\right\}.$$

([412]193(2007),26 ~ 35)

(4)　设 $\|f'\|_\infty=\sup\{|f'(x)|:x\in(a,b)\}<\infty$,权函数 $\omega\in L[a,b]$，$\exists c>0$，$\lambda\geqslant 1$,使得 $0<c\leqslant\omega(x)\leqslant\lambda c.\ x\in[a,b]$. 令 $q=\dfrac{|f(b)-f(a)|}{(b-a)\|f'\|_\infty}$,则

$$\left|\frac{1}{\int_a^b\omega(x)\mathrm{d}x}\int_a^b f(x)\omega(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}[f(a)+f(b)]\right|$$

$$\leqslant\left(\frac{b-a}{2}\right)\cdot\frac{(\lambda+q)(1-q^2)+2(\lambda-1)q}{2\lambda(1+q)-(\lambda-1)(1+q^2)}\|f'\|_\infty.\tag{9.2}$$

([331]1976,544 ~ 576:18 ~ 24)

(5)　设 $f\in\mathrm{Lip}1$. 即 $|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|$,$x,y\in[a,b]$,则

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f-f(a)\right|\leqslant\frac{1}{2}(b-a).$$

(6)　设 $\|f\|_\infty=\sup\{|f(x)|:x\in[a,b]\}$，$\|f\|_p=\left(\int_a^b|f|^p\right)^{1/p}$.

①　若 $\|f^{(n)}\|_\infty<\infty$,$f^{(k)}(a)=f^{(k)}(b)=0$,$k=1,\cdots,n-1$. 则

$$\Delta(f)\leqslant\frac{(b-a)^n}{(n+1)!}\left\{x_0^n-\frac{q}{2}[1+n(2x_0-1)]\right\}\|f^{(n)}\|_\infty,\tag{9.3}$$

式中 $q=\dfrac{n!}{(b-a)^n}[f(b)-f(a)]\dfrac{1}{\|f^{(n)}\|_\infty}$. x_0 是方程 $x^n-(1-x)^n=q$ 的实根.

②　若 $f'\in\mathrm{Lip}_M1$. 即 $|f'(x)-f'(y)|\leqslant M|x-y|$,$x,y\in[a,b]$，$f'(a)=f'(b)=0$,则

$$\Delta(f)\leqslant\frac{M}{2}(b-a)^2\left[\frac{1}{12}-\left(\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)^2M}\right)^2\right].\tag{9.4}$$

((9.3),(9.4)式及更一般的结果见[331]1976,544 ~ 576:166 ~ 170)

③　**Hadamard 型不等式**:若 $f\in\mathrm{Lip}_M1$,则

$$\Delta(f)\leqslant\frac{M(b-a)}{3};\qquad\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\leqslant\frac{M}{4}(b-a).$$

(Dragomir,S. S. 等[301]2000,245(2):489 ~ 501)

④　**梯形不等式**:设 f 在$[a,b]$上递增,则

$$\Delta(f)\leqslant 1/2[f(b)-f(a)].\tag{9.5}$$

式中 1/2 是最佳常数. 2000 年,Cerone,P. 等推广了梯形不等式:设 $f\in BV[a,b]$,则

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f-\frac{f(a)(x-a)+f(b)(b-x)}{b-a}\right|\leqslant\left(\frac{1}{2}+\frac{|x-(a+b)/2|}{b-a}\right)V_a^b(f).$$

(Turkish J. Math. 2000,24(2):147 ~ 163，此外，另见 Wang Song,Math. Comput Modelling 2000,31(6 ~ 7):61 ~ 70)

⑤　设 $f^{(n)}\in L^p[a,b]$,$f^{(k)}(a)=f^{(k)}(b)=0$,$k=1,2,\cdots,n-1$,$1\leqslant p\leqslant\infty$,$1/p+1/q=1$,则

$$\Delta(f) \leqslant \frac{R(n,p)}{n!} \| f^{(n)} \|_p. \tag{9.6}$$

式中 $R(n,p) = \min_{P_{n-2}} \left\{ \frac{\| (b-t)^n - (a-t)^n - P_{n-2}(t) \|_q}{2(b-a)} \right\}$，$P_n$ 是 n 次代数多项式.

特别 $R(1,p) = \frac{(b-a)^{1/q}}{2(1+q)^{1/q}}$，$R(1,1) = \frac{1}{2}$，$R(2,p) \leqslant \frac{(b-a)^{1+1/q}}{4(2q+1)^{1/q}}$，…，(Fink. A. M. [21]473)

⑥　若 $f'' \in L^\infty[a,b]$，则　$\Delta(f) \leqslant \frac{1}{12}(b-a)^2 \| f'' \|_\infty$；

若 $f'' \in L^p[a,b]$，$p > 1$，$1/p + 1/q = 1$，则

$$\Delta(f) \leqslant \frac{1}{2}[B(q+1,q+1)]^{1/q}(b-a)^{1+\frac{1}{q}} \| f'' \|_p;$$

若 $f'' \in L^1[a,b]$，则　$\Delta(f) \leqslant (1/8)(b-a) \| f'' \|_1$.

(式中 $B(r,s)$ 为 Beta 函数，见 Dragomir. S. S. 等[388]2000，31：475 ～ 494)

(7)　记 $G(f) = \left| \frac{1}{b-a}\int_a^b f - \frac{1}{2}[f(a)+f(b)] + \frac{(b-a)}{12}[f'(b) - f'(a)] \right|$.

$M = \sup\{f''(x) : x \in [a,b]\} < \infty$；$m = \inf\{f''(x) : x \in [a,b]\} > -\infty$；

$\Delta(f') = \frac{f'(b) - f'(a)}{b-a}$. $\| f \|_\infty = \sup\{ | f(x) | : x \in [a,b]\}$.

$\| f \|_p = \left(\int_a^b | f |^p \right)^{1/p}$. 则

①　$G(f) \leqslant \frac{1}{24\sqrt{5}}(M-m)(b-a)^2$；

②　若 $f'' \in L^\infty[a,b]$，则　$G(f) \leqslant \frac{(b-a)^2}{12} \| f'' - \Delta(f') \|_\infty$；

③　若 $f'' \in L^\infty[a,b]$，$1 < p < \infty$，$1/p + 1/q = 1$，则
$G(f) \leqslant (1/2)[B(q+1,q+1)]^{1/q}(b-a)^{1+1/q} \| f'' - \Delta(f') \|_p$；

④　若 $f'' \in L^\infty[a,b]$，则
$G(f) \leqslant (1/8)(b-a) \| f'' - \Delta(f') \|_1$.

(证明、推广及其应用见 Barnett，N. S. 等[330]2002，33(2)：119 ～ 128)

(8)　**祁锋不等式：** 设 $Q = [a_1,b_1] \times \cdots \times [a_n,b_n]$ 为 n 维方体. $\alpha = (\alpha_1,\cdots\alpha_n)$ 为 n 重指标，即 α_k 为非负整数，$\sum_{k=1}^n \alpha_k = | \alpha |$. $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$. 记 $C(\alpha) = \prod_{k=1}^n \frac{(b_k - a_k)^{\alpha_k+1}}{(\alpha_k+1)!}$.

$$(Tf)(x) = \prod_{k=1}^n \left[\frac{(b_k - a_k)^{\alpha_k+1}}{(\alpha_k+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)^{\alpha_k} \right] f(x).$$

$$S_m = \sum_{k=0}^m \sum_{|\alpha|=k} (Tf)(a) t^{n+k} - \sum_{k=0}^m (-1)^k \sum_{|\alpha|=k} (Tf)(b) g(t).$$

式中 $g(t) = \prod_{k=1}^n \{1 - (1-t)^{\alpha_k+1}\} - 1$，$t \in [0,1]$.

若 $f \in C^{m+1}(Q)$，$C_1(\alpha) \leqslant (D^\alpha f)(x) \leqslant C_2(\alpha)$，$x \in Q$.

$| \alpha | = m+1$，$C_1(\alpha)$，$C_2(\alpha)$ 是与 m，α 有关的常数. 若 n 为偶数，则

$$\sum_{|\alpha|=m+1} C(\alpha)C_1(\alpha)t^{m+n+1} + \sum_{|\alpha|=m+1} C(\alpha)C_2(\alpha)g(t) \leqslant \int_Q f - S_m$$
$$\leqslant \sum_{|\alpha|=m+1} C(\alpha)C_2(\alpha)t^{m+n+1} + \sum_{|\alpha|=m+1} C(\alpha)C_1(\alpha)g(t).$$

若 n 为奇数，则

$$\sum_{|\alpha|=m+1} C(\alpha)C_1(\alpha)[t^{m+n+1} + g(t)] \leqslant \int_Q f - S_m \leqslant \sum_{|\alpha|=m+1} C(\alpha)C_2(\alpha)[t^{m+n+1} + g(t)].$$

([391]1999,84(1～2):19～26，作者还将上述结果推广到加权积分$\int_Q f\omega$ 的估计，见[301]2001,253:381～388)

10. 设在区间$[a,b]$上，$|f''(x)|\leqslant M$，则

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - \frac{1}{2}[f(a)+f(b)] + \frac{1}{8}(1+Q^2)(b-a)[f'(b)-f'(a)]\right|$$
$$\leqslant \frac{M(b-a)^2}{24}(1-3Q^2).$$

式中 $$Q^2 = \frac{\left[f'(a)+f'(b)-2\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)\right]^2}{M^2(b-a)^2-[f'(b)-f'(a)]^2}.$$ ([8]163～164)

11. **Atkinson 不等式**：设 $f^{(3)} \in AC[a,b]$，则

$$-c_1 \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f - \frac{1}{2}[f(a)+f(b)] + \frac{1}{12}(b-a)[f'(b)-f'(a)] \leqslant c_2.$$

式中 $c_1 = \frac{1}{384}(b-a)^3\int_a^b \max\{-f^{(4)}(x),0\}\mathrm{d}x$，$c_2 = \frac{1}{384}(b-a)^3\int_a^b \max\{f^{(4)}(x),0\}\mathrm{d}x$.
类似地，有

$$-c_2 \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f - f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{24}(b-a)[f'(b)-f'(a)] \leqslant c_1.$$

([8]93～96，该书还给出更一般的情形)

12. (1) **Mahajani 不等式**：　设 $f' \in C[a,b]$ 且 $f(a)=0$，则

$$\left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{(x-a)^2}{2}\|f'\|_c \quad x\in[a,b].$$

(2) 设在区间$[a,b]$上，$|f'(x)|\leqslant M$，且$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$，则对于 $a\leqslant x\leqslant b$，有

$$\left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{M(b-a)^2}{8}. \tag{12.1}$$

若加上条件 $f(a)=f(b)=0$，则

$$\left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{M(b-a)^2}{16}. \tag{12.2}$$

(Mat. Sudent,1938,6:125～128)

(3) 设函数 f 在区间$[a,b]$上有 $2n$ 阶连续导数，且 $f^{(k)}(a)=f^{(k)}(b)=0$，$k=0,1,2,\cdots,n-1$，则

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{(n!)^2(b-a)^{2n+1}}{(2n)!(2n+1)!}\|f^{(2n)}\|_c. \tag{12.3}$$

提示：令 $g(x)=(x-a)^n(b-x)^n$，对于积分$\int_a^b f^{(2n)}(x)g(x)\mathrm{d}x$，逐次作分部积分.

(4)　设双参数多项式 $P_n^{(m,k)}$　$(0\leqslant m\leqslant k<n)$ 定义为

$$P_n^{(m,k)}(x;a,b)=\frac{(-1)^{n-k}(n-m)!}{m!(k-m)!(n-k-1)!}\sum_{j=0}^{k-m}\frac{(b-a)^{m-n+j}}{n-m-j}\binom{k-m}{j}(x-a)^m$$

$\times(x-b)^{n-m-j}$，若 $|f^{(n)}(x)|\leqslant M(x\in[a,b])$，$\int_a^b f(x)dx=0$，则

$$\left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-S_{n,k}(x)\right|\leqslant\frac{M}{(n+1)!}(x-a)^k(b-x)^{n+1-k}\leqslant\frac{k^k(n-k+1)^{n-k+1}}{(n+1)^{n+1}(n+1)!}M(b-a)^{n+1}.\tag{12.4}$$

式中

$$S_{n,k}(x)=\sum_{m=1}^{k-1}P_n^{(m,k-1)}(x;a,b)f^{(m-1)}(a)+\sum_{m=1}^{n-k}P_n^{(m,n-k)}(x;b,a)f^{(m-1)}(b).\tag{12.5}$$

(12.5) 式中当 $k=1$ 时，第一个和式为 0，$k=n$ 时，第二个和式为 0.

若加上条件 $f^{(j)}(a)=f^{(j)}(b)=0,j=0,1,\cdots,n-1$，则

$$\left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{M(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}n(n+1)!}.\tag{12.6}$$

(证明及其各种特例见[21]474 ~ 477)

(5)　设 $f^{(n-1)}$ 绝对连续，$f^{(n)}\in L^p[a,b]$. $1\leqslant p\leqslant\infty,1/p+1/q=1$，

$f^{(k)}(a)=f^{(k)}(b)=0,k=0,1,\cdots,n-1$. 则

$$\left|\frac{1}{n}f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right|\leqslant\frac{M(n,p,x)}{n!}\|f^{(n)}\|_p.\tag{12.7}$$

式中

$$M(n,p,x)=\min_{P_{n-1}}\left\{\frac{\|(x-t)^{n-1}K(t,x)-P_{n-1}(t)\|_q}{b-a}\right\},$$

$$K(t,x)=\begin{cases}t-a,a\leqslant t\leqslant x\leqslant b,\\ t-b,a\leqslant x<t\leqslant b.\end{cases}$$

(Fink, A. M., [21]477 ~ 480)

(6)　设 $f'\in L^p[a,b],1\leqslant p\leqslant\infty,\int_a^b f=0$，则 $\forall x\in[a,b]$，成立

$$\left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{(b-x)(x-a)}{(b-a)^{1/p}}\frac{\|f'\|_p}{(1+q)^{1/q}},1<p\leqslant\infty,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1;$$

$$\left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{(b-x)(x-a)}{(b-a)}\|f'\|_1.$$ ([21]480 ~ 483)

(7)　设 $f'\in L[a,b]$，则

$$\|f\|_\infty\leqslant\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right|+\int_a^b|f'|$$

特别当 $f(a)=0$ 时，$|f(x)|\leqslant\int_a^x|f'(t)|\mathrm{d}t,x\in[a,b]$.

([317]1988,38:290)

(8)　[MCU]，设 $f'\in L[0,1]$，则

$$\int_0^1|f|\leqslant\max\left\{\int_0^1|f'|,\left|\int_0^1 f\right|\right\};\ \left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|\leqslant\int_0^1|f|+\frac{1}{2}\int_0^1|f'|.$$

([63]26. [375]1985,1(1):46)

(9) [MCU]. 设 $f' \in L[a,b]$，且 $f(a)=0$，则

① $\|f'\|_2 \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{b-a}}\|f\|_\infty$；

② $\int_a^b f^2 \leqslant \dfrac{1}{2}\left\{(b-a)^2\int_a^b (f')^2 - \int_a^b (f')^2(x-a)^2\mathrm{d}x\right\}$.

提示：用 Cauchy 不等式.

(10) [MCU]. 设 f 是 R^1 上正的连续函数，$\forall t \in R^1$，$F(t)=\int_{R^1} e^{-|t-x|}f(x)\mathrm{d}x \leqslant 1$，则 $\forall a,b,a<b$，成立

$$\int_a^b f \leqslant \frac{1}{2}(b-a)+1. \quad ([63]26,107)$$

(11) 设 f 在 $[0,a]$ 上可积，$f(x)+f(a-x)>0$，则 $\int_0^a f>0$.

13. **Lyapunov 不等式**：设 p 是 $[a,b]$ 上实值连续函数，若微分方程

$$y''+p(x)y=0 \tag{13.1}$$

有非平凡解 y，且 y 在 $[a,b]$ 的两点为零，1907 年，Lyapunov, A. M. 证明，p 必满足不等式：

$$(b-a)\int_a^b |p(x)|\mathrm{d}x>4. \tag{13.2}$$

1967 年，Fink, A. M. 进一步证明当 $p(x)\geqslant 0$ 时，成立

$$\frac{9}{8}\lambda_0^2 \leqslant (b-a)\int_a^b p(x)\mathrm{d}x \leqslant \pi^2, \tag{13.3}$$

式中 $\frac{9}{8}\lambda_0^2=9.478132\cdots$ 与 π^2 都是最佳上下界. (13.2) 可写成以下形式：设二阶导数 f'' 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=f(1)=0$，则

$$\int_0^1 \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x>4. \tag{13.4}$$

其中 4 是最佳下界.

证 由题设，f 必在区间 $[0,1]$ 的内点 x_0 处取得最大值，令 $y_0=f(x_0)$，则 $y_0>0$ 且

$$\int_0^1 \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x>\frac{1}{y_0}\int_0^1 |f''(x)|\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{y_0}\left|\int_0^1 f''(x)\mathrm{d}x\right|=\frac{|f'(1)-f'(0)|}{y_0}.$$

注意并不能由此直接得出 $|f'(1)-f'(0)|>4y_0$，但是，由微分中值定理，存在 ξ_1，ξ_2，使得

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=\frac{y_0}{x_0} \quad (0<\xi_1<x_0);$$

$$f'(\xi_2)=\frac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0}=\frac{-y_0}{1-x_0} \quad (x_0<\xi_2<1).$$

于是，

$$\int_0^1 \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x>\int_{\xi_1}^{\xi_2}\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{y_0}\left|\int_{\xi_1}^{\xi_2} f''(x)\mathrm{d}x\right|=y_0^{-1}|f'(\xi_2)-f'(\xi_1)|$$

$$=y_0^{-1}\left|\frac{-y_0}{1-x_0}-\frac{y_0}{x_0}\right|=\frac{1}{x_0(1-x_0)}>4,$$

其中用到不等式：$x(1-x)\leqslant 1/4$，$(0<x<1)$.

注 这个不等式在常微分方程中有重要应用.

(1) 若(13.4)中积分限由[0,1]改为[a,b],则

$$\int_a^b \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right| dx > \frac{4}{b-a}.$$

(2) [MCU].设 $f' \in L[0,1]$ 且 $f(1)-f(0)=1$,则

$$\int_0^1 (f')^2 \geqslant 1;$$

(3) 若 $f' \in C[0,1]$ 且 $f(0)=0, f(1)=1$,则

$$\int_0^1 |f'-f| \geqslant \frac{1}{e}.$$

式中 $1/e$ 是最大下界.(提示:利用 $f'-f=(fe^{-x})'e^x$.)

(4) 若 $y(t)$ 是微分方程 $y''+g(t)y'+f(t)y=0, y(0)=y(h)=0$ 的非平凡解,则 Opial 证明:

$$\pi^2 \leqslant \pi \| g \|_\infty h + \| f \|_\infty h^2. \tag{13.5}$$

说明 Lyapunov 不等式的改进与推广与微分方程的解密切相关.[21]专门用了一章(第6章)讨论这些问题,引用到1990年为止所发表的文献达84篇.

14. **Gronwall 不等式**:1919年,Gronwall 在研究微分方程解关于参数可微时证明了以下不等式:

设 a,b 是非负常数,连续函数 u 在$[t_0,t_1]$上满足不等式:

$$u(t) \leqslant a + b\int_{t_0}^t u(s)ds. \tag{14.1}$$

则 $$u(t) \leqslant a\exp\{b(t-t_0)\}, t\in[t_0,t_1]. \tag{14.2}$$

([311]1919,20:292 ~ 296.)1943年,Bellman 给出它的推广:

设 $u(t),b(t)$ 都是$[t_0,t_1]$上非负连续函数,并满足

$$u(t) \leqslant a + \int_{t_0}^t b(s)u(s)ds. \tag{14.3}$$

则 $$u(t) \leqslant a\exp\left\{\int_{t_0}^t b(s)ds\right\}, t \geqslant t_0, \tag{14.4}$$

证 从(14.3)式,得

$$\frac{u(t)b(t)}{a+\int_{t_0}^t b(s)u(s)ds} \leqslant b(t).$$

两边从 t_0 到 t 积分,得

$$\ln\left(a+\int_{t_0}^t b(s)u(s)ds\right) - \ln a \leqslant \int_{t_0}^t b(t)dt. \tag{14.5}$$

从(14.3)与(14.5)式即得 $u(t) \leqslant a + \int_{t_0}^t b(s)u(s)ds \leqslant a\exp\int_{t_0}^t b(t)dt$.

上述不等式对于 Henstock 积分也成立.([301]1987,127:370 ~ 374)

因此,这类不等式有时也称为 Bellman-Gronwall 不等式或 Gronwall-Bellman 不等式,由于这类不等式在常微分方程解的存在性、唯一性、稳定性的研究及方程解的估计中经常用到.因此,对它的各种改进和推广,一直是不等式研究的热点之一.[21]就用了三章的篇幅(第12 ~ 14章),从一元到多元,从 R^n 到各种抽象空间概述了直到1990年的部分研

究成果，引用的文献达393篇，但收录的文献仍远非完整，1990年以后又有大批新文献，下面仅扼要叙述最基本而常用的若干结果.

(1) 2000年，Pachpatte证明：设 $u(t),a(t),b(t)$ 均为 $[0,\infty)$ 上非负连续函数，而且 $a(t)$ 递减，若

$$u(t)\leqslant a(t)+\int_t^{\infty}b(s)u(s)ds\quad(t\geqslant 0),\tag{14.6}$$

则
$$u(t)\leqslant a(t)\exp\left\{\int_t^{\infty}b(s)\mathrm{d}s\right\},t\geqslant 0.\tag{14.7}$$

证 不妨设 $a(t)>0$，令 $z(t)=1+\int_t^{\infty}b(s)\dfrac{u(s)}{a(s)}\mathrm{d}s$. 则从(14.6)式知 $\dfrac{u(t)}{a(t)}\leqslant z(t)$，且 $\lim\limits_{t\to\infty}z(t)=1$. 从而 $z'(t)=-b(t)\dfrac{u(t)}{a(t)}\geqslant -b(t)z(t)\Rightarrow z(t)\leqslant\exp\left\{\int_t^{\infty}b(s)\mathrm{d}s\right\}$，于是(14.7)式得证.

将它用于下述微分方程终值问题($P-P_{\infty}$ 问题)解的性质研究中：

$$\begin{cases}u'(t)=f(t,u(t))+p(t)\\ u(\infty)=u_{\infty}\end{cases}.\tag{14.8}$$

式中设 $f:R_+^1\times R^1\to R^1,p:R_+^1\to R^1$ 均连续，$u_{\infty}\in R^1$. $R_+^1=[0,\infty)$，$a(t),b(t)$ 在 R_+^1 上非负连续 $a(t)$ 递减，并满足：

$$\begin{cases}|f(t,u)|\leqslant b(t)|u(t)|,\\ \left|u_{\infty}-\int_t^{\infty}p(s)\mathrm{d}s\right|\leqslant a(t).\end{cases}\tag{14.9}$$

若 $u(t)$ 是(14.8)式的解，则

$$|u(t)|\leqslant a(t)\exp\left\{\int_t^{\infty}b(s)\mathrm{d}s\right\}.\tag{14.10}$$

证 若 $u(t)$ 为(14.8)式的解，则 $u(t)$ 可写成([46]80)

$$u(t)=u_{\infty}-\int_t^{\infty}[f(s,u(s))+p(s)]\mathrm{d}s,t\geqslant 0.$$

从而 $|u(t)|\leqslant a(t)+\int_t^{\infty}b(s)|u(t)|\mathrm{d}s$. 于是由(14.7)式即可得证.

([330]2002,3(3):199～208)

(2) 设 $u(t),b(t)$ 在 (α,β) 上连续，$b(t)$ 非负.

若 $u(t)\leqslant u(t_0)+\int_{t_0}^{t}b(s)u(s)\mathrm{d}s,t_0,t\in(\alpha,\beta)$，

则 $\forall t\geqslant t_0$，成立：

$$u(t_0)\exp\left\{-\int_{t_0}^{t}b(s)\mathrm{d}s\right\}\leqslant u(t)\leqslant u(t_0)\exp\left\{\int_{t_0}^{t}b(s)\mathrm{d}s\right\}.\tag{14.11}$$

(Bellman. R. [21]355)

(3) **Beesack 不等式**：设 $u(t),b(t)$ 在 $D=[\alpha,\beta]$ 上连续，$a(t),q(t)\in L[\alpha,\beta]$，$b(t),q(t)$ 非负，若

$$u(t)\leqslant a(t)+q(t)\int_{t_0}^{t}b(s)u(s)\mathrm{d}s,\quad t\in D.\tag{14.12}$$

则

$$u(t)\leqslant a(t)+q(t)\int_{t_0}^{t}a(s)b(s)\exp\left\{\int_s^t q(r)b(r)\mathrm{d}r\right\}\mathrm{d}s,\quad t\in D.\tag{14.13}$$

若(14.12) 式中不等号反向，则(14.13) 式中不等号也反向.

若上述不等式中，将$\int_{t_0}^t$，$\int_s^t$ 分别换成$\int_t^\beta$，$\int_t^s$，结论仍成立.(见[21]356 ~ 357)

(4)　设 $u(t)$，$a(t)$ 在 $D=[\alpha,\beta]$ 上连续，$b(t,s)$ 在 $D\times D$ 上非负连续，若 $\forall t_0, t\in D$.

$$u(t)\leqslant a(t)+\int_{t_0}^t b(t,s)u(s)\mathrm{d}s, \tag{14.14}$$

则

$$u(t)\leqslant a(t)+\int_{t_0}^t B(t,s)a(s)\mathrm{d}s, \tag{14.15}$$

式中 $B(t,s)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k(t,s)$ 是 $b(t,s)$ 的预解核，而 $b_k(t,s)$ 是 $b(t,s)$ 的迭代核.

(Chu,S. 等[308]1967,18:439 ~ 440)

(5)　1987 年，Zahrout，A. A，等证明了 **GBR 型积分不等式(Gronwall-Bellman-Reid 型积分不等式)**：设 f,g,u,v 在 $D=[0,\infty)$ 上连续，若存在非负的常数 c,p　$(0\leqslant p<1)$，使得 $u(t)\leqslant c+\int_0^t v(s)\left[u(s)+\int_0^s v(r)\left\{\int_0^r[f(t)u(t)+g(t)u^p(t)]\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}s, t\in D$，则

$$u(t)\leqslant c+\int_0^t v(s)\Big(c+\int_0^s v(r)\exp\Big(\int_0^r[v(t)+f(t)]\mathrm{d}t\Big)$$
$$\times\left\{c^{1-p}+(1-p)\int_0^r g(t)\exp\Big[-(1-p)\int_0^t(v(y)+f(y))\mathrm{d}y\Big]\mathrm{d}t\right\}^{1/(1-p)}\mathrm{d}r\Big)\mathrm{d}s.$$

([395]. 1987,27(2):153 ~ 161)

(6)　设 $u(t)$，$g(t)$ 是 $(0,\infty)$ 上非负的连续函数，$\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ 递增到 ∞，$t_n\geqslant 0$，若 $u(t)\leqslant c+\int_{t_0}^t g(s)u(s)\mathrm{d}s+\sum_{t_0<t_k<t}\beta_k u(t_k)$，式中 $t\geqslant t_0$，c，β_k 为非负的常数，则 $\forall t\geqslant t_0$，有

$$u(t)\leqslant c\prod_{t_0<t_k<t}(1+\beta_k)\exp\Big(\int_{t_0}^t g(s)\mathrm{d}s\Big).$$

(MR90k:26030)

(7)　1989 年，毛学荣证明：设 f,g,h_j　$(1\leqslant j\leqslant 4)$　当 $t\geqslant 0$ 时是非负的连续函数，h_j 有界，使得对于所有 $t\geqslant 0$，有

$$f(t)\leqslant c_1+\int_0^t h_1(s)f(s)\mathrm{d}s+\int_0^t h_2(s)g(s)\exp(\mu s)\mathrm{d}s,$$

$$g(t)\leqslant c_2+\int_0^t h_3(s)f(s)\exp(-\mu s)\mathrm{d}s+\int_0^t h_4(s)g(s)\mathrm{d}s,$$

式中 c_1,c_2,μ 为非负常数，则存在常数 β_k，M_k，使得对于所有非负的 t，都有

$$f(t)\leqslant M_1\exp(\beta_1 t),\ g(t)\leqslant M_2\exp(\beta_2 t).$$

作者还给出了离散类似.(Chin. J. Math. 1989,17(1):295 ~ 305)

(8)　**Bihari-Lasalle 不等式(B-L 不等式)**：设 $u(t)$，$v(t)$ 是在 $D=[\alpha,\beta]$ 上正的连续函数，a，b 为非负常数，$g(z)$ 在$[0,\infty)$ 上为正的递增函数，若 $\forall t_0, t\in D$，成立

$$u(t)\leqslant a+b\int_{t_0}^t v(s)g(u(s))\mathrm{d}s. \tag{14.16}$$

则

$$u(t) \leqslant G^{-1}\left(G(a) + b\int_{t_0}^{t} v(s)\mathrm{d}s\right), \tag{14.17}$$

式中 $G(u) = \int_{u_0}^{u} \frac{\mathrm{d}t}{g(t)}, \quad (u > u_0 > 0).$

(与此相关的 Langenhop 不等式见[2]136. 原文见[391]1956,7:81 ~ 94;[311]1949,50:722 ~ 730,或见[21]363,将积分限$[t_0,t]$ 换成$[\varphi(t_0),\varphi(t)]$,见[301]2000,252:389 ~ 401)

(9) Györi 推广了上述 B-L 不等式:设 $u(t),v(t)$ 在$[t_0,\infty)$ 上非负连续,$a(t),b(t)$,$g(u)$ 均为可微函数,且 $a(t) \geqslant 0, g > 0$ 且递增,$b(t) \geqslant 0$ 且递减,若 $\forall t \geqslant t_0, u(t) \leqslant a(t) + b(t)\int_{t_0}^{t} v(s)g(u(s))\mathrm{d}s$,和所有非负连续函数 φ,成立

$$a'(t)\left\{\frac{1}{g(\varphi(t))} - 1\right\} \leqslant 0, t \in (t_0,\infty), \text{则}$$

$$u(t) \leqslant G^{-1}\left\{G(a(t_0)) + \int_{t_0}^{t}[b(s)v(s) + a'(s)]\mathrm{d}s\right\}, \tag{14.18}$$

式中 $G(u) = \int_{u_0}^{u} \frac{\mathrm{d}s}{g(s)}. u > u_0 > 0.$ (14.19)

([389]1971,6:137 ~ 145,或[21]364)

(10) 设 u,f,g 在 R_+^1 上非负连续,$c_1,c_2 \geqslant 0$,若 $\forall t \geqslant 0$,

$$u(t) \leqslant \left(c_1 + \int_0^t f(s)u(s)\mathrm{d}s\right)\left(c_2 + \int_0^t g(s)u(s)\mathrm{d}s\right).$$

且 $c_1c_2\int_0^t F(s)G(s)\mathrm{d}s < 1$,则 $\forall t \geqslant 0$,成立

$$u(t) \leqslant \frac{c_1c_2G(t)}{1 - c_1c_2\int_0^t F(s)G(s)\mathrm{d}s},$$

式中

$$F(t) = g(t)\int_0^t f(s)\mathrm{d}s + f(t)\int_0^t g(s)\mathrm{d}s, \quad G(t) = \exp\left(\int_0^t [c_1g(s) + c_2f(s)]\mathrm{d}s\right).$$

(Pachpatte,B. G. ,[301]1995,195(3):638 ~ 644)

(11) 设 $u(t),b(t)$ 在 $D = [\alpha,\beta]$ 上非负连续,$g(u)$ 是$(0,\infty)$ 上正的递增函数,若 $\forall t \in (\alpha,x), u(t) \leqslant u(x) + \int_t^x b(s)g(u(s))ds$,则 $\forall x \in (\alpha,\beta)$,

$$u(x) \geqslant G^{-1}\left\{G(u(\alpha)) - \int_\alpha^x b(s)\mathrm{d}s\right\}, \tag{14.20}$$

式中 $G(u) = \int_{u_0}^{u} \frac{\mathrm{d}s}{g(s)}, \quad u > u_0 > 0.$

(Langenhop,C. E. ,[308]1960,11:795 ~ 799)

(12) 设 $u(t),a(t),b(t)$ 在 $R_+ = (0,\infty)$ 上非负连续. $a(t)$ 递减,$L(t,u)$ 在 R_+^2 上连续且满足:$0 \leqslant L(t,u) - L(t,v) \leqslant M(t,v)(u - v),\ u \geqslant v \geqslant 0$. 式中 $M(t,v)$ 为 R_+^2 上非负连续函数,若 $\forall t \geqslant 0$,成立

$$u(t) \leqslant a(t) + \int_t^\infty b(s)u(s)\mathrm{d}s + \int_t^\infty L(s,u(s))\mathrm{d}s.$$

则

$$u(t) \leqslant B(t)\left(a(t) + A(t)\exp\left\{\int_t^\infty M[s,B(s)a(s)]B(s)\mathrm{d}s\right\}\right), \tag{14.21}$$

式中　$B(t) = \exp\left\{\int_t^\infty b(s)\mathrm{d}s\right\}, A(t) = \int_t^\infty L[s,B(s)a(s)]\mathrm{d}s, t \geqslant 0.$

(见 Pachpatte,[330]2002,33(3):200 ~ 201)

将$\int_t^\infty$ 换成$\int_{t_0}^t$,类似的结果见[21]368 ~ 391.

(13)　**Wendroff 不等式**:设 $a(x),b(y) > 0, a'(x),b'(y) \geqslant 0, u(x,y),v(x,y) \geqslant 0$,若

$$u(x,y) \leqslant a(x) + b(y) + \int_0^x\int_0^y v(t,s)u(t,s)\mathrm{d}t\mathrm{d}s,\qquad 则$$

$$u(x,y) \leqslant \frac{[a(0)+b(y)][a(x)+b(0)]}{a(0)+b(0)}\exp\left\{\int_0^x\int_0^y v(t,s)\mathrm{d}t\mathrm{d}s\right\}. \tag{14.22}$$

([2]154 ~ 155 和[301]1993,178:438 ~ 449)

(14)　1971 年,Nurimov,T. 推广了上述(14.22)式:设 $u(x,y),v(x,y),a(x,y),b(x,y)$ 在 $D=[0,x_0]\times[0,y_0]$ 上非负连续,若 $\forall (x,y)\in D$, $u(x,y) \leqslant a(x,y) + b(x,y)\int_0^x\int_0^y v(t,s)u(t,s)\mathrm{d}t\mathrm{d}s$, 则

$$u(x,y) \leqslant a(x,y) + b(x,y)\int_0^x\int_0^y \exp\left\{\int_t^x\int_s^y v(r,z)b(r,z)\mathrm{d}r\mathrm{d}z\right\}a(t,s)v(t,s)\mathrm{d}t\mathrm{d}s. \tag{14.23}$$

([21]402 ~ 403)

(15)　若 $u(x,y) \leqslant c + a\int_0^x u(s,y)\mathrm{d}s + b\int_0^y u(x,s)\mathrm{d}s$,则

$$u(x,y) \leqslant c\exp(ax + by + abxy).$$

(16)　设 $u(x,y) \leqslant a(x) + b(y) + c_1\int_0^x u(s,y)\mathrm{d}s + c_2\int_0^y u(x,s)\mathrm{d}s$,则

$$u(x,y) \leqslant \frac{a(0)+b(0)+\int_0^y b'(t)\exp(-c_2 t)\mathrm{d}t}{a(0)+b(0)}$$
$$\times\left[a(0)+b(0)+\int_0^x a'(t)\exp(-c_1 t)\mathrm{d}t\right]\exp\{c_1 x + c_2 y + c_1 c_2 xy\}.$$

(17)　设 $u(t)$ 是 $D=[\alpha,\beta]$ 上非负连续函数. $a(t,s),b(t,s)$ 在 E 上非负连续,且关于 t 递增,其中 $E = \{(t,s)\in D\times D: \alpha \leqslant s \leqslant t \leqslant \beta\}$. 若

$$u(t) \leqslant c + \int_\alpha^t a(t,s)u(s)\mathrm{d}s + \int_\alpha^\beta b(t,s)u(s)\mathrm{d}s, t\in D, c > 0,$$

且

$$p(t) = \int_\alpha^\beta b(t,s)\exp\left(\int_\alpha^s a(s,r)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s < 1,$$

则

$$u(t) \leqslant \frac{c}{1-p(t)}\exp\left(\int_\alpha^t a(t,s)\mathrm{d}s\right). t\in D.$$

特别当 $a(t,s)=a(s),b(t,s)=b(s)$ 就得到 **Bainov-Simeonov 不等式**.

([330]2002,33(4):353 ～ 358，该文还得出离散类似并应用于非线性 Volterra-Fredholm 积分方程解的性质的研究)

(18)　设 u,a,b 在 R_+^2 上非负连续，$a(x,y)$ 分别关于 x,y 递减，若 $\forall (x,y)\in R_+^2$.

$$u(x,y)\leqslant a(x,y)+\int_x^{\infty}\int_y^{\infty}b(s,t)u(s,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s,\quad \text{则}$$

$$u(x,y)\leqslant a(x,y)\exp\left\{\int_x^{\infty}\int_y^{\infty}b(s,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s\right\}.\tag{14.24}$$

(19)　设 $u(t),a(t),b(t)$ 在 $R_+=(0,\infty)$ 上非负连续，L,M 满足(12) 中的条件，若 $\forall t\geqslant 0$. $u(t)\leqslant a(t)+b(t)\int_t^{\infty}L[s,u(s)]\mathrm{d}s$，　则

$$u(t)\leqslant a(t)+b(t)\left\{\int_t^{\infty}L[s,a(s))]\mathrm{d}s\right\}\exp\left\{\int_t^{\infty}M[s,a(s)]b(s)\mathrm{d}s\right\}.\tag{14.25}$$

(20)　设 $u(t),a(t),b(t)$ 在 R_+^1 上非负连续，$L:R_+^2\to R_+^1$ 连续并满足：

$$0\leqslant L(t,u)-L(t,v)\leqslant M(t,v)g^{-1}(u-v),u\geqslant v\geqslant 0.$$

$M(t,v)$ 在 R_+^2 上非负连续，g 在 R_+^1 上严格递增连续. 且 $g(0)=0$，g^{-1} 为 g 的反函数，且

$$g^{-1}(uv)\leqslant g^{-1}(u)g^{-1}(v),\quad u,v\geqslant 0.$$

若　$u(t)\leqslant a(t)+b(t)g\left(\int_t^{\infty}L[s,u(s)]\mathrm{d}s\right)$，则

$$u(t)\leqslant a(t)+b(t)g\left\{\left(\int_t^{\infty}L(s,a(s))\mathrm{d}s\right)\exp\left[\int_t^{\infty}M(s,a(s))g^{-1}(b(s))\mathrm{d}s\right]\right\}.\tag{14.26}$$

(21)　设 $u(x,y),a(x,y),b(x,y)$ 在 R_+^2 上非负连续. $a(x,y)$ 分别关于 x,y 递减，L: $R_+^3\to R_+^1$ 连续并满足

$$0\leqslant L(x,y,u)-L(x,y,v)\leqslant M(x,y,v)(u-v),\quad u\geqslant v\geqslant 0,$$

$M(x,y,v)$ 为 R_+^3 上连续函数，若 $\forall x,y\geqslant 0$，成立

$$u(x,y)\leqslant a(x,y)+\int_x^{\infty}\int_y^{\infty}b(s,t)u(s,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s+\int_x^{\infty}\int_y^{\infty}L(s,t,u(s,t))\mathrm{d}t\mathrm{d}s,$$

则

$$u(x,y)\leqslant B(x,y)\left\{a(x,y)+F(x,y)\exp\left[\int_x^{\infty}\int_y^{\infty}M(s,t,B(s,t)a(s,t))B(s,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s\right]\right\}.\tag{14.27}$$

式中 $B(x,y)=\exp\left(\int_x^{\infty}\int_y^{\infty}b(s,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s\right)$，　$F(x,y)=\int_x^{\infty}\int_y^{\infty}L[s,t,B(s,t)a(s,t)]\mathrm{d}t\mathrm{d}s$.

(22)　设 $u(x,y),a(x,y),b(x,y)$ 在 R_+^2 上非负连续. L,M 满足(21) 中的条件，若 $\forall x,y\geqslant 0$，$u(x,y)\leqslant a(x,y)+b(x,y)\int_x^{\infty}\int_y^{\infty}L[s,t,u(s,t)]\mathrm{d}t\mathrm{d}s$.　则

$$u(x,y)\leqslant a(x,y)+b(x,y)f(x,y)\exp\left\{\int_x^{\infty}\int_y^{\infty}M[s,t,a(s,t)]b(s,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s\right\},\tag{14.28}$$

式中　$f(x,y)=\int_x^{\infty}\int_y^{\infty}L(s,t,a(s,t))\mathrm{d}t\mathrm{d}s.$

(18) ～ (22) 以及更多的结果及其对终值问题的应用.(见[330]2002.33(3):204 ～ 208)

(23)　1998 年，Oguntuase. J. A. 证明：若 $u(t)\leqslant a(t)+\left(\int_a^t K(t,s)(u(s))^p\mathrm{d}s\right)^{1/p}$，则

$$u(t) \leqslant a(t) + \frac{\left\{\int_a^t v(s)[a(s)]^p b(s)\mathrm{d}s\right\}^{1/p}}{1-[1-v(t)]^{1/p}}, \tag{14.29}$$

式中　$v(t) = \exp\left\{-\int_a^t K(t,s)\mathrm{d}s\right\}, b(t) = K(t,t) + \int_a^t K(t,s)\mathrm{d}s, a \leqslant s \leqslant t \leqslant b. 1 \leqslant p < \infty$. (Zb. Rad. (Kragujevac)1998,20:77 ~ 81)

(24)　设 $f, g', K(t,s), K_t'(t,s)$ 均非负连续，且

$$f^2(t) \leqslant g(t) + \int_0^t K(t,s)f(s)\mathrm{d}s, \quad t > 0,$$

则

$$f(t) \leqslant \sqrt{g(t)} + \frac{1}{2}\int_0^t \left(K(s,s) + \int_0^s K_t'(t,x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}s. \tag{14.30}$$

(证明及进一步的推广见[330]36(2005):167 ~ 178)

(25)　设 f,g,h,G 在 $[a,b]$ 上连续，$g,h \geqslant 0$，并且

$$G(x) \leqslant f(x) + \int_a^x g(t)G(t)\mathrm{d}t + \int_a^b h(x)G(x)\mathrm{d}x.$$

若 $p = \int_a^b h(x)\exp\left\{\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}x < 1$，则

$$G(x) \leqslant f(x) + \frac{1}{1-p}\int_a^b h(t)\{f(t)+K(t)\}\mathrm{d}t \exp\left(\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\right) + K(x),$$

式中 $K(x) = \int_a^x g(t)f(t)\exp\left(\int_t^x g(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t, \quad x \in [a,b]$.

([330]36(2005):359 ~ 363;37(2006):1 ~ 9,261 ~ 271)

(26)　设 $f,g,h,u:[a,b] \to R^t$ 均为连续函数. 若

$$u(x) \leqslant f(x) + g(x)\int_a^b h(t)u(t)\mathrm{d}t, \quad x \in [a,b],$$

且 $p = \int_a^b h(x)g(x)\mathrm{d}x < 1$，则

$$u(x) \leqslant f(x) + g(x)\left\{\frac{1}{1-p}\int_a^b f(t)h(t)\mathrm{d}t\right\}. \quad ([169]41)$$

(王中烈等对 B-G 不等式的各种推广作了统一的探讨，见[337]1991,3:48 ~ 55，其他文献见胡适耕[347]1993,26(2):6 ~ 14;[339]1995. 15(4):525 ~ 532;李文荣[353],1985,1:65 ~ 69;Period. Math. Hunger 1991,23(1):93 ~ 96;[301]1986,120:631 ~ 646;Pachpatte,B. G. [388]1992,23(2):131 ~ 140;Hristova,S. G. J. Appl. Math. Stochastic Anal. 1997,10(1):89 ~ 94;四川师大学报 1999,22(2):136 ~ 140;[347]2000,33(1):65 ~ 71;ANIJAM J. 2000,42(2):267 ~ 276;Laszlo Horvath 在一般测度空间中讨论了 B-G 不等式的推广，见[301]1996,202:183 ~ 193. [330]41(2010),97 ~ 107)

15.　**Gauss 不等式：**

(1)　设 $g:[a,b] \to R$ 是严格递增的凸函数. 令 $t(x) = g'(x_0)(x-x_0)+g(x_0)$，　$x_0 \in [a,b]$. $\varphi(x) = \frac{g(b)-g(a)}{b-a}(x-a)+g(a)$.

D 是包含 $a,b,g(a),g(b),\varphi(a),t(b)$ 的区间，若 $f:D \to R^1$ 是递减函数，则

$$\int_a^b f[\varphi(x)]g'(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(t(x))g'(x)\mathrm{d}x.$$

([307]744 − 26012.)

(2) 设 $g:[a,b]\to R^1$ 是非负递增可微函数，$f:[a,b]\to R^1$ 是非负函数且 f/g' 递增，则 $F(p)=(p+1)\int_a^b [g(x)]^p f(x)\mathrm{d}x$ 为对数凹函数.

若 $g(a)=0, a\leqslant b\leqslant\infty$，且 f/g' 递减，则 $F(p)$ 是对数凸函数.

(Varosanec, S. 等. Z. Anal. Anwend. 1995, 14(1): 175 ~ 183)

(3) 设 f 是 R^1 上正的偶函数，且在 $[0,\infty)$ 上递减，并满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1,\quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x = \sigma^2 < \infty,$$

令 $E=\{x: |x|\geqslant\lambda\sigma\}$，则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x \leqslant \begin{cases} 1/(2\lambda^2), & \text{若 } \lambda\geqslant\sqrt{3/2}, \\ 1-(2\lambda/3)\sqrt{2/3}, & \text{若 } 0\leqslant\lambda\leqslant\sqrt{3/2}. \end{cases}$$

(证明见[73]161 ~ 164)

16. **Steffensen 不等式(1918 年)**：设 f,g 在 $[a,b]$ 上可积，f 递减，$0\leqslant g(x)\leqslant 1$，则

$$\int_{b-c}^b f \leqslant \int_a^b fg \leqslant \int_a^{a+c} f, \tag{16.1}$$

式中 $c=\int_a^b g$.

证 1 $$\int_a^{a+c} f - \int_a^b fg = \int_a^{a+c}[1-g]f - \int_{a+c}^b fg$$
$$\geqslant f(a+c)\int_a^{a+c}(1-g) - \int_{a+c}^b fg = \int_{a+c}^b g[f(a+c)-f(x)] \geqslant 0.$$

左边不等式可类似证明. ([4]142 ~ 143)

证 2 Bellman 在 f 非负情形下给出了另一个证明：设 $u(s)$ 由下式定义：

$$\int_a^s fg = \int_a^{u(s)} f. \tag{16.2}$$

则 $u(s)$ 递增连续且 $u(a)=a$，将(16.2)式两边对 s 求导数，得 $f(s)g(s)=f(u)u'(s)$，从而

$$u'(s) = \frac{f(s)}{f(u)}g(s) \leqslant g(s), \Rightarrow u(s) \leqslant a + \int_a^s g.$$

由此即可证明(16.1)右边不等式. ([4]146 ~ 147)

证 3 胡克在[29]74 ~ 75 给出了一个更为简洁的证明：

令 $F(x)=\int_a^{a+c(x)} f - \int_a^x fg$，式中 $c(x)=\int_a^x g$.

则 $F'(x) = f[a+c(x)]g(x) - f(x)g(x) = \left\{f\left[a+\int_a^x g\right] - f(x)\right\}g(x) \geqslant 0.$

Steffensen 不等式已有许多的改进和推广.

(1) **Hayashi 不等式**：设 f 在 $[a,b]$ 上递减. $g\in L[a,b]$ 且 $0\leqslant g(x)\leqslant M$，$x\in[a,b]$，则

$$M\int_{b-c}^b f \leqslant \int_a^b fg \leqslant M\int_a^{a+c} f. \tag{16.3}$$

式中　$c=\frac{1}{M}\int_a^b g$.（[4]144）

（2）　设 $f\in L^p[a,b]$, $p>1$, $(1/p)+(1/q)=1$, f 在 $[a,b]$ 上非负递减，$g(t)\geqslant 0$, $t\in[a,b]$，且　$\int_a^b g^q\leqslant\frac{f(b-0)}{f(a+0)}$. 则

$$\left(\frac{f(b-0)}{f(a+0)}\right)^{p-1}\int_{b-c_p}^b f^p\leqslant\left(\int_a^b fg\right)^p\leqslant\int_a^{a+c}f^p. \tag{16.4}$$

式中　$c_p=\left(\int_a^b g\right)^p$; $c=\begin{cases}\left(\frac{f(a+0)}{f(b-0)}\right)^{p-1}\left(\int_a^b g\right)^p, & \text{若 } f(b-0)>0,\\ b-a, & \text{若 } f(b-0)=0.\end{cases}$

（陈安平，[350]1995，3:35 ～ 36）

注　[2]49 定理 33 和[4]148 定理 4 均有误，陈安平的上述结果是对这些结果的更正.

（3）　设 f 在 $[a,b]$ 上非负递减，$g\in L^1[a,b]$，若

$0\leqslant g(x)\left(\int_a^b g\right)^{p-1}\leqslant M$,　$x\in[a,b]$.　$c=\frac{1}{M}\left(\int_a^b g\right)^p$.

则当 $p\geqslant 1$ 时，$\left(\int_a^b fg\right)^p\leqslant M\int_a^{a+c}f$;　(16.5)

而当 $p\leqslant 1$ 时，$M\int_{b-c}^b f^p\leqslant\left(\int_a^b fg\right)^p$.　(16.6)

（[353]，1995，21(1)：29 ～ 33）. 当 $M=1$ 时，(16.5) 式就是[301]1984，104(2)：432 ～ 434 的结果.

（4）　设 $1<p<\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，若 $\lambda^{\frac{1}{q}}g\leqslant c$，则 $\int_a^b fg\leqslant c\left\{\int_a^{a+\frac{\lambda}{c}}f^p\right\}^{\frac{1}{p}}$.

（[413]2(1)(2005)）

（5）　Gauchmann，Hillel 研究了测度空间上的 Steffensen 型不等式.（[304]2000，1(1)）；Southeast Asian Bull. Math. 1999，23(2)：277 ～ 284）

17.　**Zmorovic 不等式**：设导数 f' 在区间 $[a,b]$ 上绝对连续，则

$$\int_a^b[f''(x)]^2\mathrm{d}x\geqslant\frac{12}{(b-a)^3}\left\{f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)\right\}^2, \tag{17.1}$$

式中系数 $\frac{12}{(b-a)^3}$ 不能再改进.（[352]1983，10(1)：46 ～ 49 和 MR85j：26026）

Zmorovic 不等式已有许多推广，例如：

（1）　设导数 f' 在区间 $[-1,1]$ 上绝对连续，$f(-1)=-1$, $f(1)=1$, $f'(-1)=f'(1)=0$. 则对于 $p>1$，有

$$\int_{-1}^1|f''(x)|^p\mathrm{d}x\geqslant 2\left(\frac{2p-1}{p-1}\right)^{p-1}.$$

仅当　$f(x)=\frac{2p-1}{p}x-\frac{p-1}{p}|x|^{(2p-1)/(p-1)}\mathrm{sgn}x$　时等号成立.（[8]168）

（2）　设导数 f' 在区间 $[a,b]$ 上绝对连续，则对于任意 c, $a<c<b$, $p>1$. 有

$$\int_a^b|f''(x)|^p\mathrm{d}x\geqslant\left\{\frac{p-1}{2p-1}(b-a)\right\}^{1-p}\left|\frac{f(b)-f(c)}{b-c}-\frac{f(c)-f(a)}{c-a}\right|^p.$$

证明及等号成立的条件见[8]166 ～ 167.

(3) **Zmorovic-Chernei 不等式**(1983):设 f 在区间$[a,a+nh]$上有 n 阶连续导数,$h>0,n\geqslant 2$,则

$$\int_a^{a+nh}[f^{(n)}(x)]^2\mathrm{d}x\geqslant A_nh^{1-2n}\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f(a+kh)\right]^2,$$

式中 $A_n>0$ 为与 n 有关的常数,当 $n=2\sim 7$ 时,A_n 的最佳值已求出.但 $n>7$ 时 A_n 的最佳值是多少?(Dokl. Akad. Nauls Ukrain. SSR Ser. A 1983,6:13 ~ 16)

(4) 设 r 阶导数 $f^{(r)}$ 在区间$[-1,1]$上绝对连续,$r\geqslant 1$,整数 k 满足 $r/2\leqslant k\leqslant r$,令 $g(t)=(t^2-1)^k$,若正值可测函数 $\varphi(x)$,使得

$$c=\int_{-1}^{1}[\varphi(t)]^{1/(1-p)}\left|\frac{1}{k!2^k}(g(t))^{(2k-r)}\right|^{\frac{p}{p-1}}\mathrm{d}t<\infty,$$

则对于 $p>1$,有

$$\int_{-1}^{1}\varphi(t)\,|f^{(r+1)}(t)|^p\mathrm{d}t\geqslant c^{1-p}\left|\sum_{j=0}^{k}\frac{(2k-j)!}{j!(k-j)!2^{k-j}}\{f^{(j)}(-1)-(-1)^jf^{(j)}(1)\}\right|^p,$$

式中系数 c^{1-p} 是最佳的,证明见[8]167 ~ 168.其他相关结果见[21]240 ~ 258.

18. 设函数 f 在区间$[a,b]$上有二阶连续导数,$f(a)=f(b)=0$,则

(1) $\displaystyle\int_a^b|f''(x)|\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{4}{(b-a)}\|f\|_c$.

(2) $\displaystyle\int_a^b|f''(x)|\,\mathrm{d}x\geqslant\left|\frac{f(x)(b-a)}{(x-a)(x-b)}\right|,(a<x<b)$.

(3) 若加条件 $f'(a)=1,f'(b)=0$,则$\displaystyle\int_a^b|f''(x)|^2\mathrm{d}x\geqslant\frac{4}{b-a}$.

19. **由变分法导出的积分不等式**:[1]第 7 章专门讨论了用变分法可以建立的若干特殊的积分不等式.设泛函 f 的定义域是:

$$D(f)=\{x'\in C[a,b];x(a)=x_0,x(b)=x_1\}.$$

求泛函 f:$f(x)=\displaystyle\int_a^bF(t,x,x')\mathrm{d}t$ 在 $x^*(t)\in D(f)$ 处达到极大值或极小值,就得到积分不等式:

$$f(x)\leqslant f(x^*)\text{ 或 }f(x)\geqslant f(x^*).\tag{19.1}$$

这时 x^* 必满足 Euler 方程:

$$\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)=0.\tag{19.2}$$

所以,对于给定的 F,由(19.2)式求出其解 x^* 后,就可得到积分不等式(19.1),这往往是发现和建立若干积分不等式的有效手段之一,当然它也往往受到求解(19.2)式的困难的制约.下面是用上述变分法导出的若干积分不等式,这些不等式的证明见[1]第 7 章 193 ~ 219.

(1) 设 $x'\in L^2(0,\infty),x(0)=0,\|x\|_2\neq 0$,则

$$\int_0^\infty\left[4(x')^2-\left(\frac{x(t)}{t}\right)^2\right]\mathrm{d}t>0.$$

(2) 设 $x'\in L^2(0,1),x(0)=0,x(1)=1,\alpha>0,\beta>4$ 并满足 $\alpha^2+1/\beta=1/4$,则

$$\int_0^1\left\{\beta[x'(t)]^2-\left(\frac{x(t)}{t}\right)^2\right\}\mathrm{d}t\geqslant\frac{2}{1-2\alpha},$$

仅当 $x = t^{a+\frac{1}{2}}$ 时等号成立.

(3)　设 $x' \in L^p(0,1), p > 1, \beta > \left(\frac{p}{p-1}\right)^p, x(0) = 0, x(1) = 1$,则

$$\int_0^1 \left[\beta(x'(t))^p - \left(\frac{x(t)}{t}\right)^p\right]\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{(p-1)(1-\lambda)},$$

式中 λ 是方程 $\beta(p-1)\lambda^{p-1}(\lambda-1)+1=0$ 的唯一根. $1-(1/p)<\lambda<1$.

(4)　设 $x' \in L^{2m}[0,1], x(0) = 0$,则 $\| x \|_{2m} \leqslant C_m \| x' \|_{2m}$,

式中　$\| x \|_{2m} = \left\{\int_0^1 | x(t) |^{2m}\mathrm{d}t\right\}^{1/2m}$; $C_m = \left(\frac{1}{2m-1}\right)^{\frac{1}{2m}}\left(\frac{2m}{\pi}\sin\frac{\pi}{2m}\right)$.

仅当 $x(t)$ 为某些超椭圆曲线时等号成立.

若将积分限由 $(0,1)$ 改为 $[0,\pi/2]$,这时,$c_1 = 1$.

若 $x' \in L^2[0,2\pi], \int_0^{2\pi} x(t)\mathrm{d}t = 0$,则得 **Wirtinger 不等式:**

$$\int_0^{2\pi}[x(t)]^2\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{2\pi}[x'(t)]^2\mathrm{d}t.$$

仅当 $x(t) = c_1\cos t + c_2\sin t$ 时等号成立.(第 12 章 § 3. No. 9)

(5)　设 $x, x'' \in L^2(0,\infty)$, $\| x \|_2 = \left(\int_0^\infty | x(t)) |^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}$,则

$$\| x' \|_2^2 \leqslant 2\| x \|_2 \| x'' \|_2,\ \| x' \|_2^2 \leqslant \| x \|_2^2 + \| x'' \|_2^2,$$

仅当　$x(t) = c_1\left[\exp\left(-\frac{c_2}{2}t\right)\right]\sin\left(c_2 t\sin\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right)$　时等号成立.

若将积分限改为 $(-\infty,\infty)$,则

$$\| x' \|_2 \leqslant \| x \|_2 \| x'' \|_2.$$

仅当 $x(t) = 0$, a. e. 时等号成立.(本章 No. 7. (9))

(6)　设 $x' \in L^2[0,1], x(0) = x(1) = 0$,则

$$\int_0^1 \frac{[x(t)]^2}{t(1-t)}\mathrm{d}t < \frac{1}{2}\int_0^1 [x'(x)]^2\mathrm{d}t.$$

仅当　$x(t) = ct(1-t)$ 时等号成立.

(7)　设 $x' \in L^2(0,\infty)$,则

$$\int_0^\infty \frac{[x(t)]^4}{t^3}\mathrm{d}t \leqslant \frac{3}{2}\left(\int_0^\infty [x'(t)]^2\mathrm{d}t\right)^2.$$

更一般地,若 $p > q > 1, r = (p/q) - 1, x'(t) > 0, x' \in L^q[0,\infty)$,则

$$\int_0^\infty \frac{[x(t)]^p}{t^{p-r}}\mathrm{d}t \leqslant C\left\{\int_0^\infty [x'(t)]^q\mathrm{d}t\right\}^{p/q},$$

式中 $C = \frac{1}{p-r-1}\left(\frac{r\Gamma(p/r)}{\Gamma(1/r)\Gamma((p-1)/r)}\right)$. 仅当 $x(t) = \frac{t}{(at^r+b)^{1/r}}, (a,b>0)$ 时等号成立.

(8)　设 f 在 $[0,\infty)$ 上 2 次可微,则

$$\int_0^\infty (f + 2(f')^2 + (f'')^2) \geqslant \frac{3}{2}[f(0)]^2,$$ 仅当 $f(x) = ce^{-x}(x+2)$ 时等号成立.

20.　**函数重排不等式:** 设 f 是测度空间 $(X,\sum,\mu)$ 上的可测函数,$\forall\lambda > 0$.

$$\sigma(\lambda)=\sigma_f(\lambda)=\mu\{|f|>\lambda\} \tag{20.1}$$

称为 f 的**分布函数**.

$$f^*(t)=\inf\{\lambda:\sigma(\lambda)\leqslant t\}.(\forall t>0) \tag{20.2}$$

称为 f 的**递减重排函数**.

注 1. $\{|f|>\lambda\}$ 表示集 $\{t\in X: |f(t)|>\lambda\}$.([118]62)

(1) $\sigma(\lambda), f^*(t)$ 都是右连续的递减函数,且

$$\sigma(f^*(t))\leqslant t,\forall t>0; f^*(\sigma(\lambda))\leqslant\lambda,\forall\lambda>0. \tag{20.3}$$

(2) f 与 f^* 有相同的分布函数,这是因为 $\forall\lambda>0$,有

$$\{t:f^*(t)>\lambda\}=\{t:\sigma(\lambda)>t\}. \tag{20.4}$$

(3) 次可加性: $\forall f,g,\forall\lambda_1,\lambda_2>0,\forall t_1,t_2>0$,有

$$\sigma_{f+g}(\lambda_1+\lambda_2)\leqslant\sigma_f(\lambda_1)+\sigma_g(\lambda_2);(f+g)^*(t_1+t_2)\leqslant f^*(t_1)+g^*(t_2).$$

(4) 设 f,g 是 $(0,a)$ 上非负可积函数,a 为有限或 ∞,则

$$\int_0^a fg\leqslant\int_0^a f^*g^*.$$

(5) 若 $f_n\geqslant 0,\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),f_n$ 递增,则 f_n^* 也递增收敛于 f^*.

(6) 若 $0\leqslant f\leqslant g$,且 f,g 在无穷远处趋于 0,则 $f^*(t)\leqslant g^*(t)$. (保序性)

(7) 重排的保凹性:设 f 是 $[0,a]$ 上正的凹函数,则 f^* 也是凹函数.

由于 f^* 的次可加性,我们需要找出它的适当代替,即定义:设 f 是 $(X,\sum,\mu)$ 上任意可测函数,令

$$f^{**}(t)=\begin{cases}\sup\left\{\dfrac{1}{\mu(E)}\displaystyle\int_E|f|:\mu(E)\geqslant t\right\}, & \text{若 } 0<t<\mu(X),\\ \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_X|f|, & \text{若 } \mu(X)\leqslant t<\infty.\end{cases}$$

于是,$\forall$ 可测函数 f,下式成立

$$f^*(t)\leqslant f^{**}(t)\leqslant\frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\mathrm{d}s,\forall t. \tag{20.5}$$

([132]228 ~ 241)

我们还可定义 f 的对称递减重排,即利用 $f_*^*(x)=f^*(2x)(x>0)$ 和 $f_*^*(-x)=f_*^*(x)$ 来定义一个偶函数 f_*^*,称 f_*^* 是 f 的**对称递减重排**. 当 f,g,h 非负时,成立 **Riesz 不等式**:

$$\int_{R^1}\int_{R^1}f(x)g(y)h(-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\int_{R^1}\int_{R^1}f_*^*(x)g_*^*(y)h_*^*(-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

([1]313 ~ 322)

(8) **等侧重排的导数不等式**:设 f 在 $[a,b]$ 上 $a.e.$ 可微,$G(y)$ 在 $(0,\infty)$ 上递增,则

$$\int_a^b G(|(f^*)'(x)|)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b G(f'(x))\mathrm{d}x. \tag{20.6}$$

若 $F(y_1,y_2)$ 在 $R^1\times R_+^1$ 上 Borel 可测,使得对每个固定的 y_1,$F(y_1,y_2)$ 是 y_2 的递增函数,则

$$\int_0^1 F(f^*(\xi),|(f^*)'(\xi)|)\mathrm{d}\xi\leqslant\int_0^1 F(f(x),|f'(x)|)\mathrm{d}x. \tag{20.7}$$

([21]299 ~ 300 和[301]1993,175:448 ~ 457)

由(20.6)可推出：$\| f^* \|_p = \| f \|_p, 0 < p < \infty$.

(9)　**递减重排积分不等式**：设 f 在区间 D(可以是无穷区间)上非负可积，若 $\sigma(\lambda)$ 是严格递减的连续函数，则它的反函数就是 f 的递减重排 $f^*(t)$. 若 E 为 D 的可测子集，令 $b = \mu(D), c = \mu(E), a = b - c$，则

$$\int_a^b f^* \leqslant \int_E f \leqslant \int_0^c f^* .$$

([61]114 ~ 116)

(10)　**好 λ 不等式**：

设 μ 是 R^n 上正的双倍正则 Borel 测度，若算子 T_1, T_2 满足下述三个性质：

① T_1, T_2 是次线性和正的算子；

② $\forall f \in C_0^\infty(R^n), t > 0. \{T_1 f > t\}$ 是有限(L)测度的开集；

③ 若球 B 包含点 x，使得 $T_1 f(x) \leqslant \lambda$，则

$\forall \eta: 0 < \eta < 1$，存在与 f, λ, B 无关的 $\alpha = \alpha(T_1, T_2, \eta)$. 使得

$$\mu\{y \in B: T_1 f(y) > 3\lambda, T_2 f(y) \leqslant \alpha\lambda\} \leqslant \eta \mu(B). \tag{20.8}$$

则称 T_1, T_2 满足关于 μ 的好 λ 不等式.

好 λ 不等式是证明各种算子不等式的有力工具，例如设 T_1, T_2 满足关于 μ 的好 λ 不等式，并且 $\forall f \in C_0^\infty(R^n)$，$\| T_1 f \|_p < \infty, 0 < p < \infty$，则存在与 f 无关的常数 $c = c(\mu, p)$，使得

$$\| T_1 f \|_p \leqslant c \| T_2 f \|_p. \tag{20.9}$$

([87]328 ~ 330)

我们可以在一般测度空间上用函数的重排定义更一般的好 λ 不等式，即设 f, g 是 σ 有限测度空间上非负可测函数，若存在 $\alpha > 1, \beta < 1$，及常数 c，使得

$$f^*(t) \leqslant cg^*(\beta t) + f^*(\alpha t), \forall t > 0. \tag{20.10}$$

反复利用上式，可得

$$f^*(t) \leqslant Cg^*(\beta t) + \frac{c}{\ln\alpha}\int_{\beta t}^\infty \frac{g^*(s)}{s} \mathrm{d}s + \lim_{t\to\infty} f^*(t). \tag{20.11}$$

([132]240 ~ 241)

注 2　设 f, g 在(0,1)上非负可积，令 $g^-(x) = g^*(1-x)$，则 g^- 是 g 的递增重排，这时成立 Hardy-Littlewood 不等式：

$$\int_0^1 f^* g^- \leqslant \int_0^1 fg \leqslant \int_0^1 f^* g^* . \quad \text{([1] 定理 378)}$$

注 3　函数的重排是极有用的分析工具，(20.2)中的 f 是在一般测度空间中定义的. 若我们在 R^n 中来研究函数的重排，还可以充分利用 R^n 的几何结构，这时，我们可以先定义集合 A 的对称重排 A^*，然后利用 A^* 来定义 f^*，即：设 A 是 R^n 中 Borel 集，$\mu(A) < \infty$. 若中心在原点的开球 $A^* = \{x \in R^n: |x| < r\}$，使得 $\mu(A^*) = \mu(A)$，则称 A^* 是 A 的对称重排. 集 A 的特征函数 φ_A 的对称递减重排 φ_A^* 定义为 $\varphi_A^* = \varphi_{A^*}$.

设 $f: R^n \to C$(复数域)在无穷远处趋于零，即 $\forall t > 0$，$\mu\{|f| > t\} < \infty$，则 f 的对称递减重排 f^* 定义为

$$f^*(x)=\int_0^{\infty}\varphi^*_{\{|f|>t\}}(x)\mathrm{d}t \tag{20.12}$$

从此定义可推出：

(11) $f^*(x)\geqslant 0$；

(12) f^* 径向对称且递减，即 $|x|=|y|\Rightarrow f^*(x)=f^*(y)$；

$$|x|\leqslant|y|\Rightarrow f^*(x)\geqslant f^*(y).$$

(若 $|x|<|y|\Rightarrow f^*(x)>f^*(y)$，称 f^* 为严格对称递减).

(13) f^* 是下半连续函数，即 $\forall t>0$，$\{f^*>t\}$ 是开集.

(14) $\{f^*>t\}=\{|f|>t\}^*$. 即 f^* 的水平集恰好是 $|f|$ 的水平集的重排.

(15) $\mu\{|f|>t\}=\mu\{f^*>t\}$，$\forall t>0$($f^*$ 与 $|f|$ 的等可测性).

(16) 设 $G=G_1-G_2$，式中 G_1,G_2 为递增函数，且 $\int_{R^n}G_1(|f|)$ 与 $\int_{R^n}G_2(|f|)$ 中至少一个有限，则

$$\int_{R^n}G(|f(x)|)\mathrm{d}x=\int_{R^n}G(f^*(x))\mathrm{d}x.$$

特别地，若 $f\in L^p(R^n)$，$1\leqslant p\leqslant\infty$，则 $\|f^*\|_p=\|f\|_p$.

(17) 若 $g:R_+\to R_+$ 递增，则 $(g(|f(x)|))^*=g(f^*(x))$.

(18) 重排的保序性：$\forall x\in R^n$，$f(x)\leqslant g(x)\Rightarrow f^*(x)\leqslant g^*(x)$.

(19) 若 f,g 是 R^n 中非负函数且在无穷远处趋于零，则

$$\int_{R^n}f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_{R^n}f^*(x)g^*(x)\mathrm{d}x, \tag{20.13}$$

当 f 是严格对称递减时，则仅当 $g=g^*$ 时，(20.13) 中等号成立. 反向不等式为

$$\int_{R^n}f\varphi_{\{g\leqslant s\}}\geqslant\int_{R^n}f^*\varphi_{\{g^*\leqslant s\}}. \tag{20.14}$$

(20) 重排在 $L^p(R^n)$ 上的非扩张性：

$$\|f^*-g^*\|_p\leqslant\|f-g\|_p\quad(1\leqslant p\leqslant\infty). \tag{20.15}$$

(21) 设 $h:R\to R$ 是非负凸函数，且 $h(0)=0$，f,g 是 R^n 上非负函数且在无穷远处趋于零，则

$$\int_{R^n}h(f^*-g^*)\leqslant\int_{R^n}h(f-g). \tag{20.16}$$

若 h 为严格凸，f 严格递减且 $f^*=f$，则(20.16) 中等号成立的充要条件是 $g=g^*$.

(22) Riesz 重排不等式：设 f,g,h 是 R^n 上非负函数，且在无穷远处趋于零. 令

$$I(f,g,h)=\int_{R^n}f(x)(g*h)(x)\mathrm{d}x=\int_{R^n}\int_{R^n}f(x)g(x-y)h(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

则

$$I(f,g,h)\leqslant I(f^*,g^*,h^*). \tag{20.17}$$

更一般地，设 f_k 是 R^n 上非负函数且在无穷远处趋于零. 令 $k\leqslant m$，$A=(a_{ij})$ 是 $k\times m$ 阶矩阵. 定义

$$I(f_1,\cdots,f_m)=\int_{R^n}\cdots\int_{R^n}\prod_{j=1}^{m}f_j\Big(\sum_{i=1}^{k}a_{ij}x_i\Big)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_k,$$

则 $I(f_1,\cdots,f_m)\leqslant I(f_1^*,\cdots,f_m^*)$.

(23)　设 $f:R^n\to R$ 是非负可测函数,且在无穷远处趋于零,则

$$\|\nabla f^*\|_p\leqslant\|\nabla f\|_p,\qquad 1\leqslant p<\infty.\tag{20.18}$$

(24)　若 $f\in C_0^\infty(R^n)$,则

$$f^{**}(t)-f^*(t)\leqslant C_n t^{\frac{1}{n}}\,|\nabla f|^{**}(t).$$

(25)　若 $\mu\{|f|>\alpha\}=\mu\{\overline{f}>\alpha\}$,称 $\overline{f}$ 是 f 的等测对称递减重排. 这时成立 Hardy-Littlewood-Riesz-Sobolev 不等式:

$$\int_{R^n}h(x)(f_1*\cdots*f_m)(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_{R^n}\overline{h}(x)(\overline{f}_1*\cdots*\overline{f}_m)(x)\mathrm{d}x.$$

(26)　设 (X,Σ,μ) 是测度空间,f,g 是非负可测函数,$E\in\Sigma$,则

$$\int_E fg\,\mathrm{d}\mu\leqslant\int_0^{\mu(E)}f^*g^*.$$

(27)　设 f 是全 σ 有限测度空间上的可测函数,$f^{**}(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f^*(t)\mathrm{d}t$ 是 f 的平均重排.

①　设 $1<p<\infty$,$1\leqslant q\leqslant\infty$,则

$$\left\{\int_0^\infty[x^{\frac{1}{p}}(f^{**}(x)-f^*(x))]^q\frac{\mathrm{d}x}{x}\right\}^{\frac{1}{q}}\leqslant\left(1+\frac{p}{p-1}\right)\left\{\int_0^\infty[x^{\frac{1}{q}}f^*(x)]^q\frac{\mathrm{d}x}{x}\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

②　设 $0<p<\infty$,$1\leqslant q\leqslant\infty$,$f^{**}(\infty)=0$,则

$$\left\{\int_0^\infty[x^{\frac{1}{p}}f^*(x)]^q\frac{\mathrm{d}x}{x}\right\}^{\frac{1}{q}}\leqslant(p+1)\left\{\int_0^\infty[x^{\frac{1}{p}}(f^{**}(x)-f^*(x))]^q\frac{\mathrm{d}x}{x}\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

([308]128(3)(1999):727 ~ 734)

21.　**H-L(Hardy-Littlewood)上限定理**:设 f 在有限区间 $(0,a)$ 上非负可积,记

$$\theta(x)=\theta(f,x)=\sup\left\{\frac{1}{x-u}\int_u^x f(t)\mathrm{d}t:0\leqslant u<x\right\},$$

f^* 为 f 的递减重排,Q 为 R^n 中方体,$M(f,x)=\sup\limits_{x\in Q}\dfrac{1}{\mu(Q)}\displaystyle\int_Q|f(y)|\mathrm{d}y$ 称为 f 的 Hardy-Littlewood 极大算子.

(1)　$\theta^*(x)\leqslant\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f^*(t)\mathrm{d}t.$　(21.1)

(2)　设 g 是 $[0,a]$ 上递增函数,则

$$\int_0^a g(\theta(x))\mathrm{d}x\leqslant\int_0^a g\left(\frac{1}{x}\int_0^x f^*(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x.\tag{21.2}$$

注　(1)(2)中 $f^*(t)$ 换成 $M(f,t)$,不等式仍成立.

(3)　若 $1<p<\infty$,则 $\|\theta(f)\|_p\leqslant\dfrac{p}{p-1}\|f\|_p.$　(21.3)

(4)　若 $0<p<1$,则 $\|\theta(f)\|_p\leqslant\left(\dfrac{1}{1-p}\right)^{1/p}\|f\|_1.$　(21.4)

(推广见 Ricerche Mat. 1989,38(1):119 ~ 136)

(5)　$\displaystyle\int_0^1\theta(f,x)\mathrm{d}x\leqslant2\int_0^1 f(x)\ln^+f(x)\mathrm{d}x+c_1\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+c_2,c_1,c_2>0.$　(21.5)

(6)　设 $g\in AC[a,b]$,$\dfrac{g(x)}{x^{1+\alpha}}$ 在 (a,b) 上递增,$\dfrac{g(x)}{x^\beta}$ 在 (a,b) 上递减,$\alpha,\beta>0$,则 ∃

>0,使得

$$\int_a^b g(\theta(x))\mathrm{d}x \leqslant c\int_a^b g(f(x))\mathrm{d}x. \tag{21.6}$$

(7)　设 $1<p<\infty,-1<\alpha<p-1$,则

$$\int_a^b x^\alpha[\theta(x)]^p\mathrm{d}x \leqslant c\int_a^b x^\alpha[f(x)]^p\mathrm{d}x. \tag{21.7}$$

([322]1930,54:81 ~ 116;[73]421 ~ 428;[57]32 ~ 33;[21]303 ~ 305)

22.　设 $f\in L^1_{2\pi}$,令

$$f^+(x)=\sup_{h>0}\frac{1}{h}\int_0^h|f(x+t)|\,\mathrm{d}t,\quad f^-(x)=\sup_{h>0}\frac{1}{h}\int_0^h|f(x-t)|\,\mathrm{d}t,$$

$$f^\Delta(x)=\max\{f^+(x),f^-(x)\}=\sup_{h\neq 0}\left\{\frac{1}{h}\left|\int_0^h|f(x+t)|\,\mathrm{d}t\right|\right\},$$

则

(1)　$\mu(\{f^+>\lambda\}\cap[-\pi,\pi])\leqslant\frac{4\pi}{\lambda}\|f\|_1,\quad(\forall\lambda>0)$;　(22.1)

(2)　$\|f^+\|_p\leqslant 4^{1/p}\left(\frac{p}{p-1}\right)\|f\|_p,(1<p<\infty)$;

(3)　$\|f^+\|_p\leqslant\left(4\frac{p^{1-p}}{1-p}\right)^{1/p}\|f\|_1,\quad(0<p<1)$;

(4)　$\|f^+\|_1\leqslant 8\int_{-\pi}^{\pi}(|f|\ln^+|f|)+c.$

将 f^+ 换成 f^- 时,(1) ~ (4) 仍成立,但 f^+ 换成 f^Δ 时,应注意 $\{f^\Delta>\lambda\}=\{f^+>\lambda\}\cup\{f^->\lambda\}$,所以(22.1)应换成

$$\mu(\{f^\Delta>\lambda\}\cap[-\pi,\pi])\leqslant\frac{8\pi}{\lambda}\|f\|_1,\forall\lambda>0.$$

(证明见[73]386 ~ 389 或[57]Vol. 1:33) 当 f 为非周期函数时相应的类似结论见[98]611 ~ 620)

23.　**有界平均振动函数不等式(BMO 不等式)**:设 f 在 R^n 上局部可积,Q 为 R^n 中任一方体,f 在 Q 上的平均值记作 $f_Q=\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q f(x)\mathrm{d}\mu$. 若 f 满足:

$$\|f\|_*=\sup_Q\left\{\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q|f(x)-f_Q|\,\mathrm{d}\mu\right\}<\infty, \tag{23.1}$$

则称 f 为**有界平均振动函数**,记为 $f\in BMO$.

(1)　若 $f\in BMO$,则成立 **John-Nirenberg 不等式**:存在常数 $c_1,c_2>0$,使得 $\forall\lambda>0$,下式成立

$$\mu\{x\in Q:|f(x)-f_Q|>\lambda\}\leqslant c_1\exp\left\{-\frac{c_2\lambda}{\|f\|_*}\right\}\mu(Q). \tag{23.2}$$

反之,若 $f\in L_{\mathrm{loc}}(R^n)$,且存在两个正常数 c_1,c_2,使得 $\mu\{x\in Q:|f(x)-f_Q|>\lambda\}\leqslant c_1\exp\{-c_2\lambda\}\mu(Q)$. $(\forall Q,\forall\lambda>0)$,则 $\forall c:0<c<c_2$,下式成立

$$\int_Q\exp\{c|f(x)-f_Q|\}\mathrm{d}\mu\leqslant\frac{c_1c}{c_2-c}\mu(Q). \tag{23.3}$$

由此推出 $f\in BMO$(具有范数 $\|f\|_*$)$\Leftrightarrow$

$$\sup_Q \left\{ \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q | f(x) - f_Q |^p \mathrm{d}\mu \right\}^{1/p} \leqslant c_p \| f \|_*, c_p \sim p, \tag{23.4}$$

$1 \leqslant p < \infty$,这说明(23.2)式刻画了 BMO 中函数 f 的本质特征.([87]202 ~ 204)

(2) 设 $f \in BMO$,则 $\forall \lambda > 0$,成立

$\int_{\lambda Q} | f(x) - f_Q | \mathrm{d}\mu \leqslant c\ln(2+\lambda) \| f \|_* \mu(\lambda Q)$,式中 $\mu(\lambda Q) = \lambda^n \mu(Q)$.

(3) 设 $f \in L_{\text{loc}}(R^n)$,则 Fefferman-Stein 的 # 函数定义为

$$f^{\#}(x) = \sup_{x \in Q} \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q | f(y) - f_Q | \mathrm{d}\mu(y).$$

则 $f \in BMO(R^n) \Leftrightarrow f^{\#} \in L^\infty(R^n)$; $f \in L^p(R^n) \Leftrightarrow f^{\#} \in L^p(R^n)$, $1 < p < \infty$;

$f^{\#}(x) \leqslant 2M(f,x)$.

(4) **BDS(Bennett-Devore-Sharpley)不等式**:设 $f \in BMO$,则 f 的 HL 极大函数 $M(f) \in BMO$,而且

$$\| M(f) \|_* \leqslant c \| f \|_*. \tag{23.5}$$

([87]204 ~ 206)

(5) **Spanne-Stein 不等式**:设 $f \in BMO$,则 f 的共轭函数 $\tilde{f} \in BMO$,且

$$\| \tilde{f} \|_* \leqslant c \| f \|_*. \tag{23.6}$$

$\tilde{f}$ 的定义及(23.6)的证明见[87]:206 ~ 209;52 ~ 53.

(6) 设 $f \in L^\infty(T)$,则 $\tilde{f} \in BMO(T)$,且

$$\| \tilde{f} \|_* \leqslant c \| f \|_\infty. \text{([87]206)} \tag{23.7}$$

(7) f 的递减重排 f^* 满足:$\| f^* \|_* \leqslant \| f \|_*$.

(8) 设 $f \in BMO(R^n)$,则 $f(x)(1+| x |^{n+1})^{-1} \in L^1(R^n)$.且

$$\int_{R^n} \frac{| f(x) - f_Q |}{a^{n+p} + | x |^{n+p}} \mathrm{d}\mu \leqslant \frac{c}{a^p} \| f \|_*.$$

式中 Q 是中心在原点,边长为 a 的方体,$p > 0$,常数 c 只与维数 n 有关.([137]219 ~ 220) $p = 1$ 的情形见[322]1972,129:137 ~ 193.

(9) **Poincare 不等式**:

$$\left(\frac{1}{\omega(B)} \int_B | f(x) - f_B |^q \omega(x) \mathrm{d}x\right)^{1/q} \leqslant C\mu(B)^{1/n} \left(\frac{1}{v(B)} \int_B | \nabla f(x) |^p v(x) \mathrm{d}x\right)^{1/p},$$

式中 $1 < p \leqslant q < \infty$, $\omega(B) = \int_B \omega(x) \mathrm{d}x$, ∇f 为 f 的梯度.([368]1992.41(3):605 ~ 623)

24. **A_p 权不等式**:设 $\omega(x)$ 是 R^n 上局部可积的正函数,Q 是其边平行于坐标轴的方体,$E \subset Q$,

$$\omega(E) = \int_E \omega(x) \mathrm{d}x.\ M_s(f,x) = \sup_{x \in Q} \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q | f(y) |^s \mathrm{d}y\right)^{1/s}, s > 0.$$

$M_1(f,x)$ 即为 No.21 中 $M(f,x)$,$\mu(Q) = v(Q)$ 为 Q 的体积.

若存在正常数 c,使得 $\forall Q$,下式成立

$$\left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q \omega(x) \mathrm{d}x\right) \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q [\omega(x)]^{-1/(p-1)} \mathrm{d}x\right)^{p-1} \leqslant c, \tag{24.1}$$

则称 ω 为 A_p 权函数，记为 $\omega \in A_p(1 < p < \infty)$；

若 $$\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q \omega(x)\mathrm{d}x\right)\exp\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q \log\frac{1}{\omega(x)}\mathrm{d}x\right) \leqslant C. \tag{24.2}$$

则称 ω 为 A_∞ 权函数，记为 $\omega \in A_\infty$；

若 $M(\omega,x) \leqslant c\omega(x)$ a. e. $x \in R^n$. (24.3)

则称 $\omega \in A_1$.

BMO 与 A_p 关系十分密切，即若 $\omega \in A_p(1 < p < \infty)$，则 $\ln\omega \in BMO$；反之，若 $\ln\omega \in BMO$，则存在 $\delta > 0$，使得 $\omega^\delta \in A_p$.（[137]:240）下面仍记

$$\| f \|_{p,w} = \left(\int_{R^n} | f |^p w\right)^{1/p}, 1 < p < \infty.$$

(1)　设 $\omega \in A_p, 1 \leqslant p \leqslant \infty$，则 ω 满足反向 **Hölder** 不等式，即存在正的常数 c,δ，使得

$$\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q \omega^{1+\delta} \leqslant c\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q \omega\right)^{1+\delta}, \forall Q. \tag{24.4}$$

(2)　**反向双倍不等式**：$\omega \in A_\infty, \Leftrightarrow$ 存在正的常数 c,δ（与 Q 无关），使得 $\forall E \subset Q$，下式成立

$$\frac{w(E)}{w(Q)} \leqslant c\left(\frac{\mu(E)}{\mu(Q)}\right)^\delta \Leftrightarrow \frac{\mu(E)}{\mu(Q)} \leqslant c\left(\frac{w(E)}{w(Q)}\right)^\delta. \tag{24.5}$$

(3)　设 $w \in A_p, 1 < p < \infty$.

$$\| M_s(f) \|_{p,w} \leqslant c \| f^\# \|_{p,w}. \tag{24.6}$$

(4)　设 $w \in A_{p/s}, 1 < s < p < \infty$，则

$$\| M_s(f) \|_{p,w} \leqslant c \| f \|_{p,w}. \tag{24.7}$$

(5)　**Gehring 不等式**：设定义在方体 Q_0 上的非负函数 w 满足：

$$\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q w^p\right)^{1/p} \leqslant c_1\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q w\right), \forall Q \subset Q_0, p > 1.$$

则 $\exists \eta > 0$，使得 $\forall Q \subset Q_0, \forall r: p \leqslant r < p + \eta$，下式成立

$$\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q w^r\right)^{1/r} \leqslant c_2\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q w\right), \tag{24.8}$$

若取 $Q = [0,1], \int_Q w^p = 1, E_\lambda = \{x \in Q: w(x) > \lambda\}$，则(24.7) 可化为

$$\int_{E_\lambda} w^p \leqslant c\lambda^{p-1}\int_{E_\lambda} w, \qquad \lambda \geqslant 1. \tag{24.9}$$

（[322]1973. 130:265 ～ 277）Canale, Anna 推广了 Gehring 不等式，证明：

设 ω 为双倍测度，$h \in L^1(Q_0, w(x)\mathrm{d}x), h \geqslant 0$，并满足：

$\dfrac{1}{\omega(Q)}\displaystyle\int_Q h(x)\omega(x)\mathrm{d}x \leqslant C_1 \operatorname*{essinf}_{x\in Q} h(x), \forall Q \subset Q_0$，则 $\exists r > 1$，使得

$$\left(\frac{1}{\omega(Q)}\int_Q h(x)^r\omega(x)\mathrm{d}x\right)^{1/r} \leqslant c\,\frac{1}{\omega(Q)}\int_Q h(x)\omega(x)\mathrm{d}x.$$

此外，若 $\omega \in A_p, p > 1, 0 \leqslant h \in L^p(Q_0, \omega(x)\mathrm{d}x)$，并满足

$\left(\dfrac{1}{\omega(Q)}\displaystyle\int_Q h(x)^p\omega(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p} \leqslant c\,\dfrac{1}{\omega(Q)}\displaystyle\int_Q h(x)\mathrm{d}x$，则 $\exists r > 1$，使得

$$(\frac{1}{\omega(Q)}\int_Q h(x)^{pr}\omega(x)dx)^{1/pr}\leqslant c(\frac{1}{\omega(Q)}\int_Q h(x)\mathrm{d}x).$$ ([307]1993,754:26 011)

(6)　若 $w\in A_p,p\geqslant 1,t>1$，则 $w(tQ)\leqslant ct^{np}w(Q)$. 式中 tQ 是和 Q 同心、边长为 Q 的边长 t 倍的方体.([142]153)

(7)　设 $w\in A_p,1<p<\infty$，则

$$\int_{|x|>M>0}\frac{w(x)}{|x|^{np}}\mathrm{d}x<\infty.$$

(8)　设 $w\in A_1$，则 $\inf\limits_{x\in B}w(x)\leqslant c_1\dfrac{w(B)}{\mu(B)}\leqslant c_2\operatorname{essinf}\limits_{x\in B}w(x)$，且对于 $E\subset B$，下式成立

$$\frac{\mu(E)}{\mu(B)}\leqslant c\frac{w(E)}{w(B)}.$$

(9)　$w\in A_\infty\Leftrightarrow\forall$ 非负可测函数 f，$\|G(f)\|_{1,w}\leqslant c\|f\|_{1,w}$ 成立.
式中 $G(f,x)=\sup\limits_{x\in Q}\exp\left(\dfrac{1}{\mu(Q)}\displaystyle\int_Q\ln|f(x)|\mathrm{d}x\right)$.

以上的证明及进一步的结果见[87]223 ~ 258.

(10)　**Fujii 不等式**:设 $f_Q=\dfrac{1}{\mu(Q)}\displaystyle\int_Q f$，则 $f\in A_\infty\Leftrightarrow\exists c>0$，使得

$$\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q\frac{f}{f_Q}\log^+\left(\frac{f}{f_Q}\right)\mathrm{d}\mu\leqslant Cf_Q.$$

Gioconda,M. 等推广了这一结果.(MR98h:26024)

(11)　设 $\omega\in A_p,1\leqslant p<\infty,0<\alpha<1$，$E$ 为方体 Q 的子集并满足:$\mu(E)\leqslant\alpha\mu(Q)$，则存在 β:$0<\beta<1$，使得 $\omega(E)\leqslant\beta\omega(Q)$.

(12)　设 $\omega\in A_p,1\leqslant p<\infty$，则存在 $\delta>0$ 和常数 $c>0$，使得 $\forall E\subset Q$，下式成立

$$\frac{\omega(E)}{\omega(Q)}\leqslant c(\frac{\mu(E)}{\mu(Q)})^\delta,\ \text{即}\quad \omega\in A_\infty,$$

(11) ~ (12) 的证明见[142]154,157.

25.　**Korn 不等式**(1908):设 $f_k(x^j)$ 是 R^n 中有界域 D 上的向量函数($k,j=1,2,\cdots,n$)，令

$$\|f\|=\int_D\left(\sum_{k,j=1}^n\left(\frac{\partial f_k}{\partial x^j}\right)^2+\sum_{k=1}^n f_k^2\right)\mathrm{d}x.\ \text{则}$$

$$\int_D\left\{\sum_{k,j=1}^n\left(\frac{\partial f_k}{\partial x^j}+\frac{\partial f_j}{\partial x^k}\right)^2+\sum_{k=1}^n f_k^2\right\}\mathrm{d}x\geqslant C\|f\|.$$

Korn 曾用于获得弹性理论中非齐次方程的解的先验估计.(Fichera,G.,Existence theorems in elasticity theory,Springer,1972,Vol. 4:347 ~ 389)

26.(1)　**能量不等式**:以膜振动方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$ 为例，能量积分

$$E(t)=\iint_D[u_t^2+a^2(u_x^2+u_y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

表示时刻 t 在积分区域 D 上薄膜的能量. 式中

$$D=\{(x,y):(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant a^2(t-t_0)^2,0<t<t_0\}.$$

$E(t)\leqslant E(0)$ 称为**能量不等式**，利用它可以得到膜振动方程柯西问题解的唯一性与

稳定性，还可用于研究存在性问题，这种方法称为**能量方法**，这是偏微分方程研究中常用的一种方法.(John,F.,偏微分方程,科学出版社,1986)

(2) 相对论动能的凸不等式：设 $f \in L^2(R^n)$，(f,g) 是 $L^2[R^n]$ 的内积，$I_{\frac{1}{2}}{}^t(f) = \frac{1}{t}[(f,f)-(f,e^{-t|p|}f)]$ 一致有界.

$$\sup_{t>0} I_{\frac{1}{2}}^t(f) = \lim_{t\to 0} I_{\frac{1}{2}}{}^t(f) = (f, |p| f) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}\int_{R^n}\int_{R^n} \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{n+1}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

这时称 $f \in H^{\frac{1}{2}}(R^3)$，$|p|$ 称为相对论动能.

设 $f,g \in H^{\frac{1}{2}}(R^3)$，$f \neq 0$，$T(p) = \sqrt{p^2+\alpha^2}-\alpha$，则 $\forall \alpha \geqslant 0$，下式成立

$$(\sqrt{f^2+g^2}, T(p)\sqrt{f^2+g^2}) \leqslant (f,T(p)f)+(g,T(p)g) \tag{26.1}$$

仅当 f 不变号，且 $g = cf$，a. e. 时等号成立. (26.1) 称为相对论动能的凸不等式.([167]167)

(3) 设 $\{E_k\}$ 是 R^n 中互不相交的有界可测子集列，D_k 是 E_k 的直径，即

$$D_k = \sup\{|x-y|: x,y \in E_k\}.$$

若 $f \in H^{\frac{1}{2}}(R^n)$，则

$$(f,|p|f) > \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}\sum_j \frac{\mu(E_j)}{D_j^{n+1}}\int_{E_j}|f-f_{E_j}|. \tag{26.2}$$

式中 $f_{E_k} = \frac{1}{\mu(E_k)}\int_{E_k}^{f}$.([167]177)

(4) 反磁不等式：设 $A = (A_1,\cdots,A_n): R^n \to R^n$，$f: R^n \to C$(复数集).

若 f，$A_j \in L^2_{\mathrm{loc}}(R^n)$，$A_j f \in L^1_{\mathrm{loc}}(R^n)$，则称$(\nabla + iA)f$ 是 f(关于 A) 的协变导数.

若 $f \in L^2(R^n)$，$(\partial_j + iA_j)f \in L^2(R^n)$，$j = 1,\cdots,n$，则称 $f \in H^1_A(R^n)$，$H^1_A(R^n)$ 是 Hilbert 空间. $H^1_A(R^n)$ 中的内积定义为：

$$(f_1,f_2)_A = (f_1,f_2) + \sum_{j=1}^{n}((\partial_j+iA_j)f_1,(\partial_j+iA_j)f_2), \tag{26.3}$$

当 $f_1 = f_2 = f$ 时，(26.3) 式右边第二项称为 f 的动能.

设 $A \in L^2_{\mathrm{loc}}(R^n)$，$f \in H^1_A(R^n)$，则 $|f| \in H^1(R^n)$，且成立反磁不等式：

$$|\nabla|f|(x)| \leqslant |(\nabla+iA)f(x)| \quad a.e.\, x \in R^n.$$

([167]174 ～ 175)

27.(1) **Friedrichs 不等式**：设 D 为 R^n 中有界区域，其$(n-1)$ 维边界 ∂D 满足局部 Lipschitz 条件，$f \in W^{1,2}(D)$(Sobolev 空间)，则

$$\int_D f^2 \leqslant C\left\{\int_D \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^2 + \int_{\partial D} f^2\right\}.$$

上式还可推广到加权空间.([138])

(2) **FP 不等式(Friedrich-Poincare 不等式)**：设 $f' \in C[a,b]$，$f(a) = \alpha, f(b) = \beta$，$p > 0$，$0 < \lambda < \pi/(b-a)$，则

$$\int_a^b f^2 \leqslant \frac{1}{\lambda^2}\int_a^b (f')^2 + \frac{2\alpha\beta - (\alpha^2+\beta^2)\cos\lambda(b-a)}{\lambda\sin\lambda(b-a)}.$$

证明及更多的不等式见 Burton,A. P. 等,Rad,Mat,1989,5(1):107 ~ 114.

28.　**梯度不等式**:设 ∇f 为 f 的梯度:$|\nabla f(x)| = \left(\sum_{k=1}^{n}(\partial f/\partial x_k)^2\right)^{1/2}$.

(1)　设 f 的支集是 R^n 中的开方体 Q_0,且有连续的一阶偏导数,则对于 Q_0 中任意 x,有

$$|f(x)| \leqslant c\int_{Q_0}\frac{|\nabla f(y)|}{|x-y|^{n-1}}\mathrm{d}y;$$

而对于任意 $Q \subset Q_0$,$x \in Q$,有

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)-f(x)|\,\mathrm{d}y \leqslant c\int_Q \frac{|\nabla f(y)|}{|x-y|^{n-1}}\mathrm{d}y,$$

式中常数 c 与 x 无关,而与维数 n 有关,

提示:利用 $f(x) = \dfrac{1}{w_n}\displaystyle\int_{R^n}\frac{y\nabla f(x-y)}{|y|^n}\mathrm{d}y$,其中 $w_n = 2\displaystyle\int_{R^{n-1}}(1+|x|^2)^{-n/2}\mathrm{d}x$ 是 R^n 中单位球面 $\sum_{n-1} = \{x \in R^n: |x| = 1\}$ 的表面积.([87]270 ~ 271)

(2)　**PS 积分不等式(Poincare-Sobolev 型积分不等式)**:

1987 年 Pachpatte,B. G 证明:设 $B = \{x = (x_1,\cdots,x_n): 0 \leqslant x_k \leqslant a_k, 1 \leqslant k \leqslant n\}$ 是 R^n 中的有界域,f 在 B 上有连续的一阶偏导数,且在 B 的边界上为零,则对于 $p \geqslant 2$,有

$$\|f\|_p \leqslant (a/2)n^{-1/p}\|\nabla f\|_p,$$

式中 p 范数在 B 上取,$a = \max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$.([330]1987,18(1):1 ~ 7)

(3)　1989 年 Gordon,S. 证明了**加权梯度不等式**:

$$\left(\int |g(x)|^q v(x)\mathrm{d}x\right)^{1/q} \leqslant c\left(\int |x\nabla g(x)|^p u(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p},$$

式中 u,v 为非负权函数,$1 < p < \infty$,$0 < q \leqslant p$.([392]1989,111(3 ~ 4):329 ~ 335)

(4)　在[87]中还对加数情形证明了 **Sobolev 嵌入不等式**:

$$\left(\int_Q |f(x)|^q \mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/q} \leqslant c\left(\int_Q |\nabla f(x)|^p \mathrm{d}v(x)\right)^{1/p},$$

(式中 $1/p - 1/n \leqslant 1/s < 1/p$,$p \leqslant q < s$)和 **Poincare 不等式**:

$$\int_Q |f(x)-f_Q|^p \mathrm{d}\mu(x) \leqslant c\int_Q |\nabla f(x)|^p \mathrm{d}v(x),$$

式中 $1 < p < \infty$,$f_Q = \dfrac{1}{|Q|}\displaystyle\int_Q f(x)\mathrm{d}x$.([87]272 ~ 274)

(5)　设 $f \in S(R^n)$([118]:362),f_*^* 是 f 的对称递减重排(本章 No. 20),φ 是 $(0,\infty)$ 上递增的凸函数,$\varphi(0) = 0$,则

$$\int_{R^n}\varphi(|\nabla f|)\mathrm{d}x \geqslant \int_{R^n}\varphi(|\nabla f_*^*|)\mathrm{d}x.$$

Talenti,Giorgio 引入了加权重排函数的概念,得到了上述不等式的加权形式.(Ann. Univ. Ferrara Sez. VII. 1997,43:121 ~ 133)

(6)　**广义 Hardy 不等式**:设 Ω 为 R^n 中区域,$1 < p < \infty$,$\delta(x) = \mathrm{dist}(x,\partial\Omega)$,1998 年 Marcus,$M$ 等对于 $f \in W^{1,p}(\Omega)$,求出广义 Hardy 不等式 $\displaystyle\int_\Omega |\nabla f|^p \geqslant c_p\int_\Omega \left|\frac{f}{\delta}\right|^p$ 中最佳常数 c_p,$c_1 = [1-(1/p)]^p$.([309]1998,350:3237 ~ 3255)

(7)　Hardy-Sobolev 不等式：设 Ω 为 R^n 上有界闭区域，$n \geqslant 2$，$0 \in \Omega$，$1 < p < n$，$f \in W_0^{1,p}(\Omega)$，则

$$\int_\Omega |\nabla f|^p \mathrm{d}x \geqslant \left(\frac{n-p}{p}\right)^p \int_\Omega \left|\frac{f(x)}{x}\right|^p \mathrm{d}x,$$

式中 $C_p = \left(\frac{n-p}{p}\right)^p$ 是最佳常数.

(8)　设 $f \in W^{1,p}(R^n)$，$R^n = R_x^k \times R_y^{n-k}$，$2 \leqslant k \leqslant n$，$1 < p < n$，$q < k$，$0 \leqslant q \leqslant p$，$r = \frac{p(n-q)}{n-p}$，则

$$\int_{R^n} |\nabla f|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant C\left(\int_{R^n} \frac{|f|^r}{|x|^q} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{p}{r}},$$

当 $n = 3$，$k = 2$，$p = 2$，$q = 1$ 时，上式中最佳常数为 $C = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$，且仅当

$$f(x_1, x_2, y) = a\{(1 + b|x|)^2 + (by)^2\}^{-\frac{1}{2}}, \quad x = (x_1, x_2).$$

a, b 为实数，但在一般情形下，问题仍未解决.（Appl. Anal. 85(2006)(1 ～ 3)：171 ～ 180）

(9)　梯度的凸不等式. 设 $\Omega \subset R^n$ 为开集，$H^1(\Omega) = \{f: \Omega \to C: f, \nabla f \in L^2(\Omega)\}$，$H^1(\Omega)$ 是 Hilbert 空间. 若 f, g 是 $H^1(R^n)$ 中实值函数，则

$$\int_{R_n} |\nabla(\sqrt{f^2 + g^2})|^2(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{R^n} \{|\nabla f|^2(x) + |\nabla g|^2(x)\}\mathrm{d}x.$$

当 $g(x) > 0$，a. e. $x \in R^n$ 时，仅当存在常数 C，使得

$$f(x) = Cg(x) \quad a.\,e.\, x \in R^n.$$

若 f, g 是复值函数，则上述不等式等价于

$$\int_{R^n} |\nabla|F|(x)|^2 \leqslant \int_{R^n} |\nabla F(x)|^2.$$（[167]160 ～ 161）

29. **Sobolev 不等式：**

(1)　**仿射 Sobolev 不等式**：设 $f \in C_0^1(R^n)$，则

$$\int_{S^{n-1}} \|\nabla_u f\|_1^{-n} \mathrm{d}u \leqslant c_n \|f\|_p^{-n}, \tag{29.1}$$

式中，$\mathrm{d}u$ 是单位球上标准球面测度. $p = \frac{n}{n-1}$，$c_n = n\left(\frac{w_n}{2w_{n-1}}\right)^n$ 是最佳常数（w_n 是 n 维单位球的体积）（第 4 章 §3. No. 8）（Zhang Gaoyong, J. Differential Geom. 1999, 53(1)：183 ～ 202）

(2)　(29. 1) 包含了**古典的 Sobolev 不等式**：设 D 为平面区域，f 是 D 内有紧支集的光滑函数，则

$$\left(\int_D |\nabla f|\right)^2 \geqslant 4\pi \int_D f^2. \tag{29.2}$$

(29. 2) 式等价于等周不等式　$L^2 \geqslant 4\pi S$.（第 4 章 §3. 三）

(3)　1992 年，Pearson, J. M. 证明了形如

$$\|f\|_{L^q(R^n)} \leqslant \frac{\sqrt{q}}{n\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(1/2)}\right]^{1/n} \|\nabla f\|_{L^2(R^n)}$$

的不等式，式中 $1/q = 1/2 - 1/n$.（细节见[397]1992, 116(4)：361 ～ 374）

(4)　**Gauss 型对数 Sobolev 不等式(GLS 不等式):**

$$\int_{R^n} |f|^2 \ln |f| \, d\mu \leqslant \int_{R^n} |\nabla f|^2 d\mu + \|f\|_2^2 (\ln \|f\|_2).$$

式中　$d\mu = (2\pi)^{-n/2}\left(\exp\left\{-\frac{|x|^2}{2}\right\}\right)dx$. ([366]1998,30(1):80 ~ 84)

Gross,L. 在[140]1563 中对该不等式的研究背景及一些最主要的结果(包括证明)和应用作了详细的论述.

(5)　**Hölder 嵌入不等式:** 设 $f \in W^{1,p}(\Omega)$(Sobolev 空间),$p > n$,则

$$|f(x) - f(y)| \leqslant c\,|x - y|^{1-(n/p)}\left(\int_\Omega |\nabla f|^p dx\right)^{1/p}.$$

(Buckley,S. M. ,Internat. Math. Res. Notices,1996,18:881 ~ 901)

(6)　**Fefferman 不等式:**

$$\|u\|_{2,w} \leqslant c\,\|\nabla u\|_2,$$

式中 $\|u\|_{2,w} = \left(\int_B u^2(x)w(x)dx\right)^{1/2}$, $\|\nabla u\|_2 = \left(\int_B |\nabla u(x)|^2 dx\right)^{1/2}$,

B 为 R^n 中的球.(Boll. Unione Mat. Ital Sez. B,1999,(8)2(3):629 ~ 637)

(7)　**SVD 型不等式**(Sobolev-Visik-Dubinskii 型不等式):设 $p \geqslant 0, q \geqslant 1, r \geqslant 1, \alpha > 0, Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ 为 n 维方体,f 在 Q 上连续,在 Q 的内部可微,且 $f(a_k) = f(b_k), 1 \leqslant k \leqslant n$,则

$$\int_Q |f(x)|^{r(p+q)} dx \leqslant c^q \int_Q \left(\sum_{k=1}^n \left|\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|^\alpha\right)^{\frac{r(p+q)}{\alpha}} |f(x)|^{rp} dx.$$

(Pachpatte,B. G. [330]1999,30(3):213 ~ 218)

问:常数 c 的最佳值是多少?

(8)　下面设 $f \in W^{1,2}(R^n)$, $\hat{f}(y) = \int_{R^n} f(x)\exp(2\pi xyi)dx$,

$$G(f) = \int_{R^n}\left(\frac{|f|}{\|f\|_2}\right)^2 \log\left(\frac{|f|}{\|f\|_2}\right)^2 dx. \tag{29.3}$$

①　Gross-Sobolev 对数不等式:

$$G(f) + n\{1 + \log(\lambda\sqrt{\pi})\} \leqslant \lambda^2\left(\frac{\|\nabla f\|_2}{\|f\|_2}\right)^2. \tag{29.4}$$

它等价于

$$G(f) \leqslant \frac{n}{2}\log\left[\frac{2}{\pi e n}\left(\frac{\|\nabla f\|_2}{\|f\|_2}\right)^2\right]. \tag{29.5}$$

②　Pauli-Heisenberg-Weyl(PHW) 不等式:

若 $rf \in L^2(R^n)$, $r = |x|$, 则

$$\|f\|_2 \leqslant \sqrt{\frac{2}{n}}(\|\nabla f\|_2 \|rf\|_2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{n}}\{\|(|\xi|\hat{f})\|_2 \|rf\|_2\}^{\frac{1}{2}}, \tag{29.6}$$

仅当 $f(x) = ae^{-b|x-x_0|^2}$ $(a, b > 0,\ x_0 \in R^n)$ 时等号成立.

③　熵(entropy) 不等式:若 $rf \in L^2(R^n)$, 则

$$G(f) \geqslant \left(-\frac{n}{2}\right)\log\left\{\frac{2\pi e}{n}\left(\frac{\|rf\|_2}{\|f\|_2}\right)^2\right\}, \tag{29.7}$$

$$G(f)-G(\hat{f})\leqslant n\log\left\{\frac{2}{n}\ \frac{\|\nabla f\|_2}{\|f\|_2}\right\},\tag{29.8}$$

$$G(\hat{f})-G(f)\leqslant n\log\left\{\frac{2}{n}\ \frac{\|rf\|_2}{\|f\|_2}\right\}.\tag{29.9}$$

④ 若 $f\in L^1(R^n)\cap L^2(R^n)$，则成立 Hirschman 不等式：

$$G(f)+G(\hat{f})\leqslant -n(1-\log 2).\tag{29.10}$$

（俄罗斯数学报告，76(1)(2007)，589 ~ 591）

(9) 对数 Sobolev 不等式：设 $f\in L^p(R^n)$，$1<p<n$，$\|f\|_p=1$，则

$$\int_{R^n}(\log|f|)|f|^p\mathrm{d}x\leqslant\frac{n}{p^2}\left[\log\left(C(p)\int_{R^n}|\nabla f|^p\mathrm{d}x\right)\right],\tag{29.11}$$

式中 $C(p)=\left(\frac{p}{\sqrt{2\pi en}}\right)^p$.

已知 $p=2$ 时 $C(2)$ 是最优常数，但 $p\neq 2$ 时 $C(p)$ 不是最优常数，那么这时 $C(p)$ 的最优值是多少？(Far East J. Appl. Math. 35(3)(2009)，387 ~ 391)

30. 1989 年 Gatto，A. E. 和 Wheeden，R. L，对于 $f\in C_0^\infty(R^n)$，$1<p\leqslant q<\infty$，证明了**加权 Sobolev 不等式**：

$$\left(\int_{R^n}|f(x)|^q u(x)\mathrm{d}x\right)^{1/q}\leqslant c\left(\int_{R^n}|\nabla f(x)|^p v(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$ ([309]1989，314，(2)：727 ~ 743)1991 年龙瑞麟、聂伏生在不同条件下证明了上述不等式.([333]1991，36(11)：801 ~ 803)

31. 1986 年 Pachpatte，B. G. 证明：设 $u_k(1\leqslant k\leqslant m)$ 是 R^n 中有紧支集的光滑函数，则

$$\left(\int\prod_{k=1}^m|u_k(x)|^p\mathrm{d}x\right)^q\leqslant\frac{1}{2\sqrt{n}}\left(\frac{1}{m}\right)^q\sum_{k=1}^m\int|\nabla u_k(x)|\mathrm{d}x,$$

式中 $p=\frac{n}{m(m-1)}$，$q=n-\frac{1}{n}$.([392]1986，103(1 ~ 2)：1 ~ 14)

32. **加权 Sobolev 插值不等式**：设 B 为 R^n 中的球，$u\in\mathrm{Lip}(\overline{B})$，$v,w_1,w_2$ 为非负权函数，$v(B)=\int_B v(x)\mathrm{d}x$，则

$$\frac{1}{w_2(B)}\int_B|u(x)|^{pq}w_2(x)\mathrm{d}x\leqslant c\left(\frac{1}{v(B)}\int_B|u(x)|^p v(x)\mathrm{d}x\right)^{q-1}$$
$$\times\left(\frac{|B|^{p/n}}{w_1(B)}\int_B|\nabla u(x)|^p w_1(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{v(B)}\int_B|u(x)|^p v(x)\mathrm{d}x\right),$$

式中 $1<p<\infty$，$q>1$.([309]1991，323(1)：263 ~ 281)

33. [MCU] 设 f 在 R^n 中连续可微、绝对可积且各个一阶偏导数均有界，则存在常数 c，使得

$$\|f\|_\infty\leqslant c\|\nabla f\|_\infty^{n/(n+1)}\|f\|_1^{1/(n+1)},$$

式中 $\nabla f(x)=\sum_{k=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_k}\vec{e}_k$ 为 f 的梯度. 还可求出 c 的最小值为 $c_{\min}=\left(\frac{n+1}{\omega_n}\right)^{1/(n+1)}$，式中 ω_n 为 n 维单位球的体积.

证　对于 $x_0 \in R^n$，令 $E = \left\{x \in R^n : |x - x_0| < \frac{f(x_0)}{\|\nabla f\|_\infty}\right\}$，对于任意 $x \in R^n$，有

$$f(x) = f(x_0) + \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x_0 + t(x - x_0))\mathrm{d}t$$
$$= f(x_0) + \int_0^1 [\nabla f(x_0 + t(x - x_0)), (x - x_0)]\mathrm{d}t,$$

从而 $|f(x)| \geqslant |f(x_0)| - \|\nabla f\|_\infty \cdot |x - x_0|$，于是

$$\int_{R^n} |f| \geqslant \int_E |f| \geqslant |f(x_0)| \frac{\omega_n}{n+1}\left(\frac{|f(x_0)|}{\|\nabla f\|_\infty}\right)^n,$$

即　$|f(x_0)|^{n+1} \leqslant \left(\frac{n+1}{\omega_n}\right) \|f\|_1 \cdot \|\nabla f\|_\infty^n$，

两边对所有 $x_0 \in R^n$ 取上确界即可得证.（[63]78）

34.　**单调函数的反向 Poincare 不等式**：设 f 在 $(0,a)$ 上非负递增，$g' \in C(0,a)$，若 $2 < p < \infty, q \geqslant 1$，则

$$\frac{\left[\int_0^a (f')^{1/p}\right]^p}{\int_0^a f(x)x^{q-1}\mathrm{d}x} \leqslant \frac{a^{p-q-1}}{q^{p-2}} B\left(\frac{1}{q}, \frac{p-2}{p-1}\right)^{p-1}.$$

式中 $B(u,v)$ 为 Beta 函数.（Benguria, R. D. 等，[302]2000,5(1):91 ～ 96）

35.　**Poincare 不等式**：设 $C_0^m(\Omega)$ 表示有界开区域 $\Omega \subset R^n$ 上一切 m 次连续可微，并在 Ω 的边界的某邻域内为 0 的函数集. 则对于所有 $f \in C_0^m(\Omega)$，有

$$\sum_{|\alpha|<m} \int_\Omega |D^\alpha f(x)|^2 \mathrm{d}x \leqslant C \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega |D^\alpha f(x)|^2 \mathrm{d}x,$$

式中常数 C 只与区域 Ω 和 m 有关.

提示：将 Ω 放在边长为 a 的方体 B 内，选择坐标系，使得 $B = \{x = (x_1, \cdots, x_n) : 0 \leqslant x_k \leqslant a\}$. 在 $B - \Omega$ 上补充定义 $f(x) = 0$，先证

$$|f(x)|^2 \leqslant a\int_0^a \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|^2 \mathrm{d}x_1，两边在 B 上积分.$$

36.　**整体 Landau 不等式**：设 $v \in A_p$，w 是双倍权函数，$1 < p \leqslant q < \infty, 0 < \alpha < 1$，则当 u 有紧支集时，下式成立

$$\|\nabla u\|_{q,w} \leqslant \|u\|_{p,v}^{1-\alpha} \|\nabla^2 u\|_{p,v}^\alpha.（[309]1991,323(1):263 ～ 281）$$

37.　**插值不等式**：设 Ω 是 R^n 中具有锥性质的开集，则存在常数 $c = c(m, \Omega)$，使得对于任给的正数 ε，$0 \leqslant k \leqslant m-1$，以及所有 $u \in W^{m,k}(\Omega)$，下式成立

$$|u|_{k,p} \leqslant c\varepsilon |u|_{m,p} + c\varepsilon^\beta |u|_{0,p},$$

式中 $\beta = -\frac{k}{m-k}$，m 为非负整数，$1 \leqslant p < \infty$，$|u|_{k,p} = \left(\sum_{|\alpha|=k}\int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}$，式中 $W^{m,k}(\Omega)$ 是 Sobolev 空间.（浙江大学学报，1986,20(2):57 ～ 62）加权插值不等式见[323]1990,42(2):959 ～ 980.

38.　设 f 在 $[0,\infty)$ 上非负连续，$p > 1$，$(1/p) + (1/q) = 1$，g 是 $[0,\infty)$ 上正的局部绝对连续函数. 令 $G(x) = \int_0^x g(t)\mathrm{d}t$，若存在两个正的常数 A, B，使得对所有的正数 x，有 $x|g'(x)| \leqslant Ag(x)$，$xg(x) \leqslant BG(x)$，而且

$$\int_0^\infty g(x)\left\{\frac{1}{G(x)}\int_0^x \frac{1}{t}(g(t))^{1/q}\int_0^t g(u)^{1/p}f(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}t\right\}^p \mathrm{d}x < \infty,$$

则

$$\int_0^\infty g(x)\left\{\frac{1}{G(x)}\int_0^x g(t)f(t)\mathrm{d}t\right\}^p \mathrm{d}x \leqslant (A+B)^p\int_0^\infty \left\{\frac{1}{x}\int_0^x g(t)^{1/p}f(t)\mathrm{d}t\right\}^p \mathrm{d}x.$$

取 $g(u)=1/(u+1)$，得到

$$\int_0^\infty \frac{1}{x+1}\left\{\int_x^\infty \frac{f(t)\mathrm{d}t}{(t+1)\log(t+1)}\right\}^p \mathrm{d}x \leqslant (1+3p)^p\int_0^\infty \left\{\int_x^\infty \frac{f(t)\mathrm{d}t}{t(t+1)^{1/p}}\right\}^p \mathrm{d}x.$$

([373]1990,48(1):124 ~ 132)

39. **Djokovic 不等式**:1965 年 Djokovic,D. Z. 提出猜想:设 $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$，记 $x=(x_0,x_1,\cdots,x_n)$，

$$f(t,x)=\prod_{k=0}^{n}(t-x_k), \tag{39.1}$$

$$M=\max\{|f(t,x)|:x_0<t<x_n\}, \tag{39.2}$$

$$\varphi(x)=\frac{1}{M}\int_{x_0}^{x_n} f(t,x)\mathrm{d}t, \tag{39.3}$$

则

$$(-1)^k\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_k}>0. \tag{39.4}$$

第二年，他又指出(39.4)式应改为

$$(-1)^{n+1-k}\partial\varphi(x)/\partial x_k>0. \tag{39.5}$$

([305]1965,72,(7):794,1966,73:788E5311)在[4]422 中指出这个猜想还未解决.

1990 年，胡冠初、汤健康证明，对于任意分布的 $x_0<x_1<\cdots<x_n$，(39.5)式是不成立的. 同时证明了(39.5)式成立的几种特殊情形：

(1) 当 $n=2, x_0<x_1<x_2$，而且 $a(x_2-x_0)<x_1-x_0<(1-a)(x_2-x_0)$（其中 $a=0.1824879\cdots$）时，(39.5)式成立，当 $x_1-x_0<a(x_2-x_0)$ 或 $x_1-x_0>(1-a)(x_2-x_0)$ 时，(39.5)式不成立.

(2) 设 $x_0<x_1<\cdots<x_n$ 是 $n+1$ 个等距分布的点，则当 $n\leqslant 6$ 时，(39.5)式成立，而对较大的 n，(39.5)式不成立.

(3) 若将(39.3)式改为

$$\varphi(x)=\frac{1}{M}\int_a^b \omega(t)f(t,x)\mathrm{d}t \tag{39.6}$$

式中 $\omega(t)$ 为非负权函数，若 $a<x_0<x_1<\cdots<x_n<b$ 是 $n+1$ 次正交多项式(具有权 $\omega(t)$)的零点，则相应的(39.5)式成立.([339]1990,10(2):278)

我们还可以进一步问:使(39.5)式成立的的充要条件是什么?

40. **Bernstein-Mordell 不等式**:由 Gauss 求积公式：

$$\int_a^b f(x)w(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}c_kf(x_k)+R_n, \tag{40.1}$$

式中 f,w 为非负可积函数，$c_k\geqslant 0$，

$$R_n=\frac{f^{(2m)}(\xi)}{(2m)!}\int_a^b w(x)[Q_n(x)]^2\mathrm{d}x, a<\xi<b, \tag{40.2}$$

$$Q_n(x)=\prod_{k=1}^{n}(x-x_k),\quad \int_a^b w(x)Q_n(x)x^k\mathrm{d}x=0,\quad k=0,1,\cdots,n-1,\quad \text{则}$$

$$\int_a^b f(x)w(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\int_a^b w(x)[Q_n(x)]^2\mathrm{d}x. \tag{40.3}$$

(1)　取 $w(x)=1,[a,b]=[-1,1]$，x_k 是 n 次 Legendre 多项式 $P_n(x)$（第 6 章 § 2，二）的零点. 这时

$$c_k=\frac{2(1-x_k^2)}{[nP_{n-1}(x_k)]^2},\ 1\leqslant k\leqslant n,\quad R_n=\frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3}f^{(2n)}(\xi),\ \xi\in[-1,1].$$

(2)　取 $w(x)=e^{-x}$，$[a,b]$ 换成 $[0,\infty)$，x_k 为 n 次 Laguerre 多项式 $L_n(x)$（第 6 章 § 2，五中 $\alpha=0$）的零点. 这时

$$c_k=\frac{(n!)^2}{x_k[L'_n(x_k)]^2},\qquad R_n=\frac{(n!)^2}{(2n)!}f^{(2n)}(\xi).$$

(3)　取 $\omega(x)=\exp(-x^2)$，$[a,b]$ 换成 $(-\infty,\infty)$，x_k 是 n 次 Hermite 多项式 $H_n(x)$ 的零点，这时

$$c_k=\frac{2^{n+1}\sqrt{\pi}n!}{[H'_n(x_k)]^2},\quad R_n=\frac{\sqrt{\pi}n!}{2^n(2n)!}f^{(2n)}(\xi).$$

（$H_n(x)$ 的定义见第 6 章 § 2，三.）

当 f 为多项式时，见第 6 章，一般情形的讨论见[21]第 11 章：485 ～ 499.

41.　**数值积分不等式**：令 $\Delta_n=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$.

(1)　[MCU]. 若 f 在区间 $[0,1]$ 内可微，且当 $0<x<1$ 时，$|f'(x)|\leqslant M$，则 $|\Delta_n|\leqslant\frac{M}{n}$.

1999 年，匡继昌证明：当 f 在区间 $[0,1]$ 内满足 Lipschitz 条件：$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|^\alpha$ $(0<\alpha\leqslant1)$ 时，上界可改进为 $M/(2n)^\alpha$. 设 f 是 $[0,1]$ 上非线性凸函数，则

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right]<\Delta_n<\frac{f(0)-f(1)}{2n}.$$

（[325]83(496)(1999)，123 ～ 127）

(2)　若函数 f 是区间 $[0,1]$ 上的有界变差函数，$V_0^1(f)$ 是 f 在区间 $[0,1]$ 上的全变差，则 $|\Delta_n|\leqslant\frac{1}{n}V_0^1(f)$.

(3)　若存在 ξ：$0<\xi<1$，使得 f 在区间 $[0,\xi]$ 上递增，在 $[\xi,1]$ 上递减，$f(\xi)=M$，则 $-\frac{M-f(0)}{n}\leqslant\Delta_n\leqslant\frac{M-f(1)}{n}$. 特别，$f$ 在区间 $[0,1]$ 上递减时，有 $0\leqslant\Delta_n\leqslant\frac{f(0)-f(1)}{n}$.

(4)　一般地，寻找积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的求积公式 $Q=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k f(x_k)$，可用 Lagrange 插值公式：$f(x)\approx L_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n}f(x_k)l_k(x)$，令 $\lambda_k=\int_a^b l_k(x)\mathrm{d}x$，

$$\| f^{(n+1)} \|_c = \max\{ | f^{(n+1)}(x) | : a \leqslant x \leqslant b \}.$$

则 $\left| \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f(x_k) \right| \leqslant \frac{\| f^{(n+1)} \|_c}{(n+1)!} \int_a^b \left| \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \right| \mathrm{d}x.$

而在所有首项系数为 1 的 n 次多项式 $p_n(x)$ 中，有积分估计式：

$$\int_{-1}^{1} | p_n(x)\mathrm{d}x | \geqslant 2^{1-n}.$$

(5) **梯形公式：**

设 $R_n = \int_a^b f - T_n(f)$，式中 $T_n(f) = \left(\frac{b-a}{n}\right)\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right]$，$x_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$，则 $| R_n | \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2} \| f'' \|_\infty$.

Romberg 外插值可按下式递归定义：

$$T_{n,0}(f) = T_n(f);$$

$$T_{2n,m+1}(f) = \frac{2^{2m+2} T_{2n,m}(f) - T_{n,m}(f)}{2^{2m+2} - 1}.$$

T. von Petersdorff 证明：设 $f^{(2m+2)} \in C[a,b]$，则

$\left| \int_a^b f - T_{2^m n,m}(f) \right| \leqslant c_m \frac{(b-a)^{2m+3}}{n^{2m+2}} \| f^{(2m+2)} \|_c$. ([305]1993,100(8):783 ~ 785)

(6) **抛物线公式(Simpson 公式)：**

设 $R_n = \int_a^b f - \frac{b-a}{6n}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) + 4\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1})\right]$.

式中 $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{2n}$，$x_0 = a$，$x_{2n} = b$，则 $| R_n | \leqslant \frac{b-a}{180}\left(\frac{b-a}{n}\right)^4 \| f^{(4)} \|_c$.

(7) $R_1 = \int_a^b f - \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$. 若 $f^{(n)} \in L^2[a,b]$，$n = 1,2,3$，则

$$| R_1 | \leqslant c_n(b-a)\left\{\frac{1}{b-a} \| f^{(n)} \|_2^2 - \left(\frac{f^{(n-1)}(b) - f^{(n-1)}(a)}{b-a}\right)^2\right\}^{1/2},$$

式中 $c_1 = \frac{1}{6}$，$c_2 = \frac{1}{12\sqrt{30}}$，$c_3 = \frac{1}{48\sqrt{105}}$；若 $m \leqslant f''(x) \leqslant M$，$x \in [a,b]$，则

$$| R_1 | \leqslant \frac{(b-a)^3}{12\sqrt{30}}\left\{\frac{(M-m)^2}{4} - \left[\frac{f'(a) - 2f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'(b)}{b-a}\right]^2\right\}^{1/2}.$$

(证明及更一般的情形见 Ujevic. N. [330]2002,33(2):129 ~ 138;[394]48(2004),145 ~ 151)

(8) 设 $h_k, t_k > 0$，$h_0 = t_0 = 0$，$\sum_{k=1}^{n} h_k = h$，$\sum_{k=1}^{n} t_k = 1 - h$，$0 < h < 1$，

$x_k = \sum_{j=0}^{k} (h_j + t_j)$，$0 \leqslant k \leqslant n-1$，$A = \{f : f \in C[0,1]$，$f$ 分段可微，$\| f' \|_2 \leqslant M\}$，

$\triangle_n(f) = \left| \int_0^1 f - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} \int_{x_k}^{x_k + h_{k+1}} f(u)\mathrm{d}u \right|$，则 $\sup_{f\in A} \triangle_n(f) \geqslant \frac{M}{\sqrt{3}}\left(\frac{1-h}{2n-1}\right)$.

(Bezulik, A. V, Math. Today, 1993, 8: 153 ~ 162)

42. **Chebyshev 不等式**:设 f 在 E 上可测,记 $\{|f|>\alpha\}=\{x\in E: |f(x)|>\alpha\}$,则

$$\mu\{|f|>\alpha\}\leqslant\frac{1}{\alpha^p}\int_E|f|^p\mathrm{d}\mu,\quad \forall\alpha>0,p>0.$$

推广　设 φ 是 $(0,\infty)$ 上非负递增函数,且 $\varphi(x)=0$ 时 $x=0$,则

$$\mu\{|f|>\alpha\}\leqslant\frac{1}{\varphi(\alpha)}\int_E\varphi(|f|)\mathrm{d}\mu.$$ ([103]147)

43. **Kolmogorov 不等式**:设 f 是 R^n 上可测函数,若 $\|f\|_w=\sup\limits_{\lambda}(\lambda\mu\{|f|>\lambda\})<\infty$. 则称 $f\in WL^1(R^n)$.

若 $f\in WL^1(R^n)$,则 $\forall E\subset R^n,\mu(E)<\infty,0<p\leqslant 1$,下式成立

$$\left(\int_E|f|^p\right)^{1/p}\leqslant c(n,p)\mu(E)^{\frac{1}{p}-1}\left[\sup_{\lambda>0}\mu\{|f|>\lambda\}\right].$$ ([125]Vol. 2. 48 ~ 49)

44. 设 E 为 R^n 中测度有限的可测集,$f.g$ 是 E 上正的可测函数,令 $E_\alpha=\{|f|>\alpha\}=\{x\in E: |f(x)|>\alpha\}$,若 $\mu\{|f|>\alpha\}\leqslant\frac{1}{\alpha}\int_{E_\alpha}g$, $\forall\alpha>0$,则

$$\|f\|_p\leqslant\frac{p}{p-1}\|g\|_p,1<p<\infty.$$ ([73]264)

45. 设 $h>0$,A 为 $[a,b]$ 中可测集,则

$$\frac{1}{2h}\int_a^b\mu\{A\cap(x-h,x+h)\}\mathrm{d}x\leqslant\mu(A).$$ ([305]1982, 89: 594)

46. 设 a,b,p,q 均为正数,f 为正的递增函数,则

$$\int_a^{a+p}f\left(\frac{a}{x}\right)\mathrm{d}x+\int_b^{b+q}f\left(\frac{b}{x}\right)\mathrm{d}x\leqslant\int_{a+b}^{a+b+p+q}f\left(\frac{a+b}{x}\right)\mathrm{d}x.$$ ([1]333 定理 397)

47. 设 $f,g\in L^p$,且 f,g 为正函数,$1\leqslant r<p$,则

$$\left|\exp\left(-\int f^rg^{p-r}\right)-\exp\left(-\int f^{r-1}g^{p+1-r}\right)\right|\leqslant C_{r,p}\|f-g\|_p,$$ 式中 $c_{r,p}>0$.

(Potze-Urbach, [399]1990, 3(3): 95 ~ 96)

48. 设 $f,g\in L^p(E)$.

(1) 若 $0<p<1$,则

$$\int_E||f|^p-|g|^p|\mathrm{d}\mu\leqslant\int_E|f-g|^p\mathrm{d}\mu;$$

(2) 若 $1\leqslant p<\infty$,且 $\|f\|_p\leqslant M$, $\|g\|_p\leqslant M$,则

$$\int_E||f|^p-|g|^p|\mathrm{d}\mu\leqslant 2pM^{p-1}\|f-g\|_p.$$

49. 设 μ 为集 Ω 上的概率测度,$1\leqslant p<q<\infty$,$f\in L^q(\Omega)$ 且 $|f|$ 不几乎处处为常数,则对于 $q>3^{1/3}p$,有

$$\|f\|_q^p-\|f\|_p^p\geqslant\Delta(f,p,q)>0,$$

式中　$\Delta(f,p,q)=(q-p)/q[\|f\|_q^p-\|f\|_p^p-\|f\|_p^p\log\|f\|_q^p+\int_\Omega|f|^p\log|f|^p\mathrm{d}\mu]$. ([359]1990, 41(2): 245 ~ 248)

50. **HLP(Hardy-Littlewood-Polya) 不等式**:

(1) 设 $f\in L^2(0,\infty)$, $g^{-1},h\in L^1_{loc}(0,\infty)$, $g>0$,则

$$\int_0^\infty (g\mid f'\mid^2+h\mid f\mid^2)\leqslant c\left(\int_0^\infty \mid 1-(gf')'+hf\mid^2\right)^{1/2}\|f\|_2. \quad (50.1)$$

1995 年由 Brown, B. M. 等推广为：

设 $g_n>0, g_n^{-1}, g_{n-1}, \cdots, g_1, g_0\in L_{loc}^1(a,b)$，则

$$\int_a^b\left(\sum_{k=0}^n g_k\mid f^{(k)}\mid^2\right)\leqslant c\left(\int_a^b \omega\mid \omega^{-1}M_{2n}[f]\mid^2\right)^{1/2}\|f\|_{2,\omega}, \quad (50.2)$$

式中 $M_{2n}[f]=\sum_{k=0}^n(-1)^k(p_kf^{(k)})^{(k)}$，$f$ 及(49.2)式中出现的 f 的各阶导数 $\in L_\omega^2[a,b]$（加权 Hilbert 空间）. 加权内积定义为 $(f,g)_\omega=\int_a^b f\bar{g}\omega$. ([54]7:179 ～ 192)

(2) 设 $p\geqslant 2, n\geqslant 2, q\in R^1, n-q\neq 2$，$f$ 是 $R^n-\{o\}$ 上有紧支集的无穷可微函数，$x\in R^n$，则 $\int_{R^n}\frac{\mid f(x)\mid^p}{\mid x\mid^{q+2}}\mathrm{d}x\leqslant\left(\frac{p}{\mid n-q-2\mid}\right)^p\int_{R^n}\frac{\mid\nabla f\mid^p}{\mid x\mid^{q-p+2}}\mathrm{d}x$.

(Khajeh 等, [327]1991, 66(2):115 − 124)

(3) 设 $f:[0,\pi]\to R^1$，$f, f'\in AC[0,\pi]$，$f''\in L^2[0,\pi]$，则

$$\int_0^\pi[(f')^2-f^2]\leqslant C\left[\int_0^\pi(f''+f)^2\right]^{1/2}\|f\|_2.$$

若 $f(\pi)=0$，则 $C\approx 4.64$；若 $f(0)=f(\pi)=0$，则 $c=1$.

(Brown, B. M. 等, [54](6)；此外见[326]1994, 17(1):193 ～ 196)

51. (1) [MCU]**Kantorovich 不等式**：

设 $f, 1/f\in L[a,b]$ 且 $0<m\leqslant f(x)\leqslant M$，则

$$(b-a)^2\leqslant\left(\int_a^b f\right)\left(\int_a^b\frac{1}{f}\right)\leqslant\frac{(M+m)^2}{4Mm}(b-a)^2. \quad (51.1)$$

提示：利用 Cauchy 不等式，[345]1988.9 给出了六种证法.

推论 1 设 $f\in L[a,b]$，$0<m\leqslant f(x)\leqslant M$，则 $\forall\alpha\in R^1$，下式成立

$$(b-a)^2\leqslant\left(\int_a^b f^\alpha\right)\left(\int_a^b f^{-\alpha}\right)\leqslant\frac{[(m^\alpha+M^\alpha)(b-a)]^2}{4(mM)^\alpha}.$$

推论 2 设 f 在$[0,1]$上递增，$f(0)>0$，则

$$1\leqslant\left(\int_0^1 f\right)\left(\int_0^1\frac{1}{f}\right)\leqslant\frac{[f(0)+f(1)]^2}{4f(0)f(1)}.$$

推论 3 设 $f(x,y)$ 在有界闭域 D 上可积，且 $0<m\leqslant f(x,y)\leqslant M$，则 $\forall\alpha\in R^1$，

$$\left(\iint_D f^\alpha\right)\left(\iint_D f^{-\alpha}\right)\leqslant\frac{[(m^\alpha+M^\alpha)\mu(D)]^2}{4(Mm)^\alpha}.$$

(赵明方, [345]1986, 1:46) 离散类似见第 3 章 No. 95.

推论 4 设 $f, 1/f, \omega\in L(E)$，$0<m\leqslant f(x)\leqslant M$，$\omega(x)\geqslant 0$，$x\in E$，则

$$\left(\int_E f\omega\right)\left(\int_E\frac{\omega}{f}\right)\leqslant\frac{(M+m)^2}{4Mm}\left(\int_E\omega\right)^2.$$ (楼宇同, [353]1991, 4:24 ～ 28)

(2) 2006 年，乔希民证明，设 f, g, w 是$[a,b]$上可积函数，$w(x)>0$，$0<m_1\leqslant f(x)\leqslant M_1$，$0<m_2\leqslant g(x)\leqslant M_2$，$\alpha$ 为实数，则

$$\left(\int_a^b f^\alpha\omega\right)\left(\int_a^b g^\alpha\omega\right)\leqslant\frac{1}{4}\left[\left(\frac{M_1M_2}{m_1m_2}\right)^{\frac{\alpha}{4}}+\left(\frac{m_1m_2}{M_1M_2}\right)^{\frac{\alpha}{4}}\right]\left(\int_a^b(fg)^{\frac{\alpha}{2}}\omega\right)^2, \quad (51.2)$$

特别当 $\omega = 1$，$g = \frac{1}{f}$ 时，(51.2) 归结为(51.1).

(3)　设 f,g 是$[a,b]$上正的连续函数，$p \leqslant s \leqslant r \leqslant q$，且 $p+q=r+s$，则

$$\left(\int_a^b f^r g\right)\left(\int_a^b f^s g\right) \leqslant \left(\int_a^b f^p g\right)\left(\int_a^b f^q g\right) \tag{51.3}$$

仅当 $p=s(q=r)$ 时等号成立.([344]37(1)(2007),200 ~ 203)

(4)　设 $f:[0,1] \to [1,\infty)$，则 $\left(\int_0^1 f\right)\left(\int_0^1 \log f\right) \leqslant \int_0^1 (f\log f)$.

(5)　设 $f \in C[0,1]$，则 $\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{16}$.

(67 届 Putnam 竞赛,[305]114(8)(2007),714 ~ 724)

(6)　设 $f' \in C[a,b]$，$f(a)=f(b)=0$，$\int_a^b f^2 = 1$，则 $\int_a^b [xf'(x)]^2\mathrm{d}x > \frac{1}{4}$.

52.　设 $f,g \in L^2[a,b]$，$f \neq 0$，$m \leqslant \frac{g(x)}{f(x)} \leqslant M$　$a.e.\ x \in [a,b]$，则

$$\int_a^b g^2 + mM\int_a^b f^2 \leqslant (M+m)\int_a^b fg,$$

仅当 $g(x)=mf(x)$ 或 $g(x)=Mf(x)$ $a.e.\ x \in [a,b]$ 时等号成立.([376]1963,69:415 ~ 418)1986 年邵剑波证明了一个类似的结果.([344]1986,3:76 ~ 78)

53.　**Natanson 不等式**：设 g 在$[a,b]$上非负递减，且

$$\left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant M(x-a),\ x \in [a,b]，则$$

$$\left|\int_{a+0}^b fg\right| \leqslant M\int_a^b f.$$

提示：作分部积分，细节见[8]26.

54.　设 $f,g \in C[a,b]$，g 可微，令 $F(x) = \int_a^x f$，则

$$\left|\int_a^b fg\right| \leqslant \left[\int_a^b |g'| + |g(b)|\right]\|F\|_c.$$

特别当 $g'(x) \leqslant 0$，$g(x) > 0$ 时，下式成立

$$\left|\int_a^b fg\right| \leqslant g(a)\|F\|_c.$$

提示：作分部积分.([76]136 ~ 137)

55.(1)　设 $f,g \in L[a,b]$，$f,g > 0$，则

$$\int_a^b fg \geqslant \frac{1}{b-a}\left[\int_a^b (fg)^{1/2}\right]^2.$$

(2)　设 $f \in L^1[0,1]$，$f \geqslant 0$，$1 \leqslant p < \infty$，令 $g(x) = \int_0^{1-x} f(t)\mathrm{d}t$，则

$$\left\{\int_0^1 f(g^p)\right\}^{1/p} \leqslant \int_0^1 f(g^{1/p}).$$

它的离散类似见第 3 章 No. 121(5).(Alzer, H. [358]1994,133(1 ~ 3):279 ~ 283)

56.　**Steffensen 不等式**：设 $g_1,g_2 \in L[a,b]$，且 $\int_a^x g_1 \leqslant \int_a^x g_2$，$\forall x \in [a,b]$，且 $\int_a^b g_1 =$

$\int_a^b g_2$. 若 f 在$[a,b]$上递减，则$\int_a^b fg_1 \leqslant \int_a^b fg_2$. 若 f 递增，则不等号反向.

提示：令 $g = g_2 - g_1, G(x) = \int_a^x g(t)\mathrm{d}t$，作分部积分：

$$\int_a^b fg = \int_a^b f\mathrm{d}G = -\int_a^b G\mathrm{d}f. \quad ([4]152 \sim 153)$$

57. [MCU] 设 $f \in C[0,1], 0 \leqslant f'(x) \leqslant 1, x \in (0,1), f(0) = 0$，则

$$\int_0^1 f^3 \leqslant \left(\int_0^1 f\right)^2 \leqslant \int_0^1 f^2.$$

$f'(x) \geqslant 1$ 时不等号均反向，仅当 $f(x) = 0$ 或 $f(x) = x$ 时等号成立.

证　令 $F(x) = \left(\int_0^x f\right)^2 - \int_0^x f^3$. ([66]435 ～ 436. 另见[304]1(2)(2000))

58. 设 $f, g \in L[a,b], g > 0$，则

$$\int_a^b (f^2/g) \geqslant \left(\int_a^b f\right)^2 / \left(\int_a^b g\right).$$

提示：用 Cauchy 不等式.

59. 设 φ 是开区间(a,b)上正的连续函数. 令 $h = \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x, r(x) = 1/\varphi(x), a < x < b$，又设 f, g 是开区间(a,b)上局部绝对连续函数，而且 $r(x)[f'(x)]^2$ 和 $r(x)[g'(x)]^2$ 都在开区间(a,b)上可积，记 $A(f,\varphi) = \left(\int_a^b \varphi f\right)\left(\int_a^b \varphi\right)^{-1}$，则

$$|A(fg,\varphi) - A(f,\varphi)A(g,\varphi)| \leqslant h\pi^{-2}\left\{\int_a^b (rf')^2 \int_a^b (rg')^2\right\}^{1/2}.$$

仅当 $f(x) = A + B\sin\theta(x), g(x) = C + D\sin\theta(x)$ 时等号成立，其中 A, B, C, D 为实常数，$\theta(x)$ 定义为 $\theta(x) = \frac{\pi}{2h}\left(\int_x^b \varphi - \int_a^x \varphi\right), a < x < b$. ([331]1979, 634 ～ 677; 62 ～ 69)

60. 设 $0 < p \leqslant q < \infty, t > 0$ 时 $f(t)$ 非负可测，且满足

$$[f(s)]^p \leqslant (B/s)\int_0^s [f(t)]^p \mathrm{d}t, (s > 0), \tag{60.1}$$

则对$(0,\infty)$上任意非负递减函数 $g(s)$，都有

$$\| s^r f(s)g(s) \|_q \leqslant B^r \| fg \|_p, \text{式中 } r = 1/p - 1/q. \tag{60.2}$$

证　因为 $F = fg$ 满足(60.1)式，所以，不妨设 $g \equiv 1$. 令 $A = \| f \|_p < \infty$，则从(60.1)式有

$f(s) \leqslant A(B/s)^{1/p}, s > 0$. 从而

$$\int_0^\infty s^{(q/p)-1}[f(s)]^q \mathrm{d}s \leqslant \int_0^\infty s^{q/p-1}[A(B/s)^{1/p}]q/p[f(s)]^p \mathrm{d}s$$

$$\leqslant A^{q-p}B^{q/p-1}\int_0^\infty [f(s)]^p \mathrm{d}s = A^q B^{q/p-1},$$

两边开 q 次方即可得证. ([368]1984, 33: 267 ～ 268)

61. 设$\{f_n\}$是 E 上可测函数列，若存在 $g \in L(E)$，使得 $|f_n(x)| \leqslant g(x)$　a.e. $x \in E$，则

$$\int_E (\liminf_{n\to\infty} f_n) \leqslant \liminf_{n\to\infty}\int_E f_n \leqslant \limsup_{n\to\infty}\int_E f_n \leqslant \int_E \limsup_{n\to\infty} f_n.$$

([118]110)

62. 设 $0 \leqslant f' \leqslant 1, 0 \leqslant g(x) < x$. 若 $p > 1$，则

$$\int_0^1 \left(\frac{f(x) - f(g(x))}{x - g(x)}\right)^p \mathrm{d}x \leqslant \frac{pf(1) - [f(1)]^p}{p-1};$$

若 $p = 1$，则

$$\int_0^1 \frac{f(x) - f(g(x))}{x - g(x)} \mathrm{d}x \leqslant f(1)[1 - \ln f(1)].$$ ([1]334 定理 400)

63. 设 $x > 0, f_0(x) > 0, f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t)\mathrm{d}t$，则

$$nf_{n+1}(x) < xf_n(x).$$

提示：用数学归纳法.

64. 设 $f \in C[0,1]$，且 $0 \leqslant f(x) < 1, x \in [0,1]$，则

$$\int_0^1 \frac{f}{1-f} \geqslant \left(\int_0^1 f\right) / \left(1 - \int_0^1 f\right)$$

65. **二重积分不等式：**

(1) 设 $D = [0,1] \times [0,1]$，f 在 D 的边界 ∂D 上为零，且 $\left|\frac{\partial^4 f(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2}\right| \leqslant M$，则

$$\left|\iint_D f\right| \leqslant \frac{M}{144}.$$ [MCU]

(2) 设 $D = \{z: |z - z_0| \leqslant r, z_0 = x_0 + iy_0, 0 < r < y_0\}$，则

$$\left|\iint_D \ln\left(1 - \frac{4y\eta}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqslant \frac{c\eta}{(x_0 - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2}.$$

对上半平面内的 $\zeta = \xi + i\eta$ 一致成立，常数 C 与 D 有关. ([83]290 ~ 291)

(3) 设 $D = \{(x,y): x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ 为单位圆，∂D 为 D 的边界，若 f 在 ∂D 上为零，则存在 $(x_0, y_0) \in D$，使得

$$\iint_D f < \frac{\pi}{3}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]^{1/2}\Bigg|_{(x_0,y_0)}.$$ ([56]Vol. 2. 197)

(4) [MCU]. 设 $D = \{(x,y): r^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant R^2\}, 0 < c = (a^2 + b^2)^{1/2} < r < R$，则

$$\frac{1}{R+r} \leqslant \frac{1}{\pi(R^2 - r^2)} \iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{[(x-a)^2 + (y-b)^2]^{1/2}} \leqslant \frac{1}{r-c}.$$

(5) [MCU]. 设 $D = \{(x,y): x^2 + y^2 \leqslant 1\}$，则

$$\frac{61\pi}{165} \leqslant \iint_D \sin(x^2 + y^2)^{3/2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \frac{2\pi}{5}.$$

66. **Jensen 不等式：**$E \subset R^n, \mu(E) = 1$，$f$ 是 E 上正的可测函数，则

$$\left[1 + \left(\int_E f\right)^2\right]^{1/2} < \int_E \sqrt{1+f^2} \leqslant 1 + \int_E f.$$ ([73]170 ~ 172)

67. **Rellich 不等式：**设 $u \in C_0^\infty(R^n - \{0\})$，并且不恒等于零，则

$$\|\Delta u\|_2 \geqslant \frac{n(n-4)}{4}\left(\int_{R^n} \frac{|u(x)|^2}{|x|^4}\mathrm{d}x\right)^{1/2} \quad (n \neq 2).$$

若加上条件：$\int_0^{2\pi} u(|x|\cos\theta, |x|\sin\theta)\cos\theta \mathrm{d}\theta = 0$，

$$\int_0^{2\pi} u(|x|\cos\theta, |x|\sin\theta)\sin\theta d\theta = 0, 0 < |x| < \infty,$$

则上述不等式对 $n = 2$ 也成立.([308]1989,106(4):987 ~ 993;[330]1991,22(3):259 ~ 265);[337]32(2)(2009),256 ~ 259;[309]361(12)(2009),6191 ~ 6203)

68. **Khinchine 不等式**:这是独立函数的和按 L^p 范数的估计.

(1) 若 $\forall n \in N, \forall c_k$,可测函数列$\{f_k\}$ 满足:

$$\mu\{x: f_k(x) < c_k, 1 \leqslant k \leqslant n\} = \prod_{k=1}^{n} \mu\{x: f_k(x) < c_k\},$$

则称$\{f_k\}$为独立函数系.设$\{f_k\}$为独立函数系,若 $p > 2, \sup\limits_k \| f_k \|_p < \infty, \int_0^1 f_k(t)dt = 0$,令

$f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k f_k, \| x \|_2 = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{1/2}$,则

$$\| f \|_p \leqslant C \| x \|_2. \tag{68.1}$$

(2) 独立函数系 $\{f_k\}$ 的最简单例子就是 Rademacher 函数系:$r_k(t) = \operatorname{sgn}\sin(2^k \pi t), t \in [0,1]$.设 $x = (x_1, \cdots, x_n, \cdots) \in l^2, f(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k r_k(t), 0 < p < \infty$,则

$$\frac{1}{2} \| x \|_2 \leqslant \| f \|_p \leqslant C_p \| x \|_2. \tag{68.2}$$

式中 $\| f \|_p = \left(\int_0^1 |f|^p\right)^{1/p}, C_p = O(\sqrt{p}), p \to \infty$.([354]1923,18:109 ~ 116)

若令 $f_n(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k r_k(t)$,则当 $p \geqslant 3$ 时,下式成立

$$\| x \|_2 \leqslant \| f_n \|_p \leqslant c(p,n) \| x \|_2. \tag{68.3}$$

式中 $c(p,n) = n^{-1/2}\left(\int_0^1 \left|\sum\limits_{k=1}^{n} r_k\right|^p dt\right)^{1/p}$.

(Komorowski, R., [366]1988,20:73 ~ 75)

1989 年,冯慈璜证明:当 $p \geqslant 2$ 时,(68.3) 式仍成立,

而且 $c(p,n) = \left(2^{-n} n^{-(p/2)} \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |n - 2k|^p\right)^{1/p}$.

所用的证明方法是概率方法,用到第 15 章 §1,No. 24. Whittle 不等式.

([352]1989,16(3):350 ~ 351)

(3) 设 X 为赋范线性空间,$x_1, \cdots, x_n \in X$,则

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^{n} r_k(t) x_k \right\|^2 dt\right)^{1/2} \leqslant \int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^{n} r_k(t) x_k \right\| dt. \tag{68.4}$$

(Latala, R. [329]1994,109(1):101 ~ 104;Podkorytov, A. N. 等,Petersburg Math. J. 1999,10(1):211 ~ 215)

(4) 设 Ω 是乘积集合$\{-1,1\}^\alpha, \alpha \in I$,我们赋予它一个 Bernoulli 概率测度 $d\mu(\omega)$,这个测度是每个因子在 -1 和 1 处有质量$\frac{1}{2}$ 的测度之积,因此,Ω的元ω 就是一个由 ± 1 组成的序列 $\omega(\alpha)$,从而由 $S(\omega) = \sum\limits_{\alpha \in I} x_\alpha \omega(\alpha)$ 组成的 $L^2(\Omega)$ 的闭子空间中,所有的 $L^p(\Omega,$

$d\mu(\omega)$) 范数 $\| S \|_p = \left(\int_\Omega |S(\omega)|^p d\mu(\omega)\right)^{1/p}$ $(0 < p < \infty)$ 都是彼此等价的. 即存在两个正常数 C_1, C_2, 使得

$$C_1 \| x \|_2 \leqslant \| S \|_p \leqslant C_2 \| x \|_2, \tag{68.5}$$

式中 $\| x \| = \left(\sum_{\alpha \in I} |x_\alpha|^2\right)^{1/2}$. ([125]Vol. 1. 218 ~ 219)

(5)　**Kahane 不等式**: 设 $(X, \| \cdot \|)$ 为 Banach 空间, $1 < p < \infty$, 则存在常数 $C_p > 0$, 使得 $\forall \{x_k\} \subset X$, 下式成立

$$\| f \|_1 \leqslant \| f \|_p \leqslant C_p \| f \|_1.$$

式中, $f(t) = \sum_{k=1}^{n} r_k(t) x_k$, $\| f \|_p = \left(\int_0^1 |f|^p\right)^{1/p}$.

(俞鑫泰, Banach 空间选论. 上海: 华东师范大学出版社, 1992, 231 ~ 237)

(6)　设 $0 < p, q < \infty$. 存在常数 $C(p,q)$, 使得对 Banach 空间 $(X, \| \cdot \|)$ 中任何元 x_k, 令 $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k r_k(t)$, 有

$$\left(\int_0^1 \| f(t) \|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p} \leqslant C(p,q) \left(\int_0^1 \| f(t) \|^q \mathrm{d}t\right)^{1/q}. \tag{68.6}$$

(Kahane, J.-P., Some random series of functions, Cambridge Univ. Press, 1985)

若 X 是拟 Banach 空间, $0 < p < q < \infty$, 则存在常数 $C(p,q) \geqslant 1$, 使得

$$\left(\int_0^1 \| f(t) \|^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_0^1 \| f(t) \|^q \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C(p,q) \left(\int_0^1 \| f(t) \|^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{68.7}$$

(L. Maligranda, Proc. Inter. Symp. on Banach and Funct spaces. (2003), 83 ~ 120)

(7)　设 z_k 为复数, $\| z \|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} z_k r_k(t)$, $r, s > 0$, 则

$$\| f_n \|_r \leqslant n^{\frac{1}{q} - \frac{1}{s}} \| z \|_s. \tag{68.8}$$

式中 $q = \begin{cases} \min\{2, s\}, & r \leqslant 2, \ \dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{r'} = 1, \\ \min\{r', s\}, & r > 2. \end{cases}$

特别当 $s = r = p$ 时,

$$\| f_n \|_p \leqslant C(p) \| z \|_p. \tag{68.9}$$

式中当 $0 < p \leqslant 2$ 时, $C(p) = 1$, 当 $p > 2$ 时, $C(p) = 2^{\frac{p-2}{p}}$.

([417]155(1992), 187 ~ 197)

(8)　Khinchine 不等式的一般形式: 设 $f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k r_k(t)$, $1 \leqslant p < \infty$, 则存在正常数 C_1, C_2, 使得对于任何有限数列 $\{x_k\}$, 下式成立

$$C_1 \| x \|_2 \leqslant \| f_n \|_p \leqslant C_2 \| x \|_2.$$

当 $1 \leqslant p \leqslant 2$ 时, $C_1 \geqslant 2^{1-\frac{2}{p}}$, $C_2 = 1$; 当 $p \geqslant 2$ 时, $C_1 = 1$, $C_2 = \sqrt{2}\left(\dfrac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\right)$.

更多的细节见([22]566 ~ 568)

(9)　进一步推广见[329]1998, 130(2): 101 ~ 107. Khinchine 不等式在调和分析、小

波分析等领域有广泛的应用,例如见[57][125][133]等.

69. **Dresher 不等式**:Dresher,M 和 Danskin,J. M. 分别利用矩量空间的技巧和基本不等式证明了第 3 章 Beckenbach 不等式的积分形式:设 f,g 是非负函数,$0\leqslant r\leqslant 1\leqslant p$,则

$$\left(\frac{\int|f+g|^p}{\int|f+g|^r}\right)^{\frac{1}{p-r}}\leqslant\left(\frac{\int f^p}{\int f^r}\right)^{\frac{1}{p-r}}+\left(\frac{\int g^p}{\int g^r}\right)^{\frac{1}{p-r}}.$$

([305]1952,59:687 ~ 688;[324]1953,20:261 ~ 271;[2]28 指出也可由拟线性化方法证明)1985 年王挽澜、王鹏飞证明:设 f,g 是 $E=[0,1]$ 上正值可积函数,$1<p<2$,则

$$\|fg\|_1\leqslant\frac{\|f\|_p^p}{\|f\|_{p-1}^{p-1}}\cdot\frac{\|g\|_\alpha^p}{\|g\|_\beta^{p-1}},\quad\frac{\|f+g\|_\alpha^p}{\|f+g\|_\beta^{p-1}}\leqslant\frac{\|f\|_\alpha^p}{\|f\|_\beta^{p-1}}+\frac{\|g\|_\alpha^p}{\|g\|_\beta^{p-1}},$$

式中 $\alpha=p/(p-1)$,$\beta=(p-1)/(p-2)$.(成都科技大学学报,1987,4:121 ~ 124)

70. (1) **Beckenbach 不等式**:设 $E=[0,\beta]$,a,b,c,p,q 均为正数,$(1/p)+(1/q)=1$,$f\in L^p(E)$,$g\in L^q(E)$,$f,g\geqslant 0$,令 $h=(\frac{a}{b}g)^{q/p}$,$G(f)=(a+c\int_E f^p)^{1/p}/(b+c\int_E fg)$,则 $G(h)\leqslant G(f)$,仅当 $f=h$ a. e. 时等号成立。

1994 年,胡克将其改进为

$$G(h)\leqslant G(f)\{1-[a/(a+c\int_E f^p)-(\frac{b}{a^{1/p}})^q G(h)]^2\}^{\varphi(p)},$$

式中,当 $p>q$ 时 $\varphi(p)=1/(2p)$,当 $p\leqslant q$ 时,$\varphi(p)=(p-1)/(2p)$,仅当 $f=h$ a. e. 时等号成立.(江西师范大学学报,1994,18(2):140 ~ 141)

(2) **反向 Beckenbach 不等式**:设 $(X,\sum,\mu)$ 为有限测度空间,$f\in L^p(X)$,$g\in L^q(X)$,$1<p<\infty$,$(1/p)+(1/q)=1$,$a,b,c>0$,$h=\left(\frac{a}{b}g\right)^{q/p}$,$a-c\int_X f^p\mathrm{d}\mu>0$,$a-c\int_X h^p\mathrm{d}\mu>0$,则

$$\frac{\left(a-c\int_X f^p\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}}{b-c\int_X fg\,\mathrm{d}\mu}\leqslant\frac{\left(a-c\int_X h^p\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}}{b-c\int_X hg\,\mathrm{d}\mu}.$$

作者们还由此导出离散类似,并推广了王中烈的结果.(Mond,B. 等[359]1995,51(3):417 ~ 420)

71. **Moser 不等式**:设 $f\in L^p(0,\infty)$,$1<p<\infty$,$(1/p)+(1/q)=1$,定义 $F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,$x>0$,则 $\forall a\leqslant 1$,$\|f\|_p\leqslant 1$,存在常数 C_p,使得

$$\int_0^\infty\exp\{ax^q|F(x)|^q-x\}\mathrm{d}x\leqslant C_p.\tag{71.1}$$

若 $f\in L^p(R^1)$,$f\geqslant 0$,$\|f\|_p\leqslant 1$,F 定义为

$$F(x)-F(0)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,\text{并满足}\quad\int_{-\infty}^\infty F(t)e^{-|t|}\mathrm{d}t=0.$$

设 $1<p<\infty$,$(1/p)+(1/q)=1$,$a\leqslant 1$,则

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{a\mid F(x)\mid^{q}-\mid x\mid\}\mathrm{d}x\leqslant C_{p}. \tag{71.2}$$

Holland,F. 与 Walsh. D. 先后将上述结果推广到一般的积分算子：

$$F(x)=(Tf)(x)=\int_{R^1}K(x,y)f(y)\mathrm{d}y.$$

其中核 $K(x,y)$ 为非负且 -1 次齐次.（[329]1995,113(2):141 ～ 168 和[360]1999,73(6):442 ～ 458）

72.　设 f,g 在$[a,b]$上满足条件：

$g(x)/f'(x)$ 单调且 $\dfrac{f'(x)}{g(x)}\geqslant m>0$ 或 $\dfrac{f'(x)}{g(x)}<-m<0$，则

$$\left|\int_a^b g(x)\exp(if(x))\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{4}{m},$$

（Titchmarsh,E. C. Theory of Riemann Zeta-function,Oxford 1951）

73.　**单调函数的加权不等式：**设 f 是$(0,\infty)$上正的可测函数且 $x^{-a}f(x)$ 递减，$0<p\leqslant q<\infty$，u,v 为权函数，则 $\|f\|_{q,u}\leqslant C\|f\|_{p,v}$ 成立的充要条件是

$$\sup_{t>0}\left(\int_0^t x^{aq}u(x)\mathrm{d}x\right)^{1/q}\left(\int_0^t x^{pa}v(x)\mathrm{d}x\right)^{-1/p}<\infty.$$

（Maligranda,L. ,Collect. Math. 1997,48(4 − 6):687 ～ 700 和[317]1998,57(2):363 ～ 370）多重积分的相应不等式见 Math. Bohem 1999. 121(2 ～ 3):329 ～ 335.

74.　设 F 是$(0,\infty)$上实值函数，使得 $g(x)=\dfrac{F(x)-F(0)}{x}$ 是$(0,\infty)$上正的递增函数. $P_n(x)$ 为 n 阶代数多项式，且 $P_n'(x)$ 的所有零点均位于$[-1,1]$内. $|P_n(x)|\leqslant 1,x\in[-1,1]$. $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$ 是 Chebyshev 多项式，则

$$\int_{-1}^{1}F(|P''_n(x)|)\mathrm{d}x\leqslant\int_{-1}^{1}F(|T''_n(x)|)\mathrm{d}x,$$

仅当 $P_n=\pm T_n$ 时等号成立.（Avvakumova. L. S. ,East J. Approx. 1997,3(2):187 ～ 201）

75.　**椭圆积分不等式：**

(1)　$\dfrac{\pi}{6}(a+2b)\leqslant\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{\pi}{6}(2a+b)$，　$a,b>0$.

(2)　$\dfrac{\pi}{6}<\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}}\mathrm{d}x<\frac{\sqrt{2}}{8}\pi$.

祁锋利用构造辅助函数方法，将上下限分别改进为 $\dfrac{79}{192}+\dfrac{\sqrt{2}}{10}$ 与 $\dfrac{3}{10}+\dfrac{27\sqrt{2}}{160}$.

（[344]1996,26(3):285 ～ 288）

注　清华大学 1985 年数学竞赛试题为：$\dfrac{1}{2}<\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2+x^3}}<\frac{\pi}{6}$.

(3)　$\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}<\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}<\frac{\pi}{2}$.

(4)　$\alpha>2$ 时，

$$\frac{1}{2}<\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^{\alpha}}}<\frac{\pi}{6}.$$

(5)[MCU]. $\frac{1}{20\sqrt[3]{2}} < \int_0^1 \frac{x^{19}}{\sqrt[3]{1+x^6}}dx < \frac{1}{20}$.

更一般地，当 $p \geqslant 1, q, \alpha > 0$ 时，有

$$\frac{1}{p \times 2^{1/q}} < \int_0^1 \frac{x^{p-1}}{(1+x^\alpha)^{1/q}}dx < \frac{1}{p}.$$

(6) **扁旋转椭球面的表面积：**

$$S = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-(\varepsilon \sin t)^2}dt > \frac{4\pi^2}{3}(2a^2+b^2).$$

式中 $0 < \varepsilon \leqslant 1, \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}, a > b$.（另见第 4 章 §3No. 5）

(7) 设 $f(t) = \int_0^1 (1-2x\cos t + x^2)^{-3/2}dx, 0 < t < \pi$，则

$$f(t) < \frac{\pi^2(\pi - t)}{8t^2}, (0 < t \leqslant \frac{\pi}{2}); f(t) < (\sin t)^{-3}, (0 < t < \pi).$$

提示：作换元 $x = \cos t + y\sin t$，得

$$f(t) = (\sin t)^{-2}\left(\sin\frac{t}{2} - \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

再利用 $\sin x - \sin y < |x-y|, (x \neq y), \sin t > \frac{2}{\pi}t, (0 < t < \pi/2)$，即可得证.

(8) $\frac{\pi^2}{4\sqrt{2}} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-(1/2)(\sin x)^2}} < \frac{\pi}{\sqrt{2}}\ln(1+\sqrt{2})$ ·

(9) [MCU]. $f(y) = \int_0^y \sqrt{x^4 + (y-y^2)^2}dx \leqslant \frac{1}{3} \quad (0 \leqslant y \leqslant 1)$.

提示：证 $f'(y) > 0$，[305]1992:715 ~ 724.

(10) 第一类完全椭圆积分为 $F(r) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-(r\sin t)^2}}, 0 < r < 1$，第二、三类完全椭圆积分分别定义为

$$E(r) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-r^2\sin^2 t}\,dt,$$

$$G(r) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{(1+a\sin^2 t)\sqrt{1-(r\sin t)^2}}.$$

(1) $\frac{\pi \arcsin r}{2r} < F(r) < \frac{\pi\log\left(\frac{1+r}{1-r}\right)}{4r}$.

(2) $E(r) < \frac{16-4r^2-3r^4}{4(4+r^2)}F(r)$.

(3) 当 $r^2 \leqslant \frac{2}{3}$ 时，$E(r) \geqslant \frac{16-28r^2+9r^4}{4(4-5r^2)}F(r)$.

(4) 若 $-1 < a < 0$，或 $a > \frac{r^2}{2-3r^2} > 0$，则

$$F(r) < \left(1+\frac{a}{2}\right)G(r),$$

当 $0<2a<r^2$ 时,不等号反向.

(5)　若 $-2<2a<r^2$,则 $G(r)E(r)>\dfrac{\pi^2}{4\sqrt{1+a}}$,当 $a>\dfrac{r^2}{2-3r^2}>0$ 时,不等号反向.

利用这些不等式,可以推出

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\frac{\cos x}{2}}<\frac{\pi}{2}(\log 3-\log 2),\qquad (\text{另见 No. 130})$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1-\frac{\sin x}{2}}>\frac{\pi}{2}(\log 2).\qquad (\text{以上见祁锋[351]2006(3):256})$$

(6)　令　$f(r)=\dfrac{1}{1-r^2}\left[F(r)/\ln\left(\dfrac{4}{\sqrt{1-r^2}}\right)-1\right]$,

则　$$0.13309\cdots=\frac{\pi}{\ln 16}-1<f(r)<\frac{1}{4}.$$

上下界均为最佳.([319]1998,124(2):309 ~ 314)

76.　**概率积分不等式**:设

$$F(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x[\exp(-t^2)]\mathrm{d}t,R(x)=\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)\int_x^\infty\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t.$$

$F(x)$ 称为概率积分(或误差函数),$R(x)$ 称为 Mills 比,它们在概率统计中占有十分重要的地位.因而,有关 $F(x)$,$R(x)$ 的不等式也有许多研究.常用的有:

(1)　$F(x)$ 是单调递增的凸函数.

(2)　对于 $x>0$,有 $1-\exp(-c_1x^2)<F^2(x)<1-\exp(-c_2x^2)$,式中 $0\leqslant c_1\leqslant 1$,$c_2\geqslant\dfrac{4}{\pi}$;$1-\exp(-x^2)<F^2(x)<1-\exp\left(-\dfrac{4}{\pi}x^2\right)$.[MCU].

(3)　对任意实数 x,有

$$F(x)>1-\exp(-2x^2)-\frac{1}{2}\exp(-x^2).$$

(4)　对于任意非负实数 x,y,有 $F(x)F(y)\geqslant F(x)+F(y)-F(x+y)$,仅当 x 或 y 等于 0 或 ∞ 时等号成立.

(5)　**Gordon 不等式:对于 $x>0$,有**

$$\frac{x}{x^2+1}\leqslant R(x)\leqslant\frac{1}{x}.$$

(6)　$$\frac{2}{\sqrt{x^2+4}+x}<R(x)<\frac{2}{\sqrt{x^2+2}+x},(x>0).$$

提示:利用当 $x>0$ 时,有不等式:

$$\left(\int_x^\infty t\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t\right)^2\leqslant\int_x^\infty\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t\int_x^\infty t^2\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t.$$

(7)　$R(x)$ 的最好上、下界是:当 $x>0$ 时,

$$\frac{2}{\sqrt{x^2+4}+x}<R(x)<\frac{2}{\sqrt{x^2+(8/\pi)}+x},$$

$$\frac{\pi}{\sqrt{x^2+2\pi}+(\pi-1)x}<R(x)<\frac{\pi}{\sqrt{(\pi-2)^2x^2+2\pi}+2x}.$$

有关 $R(x)$ 的不等式的详细讨论见[4]§2.26. 另见[351]2009(1):22 ~ 27.

77. 令 $G(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{\infty}[\exp(-\frac{t^2}{2})]\mathrm{d}t, x>0.$

(1) $G(x)<\min\{\frac{1}{4}\exp(-\frac{x^2}{2}),\frac{1}{2\sqrt{2\pi}x}\exp(-\frac{x^2}{2})\}$;

(2) $$\left.\begin{matrix}\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}(\sqrt{4+x^2}-x)\exp(-\frac{x^2}{2})\\ \frac{1}{2}-[\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\exp(-x^2)]^{1/2}\end{matrix}\right\}\leqslant G(x)$$

$$\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}x}\exp(-\frac{x^2}{2})-(\frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi x^2}\exp(-x^2))]^{1/2}.$$

注意不等式左边的两个下界不能比较. ([4]238)

78. 令 $R_p(x)=\exp(x^p)\int_x^{\infty}\exp(-t^p)\mathrm{d}t, p>1, 0\leqslant x<\infty$,则

$$\frac{1}{2}[(x^p+2)^{1/p}-x]<R_p(x)<C_p[(x^p+C_p^{-1})^{1/p}-x],$$

式中 $C_p=\left\{\Gamma(1+\frac{1}{p})\right\}^{p/(p-1)}$.

79. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t$ 称为**正态分布函数**:

(1) $$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left\{1-\exp(-\frac{2x^2}{\pi})-\frac{2(\pi-3)}{3\pi^2}x^4\exp(-\frac{x^2}{2})\right\}^{1/2}\leqslant f(x)$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left\{1+[1-\exp(-\frac{2x^2}{\pi})]^{1/2}\right\},(x>0);$$

(2) $x>1.4$ 时,$f(x)\leqslant 1-\frac{1}{2}[(4+x^2)^{1/2}-x](2\pi)^{-\frac{1}{2}}\exp(-\frac{x^2}{2})$;

(3) $x>2.2$ 时,$f(x)\geqslant 1-\frac{1}{x}(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\exp(-\frac{x^2}{2})$. ([101]933)

(4) **Esseen 不等式**:对于非负实数 x,y,有 $f(-x-y)\leqslant 2f(-x)f(-y)$.

(5) 1984 年 Petkovic, M. S. 用更一般的凸函数 φ 来代替(4)中的指数 $t^2/2$,证明了:设 φ 是 $(-\infty,\infty)$ 上可微的凸函数,且 $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=\infty$,对于 $c>0$,令 $f(x)=c\int_{-\infty}^{x}\exp(-\varphi(t))\mathrm{d}t, \lambda=[f(0)]^{-1}$,则对于正实数 x,y 有

$$f(-x-y)\leqslant\lambda f(-x)f(-y).$$

若 φ 还满足条件:$\varphi(-x)\equiv\varphi(x)$,并且令 $g(x)=b\int_0^x\exp\{-\varphi(\alpha t)\}\mathrm{d}t, b>0, \alpha\in R^1$,则

$$g(x)+g(y)-g(x+y)\leqslant\mu\lambda g(x).$$

式中 $\mu=\alpha c/b$. ([331]1984,11 ~ 14)

80. (1) **Conte 不等式**:设 $x>0$,则

$$(x+\frac{x^2}{24}+\frac{x^3}{12})\exp(-\frac{3}{4}x^2)<\exp(-x^2)\int_0^x\exp(t^2)\mathrm{d}t\leqslant\frac{\pi^2}{8x}(1-\exp(-x^2)).$$

(2)　$\int_0^x \exp(t^\alpha)\mathrm{d}t \leqslant \frac{\exp(x^\alpha)-1}{x^{\alpha-1}}, \alpha \geqslant 1.$

(3)　[MCU].　$2\exp(-\frac{1}{4}) \leqslant \int_0^2 \exp(x^2-x)\mathrm{d}x \leqslant 2e^2.$

(4)　$\frac{1}{2}-\frac{1}{2e} < \int_0^\infty \exp(-x^2)\mathrm{d}x < 1+\frac{1}{2e}.$

(5)　$1-\frac{1}{e} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp(-\sin x)\mathrm{d}x < \frac{\pi}{2}(1-\frac{1}{e}).$

(6)　[MCU].　$\frac{5\pi}{2} < \int_0^{2\pi} \exp(\sin x)\mathrm{d}x < 2\pi e^{1/4}.$

(7)　设 a,b,x 均大于 0,则

$$0 < \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \sqrt{bx}\int_0^a \exp(-bxt^2)\mathrm{d}t < \frac{1}{\sqrt{bx}}\exp(-a^2bx).$$

81.　设 $x>0$,则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot \exp(-x^2\sin^2 t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi^2}{8x^2}[1-\exp(-x^2)].$$ ([4]400)

祁锋将式中$\frac{\pi^2}{8}$改进为 1.([303]1999,2(1):48)

82.(1)　[MCU] 设 $\alpha>0$,则

$$1-\frac{1}{\alpha+1} < \int_0^1 \exp(-x^\alpha)\mathrm{d}x < 1.$$

(2)　[MCU]　$\frac{\pi}{4}(1-\frac{1}{e}) < \left(\int_0^1 \exp(-x^2)\mathrm{d}x\right)^2 < \frac{16}{25}.$

(3)　令 $h_p(x) = \int_0^x \exp(-t^p)\mathrm{d}t, x>0$,则

$$\Gamma(1+\frac{1}{p})[1-e^{-\beta x^p}]^{1/p} < h_p(x) < \Gamma(1+1/p)[1-e^{-\alpha x^p}]^{1/p},$$

式中,$0<p<1$ 时,$\alpha=1,\beta=[\Gamma(1+1/p)]^{-p}$,$p>1$ 时 $\alpha=[\Gamma(1+1/p)]^{-p},\beta=1$.(Alzer,H. Math. Comput. 1997,66:771 ～ 778)

1999 年,祁锋等证明:若 $0<p\leqslant 1, x>0$,则

$$x\exp[-(x/2)^p] \leqslant h_p(x) \leqslant (x/2)[1+\exp(-x^p)].$$

若 $p>1, 0<x<(1-(1/p))^{1/p}$,则上述不等号反向.

其证明和进一步的结果见[303]1999,2(1):47 ～ 53.

83.　设 $x\geqslant 1$,则对于任意实数 t,有

$$\int_0^x \frac{x^{[t]}}{[t]!}\mathrm{d}t \geqslant e^{x-1}.$$

式中$[t]$是不超过 t 的最大整数.

84.　若 $x>0$,则

$$0 < \int_0^\infty \frac{[t]-t+1/2}{t+x}\mathrm{d}t < \frac{1}{12x}.$$

85.　设 $f(t) = \prod_{k=1}^{n-1}(t-k)$,则

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_n^\infty e^{-t}f(t)\mathrm{d}t < (e-1)^{-n} < \left(\frac{2}{e}\right)^n.$$

其中$(e-1)^{-n}$是最佳上界.([77]Ex261)

86. 设$f_n(x)=\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t$,若$0<x<1$,则

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1-nx} \leqslant f_n(x) \leqslant \left(\frac{1}{1-x}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

若$x<0$,则

$$\frac{(n+2)\,|x|^{n+1}}{(n+1)[n+2-(n+1)x]} < (-1)^{n+1}f_n(x) \leqslant \frac{2\,|x|^{n+1}}{(n+1)(2-x)}.$$ (祁锋)

87. **Littlewood 猜想**:设$0<n_1<n_2<\cdots<n_N$,1948年,Littlewood猜测:

$$\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=1}^N \exp(in_kx)\right|\mathrm{d}x > c\ln N.$$

1981年,Konjagin和McGehee-Pigno-Smith分别独立地证明了这个著名的猜测,而且证明了一个更强的结果:

$$\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=1}^N c_k\exp(in_kx)\right|\mathrm{d}x > c\sum_{k=1}^N \left|\frac{c_k}{k}\right|.$$ ([376]1981,5:71 ~ 72)

88. 对于任意复数$a_1,\cdots,a_n$,有

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=1}^n a_k\exp(it_k)\right|\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_n \geqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2}\|a\|_2.$$

式中$\|a\|_2=\left(\sum_{k=1}^n|a_k|^2\right)^{1/2}$,$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$是最佳常数.([329]1985,81(1):107 ~ 126)

89. 设$\{n_k\}$是递增数列,且$\forall k, n_{k+1}/n_k\geqslant\lambda>1$,$0<p<\infty$,则存在与$p$无关的常数$c>0$,使得

$$\frac{1}{c}\|a\|_2 \leqslant \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=1}^N a_k\exp(in_kx)\right|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p} \leqslant c\|a\|_2,$$

式中$\|a\|_2=\left(\sum_{k=1}^N|a_k|\right)^{1/2}$.([57])

90. 设f在区间$[0,\pi]$上递增连续,且$f(0)=0$,$f(\pi)=\pi$,则

$$\left|\int_0^\pi \exp(if(x)-ix)\mathrm{d}x\right| > 2.$$

其中2是最佳下界.(Michigan Math. J. 1963,10:181 ~ 192)

91. 设$\alpha,\beta>0$,$p=\beta/(\beta+1)$,则

$$\int_0^1 e^{\alpha t}\cdot\exp[-(1-t)^{-\beta}]\mathrm{d}t \leqslant 2\exp(\alpha-\alpha^p).$$

92. $$\frac{3}{4} < \int_0^1 x^x\mathrm{d}x < \frac{5}{6}.$$

93. 设$p\geqslant1$,$1-1/p<\alpha<2-1/p$,对于$f\in L^p(0,\infty)$,令

$$F(x)=\int_0^\infty f(t)\,\frac{\sin xt}{t^\alpha}\mathrm{d}t,$$

则对于所有$\beta\geqslant p$,存在常数$A(\beta,p,\alpha)$,使得

$\left(\int_0^\infty x^q \mid F(x) \mid^\beta \mathrm{d}x\right)^{1/\beta} \leqslant A(\beta,p,\alpha) \| f \|_p$，式中 $q = \beta(1-(1/p)-\alpha)-1$.（[73]370 ~ 373）

问题：如何估计常数 $A(\beta,p,\alpha)$？

94. **Salem 不等式**：设 $\{E_k\}$ 是 $(0,2\pi)$ 中任意递增或递减集列，则

$$\sum_{k=2}^{\infty}(\log k)^{-1}\left\{\left(\int_{E_k} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_{E_k} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x\right)^2\right\}\leqslant c\,\| f \|_2^2.$$

若 $0<n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$，$n_{k+1}/n_k>q>1$，记 $E_k=E_{n_j}$，$(n_{j-1}<k\leqslant n_j, j=1,2,\cdots)$，则

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left(\int_{E_k} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_{E_k} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x\right)^2\right\}\leqslant c_q\,\| f \|_2^2$$

（[57]Vol. 2. 197）

95.（1）设二阶导数 φ'' 在区间 $[a,b]$ 上连续且不为 0，若存在常数 $c>0$，使对于 $[a,b]$ 中所有 x，有 $\varphi'(x)\geqslant c$，则

$$\left|\int_a^b \sin\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{4}{c}.$$

提示：在被积式中乘上和除以 $\varphi'(x)$，然后用积分第二中值公式.

（2）若在 $[a,b]$ 上，φ 的导数 φ' 递减且 $|\varphi'(x)|\geqslant c>0$，则

$$\left|\int_a^b \cos\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right|\geqslant\frac{2}{c}.$$

（3）设 f 在 $[0,2\pi]$ 上递增且连续可微，则

$$\left|\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{2}{n}[f(2\pi)-f(0)].$$

（4）设 f 在 $(0,\infty)$ 上可积，且 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 递减趋于 0，则

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k f\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right)<\int_0^\infty f(x)\sin x\,\mathrm{d}x<f(0)+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k f\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right).$$

（[22]314）

（5）设 f 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上连续，则

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)^2\mathrm{d}y+\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)^2\mathrm{d}x$$
$$\leqslant\left(\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^2+\int_0^1\int_0^1 (f(x,y))^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{95.1}$$

（65 届 Putnam 数学竞赛）

提示：用 Fourier 级数理论证明. 利用 f 的 Fourier 系数

$$\hat{f}(m,n)=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)e^{-2\pi i(mx+ny)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

令 $F(x)=\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y$，$F$ 的 Fourier 级数是 $\sum\limits_m \hat{f}(m,0)e^{2\pi imx}$. 由 Parseval 恒等式，得到

$$\int_0^1 F^2(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)^2\mathrm{d}x=\sum_{m=-\infty}^{\infty}|\hat{f}(m,0)|^2.$$

类似地

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\right)^2\mathrm{d}y=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\hat{f}(0,n)|^2.$$

又由 $L^2(T^2)$ 中的 Parseval 恒等式，得到

$$\int_0^1\int_0^1(f(x,y))^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}|\hat{f}(m,n)|^2.$$

于是(95.1)式右端 − 左端 $=\sum_{m,n\neq 0}|\hat{f}(m,n)|^2\geqslant 0.$

96.(1) **Dunkel 不等式**：设函数 f 在 $[a,b]$ 上可积，不恒等于 0，且当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时，$0\leqslant f(x)\leqslant M$，则

$$0<\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2-\left(\int_a^b f(x)\cos x\mathrm{d}x\right)^2-\left(\int_a^b f(x)\sin x\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\frac{1}{12}M^2(b-a)^4.$$

注 上界可改进为

$$M^2(b-a)^2\left[1-\left(\frac{\sin\left(\frac{b-a}{2}\right)}{\frac{b-a}{2}}\right)^2\right].$$

提示：令 $D=[a,b]\times[a,b]$，将不等式中的积分差化为二重积分处理.

$$J=\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2-\left(\int_a^b f(x)\cos x\mathrm{d}x\right)^2-\left(\int_a^b f(x)\sin x\mathrm{d}x\right)^2$$

$$=\iint_D f(x)f(y)(1-\cos(x-y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$ 从而

$$0<J<M^2\iint_D[1-\cos(x-y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

([305]1925,32:319 ~ 321)

(2) [MCU]. 设 $f\in C[a,b]$，$f(x)\geqslant 0$，$\int_a^b f=1$，$\beta\in R^1$，则

$$\left(\int_a^b f(x)\cos\beta x\,\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\sin\beta x\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant 1.$$

97. 设 f 在区间 $[0,\pi]$ 上有二阶连续导数，$f(0)=f(\pi)=0$，若 f 的 Fourier 级数展开式的部分和为 $S_n(f,x)=\sum_{k=1}^{n}a_k\sin kx$，则

$$\int_0^\pi[f(x)-S_n(f,x)]^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{3(n+1)^3}\int_0^\pi[f''(x)]^2\mathrm{d}x.$$

98. **Dirichlet 核 $D_n(t)$ 的积分不等式**：

(1) $$\int_0^\pi|D_n(t)|\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}\frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}\mathrm{d}t<\pi\left(1+\frac{\log n}{2}\right)\quad(n\geqslant 2).$$

提示：$\int_0^\pi|D_n(t)|\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2(2n+1)}}+\int_{\frac{\pi}{2(2n+1)}}^{\pi/2}=I_1+I_2.$

利用 $|\sin nt|\leqslant n|\sin t|$ 估计 I_1，而利用 $\sin t\geqslant\frac{2}{\pi}t$，以及 $|\sin(2n+1)t|<1$ 估计 I_2.

(2) $$\frac{2}{\pi}\ln(n+1)\leqslant\int_0^\pi|D_n(t)|\mathrm{d}t\leqslant\frac{\pi}{2}(1+\ln(2n+1)).$$

(3) $\int_0^{2\pi} |D_n(t)|\mathrm{d}t < \begin{cases} \pi(\ln n + \ln\pi) + 2\left(1 + \dfrac{1}{2n}\right); \\ \pi\ln n\left(1 + \dfrac{\ln\pi}{\ln 2} + \dfrac{5}{2\pi\ln 2}\right). \end{cases}$

(4) $\int_0^{1/n} D_n(t)|\mathrm{d}t \leqslant 1 + \frac{1}{2n}$.

(5) $\int_{1/n}^{\pi} |D_n(t)|\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{2}(\ln\pi + \ln n)$.

(6) $\left|\int_x^{\pi} D_n(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\pi}{(n+1)x}, 0 < x < \pi$.

([327]1992,71:344 ～ 358)

注　$D_n(t)$ 的定义见第6章 § 3. No. 41. $L_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |D_n(t)|\mathrm{d}t$ 称为 $D_n(t)$ 的 Lebesgue 常数，已知 $L_n = \frac{4}{\pi^2}\ln n + R_n$，$|R_n| \leqslant 3$.

记
$$C_1 = \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\log k}{4k^2 - 1} + \frac{4}{\pi^2}(\gamma + 2\log 2) = 0.98943\cdots,$$
γ 是 Eurler 常数.
$$C_2 = \frac{12 - \pi^2}{18\pi^2} = 0.01199190\cdots$$
$$C_3 = \frac{7}{120\pi^2}\left(8 - \frac{2}{3}\pi^2 - \frac{\pi^4}{90}\right) = 0.00199736\cdots$$
$$C_4 = \frac{1}{16\pi^2}\left(32 - \frac{8}{3}\pi^2 - \frac{2}{45}\pi^4 - \frac{1}{945}\pi^6\right) = 0.00211774\cdots$$
则
$$0 < L_{\frac{n}{2}} - \left\{\frac{4}{\pi^2}\log(n+1) + C_1 + \frac{C_2}{(n+1)^2} - \frac{C_3}{(n+1)^4}\right\} < \frac{C_4}{(n+1)^6}.$$
([301]349(2009),68 ～ 73)

99.　Fejèr 核 $K_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(x)$ 的积分不等式：

(1)　若 $0 < \alpha \leqslant 1$，则 $\frac{1}{2\pi}\int_0^{1/n} x^{\alpha}K_n(x)\mathrm{d}x \leqslant n^{-\alpha}$.

(2) $\frac{1}{2\pi}\int_{1/n}^{\pi} x^{\alpha}K_n(x)\mathrm{d}x \leqslant \begin{cases} \dfrac{\pi n^{-\alpha}}{2(1-\alpha)}, & 0 < \alpha < 1, \\ \left(\dfrac{\pi}{2}\right)\dfrac{\log n + \log\pi}{(n+1)}, & \alpha = 1. \end{cases}$

(3) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} x^{1+\alpha}K_n(x)\mathrm{d}x \leqslant \pi^2/(n\cdot 2^{\alpha}), 0 < \alpha \leqslant 1$.

(4) $\int_{\delta}^{\pi} K_n(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{\pi^2}{2(n+1)\delta}$,　$0 < \delta < \pi$.

100.　从 Dirichlet 核 $D_n(t)$ 还可得到 ***n* 阶 Rogosinski 核**：

$$R_n(t) = R_n(t, \gamma_n) = \frac{1}{2}[D_n(t - \gamma_n) + D_n(t + \gamma_n)] = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k\gamma_n \cos kt,$$

式中 $\gamma_n = 0(\frac{1}{n})$. 特别当 $\gamma_n = \frac{\pi}{2n}$ 时, $R_n(t) = R_n(t, \pi/2n)$ 可以表示为

$$R_n(t) = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2n}\frac{\cos nt}{\cos t - \cos\pi/2n} = c\prod_{k=1}^{n-1}\left(\cos t - \cos\frac{2k+1}{2n}\pi\right).$$

它有以下常用的估计式:

(1) $\| R_n \|_c = \max_t | R_n(t) | = | R_n(0) | < \frac{2n}{\pi}$.

(2) $R_n(t)$ 的 Lebesgue 常数为

$$L_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} | R_n(t) | \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t - \gamma_n,$$

式中 $\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t < 1.851$, $0 < \gamma_n < \frac{5}{12}\cdot\frac{1}{n^2}$.

(3) $\int_{\delta}^{\pi} | R_n(t) | \mathrm{d}t < \frac{\pi^3}{4n\delta}$, $0 < \delta < \pi$.

101. 我们还可以进一步研究与它非常接近的 Тригуб 核 $\tau(t,k,n)$:

$$\tau(t,k,n) = 2^{-k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left[D_n(t) + (-1)^{j+1}D_n\left(t + \frac{j\pi}{n}\right)\right] =$$

$$= D_n(t) + 2^{-k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{j+1}D_n\left(t + \frac{j\pi}{n}\right).$$

它的 Lebesgue 常数为

$$L_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} | \tau(t,k,n) | \mathrm{d}t < 2k.$$

从 Fejer 核 $K_n(x)$ 的周期性出发可以得到非周期的代数核:

$$F_n(x) = \frac{2n}{\gamma_n}K_n[\arccos(1 - (x^2/2))]$$

$$= \frac{1}{\gamma_n}\cdot\frac{\sin^2\left[\frac{n+1}{2}\arccos\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\right]}{\sin^2\left[\frac{1}{2}\arccos\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\right]},$$

$-2 \leqslant x \leqslant 2$, 选择 γ_n 满足 $\int_{-1}^{1} F_n(x)\mathrm{d}x = 1$, 于是 $\gamma_n > n (n \geqslant 3)$, 且

$$\int_{\delta}^{1} F_n(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{\pi^2}{n\sigma} \quad (0 < \sigma < 1, n \geqslant 3).$$ ([82]129 ~ 136; 143 ~ 144)

102. 设 $\alpha, \beta > 0$, 则

$$\left| \int_0^{\infty}\frac{\alpha\sin\sqrt{\beta^2 + x^2}}{\sqrt{x^2 + \beta^2}(x^2 + \alpha^2 + \beta^2)}\mathrm{d}x \right| \leqslant \frac{c}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

103. $\int_0^{\pi/2}\sqrt{x\sin x}\,\mathrm{d}x < \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

104. 设 $0 < a \leqslant 1$, $p > 1$, 则

$$\frac{a^{p+1}}{(p+1)(n + (1/5))^{p+1}} < \int_0^{a/n}(\sin x)^p\mathrm{d}x < \frac{1}{p+1}\left(\frac{a}{n}\right)^{p+1}.$$

(左边不等式见[327]1990, 62(2): 197 ~ 205)

105. (1) [MCU]. $\frac{2}{\pi} \leqslant \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}dx < 1 < \int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}dx < \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2\pi} < \frac{\pi}{2}$.

提示：左边第一、二个不等式利用 $(2/\pi)x < \sin x < x \quad (0 < x < \pi/2)$ 即可得证. 右边不等式利用 $\cos x \geqslant 1-(x^2/2)$，得到

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}dx > \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{3\pi}{8} > 1.$$

另一方面，由 $\cos x < 1-2(x/\pi)^2 \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi)$ 得到：

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}dx < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2}{\pi^2}\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2\pi}.$$

(2) $\frac{4\sin 1}{\pi} \leqslant \int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}dx \leqslant \frac{\pi}{2}\ln(\sec 1 + \operatorname{tg} 1)$. （祁锋）

(3) $\frac{2\sin 1}{\pi} < \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\cos x dx < \frac{\pi}{4}\ln(\sec 1 + \operatorname{tg} 1)$. （祁锋）

(4) $\frac{2\ln(\sec 1 + \operatorname{tg} 1)}{\pi} < \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{\cos x}dx < \frac{\pi}{4}\sin 1$.

106. 设 $x > a > 0$，则

(1) $\left|\int_a^x \sin(t^2)dt\right| \leqslant \frac{2}{a}$.

(2) $\left|\int_a^{a+1} \sin(t^2)dt\right| \leqslant \frac{1}{a}$.

(3) $2-\sqrt{2} \leqslant \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin t|\, dt < \sqrt{2}$.

(4) $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$ 时，有 $\int_0^x (t-t^2)(\sin t)^{2n}dt \leqslant \frac{1}{2(n+1)(2n+3)}$. [MCU].

(5) $\int_0^x (\sin t)^p dt \geqslant \frac{x(\sin x)^p}{p+1}, x \in [0, \frac{\pi}{2}], p > 0$.

107. **陈建功不等式**：设 $0 \leqslant a < b, \beta > 0, A > 0$，则

$$\left|\int_a^b \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(nt - At^{-\beta})dt\right| < \frac{2}{n}.$$

提示：作换元 $x = t - n^{-1}At^{-\beta}(t > 0)$，由上式确定的 $t = \varphi(x)$ 及其导函数均严格递增，然后再用积分第二中值公式. ([334]1954 或 263 ~ 277；[8]24)

108. $\sqrt{\frac{\pi}{2(n+2)}} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n+1}dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx < \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

提示：利用公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & \text{若 } n \text{ 为偶数；} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & \text{若 } n \text{ 为奇数}. \end{cases}$$

109. $\left|\int_{\frac{2}{(2n+1)\pi}}^{\frac{2}{(2n-1)\pi}} \sin\left(\frac{1}{\sin(1/t)}\right)dt\right| \leqslant \frac{c}{n^3}$.

式中常数 c 与 n 无关. ([74]Vol. I. 185)

110.　设 $a > 0$,则 $\left|\int_a^\infty \cos(x^2)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{a}$;　$\left|\int_a^\infty \sin(x^2)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{a}$.

提示:令 $u = x^2$,再用积分第二中值公式.

111.　$\int_0^\infty \sin(x^2)\mathrm{d}x > 0$,特别 $\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin(x^2)\mathrm{d}x > 0$. [MCU].

提示:$\int_0^\infty = \sum_{n=0}^\infty \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}}$,再令 $x = \varphi(t) = \sqrt{t^2+\pi}$.

112.　[MCU]. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x < \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

证　令 $f(x,n) = \frac{\sin x}{x+n\pi}$,则

$$\int_0^\infty f(x,0)\mathrm{d}x - \int_0^\pi f(x,0)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^\infty \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x,0)\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \int_0^\pi f(x,n)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^\infty \left(-\int_0^\pi f(x,2k-1)\mathrm{d}x + \int_0^\pi f(x,2k)\mathrm{d}x\right)$$

$$= (-\pi)\sum_{n=1}^\infty \int_0^\pi \frac{\sin x}{[x+(2k-1)\pi](x+2k\pi)}\mathrm{d}x < 0.$$

113.　$1.17 < \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x < \frac{2}{\pi} \times 1.852 = 1.1790.$

提示:从　$\frac{\sin x}{x} = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!}$　得到

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x - 2\sum_{k=0}^n \frac{\pi^{2k}(-1)^k}{(2k+1)^2(2k)!}\right| \leqslant \frac{2\pi^{2n+1}}{(2n+3)^2(2n+2)!}.$$

取 $n = 4$,得左边不等式.

114.　$\frac{4\sqrt{2}}{3\pi} < \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x < \frac{\sqrt{2}}{2}.$

115.　$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x > 0.$

提示:左边 $= \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x + \int_\pi^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$

$$= \pi\int_0^\pi \left(\frac{\sin x}{x}\right)\frac{1}{\pi+x}\mathrm{d}x = \pi\,\frac{\sin\xi}{\xi}\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{\pi+x},\text{其中 } 0<\xi<\pi.$$

116.　对于任意常数 a,b,都存在绝对常数 c,使得

$$\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right| \leqslant c. \tag{116.1}$$

式中 $c = 2.704$.

注 1　若取 $c = 6$,(116.1) 式的证明就可大大简化,这时只要对于 $0 \leqslant a < b$,证明 $c = 3$,为此,先取 $1 \leqslant a < b$,由积分第二中值公式,存在 $\xi: a \leqslant \xi \leqslant b$,使得

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = a^{-1}\int_a^\xi \sin x\mathrm{d}x = a^{-1}(\cos a - \cos\xi),\text{所以},\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right| \leqslant 2.$$

若 $0 \leqslant a < b \leqslant 1$,则

$$0 \leqslant \int_a^b \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b \mathrm{d}x \leqslant 1;$$

而当 $0\leqslant a\leqslant 1\leqslant b$ 时，有

$$\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}dx\right|\leqslant\left|\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx\right|+\left|\int_1^b \frac{\sin x}{x}dx\right|\leqslant 1+2=3.$$

总之，对于 $0\leqslant a<b$，取 $c=3$，即证得(116.1)式。但要证明 $c=2.704$，难度就大得多。(河田龙夫，应用数学概论，岩波，1950、1952 年)

注 2　$$\frac{4}{3}<\frac{92-\pi^2}{60}<\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{x}dx<\frac{4\pi+8}{15}<\frac{\pi}{2};\qquad(116.2)$$

设 $0\leqslant a<b\leqslant\frac{\pi}{2}$，则

$$\frac{2(\cos a-\cos b)}{a+b}<\int_a^b\frac{\sin x}{x}dx\leqslant 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right);\qquad(116.3)$$

$$\left|\int_a^b\frac{\sin x}{x}dx\right|\leqslant\frac{2}{a}\quad(a>0).$$

(116.2)与(116.3)式的左边不等式由祁锋证明.

117.　若 $p\geqslant 2$，则

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\sin t}{t}\right|^p dt\leqslant\sqrt{\frac{2}{p}}\cdot\pi,$$

仅当 p = 2 时等号成立.([305]1990,97(8):663)

118.　设 $a>1,x\geqslant 0$，则

$$\int_x^{xa}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt\leqslant\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{a}\right).$$

119. (1)　设 $0<a<\pi$，则

$$\int_{a/2}^{\pi/2}\left|\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\right|dt\leqslant\frac{2}{2n+1}\csc\frac{a}{2}+\frac{2}{\pi}\log\frac{4}{a}.$$

([327]1990,62(2):209)

(2)　$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\right|dt<\frac{1}{2}(2+\log n).$$

120.　$$\frac{\pi}{(1+(n+1)^a\pi^a)^{1/2}}<\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}(1+x^a\sin^2 x)^{-1}dx<\frac{\pi}{(1+n^a\pi^a)^{1/2}},(\alpha>0).$$

注　这是 Glasgow 大学 1958 年试题，关于这个不等式的改进见[4]Ex3.7.11 的评注.

121.　$$\frac{\pi^2}{9}<\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{x}{\sin x}dx<\frac{\pi^2}{6}.$$

122.　当 $0<x\leqslant 1/3$ 时，下式成立

$$\int_0^x\frac{t}{\sin t}dt\leqslant x+\frac{3}{53}x^3.$$

123.　$$\int_0^x\frac{\sin t}{1+t}dt\geqslant 0,(x\geqslant 0).$$

124.　$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left|\frac{\sin n\pi x}{\sin\pi x}dx\right|\geqslant\frac{2}{k\pi}.$$

式中 $2\leqslant k\leqslant n$.([74]Vol. I. 390)

125. $\int_{1/n}^{\pi}\frac{|\sin(k+1)x|}{2\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2}\mathrm{d}x\leqslant c_1(k+1)+c_2(k+1)\ln\frac{n}{k}$，$(1\leqslant k<n)$.

126. $\int_{1/n}^{\pi}\frac{|\sin x|}{2\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2}\mathrm{d}x\leqslant c\ln n$，$(n\geqslant 2, c$ 为常数).

问题：No. 125 ～ 126 中常数 c_1, c_2, c 为何估计？

127. $1+2\ln n<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(nx)}{\sin x}\mathrm{d}x<1+\frac{1}{2}\ln(2n-1)$.

提示：利用 $(\sin nx)^2=(\sin x)\sum_{k=1}^{n}\sin(2k-1)x$，得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin nx)^2}{\sin x}\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}.$$

128. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^4\mathrm{d}x<\frac{1}{4}\pi^2n^2$.

提示：将不等式左端的积分折成 I_1, I_2 两个积分，其中

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2n}}x\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^4\mathrm{d}x,\quad I_2=\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}}x\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^4\mathrm{d}x.$$

利用 $|\sin x|\leqslant n|\sin x|$ 估计 I_1，用 $|\sin x|\leqslant 1$ 和 $\sin x\geqslant\frac{2}{\pi}x$ 估计 I_2.

记 $$f(n)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^4\mathrm{d}x.$$

1990 年叶南发将 $f(n)$ 的上界从 $(n\pi/2)^2$ 改进为 $f(n)<(n^2/9+89/288)\pi^2\ (n>2)$. ([339]1990,10(1):144) 同一年，庄碧如又证明 $n^2\log 2<f(n)<17n^2/24$. 左边不等式对所有 n 都成立，而右边不等式对于 $n\geqslant 9$ 成立，当 $n\geqslant 4$ 时，上限为 $17n^2/24+14/24$.（新疆大学学报，1990,7(2):17 ～ 26）

徐利治等则证明：$f(n)=n^2\ln 2+(1/4)\ln 2+0(1)\quad(n\to\infty)$. ([139]22 ～ 23)

进一步，我们可以令

$$G(k,m)=\int_0^{\pi/2}x^k\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^{2m}\mathrm{d}x,$$

已知 $G(2,2)<\frac{n}{6}\pi^3$. 问：$G(k,m)$ 的最佳上下界是什么？

129. 令 $f_{k,m}(x)=x^k\left(\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}\right)^{2m}$，则

(1) $$c_1n^{2m-1}\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_{0,m}(x)\mathrm{d}x\leqslant c_2n^{2m-1}.\qquad(129.1)$$

$K_{m,n}(t)=\frac{1}{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_{0,m}(x)\mathrm{d}x}f_{0,m}(t)$ 称为 n 阶 **Jackson 型核**，$\forall\delta>0, \delta<\pi$，有

$$\int_{\delta}^{\pi}K_{m,n}(t)\mathrm{d}t\leqslant\frac{c}{(n\delta)^{2m-1}}.\qquad(129.2)$$

(129.1) 式中 $c_1=2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2m}$，$c_2=2(1+\frac{1}{2m-1})$，(129.2) 式中 $c=\frac{\pi^{4m}}{(2m-1)2^{2m+1}}$.

([82]138 ~ 140)

(2) $\int_0^{\pi} f_{k,m}(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{c_m}{(n+1)^{k+1}}, \ 0 \leqslant k \leqslant 2m-2.$

130. $\frac{4\pi}{3} < \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+(1/2)\cos x} < \frac{\pi}{2}(\ln 3 - \ln 2).$

131. 对于所有实数 $a_k, k = 1,2,\cdots,n-1$,有

$$\int_0^{\pi} \left| x - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \sin kx \right| \mathrm{d}x \geqslant \frac{\pi^2}{2n}.$$ (证明见[62]74 ~ 76)

132. $\int_{-\pi}^{\pi} \left| \cos \frac{2n+1}{2} t \right| \cdot \left| \frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4n+2}\right)} - \frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4n+2}\right)} \right| \mathrm{d}t < 8\pi^2.$

(证明见[60] 上册 225)

133. 设 $f_\alpha(x) = \int_0^x (\mathrm{tg}t)^\alpha \mathrm{d}t.$

(1) $\frac{x(\mathrm{tg}x)^\alpha \sin 2x}{2\alpha x + \sin 2x} \leqslant f_\alpha(x) \leqslant \frac{x}{\alpha+1}(\mathrm{tg}x)^\alpha, \ \alpha > 0, \ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$

(2) $\frac{1}{2(n+1)} < f_n\left(\frac{\pi}{4}\right) < \frac{1}{2(n-1)} \quad (n > 2).$

(3) $f_{n+1}\left(\frac{\pi}{4}\right) < f_n\left(\frac{\pi}{4}\right).$

(4) $f_\alpha\left(\frac{\pi}{4}\right) \geqslant \frac{\pi}{2\alpha\pi + 4}.$ ([351]2005(2):155)

134. **Marcinkiewicz 不等式**:设 F 为 R^n 中有界闭子集,方体 $Q \supset F, G = Q - F, \delta(x)$ 是 Q 中 x 到 F 的距离,则 $\forall \lambda > 0$,Marcinkiewicz 积分

$M_\lambda(x) = \int_Q \frac{[\delta(y)]^\lambda}{|x-y|^{n+\lambda}} \mathrm{d}y = \int_G \frac{[\delta(y)]^\lambda}{|x-y|^{n+\lambda}} \mathrm{d}y$ 在 F 上 $a.e.$ 有限,而且

$\int_F M_\lambda(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{\omega_n}{\lambda}\mu(G).$ ω_n 是 R^n 中单位球的测度. ([173]151)

135. 设 f 是 $(a,b]$ 上递减的概率密度函数,则 $\forall p > 0$,下式成立

$$\int_a^b x^{2p} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{b^{2p+1} - a^{2p+1}}{(2p+1)(b-a)} \int_a^b f;$$

若 f 递增,则不等号反向. 提示:用概率方法. ([143]201)

136. [MCU] 设 f 在 R^1 上非负有界连续,$f(x) = f(-x)$,且

$0 < \int_{R^1} x^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_{R^1} f(x)\mathrm{d}x < \infty$,则 $\forall x > 0$,下式成立

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_{R^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{\alpha_n} f(x_1)\cdots f(x_{n-1}) f(x_n)\mathrm{d}x_n\right)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n-1}}{\left(\int_{R^1} f\right)^n} \geqslant 1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}x}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),$$

式中 $\alpha_n = \sqrt{n}x - \sum_{k=1}^{n-1} x_k$. (证明用概率方法)

137. 设 f, g,是 X 上非负可测函数,且存在 $y_0 \in X$,使得 f 与 g 的分布函数之差在 y_0 点从(−) 到(+) 变号,$f^p - g^p \in L(X,\mu)$,则

$\varphi(p)=\frac{1}{py_0^p}\int_X(f^p-g^p)\mathrm{d}\mu$ 递增，从而

$p>p_0>0$ 时，$\triangle(p)=\int_X(f^p-g^p)\mathrm{d}\mu\geqslant 0.$

(Nazarov, F. L, 等, Complex analysis, operators and related topics, Birkhauser Basel, 2000, 247 ~ 267)

138. Mellin 变换不等式：设 $\alpha, x>0$，$\beta\geqslant 0$，令

$$f_\beta^*(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)(1-2^{1-x})}\int_0^\infty\frac{t^{x-1}e^{-\beta t^{-1}}}{1+e^t}\mathrm{d}t,$$

则 $f_\beta^*(x+1)\geqslant\left(1-\frac{1}{2^x-1}\right)f_\beta^*(x)$.

(Integral Transforms spec. Funct. 7(11)(2006), 769 ~ 777)

139. Golab 猜想：设 f 满足：

(1) $f''\in C(R^1)$；(2) $f(x+\pi)=f(x)$；(3) $f(x)>0$；(4) $f(x)+f''(x)>0$，

则

$$\int_0^\pi\left[1+\frac{f''(x)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\leqslant\pi. \tag{139.1}$$

1935 年 Levin 证明了这个猜想，并证明了更一般的结果：

令 $J_\lambda(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left[1+\frac{f''(x)}{f(x)}\right]^\lambda\mathrm{d}x$，则

(1) 若 $0\leqslant\lambda\leqslant\frac{1}{2}$，则 $J_\lambda(f)\leqslant 1$，$\lambda=\frac{1}{2}$ 时得到(139.1)；

(2) 若 $1\leqslant\lambda<\infty$，则 $J_\lambda(f)\geqslant 1$.

([317]10(1)(1935), 45 ~ 48)

140. **RS 积分不等式**

(1) 设 $f\in BV[a,b]$，$g\in C[a,b]$，则

$$\inf_{x\in[a,b]}\{f(x)[g(b)-g(a)]\}+\inf_{[\alpha,\beta]\subset[a,b]}[g(\beta)-g(\alpha)]V_a^b(f)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x)$$
$$\leqslant\inf_{x\in[a,b]}\{f(x)[g(b)-g(a)]\}+\sup_{[\alpha,\beta]\subset[a,b]}[g(\beta)-g(\alpha)]V_a^b(f).$$

(BDP(Beesack − Darst − Pollard) 不等式)([399]22(1)(2009), 58 ~ 63)

(2) 设 $f\in BV[a,b]$，$-\infty<m\leqslant f(x)\leqslant M<\infty$，$x\in[a,b]$，则

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x)-\frac{m+M}{2}[g(b)-g(a)]\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{2}V_a^b(f)\{\sup[g(\beta)-g(\alpha)]-\inf[g(\beta)-g(\alpha)]: a\leqslant\alpha<\beta\leqslant b\}$$

(同上)

(3) 设在 (a,b) 上，f 递减，g 递增且 $\lim_{x\to a+0}g(x)=0$，$0<p\leqslant 1$，则

$$\int_a^b f\mathrm{d}g\leqslant\left\{\int_a^b f^p\mathrm{d}(g^p)\right\}^{\frac{1}{p}},$$

若 $1\leqslant p<\infty$，则不等号反向.

设在(a,b)上，f递增，g递减且$\lim\limits_{x\to b-0}g(x)=0$，$0<p\leqslant 1$，则

$$\int_a^b f\mathrm{d}(-g)\leqslant\left\{\int_a^b f^p\mathrm{d}(-g)^p\right\}^{\frac{1}{p}},$$

若$1\leqslant p<\infty$，则不等号反向.（[329]116(2)(1995)，133 ～ 165）

141.　特征值不等式

(1)　R^n中与外力场$F(x)=-\nabla V(x)$相互作用的质点所满足的不含时 Schrödinger 方程是

$$-\Delta\psi(x)+V(x)\psi(x)=E\psi(x),\tag{141.1}$$

其中函数$V:R^n\to R$称为位势，$\psi\in L^2(R^n)$称为波函数，它满足规范化条件：$\|\psi\|_2=1$. 定义泛函

$$\varepsilon(\psi)=T_\psi+V_\psi,\tag{141.2}$$

式中$T_\psi=\int_{R^n}|\nabla\psi(x)|^2\mathrm{d}x$称为$\psi$的动能，$V_\psi=\int_{R^n}V(x)|\psi(x)|^2\mathrm{d}x$称为$\psi$的势能，$\varepsilon(\psi)$是$\psi$的总能量.

变分问题：在$\|\psi\|_2=1$的条件下极小化$\varepsilon(\psi)$. 若存在一个极小元ψ_0，则它必满足方程(141.1). 这时$E_0=\inf\{\varepsilon(\psi):\|\psi\|_2=1\}$称为基态能量. 在物理上，基态能量是质点可能获得的最低能量，它是(141.1)的最小特征值. 动能T_ψ控制ψ（但不包括$\nabla\psi$）的某种类型的积分不等式称为测不准原理. 例如 Heisenberg 测不准原理是：在R^n中，若$\psi\in H^1(R^n)$，且$\|\psi\|_2=1$，则

$$(\psi,p^2\psi)\geqslant\frac{n^2}{4}(\psi,x^2\psi)^{-1},\tag{141.3}$$

式中$|p|$是相对论动能，见本章 No. 26(2).

(2)　Dirichlet 问题：设开集$\Omega\subset R^n$，$\mu(\Omega)<\infty$，$C_0^\infty(\Omega)$在H^1范数下的闭包记为$H_0^1(\Omega)$. 令$\varepsilon(\varphi)=\int_\Omega|\Delta\varphi(x)|^2\mathrm{d}x$，$\varphi\in H_0^1(\Omega)$. 用归纳法定义 Dirichlet 特征值：

$$E_0=\min\left\{\varepsilon(\varphi):\varphi\in H_0^1(\Omega),\ \int_\Omega|\varphi(x)|^2\mathrm{d}x=1\right\}.$$

这时满足方程

$$-\Delta\psi=E\psi\tag{141.4}$$

的极小元记为ψ_0，称为第 1 个特征函数. 类似，第$k+1$个特征函数ψ_k定义为问题

$$E_k=\min\left\{\varepsilon(\varphi):\varphi\in H_0^1(\Omega),\int_\Omega|\varphi(x)|^2\mathrm{d}x=1,\int_\Omega\varphi(x)\overline{\psi_j(x)}\,\mathrm{d}x=0,\right.$$
$$\left.j=0,1,\cdots,k-1\right\}$$

的极小元.

设$\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_m$是$H_0^1(\Omega)$中在$L^2(\Omega)$意义下标准正交的函数列，则

$$\sum_{j=0}^{m-1}\varepsilon(\varphi_j)\geqslant(2\pi)^2\left(\frac{n}{n+2}\right)\left(\frac{n}{|S^{n-1}|}\right)^{\frac{2}{n}}m^{1+\frac{2}{n}}\mu(\Omega)^{-\frac{2}{n}}.\tag{141.5}$$

若在(141.5)中插入标准正交的 Dirichlet 特征函数，则

$$\sum_{j=0}^{m-1}E_j\geqslant(2\pi)^2\left(\frac{n}{n+2}\right)\left(\frac{n}{|S^{n-1}|}\right)^{\frac{2}{n}}m^{1+\frac{2}{n}}\mu(\Omega)^{-\frac{2}{n}}.\tag{141.6}$$

不等式(141.6) 意味着第 m 个特征值 E_{m-1} 满足

$$E_{m-1} \geqslant (2\pi)^2 \left(\frac{n}{n+2}\right)\left(\frac{n}{|S^{n-1}|}\right)^{\frac{2}{n}} m^{\frac{2}{n}} \mu(\Omega)^{-\frac{2}{n}}. \tag{141.7}$$

Polya 猜想:对于一般区域,有

$$E_{m-1} \geqslant (2\pi)^2 \left(\frac{n}{|S^{n-1}|}\right)^{\frac{2}{n}} m^{\frac{2}{n}} \mu(\Omega)^{-\frac{2}{n}}. \tag{141.8}$$

式中 $|S^{n-1}|$ 表示 R^n 中的单位球面 S^{n-1} 的面积.

尽管(141.8) 与(141.7) 非常接近,但此猜想至今仍未解决.([167]273 ~ 274)

142. 设核 $K:D\times D \to (0,\infty)$ 满足:

$\int_0^a K(x,y)dx \leqslant Ch(y) \quad a.e.\ y\in D,$

$\int_0^a K(x,y)dy \leqslant Ch(x) \quad a.e.\ x\in D,$

式中 h 是 D 上正的可积函数,$D=[(0,a)]$.

(1) 若 f,g 都是 D 上正的递减函数,则

$\int_0^a\int_0^a K(x,y)f(x)g(y)dxdy \leqslant C\int_0^a h(x)f(x)g(x)dx.$

(2) 若 $f:D\times D \to [(0,\infty)]$ 可测且分别关于每个 x,y 递减,则

$\int_0^a\int_0^a K(x,y)f(x,y)dxdy \leqslant 2C\int_0^a h(x)f(x,x)dx.$

143. 设 K 是 $D\times D$ 上正的连续函数,$f:D\times D\to[(0,\infty)]$ 连续且满足 $\Delta_{h,k}^2 f(x,y)=f(x+h,y+k)-f(x+h,y)-f(x,y+k)+f(x,y)\geqslant 0$,式中 $h,k\geqslant 0$(或 $h,k\leqslant 0$),$D=[(0,a)]$.

(1) 若 $\forall t\in D$,有$\int_t^a\int_0^t K(x,y)dxdy=\int_0^t\int_t^a K(x,y)dxdy$,则

$\int_0^a\int_0^a K(x,y)f(x,y)dxdy \leqslant \int_0^a\left(\int_0^a K(x,y)dx\right)f(y,y)dy.$

(2) 若 $\forall x,y\in D$,$\int_0^a K(x,y)dx=ch(y)$,$\int_0^a K(x,y)dy=ch(x)$,

则$\int_0^a\int_0^a K(x,y)f(x,y)dxdy \leqslant C\int_0^a h(x)f(x,x)dx.$

以上 No. 142 ~ 143 见[361]17(1991 ~ 1992),211 ~ 247.

第十四章　范数与算子不等式

在前面各章中，特别是在第 1,6,7,9 ~ 13 各章中，都涉及到了各种空间中的范数和算子不等式，本章则是集中地讨论最基本最常用的空间范数与算子不等式.

§1　范数不等式

1. **华罗庚不等式**：设 $(X,(,))$ 为实内积空间，$x_k, x, y \in X$，$\alpha, \beta > 0$，$1 < p < \infty$，$(1/p) + (1/q) = 1$，则

(1)　$$[\beta - (x,y)]^2 + \alpha \| x \|^2 \geqslant \frac{\alpha\beta^2}{\alpha + \| y \|^2}, \tag{1.1}$$

仅当 $x = \left(\dfrac{\beta}{\alpha + \| y \|^2}\right) y$ 时等号成立；

(2)　$$\| y - \sum_{k=1}^{n} x_k \|^2 + \alpha \sum_{k=1}^{n} \| x_k \|^2 \geqslant \left(\frac{\alpha}{n+\alpha}\right) \| y \|^2, \tag{1.2}$$

仅当 $x_k = \left(\dfrac{1}{n+\alpha}\right) y$ 时等号成立.（Dragomir, S. S. 杨国胜，[330]1996,27:227 ~ 232）

1999 年，Pecaric, J. 推广了上述结果，即下述(3)(4).

(3)　若 $(x,y) < \beta$，$1 < p < \infty$，则

$$[\beta - (x,y)]^p + \alpha^{p-1} \| x \|^p \geqslant \left(\frac{\alpha}{\alpha + \| y \|^q}\right)^{p-1} \beta^p, \tag{1.3}$$

仅当 $x = \left(\dfrac{\beta \| y \|^{q-2}}{\alpha + \| y \|^q}\right) y$ 时等号成立. 当 $p = 2$ 时，又得到(1.1)式.

(4)　设 $(x,y) < \beta$，f 是 $[0,\infty)$ 上递增的凸函数，则

①　$$f[\beta - (x,y)] + \frac{1}{\alpha} \| y \| f(\alpha \| x \|) \geqslant \left(\frac{\alpha + \| y \|}{\alpha}\right) f\left(\frac{\alpha\beta}{\alpha + \| y \|}\right), \tag{1.4}$$

当 f 是严格凸函数时，(1.4)式中仅当 $x = \left(\dfrac{\beta}{\| y \| (\alpha + \| y \|)}\right) y$ 时等号成立；

②　$$f(\| y - \sum_{k=1}^{n} x_k \|) + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{n} f(\alpha \| x_k \|) \geqslant \left(\frac{\alpha+n}{\alpha}\right) f\left(\frac{\alpha \| y \|}{\alpha + n}\right). \tag{1.5}$$

当 f 是严格凸函数时，(1.5)式中仅当 $x_k = \left(\dfrac{1}{n+\alpha}\right) y$ 时等号成立.

特别当 $f(x) = x^p$，$p > 1$ 时得到

$$\| y - \sum_{k=1}^{n} x_k \|^p + \alpha^{p-1} \sum_{k=1}^{n} \| x_k \|^p \geqslant \left(\frac{\alpha}{\alpha + n}\right)^{p-1} \| y \|^p. \tag{1.6}$$

仅当 $x_k = \dfrac{1}{n+\alpha} y$ 时等号成立.（[330]2002,33(3):265 ~ 268）

2. **Bohr 不等式**：

(1)　设 X 为酉向量空间，$x_k \in X$. $a_{kj} > 0$，$1 \leqslant k < j \leqslant n$. 则

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \| x_k \|^2 \left(1 + \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_{ik}}\right).$$

(Pecaric, J. E., Rassias, Th. M. [301]1993, 174(1): 138 ~ 146)

(2) 若$(X, \| \cdot \|)$是赋范线性空间,$p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则

$$\| x + y \|^2 \leqslant p \| x \|^2 + q \| y \|^2, \quad x, y \in X.$$

(3) 若 X 是可分的复 Hilbert 空间,$T \in B(X)$(即表示 T 是 X 上有界线性算子),$| T | = (T^* T)^{\frac{1}{2}}$, T^* 是 T 的共轭算子.

定理 1 设 $T_1, T_2 \in B(X)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

若 $1 < p \leqslant 2$, 则

$$| T_1 - T_2 |^2 + | (1-p) T_1 - T_2 |^2 \leqslant p | T_1 |^2 + q | T_2 |^2$$
$$\leqslant | T_1 - T_2 |^2 + | T_1 - (1-q) T_2 |^2.$$

若 $0 < p < 1$, 上述两个不等号均反向,仅当 $p = q = 2$ 或$(1-p)T_1 = T_2$ 时等号成立.

定理 2 设 α, β 是非零实常数

① 设 $\alpha\beta > 0$,不妨设 $| \alpha | \geqslant | \beta | > 0$,则

$$| T_1 - T_2 |^2 + \frac{1}{\alpha^2} | \beta T_1 - \alpha T_2 |^2 \leqslant \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) | T_1 |^2 + \left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right) | T_2 |^2,$$

仅当 $\alpha = \beta$ 或 $\beta T_1 + \alpha T_2 = 0$ 时等号成立.

② 设 $\alpha\beta < 0$,不妨设 $\alpha > 0 > \beta$,若 $\alpha > 0 > \beta \geqslant -\alpha$, 则

$$| T_1 - T_2 |^2 + \frac{1}{\alpha^2} | \beta T_1 - \alpha T_2 |^2 \leqslant \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) | T_1 |^2 + \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) | T_2 |^2$$

仅当 $\alpha + \beta = 0$ 或 $\beta T_1 - \alpha T_2 = 0$ 时等号成立. 若 $\alpha > 0 > (-\alpha) \geqslant \beta$,则

$$| T_1 - T_2 |^2 + \frac{1}{\beta^2} | \alpha T_1 - \beta T_2 |^2 \leqslant \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) | T_1 |^2 + \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) | T_2 |^2$$

仅当 $\alpha + \beta = 0$ 或 $\alpha T_1 - \beta T_2 = 0$ 时等号成立.

([301]282(2003), 578 ~ 583)

3. **Grothendieck 不等式:**

(1) 设 X 为 Hilbert 空间,$x_k \in X$, $\| x_k \| \leqslant 1$,$a_{kj} \in R^1$,则

$$\sum_{k=1}^{n} \left\| \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j \right\| \leqslant C \sup\left\{ \left| \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{kj} t_k s_j \right| : | t_k |, | s_j | \leqslant 1 \right\}.$$

已知

$$\frac{\pi}{2} \leqslant C \leqslant \frac{\pi}{2\ln(1+\sqrt{2})} = 1.782\cdots,$$

问 C 的最佳值是多少?(证明见[104]177 ~ 180)

(2) 设 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶方阵,$x_1, \cdots, x_n$ 是 Banach 空间 X 的单位球的元,则

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right\| \leqslant (2n)^{1/2} \| A \|_{\infty,1}.$$

注 若 $\forall x_k \in L^p(\mu)$, $1 \leqslant \psi \leqslant \infty$,则(2)中常数$(2n)^{1/2}$可换成$Mn^{\alpha}$,式中$\alpha = | (1/2)$

$-(1/p)|$,M 是正的常数.

(Andrew,T. Math. Nachr 1987,131:335 ~ 343)

4. **Dunkl-Williams 不等式**:设 x,y 是赋范空间 X 中的两个非零向量,则

(1) $$\|x-y\| \geqslant (\frac{1}{2})\max(\|x\|,\|y\|)\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\|; \tag{1.7}$$

(2) $$\|x-y\| \geqslant (\frac{1}{4})(\|x\|+\|y\|)\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\|, \tag{1.8}$$

其中系数 1/2,1/4 均不能换成更大的数.

提示:先考虑 $\|x\|=1,\|y\|\leqslant 1$,令 $z=y/\|y\|$,证明 $1+\|x-z\|\leqslant\|y\|+\|z-y\|+2\|x-y\|$.

(3) 若 X 为复内积空间,则

$$\|x-y\| \geqslant \frac{1}{2}(\|x\|+\|y\|)\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\|. \tag{1.9}$$

已知(1.9) 式对于一般的赋范线性空间不成立,但是,若(1.9) 式成立,X 是否必为内积空间?([305]1964,71:53 ~ 54 或[74]Vol. 1:98)

1993 年 Rashed 将(1.8) 式推广为:

$$\|x\|\cdot\|y\|\cdot\|x-y\| \geqslant C_p(\|x\|^p+\|y\|^p)^{1/p}\|\,\|y\|x-\|x\|y\,\|,$$

式中 $C_p=\begin{cases}2^{-1-\frac{1}{p}}, & 0<p\leqslant 1,\\ 2^{-2}, & p\geqslant 1.\end{cases}$ ([301]1993,176:587 ~ 593)

5. 设赋范空间中的向量 x_k 满足 $\sum_{k=1}^{n}x_k=0$,则

$$\sum_{k=1}^{n}\|x_k\| \leqslant \frac{2}{n}\sum_{k<j}\|x_k-x_j\|. \quad ([22]518)$$

6. **Bynum-Drew 不等式**:设 X 为抽象 L^p 空间($1<p\leqslant 2$),即 X 为 Banach 格且 $\|x+y\|^p=\|x\|^p+\|y\|^p$,$x,y\in X$,$x\wedge y=0$. 则

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 \leqslant \frac{1}{2}(\|x\|^2+\|y\|^2)-(p-1)\left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2,$$

式中 $p-1$ 是最佳常数.

1990 年 Smarzewski,R. 进一步证明在上述条件下,有

$$\|(1-t)x+ty\|^2 \leqslant (1-t)\|x\|^2+t\|y\|^2-(p-1)t(1-t)\|x-y\|^2,$$

式中 $0<t<1$. ([301]1990,150:146 ~ 150)

注 抽象 L^p 空间的理论可参看专著:A. C. Zaanen,W. A. J. Luxemburg,Riesz spaces,North-Holland,1971.

7. **Clarkson 不等式**:设 $f,g\in L^p(X,\sum,\mu)$,$1/p+1/q=1$,若 $2\leqslant p\leqslant\infty$,则

(1) $$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p+\left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p \leqslant \frac{1}{2}(\|f\|_p^p+\|g\|_p^p);$$

(2) $$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^q+\left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^q \geqslant \left(\frac{1}{2}\|f\|_p^p+\frac{1}{2}\|g\|_p^p\right)^{q-1}.$$

若 $1<p<2$,则(1)(2) 中不等号均反向.(证明见[98]316 ~ 322)

8. 设 X 为 Banach 空间,$1<p\leqslant q<\infty$,$\alpha=\left(\frac{p-1}{q-1}\right)^{1/2}$,则 $\forall x,y\in X$,有

$$(\|x+\alpha y\|^q+\|x-\alpha y\|^q)^{1/q}\leqslant 2^r(\|x+y\|^p+\|x-y\|^p)^{1/p}.$$

式中 $r=1/q-1/p$，

(证明见俞鑫泰，Banach 空间选论，上海：华东师范大学出版社，1992，234)

9. **Fan Ky 不等式**：设 X 为实内积空间，$x_k,e\in X$，$\|e\|=1$，$0<\|x_k\|\leqslant 1/2$，$x_1+x_2\neq 0$，则

$$\frac{(x_1,x_2)}{\|x_1+x_2\|^2}\leqslant\frac{(e-x_1,e-x_2)}{\|2e-x_1-x_2\|^2}.$$

(王挽澜等，[334]1984，27(4)：485 ~ 497).

10. **比卜—来维不等式**：设 X 为 Hilbert 空间，A 为 X 的闭子空间，$\forall x\in X$，令 $d=\inf\{\|x-y\|:y\in A\}=d(x,A)$，则 $\forall y_1,y_2\in A$，有

$$\|y_1-y_2\|\leqslant\sqrt{\|x-y_1\|^2-d^2}+\sqrt{\|x-y_2\|^2-d^2}.$$

(阿赫叶惹尔，逼近论讲义，23)

11. **Smarzewski 不等式**：设 $L^p=L^p(X,\sum,\mu)$，$\|y\|_p=\left(\int_X|y|^p\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}$，$1\leqslant p<\infty$，$A$ 为 L^p 的非空闭凸子集，$\forall y\in L^p$，$x,z\in A$. 当 $2\leqslant p<\infty$ 时，有

$$\|y-z\|^p\leqslant\|y-x\|^p-C_p\|z-x\|^p;$$

若 $z\in A$ 是 y 在 L^p 中的最佳逼近元，$1<p<2$，则

$$\|y-z\|^p\leqslant\|y-x\|^p\leqslant\|y-z\|^p+C_p\|z-x\|^p,\ \forall x\in A,$$

式中 $C_p=(1+t_0^{p-1})(1+t_0)^{1-p}=(p-1)(t_0+1)^{2-p}$，而 $t_0=t_0(p)$ 表示函数 $g(t)=-t^{p-1}+(p-1)t+p-2$ 在 $(1,\infty)$ 上的唯一零点，$t_0(2)=1$.

(提示：利用第 3 章 No. 25，细节见[327]1987，49：93 ~ 98)

12. **Gruss-Lupas 型不等式**：设 $(X,\|\cdot\|)$ 为赋范线性空间，$x_k\in X$，$\alpha_k\in K$，(实数或复数集)，$p_k\geqslant 0$ 且 $\sum_{k=1}^n p_k=1$，则

$$\left\|\sum_{k=1}^n p_k\alpha_k x_k-\left(\sum_{k=1}^n p_k\alpha_k\right)\left(\sum_{k=1}^n p_k x_k\right)\right\|$$

$$\leqslant\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n-1}|\alpha_{k+1}-\alpha_k|\right)\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n-1}\|x_{k+1}-x_k\|\right)\left[\sum_{k=1}^n k^2p_k-\left(\sum_{k=1}^n kp_k\right)^2\right].$$

(Dragomir，S. S. 等，Math. Commun. 2000，5(2)：117 ~ 126)

13. **Grüss 不等式**：设 X 是复数域 C 上内积空间. $x_k,y_k\in X$.

(1) 若 $p_k\geqslant 0$，$\sum_{k=1}^n p_k=1$，$\alpha_k,\beta_k\in C$. 使得

$$\mathrm{Re}[(\beta_1-\alpha_k)](\overline{\alpha_k}-\overline{\beta_2})\geqslant 0;\quad \mathrm{Re}(y_1-x_k,x_k-y_2)\geqslant 0,k=1,\cdots,n.$$

则 $\left\|\sum_{k=1}^n p_k\alpha_k x_k-\left(\sum_{k=1}^n p_k\alpha_k\right)\left(\sum_{k=1}^n p_k x_k\right)\right\|\leqslant\frac{1}{4}(\beta_1-\beta_2)\|y_1-y_2\|$. 式中 $\frac{1}{4}$ 是最佳常数.

(Dragomir，S. S. [301]2000，250(2)：494 ~ 511)

(2) 若 $e\in X$，$\|e\|=1$，$x,y\in X$，$\alpha_k\in C$，使得

$\mathrm{Re}(\alpha_3e-x,x-\alpha_1e)\geqslant 0$，$\mathrm{Re}(\alpha_4e-y,y-\alpha_2e)\geqslant 0$，则

$$|(x,y)-(x,e)(e,y)|\leqslant 1/4|\alpha_3-\alpha_1|\cdot|\alpha_4-\alpha_2|.$$

式中 1/4 是最佳常数. (Dragomir，S. S. [301]1999，237(1)：74 ~ 82)

14. **L^p 空间的特征不等式**：设 $x,y\in L^p$ 为任意两个线性无关的元素，$\alpha,\beta\in(0,1)$，$\alpha+\beta=1$，$\forall\alpha\in(0,1/2]$，$x(\alpha)$ 表示方程 $\beta x^{p-1}-\alpha-(\beta x-\alpha)^{p-1}=0$，$(\alpha/\beta\leqslant x\leqslant 1)$ 的唯一解，并令

$$g(\alpha)=\begin{cases}\alpha\beta, & p=2,\\ 0, & p\neq 2,\alpha=0,1,\\ \alpha\beta\dfrac{1-(\alpha\wedge\beta)x^{p-1}}{[1+x(\alpha\wedge\beta)]^{p-1}}, & p\neq 2,\ 0<\alpha<1.\end{cases}$$

则 $p>2\iff\|\beta x+\alpha y\|^p+g(\alpha)\|x-y\|^p<\beta\|x\|^p+\alpha\|y\|^p$. $p<2$ 时，右边的不等号反向. 仅当 $p=2$ 时等号成立.（徐宗本等，[334]1994，37(4)：433 ~ 439）

15. 设 f,g 是 R^n 上正的可测函数. $1\leqslant p,q<\infty$，$1\leqslant r\leqslant\infty$，$1/r=(1/p)+(1/q)-1$，则

$$\int fg\leqslant\|f\|_p^{1-\frac{p}{r}}\|g\|_q^{1-\frac{q}{r}}\left(\int f^pg^q\right)^{1/r}.$$

（[73]231 ~ 234）

16. **双 Cauchy-Schwarz 型不等式**：设 X 为内积空间，$x,y,z\in X$. 则

$$2\,|(z,x)(z,y)|\leqslant\{\|x\|\,\|y\|+|(x,y)|\}\|z\|^2.$$

若 X 为 Hilbert 空间，则对 x,y 的任何投影 P_x,P_y，下式成立

$$2\,|(Px,Py)|\leqslant\|x\|\,\|y\|+|(x,y)|.$$

（Manolis，M. 等. Missouri J. Math. Sci.，2000，12(1)：26 ~ 30）

17. **Brezis-Gallouet 不等式**：设 $\Omega\subset R^n$ 为区域，其边界充分光滑.

$$\|u\|_{H^k(\Omega)}=\left\{\int_\Omega\Big(|u|^p+\sum_{|\alpha|\leqslant k}|D^\alpha u|^p\Big)\mathrm{d}x\right\}^{1/p},1\leqslant p<\infty,$$

令 $r=n-1+(n/2)$，$\beta=\sigma-1+(n/2)$，$\sigma\geqslant 2$，若 $\|u\|_{H^\beta(\Omega)}\leqslant 1$，则 $\exists C>0$，使得

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant C\Big\{1+n\cdot\sqrt{\ln(1+\|u\|_{H^r(\Omega)})}\Big\}.$$

（Du Xinhua. Chinese Sci. Bull. 1996，41(23)：1937 ~ 1942）

18. **最佳逼近不等式**：设 $\{e_k\}$ 是内积空间 X 中标准正交系，$x\in X$，$c_k=(x,e_k)$，$A_n=\mathrm{span}\{e_1,\cdots,e_n\}$. 则 $\forall\alpha_k\in K$，有

$$\Big\|x-\sum_{k=1}^n c_ke_k\Big\|\leqslant\Big\|x-\sum_{k=1}^n\alpha_ke_k\Big\|.$$

19. **Bessel 不等式**：设 $\{e_k\}$ 是内积空间 X 中标准正交系，则

$$\sum_{k=1}^\infty|(x,e_k)(y,e_k)|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|,\forall x,y\in X,$$

当 $x=y$ 时，即为第 11 章 §2 No. 46.

20. **算子中值不等式**：设 X,Y 为 Banach 空间，$G\subset X$ 为开集，$f:G\to Y$ 为 Frechet 可微，线段 $\{tx+(1-t)y:t\in[0,1]\}\subset G$，则

$$\|f(y)-f(x)\|\leqslant\sup_{t\in(0,1)}\|f'(tx+(1-t)y)\|\,\|y-x\|.$$ 更一般地，设 $x_0\in G$，$t_k\in X$，$1\leqslant k\leqslant n$，使得对于 $0\leqslant\xi_k\leqslant 1$，有 $x_0+\sum_{k=1}^n\xi_kt_k\in G$，对 k 用归纳定义：$\Delta^1f(x_0,t_1)=f(x_0+t_1)-f(x_0)$，$\Delta^kf(x_0,t_1,\cdots,t_k)=\Delta^{k-1}g_k(x_0,t_1,\cdots,t_{k-1})$，其中 $g_k(t)=f(x$

$+t_k)-f(x)$. 令集 $A=\left\{z: z=x_0+\sum_{k=1}^{n}\xi_k t_k, 0\leqslant\xi_k\leqslant 1\right\}$，则

$$\|\Delta^n f(x_0,t_1,\cdots,t_n)\|\leqslant\|t_1\|\cdot\|t_2\|\cdots\|t_n\|\sup_{z\in A}\|D^n f(z)\|,$$

$$\|\Delta^n f(x_0,t_1,\cdots,t_n)\|-D^n f(x_0)\cdot(t_1,\cdots,t_n)\|$$
$$\leqslant\|t_1\|\cdot\|t_2\|\cdots\|t_n\|\sup_{z\in A}\|D^n f(z)-D^n f(x_0)\|.$$

21.　设 X 为 Banach 空间，$f:[a,b]\to X$ 为无限次可微映射，则对于 $m<n$，有

(1)　$$\sum_{k=m}^{n-1}\|f^{(k)}(a)\|\frac{a^k}{k!}\leqslant\sum_{k=m}^{n-1}\|f^{(k)}(b)\|\frac{b^k}{k!}+\int_a^b\|f^{(n)}(x)\|\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{d}x;$$

(2)　$$\int_a^b\|f^{(m)}(x)\|\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b\|f^{(n)}(x)\|\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{d}x+\sum_{k=m}^{n-1}\|f^{(k)}(b)\|\frac{b^k}{k!}.$$

22.　设 X 为 Banach 空间，$f:[a,\infty)\to X$ 为无穷次可微映射，$a\geqslant 0$.

(1)　若 $\forall x\geqslant a$，存在 $M_n<\infty$，使得 $\|f^{(n)}(x)\|(x^n/n!)\leqslant M_n$，并且 $\forall k\geqslant 1$，$\lim\limits_{x\to\infty}f^{(k-1)}(x)x^{k-1}$ 存在，则当 $m<n, b>a$ 时，有

$$\sum_{k=m}^{n-1}\|f^{(k)}(b)\|\frac{b^k}{k!}\leqslant\int_b^\infty\|f^{(n)}(x)\|\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{d}x;$$

$$\int_a^b\|f^{(m)}(x)\|\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=m}^{\infty}\|f^{(k)}(b)\|\frac{b^k}{k!};$$

(2)　令　$J_n=\int_a^\infty\|f^{(n)}(x)\|\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{d}x$ 若 J_n, J_{n+1} 均为有限时，则 $\forall x\geqslant a$，有

$$\|f^{(n)}(x)\|(x^n/n!)\leqslant\|f^{(n)}(a)\|(a^n/n!)+J_n+J_{n+1}.$$

若　$\lim\limits_{x\to\infty}f^{(n)}(x)=0$，则 $\{J_n\}$ 构成递增数列.（No. 20 ～ 22 见[74]Vol. 1. 203，214 ～ 215）

23.　**幂权不等式**：设 $p,q\geqslant 1, r\geqslant 0, 0\leqslant d\leqslant 1, \frac{1}{p}+\frac{\alpha}{n}, \frac{1}{q}+\frac{\beta}{n}, \frac{1}{r}+\frac{t}{n}$ 均为正数，$u\in C_0^\infty(R^n)$，则

$$\|\,|x|^t u\|_r\leqslant C\|\,|x|^\alpha u\|_p^d\|\,|x|^\beta u\|_q^{1-d}\tag{1.10}$$

成立的充要条件是：

(1)　$\frac{1}{r}+\frac{t}{n}=d(\frac{1}{p}+\frac{\alpha}{n})+(1-d)(\frac{1}{q}+\frac{\beta}{n})$；

(2)　$t\leqslant d\alpha+(1-d)\beta$；

(3)　若 $d>0, \frac{1}{p}+\frac{\alpha}{n}=\frac{1}{q}+\frac{\beta}{n}$，则 $t=d\alpha+(1-d)\beta$.

见丁夏畦等，[338]，1989，9(3)：353 ～ 360，作者还对 $r<p,q$ 时求出了 C 的最佳值，它表明，某些 Sobolev 空间实际上同构于某种带幂权的 (L) 类. (1.10) 式可推广到 Banach 空间 X 上的线性算子 T. 若 $\alpha<\beta<\gamma$，则成立**矩量不等式**：

$$\|T^\beta x\|\leqslant C(\alpha,\beta,\gamma)\|T^\alpha x\|^p\|T^\gamma x\|^q,\text{ 式中 } p=\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}, q=\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha},$$

([107]2:547)

24.　设 $f\in L^q(E)$，$1<p\leqslant r\leqslant q<\infty, \alpha>0, \lambda=[(1/p)-(1/r)]/[(1/r)-(1/q)]$，$1/r=(t/p)+(1-t)/q, 0<t<1$，则

$$\|f\|_r\leqslant\alpha\|f\|_q+\alpha^{-\lambda}\|f\|_p.$$

([119]338)

25.　设 $x,y\in L^p$，$1<p<\infty$，则

$$C^{-1}\leqslant\frac{\|x+y\|_p^2+\|x-y\|_p^2}{2(\|x\|_p^2+\|y\|_p^2)}\leqslant C.$$

式中 $C=2^{\frac{|2-p|}{p}}$. ([98]328)

26.　设 $x,y\in L^r(\mu)$，若 $0<p,q,r<\infty$，则

$$(\|x+y\|_r^q+\|x-y\|_r^q)^{\frac{1}{q}}\leqslant 2^C(\|x\|_r^p+\|y\|_r^p)^{\frac{1}{p}},$$

式中 $C=\dfrac{1}{q}-\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{t}$，$t=\min\{p,q',r,r'\}$，$q',r'$ 分别是 q,r 的共轭指数；

若 $1<p\leqslant r\leqslant q$，$p'$ 为 p 的共轭指数，则

$$(\|x+y\|_r^q+\|x-y\|_r^q)^{\frac{1}{q}}\leqslant 2^{\frac{1}{p'}}(\|x\|_r^p+\|y\|_r^p)^{\frac{1}{p}}.$$

([331]634 ~ 677(1979),89 ~ 93;[376]46(1940),304 ~ 311)

27.　Hanner 不等式：设 $x,y\in L^p(\mu)$，若 $1\leqslant p\leqslant 2$，则

$$\|x+y\|_p^p+\|x-y\|_p^p\geqslant\{\|x\|_p+\|y\|_p\}^p+|\ \|x\|_p-\|y\|_p|^p,$$

$$(\|x+y\|_p+\|x-y\|_p)^p+|\ \|x+y\|_p-\|x-y\|_p|^p\leqslant 2^p(\|x\|_p^p+\|y\|_p^p).$$

若 $2\leqslant p<\infty$，则以上不等号均反向. (Ark. Mat. 3(1956),239 ~ 244)

28.　设 $x,y\in L^p$，$x\neq y$，$1<p<\infty$，$\lambda+\mu=1$，则当 $1<p<2$ 时

$$\|\lambda x+\mu y\|_p^2+(p-1)\lambda\mu\|x-y\|_p^2<\lambda\|x\|_p^2+\mu\|y\|_p^2.$$

当 $p>2$ 时，不等号反向，$p=2$ 时成立等号. ([334]32(1989),209 ~ 218)

29.　设 $x,y\in L^p$，$1<p\leqslant 2$，$0<\lambda<1$，则

$$\left\|\frac{1}{2}(|x|+|y|)\right\|_p^{2-p}\{\lambda\|x\|_p^p+(1-\lambda)\|y\|_p^p-\|\lambda x+(1-\lambda)y\|^p\}$$

$$\geqslant\frac{1}{4}p(p-1)\|x-y\|_p^2(\min\{\lambda,(1-\lambda)\}).$$

(Meir[316]28(1984),420 ~ 424)

30.　设 $1\leqslant p\leqslant\infty$，$C(p)=\left\{4^n\binom{2n}{n}^{-1}\right\}^{\frac{|p-2|}{p}}$，$\omega=\exp\left(\dfrac{i\pi}{n}\right)$，$x,y\in L^p(E)$，($E$ 是 R 的可测子集)，则当 p 是整数时，下式成立

$$\sum_{k=1}^{2n}\|x+\omega^k y\|_p^{2n}\leqslant n\binom{2n}{n}C(p)(\|x\|_p^{2n}+\|y\|_p^{2n});$$

$$(2n)^{\frac{2n}{2n-1}}(\|x\|_q^{\frac{2n}{2n-1}}+\|y\|_q^{\frac{2n}{2n-1}})\leqslant\left\{n\binom{2n}{n}C(p)\right\}^{\frac{1}{2n-1}}\sum_{k=1}^{2n}\|x+\omega^k y\|_q^{\frac{2n}{2n-1}}.$$

式中 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. ([301]64(1978),518 ~ 529)

我们问：当 p 不是整数时，以上不等式是否仍成立？

31.　设 $x_k\in L^p$，$0<r\leqslant p\leqslant s\leqslant\infty$，则

$$\left\|\left(\sum_{k=1}^n|x_k|^r\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_p\leqslant\left(\sum_{k=1}^n\|x_k\|_p^r\right)^{\frac{1}{r}},$$

$$\left(\sum_{k=1}^n\|x_k\|_p^s\right)^{\frac{1}{s}}\leqslant\left\|\left(\sum_{k=1}^n|x_k|^s\right)^{\frac{1}{s}}\right\|_p.$$

(L. Milagranda, Proc. Inter. Symp. on Banach and Funct. spaces. 2003:83 ~ 120)

32.　设 $x_k \in L^p$，$0 < \lambda \leqslant \min\{p,q\}$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则

$$\sum_{\pm 1}\left\|\sum_{k=1}^{n}(\pm x_k)\right\|_p^{\lambda} \leqslant 2\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|_p^{\lambda},$$

式中 $\sum_{\pm 1}$ 表示对所有 ± 1 的求和. ([301]64(1978),518 ~ 529)

33.　设 $x_k \in L^p$，$q_k > 0$，$\sum_{k=1}^{n} q_k = 1$.

(1)　若 $1 \leqslant \lambda \leqslant p$，$1 \leqslant p \leqslant 2$，或 $1 \leqslant \lambda \leqslant p'$，$2 \leqslant p < \infty$，则

$$\sum_{j,k=1}^{n} q_j q_k \|x_j - x_k\|_p^{\lambda} \leqslant 2C(q,\lambda)\sum_{k=1}^{n} q_k\|x_k\|_p^{\lambda},$$

(2)　若 $p' \leqslant \lambda$，$1 < p \leqslant 2$，或 $p \leqslant \lambda$，$2 \leqslant p < \infty$，则

$$C(q,\lambda)^{-1}\sum_{j,k=1}^{n}\|x_j - x_k\|_p^{\lambda} \geqslant 2\sum_{j=1}^{n} q_j\left\|x_j - \sum_{k=1}^{n} q_k x_k\right\|_p^{\lambda}.$$

式中 $C(q,\lambda) = (\max_{1\leqslant j\leqslant n}\{1-q_j\})^{2-\lambda}$，$p'$ 是 p 的共轭指数.

([309]44(1938),522 ~ 536;[301]64(1978),518 ~ 529)

34.　设 $x,y,z \in L^p(E)$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$，$1 < r < \min\{p,q\}$，则

(1)　$(\|x\|_p^s + \|y\|_p^s + \|z\|_p^s)^{\frac{1}{s}}$

$\leqslant 2^{-1+\frac{2}{s}}\{\|x+y\|_p^r + \|y+z\|_p^r + \|z+x\|_p^r\}^{\frac{1}{r}}$；

(2)　$2^{-1+\frac{2}{r}}\{\|x+y\|_p^s + \|y+z\|_p^s + \|z+x\|_p^s\}^{\frac{1}{s}}$

$\leqslant (\|x\|_p^r + \|y\|_p^r + \|z\|_p^r + \|x+y+z\|_p^r)^{\frac{1}{r}}$.

([301]64(1978),518 ~ 529)

35.　Kolmogorov 不等式：设 f 是 E 上非负可测函数. $0 < \mu(E) < \infty$，$0 < r < q < \infty$，$\frac{1}{s}=\frac{1}{r}-\frac{1}{q}$，定义

$$\|f\|_{q,\infty} = \sup\{t(\mu\{|f|>t\})^{\frac{1}{q}} : t > 0\}\quad(\text{称为弱 } L^q \text{ 范数}),$$

$$N_{q,r}(f) = \sup_E \frac{\|f\varphi_E\|_r}{\|\varphi_E\|_s},$$

集合 $\{|f|>t\}$ 表示 $\{x \in E: |f(x)| > t\}$. 则

$$\|f\|_{q,\infty} \leqslant N_{q,r}(f) \leqslant \left(\frac{q}{q-r}\right)^{\frac{1}{r}}\|f\|_{q,\infty}.\quad([45]485 \sim 486)$$

36.　设 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范线性空间，$x,y,z,x_k \in X$，则

(1)　$\|x\| + \|y\| - C\max\{\|x\|,\|y\|\} \leqslant \|x+y\|$

$\leqslant \|x\| + \|y\| - C\min\{\|x\|,\|y\|\}$，

式中 $C = 2 - \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\|$. ([305]113(2006),256 ~ 260)

(2) $$\left\| x\|x\|^{p-1}-y\|y\|^{p-1}\right\| \leqslant \begin{cases} (2-p)\dfrac{\|x-y\|}{\max\{\|x\|,\|y\|\}^{1-p}}, & 0\leqslant p\leqslant 1, \\ p\|x-y\|(\max\{\|x\|,\|y\|\})^{p-1}, & 1\leqslant p<\infty, \\ (2-p)\|x-y\|\left(\dfrac{\max\{\|x\|^p,\|y\|^p\}}{\max\{\|x\|,\|y\|\}}\right), & p<0. \end{cases}$$

(同上)

(3) $$\frac{\|x-y\|-|(\|x\|-\|y\|)|}{\min\{\|x\|,\|y\|\}} \leqslant \left\| \frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|} \right\| \leqslant \frac{\|x-y\|+|(\|x\|-\|y\|)|}{\max\{\|x\|,\|y\|\}}.$$

(4) 记 $C_1=\min\{\|x\|,\|y\|\}$，$C_2=\max\{\|x\|,\|y\|\}$，则

$$0\leqslant \frac{\|x\|+\|y\|}{C_1}-\frac{\|x+y\|}{C_2} \leqslant \left\| \frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|} \right\| \leqslant \frac{|(\|x\|-\|y\|)|}{C_1}+\frac{\|x-y\|}{C_2}.$$

(5) 令 $a=\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\|$，$b_k=\sum_{j=1}^{n} |\,\|x_j\|-\|x_k\|\,|$，则

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{\frac{a-b_k}{\|x_k\|}\right\} \leqslant \left\| \sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{\|x_k\|} \right\| \leqslant \min_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{\frac{a+b_k}{\|x_k\|}\right\}.$$

(6) 广义三角不等式：记 $C_1=\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{\|x_k\|\}$，$C_2=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{\|x_k\|\}$，则

$$C_1\left\{n-\left\|\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{\|x_k\|}\right\|\right\} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\|x_k\|-\left\|\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)\right\| \leqslant C_2\left\{n-\left\|\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{\|x_k\|}\right\|\right\};$$

$$C_1\left\{\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|^{p-1}-\left\|\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{\|x_k\|}\right\|^p\right\} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\|x_k\|^p-n^{1-p}\left\|\sum_{k=1}^{n}x_k\right\|^p \leqslant C_2\left\{\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|^{p-1}-\left\|\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{\|x_k\|}\right\|^p\right\},$$

式中 $p\geqslant 1$，$n\geqslant 2$.

(7) 设 q_k 为复数或实数，$Q_n=\sum_{k=1}^{n}q_k$，则

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{|Q_n|\,\|x_k\|-\sum_{j=1}^{n}(|q_j|\cdot\|x_k-x_j\|)\right\} \leqslant \left\|\sum_{k=1}^{n}q_kx_k\right\| \leqslant \min_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{|Q_n|\,\|x_k\|+\sum_{j=1}^{n}(|q_j|\cdot\|x_k-x_j\|)\right\}.$$

(以上(3) ~ (7) 见[330]40(2009),225 ~ 237)

(8) 设 $0\leqslant p\leqslant \frac{1}{2}$,则

$$(\|z-x\|\cdot\|y\|)^p \leqslant (\|x-y\|\cdot\|z\|)^p+(\|y-z\|\cdot\|x\|)^p$$

([22]517)

(9) 设 $\alpha,\beta\in K$(X 的数域,实数或复数). C_1,C_2 按(6)定义,则

$$\frac{1}{2}\{(\|x\|+\|y\|)\,|\alpha+\beta|-(|\alpha|+|\beta|)\,\|x-y\|\}$$

$$+\frac{1}{2}\{|\alpha+\beta|(\|x\|-\|y\|)+(|\alpha|-|\beta|)\|x-y\|\}$$

$$\leqslant\|\alpha x+\beta y\|\leqslant\frac{1}{2}\{|\alpha+\beta|(\|x\|+\|y\|)+(|\alpha|+|\beta|)\|x-y\|\}$$

$$-\frac{1}{2}\{|\alpha+\beta|(\|x\|-\|y\|)-(|\alpha|-|\beta|)\|x-y\|\}$$

由此推出反向三角不等式：

$$0\leqslant\|x\|+\|y\|-\|x+y\|\leqslant C_1\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\|.$$

([330]40(2009),225 ~ 237)

(10) 设 $0\leqslant p\leqslant 1$，或 $p\geqslant 2$，则

$$(\|x+y\|^2+\|x-y\|^2)^p\geqslant 2^p\{(\|x\|^p+\|y\|^p)^2+(2^p-2^2)\|x\|^p\|y\|^p\}.$$

若 $p\leqslant 0$，或 $1\leqslant p\leqslant 2$，则不等号反向.([22]551)

37. 混合范数不等式:$L^p(E)$ 和 $L^q(D)$ 中混合范数定义为

$$\|f\|_{p,q}=\left\{\int_E\left(\int_D|f(x,y)|^q\mathrm{d}\nu(y)\right)^{\frac{p}{q}}\mathrm{d}\mu(x)\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

p',q' 分别是 p,q 的共轭指数,则当 $r>\max\{p,p',q,q'\}$ 时,

$$\left\{\left\|\frac{1}{2}(f+g)\right\|_{p,q}^r+\left\|\frac{1}{2}(f-g)\right\|_{p,q}^r\right\}^{\frac{1}{r}}\leqslant\left\{\frac{1}{2}(\|f\|_{p,q}^{r'}+\|g\|_{p,q}^{r'})\right\}^{\frac{1}{r'}}$$

([22]539)

若 $0<p,q,r,s\leqslant\infty$，r',s' 是 r,s 的共轭指数,则

$$(\|f+g\|_{p,q}^r+\|f-g\|_{p,q}^r)^{\frac{1}{r}}\leqslant C(\|f\|_{p,q}^s+\|g\|_{p,q}^s)^{\frac{1}{s}},$$

式中 $C=2^{\frac{1}{r}-\frac{1}{s}+\frac{1}{t}}$，$t=\min\{s,r',p,p',q,q'\}$.

([417]280(12)(2007),1363 ~ 1375)

38. Chebyshev 泛函不等式:设$(X,\|\cdot\|)$是数域 K 上的赋范线性空间,$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in K^n$，$x=(x_1,\cdots,x_n)\in X^n$，Chebyshev 泛函定义为

$$f_n(x,\alpha)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\alpha_kx_k-\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\alpha_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k\right)$$
$$=A_n(\alpha x)-A_n(\alpha)A_n(x).$$

式中 $A_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k$，$A_n(\alpha x)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\alpha_kx_k$.则对于任意 $\beta,\gamma\in K$,成立

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{|A_n(\alpha)-\gamma|\ \|x_k-A_n(x)\|-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n(|\alpha_j-\gamma|\ \|x_j-x_k\|)\right\}\leqslant\|f_n\|$$

$$\leqslant\min_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{|A_n(\alpha)-\beta|\ \|x_k-A_n(x)\|+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n(|\alpha_j-\beta|\ \|x_j-x_k\|)\right\}.$$

([330]40(2009),225 ~ 237)

39. 设 X 是内积空间，$x,y,z\in X$，则

(1) $-\frac{1}{4}\{\|x-y\|^2-(\|x\|-\|y\|)^2\}\leqslant(x,y)\leqslant\frac{1}{4}\{\|x+y\|^2-(\|x\|-\|y\|)^2\}.$

(2) $C(\|x+y\|-\|x\|-\|y\|)\leqslant(x,y)\leqslant C(\|x\|+\|y\|-\|x-y\|)$,

式中 $C=\frac{1}{2}\max\{\|x\|,\|y\|\}$.([22]518)

(3) $\frac{1}{2}\|x\|^2\{|(y,z)|-\|y\|\cdot\|z\|\}\leqslant|(y,x)(x,z)|$

$\leqslant\frac{1}{2}\|x\|^2\{|(y,z)|+\|y\|\cdot\|z\|\}$.

(4) $\|x\|^2\|y\|^2-\|y\|^2\cdot\|x-\lambda y\|^2\leqslant|(x,y)|^2,\quad \lambda\in C$.

(3)(4) 见[330]37(2006),227 ~ 235;39(2008),1 ~ 7.(另见 Facta Univ. Ser. Math. Inf. 20(2005),65 ~ 73)

40. 设 X 为酉空间,$T:X\to X$ 是有界线性算子,并满足:

(1) $\|T\|=1$; (2) $(Tx,y)=(x,Ty),\ x,y\in X$; (3) $(Tx,x)\geqslant 0,\ x\in X$.

则

$$|(x,y)|\leqslant|(x,y)-(Tx,y)|+|(Tx,y)|$$
$$\leqslant|(x,y)-(Tx,y)|+(Tx,x)^{\frac{1}{2}}(Ty,y)^{\frac{1}{2}}\leqslant\|x\|\cdot\|y\|.$$

若 $\|z\|=1$,则

$$|(x,y)|\leqslant|(x,y)-(x,z)(z,y)|+|(x,z)(z,y)|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|.$$

([22]605)

41. 设 X 为实 Hilbert 空间,X_C 是 X 的复化空间,$x\in X$,$y\in X_C$,则

$$|(y,x)|^2\leqslant\frac{1}{2}\|x\|^2\{\|y\|^2+|(y,\bar{y})|\}\leqslant\|x\|^2\cdot\|y\|^2.$$

([22]601)

42. 设$\{e_k\}$是数域 K 上内积空间 X 中的正交系,$x,y\in X$,则

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)(e_k,y)-\frac{1}{2}(x,y)\right|\leqslant\frac{1}{2}\|x\|\cdot\|y\|. \tag{1.11}$$

仅当$\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k=\frac{1}{2}x+\left\{\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)(e_k,y)-\frac{1}{2}(x,y)\right\}\frac{y}{\|y\|^2}$ 时等号成立.

推论:$\left|\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)(e_k,y)\right|\leqslant\left|\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)(e_k,y)-\frac{1}{2}(x,y)\right|+\frac{1}{2}|(x,y)|$

$$\leqslant\frac{1}{2}\{\|x\|\cdot\|y\|+|(x,y)|\}\leqslant\|x\|\cdot\|y\|.$$

若 X 是实内积空间,则(1.11) 化为

$$\frac{1}{2}\{(x,y)-\|x\|\cdot\|y\|\}\leqslant\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)(e_k,y)\leqslant\frac{1}{2}\{(x,y)+\|x\|\cdot\|y\|\}.$$

([330]37(2006),227 ~ 235)

43. 设 X 是实内积空间,$x_k,y_k\in X$,则

$$2\prod_{k=1}^{n}(x_k,y_k)\leqslant\prod_{k=1}^{n}\|x_k\|^2+\prod_{k=1}^{n}\|y_k\|^2.$$

([307]1099 ~ 26012)

44. A 范数(Amemiya 范数) 不等式:

设 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 是实数列.

(1)　若 $\varphi: R^+ \to R^+$ 是凸函数,则 x 的 A 范数定义为

$$\| x \|_{\varphi} = \inf\left\{a\left(1+\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{x_k}{a}\right)\right): a > 0\right\},$$

则成立三角不等式:

$$\| x+y \|_{\varphi} \leqslant \| x \|_{\varphi} + \| y \|_{\varphi}.$$

(2)　设 $\psi: R^+ \to R^+$ 是凹函数,则定义 x 的 A 范数为

$$\| x \|_{\psi} = \sup\left\{\left(1+\sum_{k=1}^{n}\psi\left(\frac{x_k}{a}\right)\right): a > 0\right\}.$$

则

$$\| x+y \|_{\psi} \geqslant \| x \|_{\psi} + \| y \|_{\psi}.$$

([22]586 或 Z. Anal. Anwend 11(1992),285 ~ 290)

45.　设 X 是 Hilbert 空间,$T_k: X \to X$ 是有界线性算子,T_k^* 是 T_k 的共轭算子. 则成立 Schwarz 型不等式:

$$\left\| \sum_{k=1}^{n}\alpha_k T_k \right\|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} | \alpha_k |^2 \| T_k \|^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} | \alpha_i | | \alpha_j | \| T_i T_j^* \|.$$

([359]13(1)(2006),17 ~ 26)

46.　Lorentz空间 $L(p,q)$ 中的范数不等式:设 f 是全σ有限测度空间 X 上的可测函数,f^* 是 f 的递减重排,f^{**} 是 f 的平均重排.(定义见第 13 章 No. 20)

$$\| f \|_{p,q} = \begin{cases} \left\{\int_0^{\infty}(x^{\frac{1}{p}} f^{**}(x))^q \frac{\mathrm{d}x}{x}\right\}^{\frac{1}{q}}, & 1 \leqslant p,q < \infty, \\ \sup\limits_{x>0} x^{\frac{1}{p}} f^{**}(x), & 1 \leqslant p \leqslant \infty,\ q = \infty. \end{cases}$$

$L(p,q) = \{f$ 在 X 上可测; $\| f \|_{p,q} < \infty\}$, $1 \leqslant p,q \leqslant \infty$, $L(p,p) = L^p$,则

(1)　$\| f \|_p \leqslant \| f \|_{p,p} \leqslant \dfrac{p}{p-1} \| f \|_p$,　$(1 < p < \infty)$.

(2)　设 $1 < p < \infty$, $1 \leqslant q < r < \infty$, $s = \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{r}$, 则

$$\| f \|_{p,r} \leqslant \left(\frac{q}{p}\right)^s \| f \|_{p,q} \leqslant e^{\frac{1}{e}} \| f \|_{p,q}.$$

(详见[308]128(1999),727 ~ 734;[168] 第 11 章)

47.　设$(\| X \|, \| \cdot \|)$是赋范线性空间,$x_k \in X$, $q_k > 0$, $Q_n = \sum\limits_{k=1}^{n} q_k > 0$, f: $R^+ \to R^+$ 是递增的凸函数,则

$$f\left(\frac{1}{Q_n}\left\| \sum_{k=1}^{n} q_k x_k \right\|\right) \leqslant \frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n} q_k f(\| x_k \|);$$

若 f 是递增的凹函数, $f(0) = 0$, $q_k \geqslant 1$, 则

$$f\left(\left\| \sum_{k=1}^{n} q_k x_k \right\|\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} q_k f(\| x_k \|).$$

特别地取 $f(x) = x^p$, 则

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\|^p \leqslant C(p) \sum_{k=1}^{n} q_k \| x_k \|^p,$$

式中 $C(p)=\begin{cases}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}q_k^{\frac{1}{1-p}}\right)^{p-1}, & p\geqslant 1,\ q_k>0;\\ 1, & 0\leqslant p<1,\ q_k\geqslant 1.\end{cases}$ ([22]501)

48. 设$(\|X\|,\|\cdot\|)$是赋范线性空间,$x,y\in X$,则

$$\|x+y\|\leqslant 2\int_0^1\|tx+(1-t)y\|\,\mathrm{d}t\leqslant\|x\|+\|y\|.$$

(Radovi Mat. 7(1991),103 ~ 107)

§2 算子与泛函不等式

1. **线性算子范数不等式**:设 X,Y 为赋范线性空间,D 为 X 的线性子空间. $T:D\to Y$ 为有界线性算子,D 称为 T 的定义域,记为 $D(T)$,则算子 T 在 D 上的范数定义为:

$$\|T\|=\sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|}:x\neq 0,x\in D(T)\right\}.$$

它有以下两种等价形式:

$$\|T\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Tx\|=\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|.$$

(1) 若 T 有界,则成立**算子范数不等式**:

$$\|Tx\|\leqslant\|T\|\,\|x\|,x\in D(T).$$

(2) 若 T_1,T_2 是两个定义有乘积 T_1T_2 的算子,则算子范数有一个对计算很有用的性质:$\|T_1T_2\|\leqslant\|T_1\|\cdot\|T_2\|$. 特别 $\|T^2\|\leqslant\|T\|^2$,从而 $\|T^n\|\leqslant\|T\|^n$.

下面设 X 为 Banach 空间,T,T_k 均为 X 上有界线性算子. 记为 $T,T_k\in B(X)$.

(3) 设 $\|T\|\leqslant|\lambda|$,则逆算子 $S=(\lambda I-T)^{-1}$ 存在且为有界线性算子,

$\|S\|\leqslant\dfrac{1}{|\lambda|-\|T\|}$. 其中 I 为恒等算子.

(4) 设 $T_2=T_1-T_3$, $\|T_3\|<\|T_1^{-1}\|^{-1}$, $T=T_1^{-1}T_3$,则

$$\|T_2^{-1}-T_1^{-1}\|\leqslant\frac{\|T\|}{1-\|T\|}\|T_1^{-1}\|;\ \|T_2^{-1}-T_1^{-1}\|\leqslant\frac{\|T_1^{-1}\|^2\|T_3\|}{1-\|T_1^{-1}\|\,\|T_3\|};$$

$$\|(T_1+T_3)^{-1}\|\leqslant\frac{\|T_1^{-1}\|}{1-\|T_3\|\cdot\|T_1^{-1}\|}.$$

这些不等式在数值分析中有重要应用.

(5) $\|T_1+T_2\|\leqslant\|T_1\|+\|T_2\|$. (**三角不等式**).

(6) **CPR(Corach-Porta-Recht)不等式**:设 T 为自共轭算子,A,B 为可逆的自共轭算子,则

$$2\|T\|\leqslant\|ATA^{-1}+A^{-1}TA\|;\quad 2\|T\|\leqslant\|ATB^{-1}+A^{-1}TB\|;$$

$$\|A^{2m}T+TB^{2m}\|\leqslant\|A^{2m+n}TB^{-n}+A^{-n}TB^{2m+n}\|.$$

m,n 为非负整数. (证明及更多类似的范数不等式见[308]1993,118(3):827;另见[308]2001,129(10):3009 ~ 3015)

(7) **Anderson 不等式**:设 X 是可分的无限维复 Hilbert 空间,$B(X)$ 表示 $X\to X$ 的算子代数. 设 $A,B,T\in B(X)$,A 为正规算子且 $AB=BA$,则

$$\|B\|\leqslant\|AT-TA+B\|.$$

([308]1973,38:135 ~ 140)

2001 年 Turnsek,A. 作了若干推广,例如设 A 为正规算子,B 满足 $ABA^* = B$,则

$$\| B \| \leqslant \| ATA^* - T + B \|.$$

([301]2001,263:124 ~ 134;[308]1998,126:2074 ~ 2052,1995,123:2709 ~ 2714)

2. **泛函不等式:**

(1) **线性泛函范数不等式:** 设 X 是赋范线性空间,f 是 X 上有界线性泛函,记为 $f \in X^*$,f 的范数定义为

$$\| f \| = \sup_{x \neq 0} \frac{| f(x) |}{\| x \|}.$$

它也有两种等价形式:$\| f \| = \sup\limits_{\| x \| \leqslant 1} | f(x) | = \sup\limits_{\| x \| = 1} | f(x) |$.

① 若 $f \in X^*$,则 $| f(x) | \leqslant \| f \| \| x \|$.

② $\| f_1 + f_2 \| \leqslant \| f_1 \| + \| f_2 \|$.

(2) 设 $E \subset R^n$,$x, y, z^2 \in L(E)$,定义泛函 f 为:$f(x) = \int_E x(t) \mathrm{d}t$.

① 若 $f(x), f(y) > 0$,且 $f(x)f(yz) = f(y)f(xz)$,则

$$f(xz)f(yz)f(x+y) \leqslant f(xz^2)[f(y)]^2 + f(yz^2)[f(x)]^2;$$

$$f((x+y)z) \leqslant \frac{f(x)f(yz^2)}{f(yz)} + \frac{f(y)f(xz^2)}{f(xz)},$$

仅当 z 为常数时等号成立.

② 若 $f(x), f(y) > 0$,则

$$2 | f(xz)f(yz) | \sqrt{f(x)f(y)} \leqslant f(xz^2)[f(y)]^2 + f(yz^2)[f(x)]^2.$$

(Guo Baini,等[331]1999,10:27 ~ 29)

(3) **Helly 矩量定理:** 设 $\{x_k\}$ 是赋范线性空间 $(X, \| \cdot \|)$ 中线性无关元. $\{\alpha_k\} \subset K$,则存在 $f \in X^*$ 满足 (1) $f(x_k) = \alpha_k$ 和 (2) $\| f \| \leqslant M$ 的充要条件是 $\forall \{\beta_k\} \subset K$,下式成立

$$\left| \sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_k \right| \leqslant M \left\| \sum_{k=1}^n \beta_k x_k \right\|.$$

3. **(p,q) 型算子不等式:** 设算子 $T: L^p(X, \sum_1, \mu_1) \to L^q(Y, \sum_2, \mu_2)$, $0 < p, q \leqslant \infty$,若存在常数 $C(p,q)$,使得

$$\| Tf \|_q \leqslant C(p,q) \| f \|_p.$$

则称 T 为强 (p,q) 型算子,通常简称为 **(p,q) 型算子**. 算子范数为

$$\| T \| = \sup_{f \neq 0} \frac{\| Tf \|_q}{\| f \|_p}.$$

若 $\mu_2\{y \in Y : | Tf(y) | > \lambda\} \leqslant \left\{ \frac{c}{\lambda} \| f \|_p \right\}^q$,$(\lambda > 0, 0 < p \leqslant \infty, 0 < q < \infty)$,则称 T 为**弱 (p,q) 型算子.**

(1) 设 $(X, \sum_1, \mu_1)$,$(Y, \sum_2, \mu_2)$,为两个测度空间,$K(x,y)$ 是 $X \times Y$ 上可测函数,积分算子 T 定义为

$$T(f,x) = \int_Y K(x,y) f(y) \mathrm{d}\mu_2(y),\ f \in L^p(Y).\ \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1, 1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty,$$

若$\int_X |K(x,y)|^q d\mu_1(x) \leqslant C_1$ a.e. $y \in Y$; $\int_Y |K(x,y)|^q d\mu_2(y) \leqslant C_2$ a.e.. $x \in X$. 则

$$\|Tf\|_r \leqslant C_1^{1/r} C_2^{1-(1/p)} \|f\|_p.$$

证明用 Hölder 不等式.([142]10 ~ 11)

(2) **Riesz-Thorin 不等式**:设E_n是R^n中阶梯函数的向量空间. $T: E_n \to L^1_{loc}(R^n)$为线性算子. 若 $\forall f \in E_n$. $\|Tf\|_{q_0} \leqslant C_0 \|f\|_{p_0}$; $\|Tf\|_{q_1} \leqslant C_1 \|f\|_{p_1}$,

式中 $1 \leqslant p_k, q_k \leqslant \infty, C_k > 0, k = 0,1$,

若$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}, \frac{1}{q} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}, 0 \leqslant t \leqslant 1$,则

$$\|Tf\|_q \leqslant C_0^{1-t} C_1^t \|f\|_p. \ \forall f \in E_n.$$ ([73]266 ~ 272)

它的进一步推广就是著名的 **Riesz 凸性定理**.([65]191 ~ 196)

(3) 设 $T(f,x) = \int_0^\infty K(x,y) f(y) dy$. $K(x,y) \geqslant 0, w, v$ 为$(0,\infty)$上非负权函数. f 在$(0,\infty)$上非负递减或非负递增,$0 < p \leqslant q < \infty, 0 < p \leqslant 1$,则

$$\|T(f)\|_{q,w} \leqslant C \|f\|_{p,v}$$

中的最佳常数 C 已找出.([307]814 ~ 26011)

(4) **HLP 不等式(Hardy-Littlewood-Polya 不等式)**:设 $K(x,y)$ 是$(0,\infty) \times (0,\infty)$上的可测函数,而且满足:

① $\forall \lambda > 0, K(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{-1} K(x,y)$;

② $\int_0^\infty |K(x,1)| x^{-1/p} dx = C < \infty, 1 \leqslant p \leqslant \infty$.

若 $f \in L^p(0,\infty), g \in L^q(0,\infty), 1/p + 1/q = 1$.

$$T_1(f,y) = \int_0^\infty K(x,y) f(x) dx, \quad T_2(g,x) = \int_0^\infty K(x,y) g(y) dy.$$

则 $\|T_1 f\|_p \leqslant C \|f\|_p$, $\|T_2 g\|_q \leqslant C \|g\|_q$.

([142]11 ~ 12)

这些不等式不仅有广泛的应用,而且还可用它们推出很多重要的不等式,例如:

① 当$K(x,y) = \frac{1}{x+y}$时,$T(f;x)$就是 Hilbert 积分:$T(f;x) = \int_0^\infty \frac{f(y)}{x+y} dy$,它满足 $\|T(f)\|_p \leqslant C_p \|f\|_p, 1 < p < \infty$,式中 $C_p = \int_0^\infty x^{-1/p}(1+x)^{-1} dx = \pi \csc \frac{\pi}{p}$.

② 记 $E = \{(x,y): x < y\}$ 的特征函数为

$$\varphi_E(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in E, \\ 0, & (x,y) \notin E, \end{cases}$$

当 $K(x,y) = y^{-1} \varphi_E(x,y)$ 时,可推出第 13 章 Hardy 不等式.

③ Stupyalis, L. 将上述积分算子推广到多元情形:设 $f \in L^p(R^n), 1 \leqslant p \leqslant \infty$,令 $T(f,x) = \int_{R^n} K(x,y) f(y) dy$,其中 $x = (x_1, \cdots, x_n) = (x', x'') \in R^n, x' = (x_1, \cdots, x_m), x'' = (x_{m+1}, \cdots, x_n), 1 \leqslant m \leqslant n$,

$$K(x,y) = \frac{|x-y|^{\lambda+\mu-n}}{|x'|^\lambda |y'|^\mu}, \quad \lambda < m/p, \mu < m/q, \quad \lambda + \mu > 0, (1/p) + (1/q) = 1,$$则

$$\| Tf \|_p \leqslant C_p \| f \|_p.$$

(MR85h:47061)

(5)　设 $T(f,x)=\int_{R^n} K(x,y)f(y)\mathrm{d}y$. 若 $1 \leqslant p,q<\infty, \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1, \frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$, $C=\left(\int_{R^n}\left\{\int_{R^n} | K(x,y) |^q \mathrm{d}x\right\}^{p'/q} \mathrm{d}y\right)^{1/p'}<\infty$, 则

$$\| Tf \|_q \leqslant C \| f \|_p.$$

(6)　**Kolmogorov 不等式**：设 T 为弱(p,q) 型算子，则 $\forall E \subset Y, \mu_2(E)<\infty$，成立

$$\| Tf \|_r=\left(\int_E | Tf |^r d\mu_2\right)^{1/r} \leqslant C\left(\frac{q}{q-r}\right)^{1/r}[\mu_2(E)]^\alpha \| f \|_p.$$

其中 $1 \leqslant p,q<\infty, 0<r<q$.

反之，若 $0<r<q$，及常数 $C>0$，使得 $\forall f \in L^p(X), \forall E \subset Y, \mu_2(E)<\infty$，有 $\| Tf \|_r \leqslant C[\mu_2(E)]^\alpha \| f \|_p$，则 T 为弱(p,q) 型算子. 式中 $\alpha=(1/r)-(1/q)$. ([142]12 ～ 13)

(7)　**Zygmund 不等式**：设 T 是弱(p,p) 型和弱(q,q) 型算子，$1 \leqslant p<q<\infty$，则 $\forall E \subset Y, \mu_2(E)<\infty, f \in L^p \ln^+ L$, , $Tf \in L^p(E)$，且

$$\left(\int_E | Tf |^p d\mu_2\right) \leqslant C\left\{\mu_2(E)+\int_X | f |^p(1+\ln^+ | f |)\right\}.$$

([142]14 ～ 16)

4.　**卷积算子不等式**：设$(X, \sum_1, \mu)$ 与$(Y, \sum_2, v)$ 为 σ 有限测度空间. $K(x-y)$ 在 $X \times Y$ 上可测，$f \in L^p(v), 1 \leqslant p \leqslant \infty$，则卷积算子 T 定义为

$$T(f,x)=\int K(x-y)f(y)\mathrm{d}v(y). \tag{2.1}$$

当 $X=Y=R^n$ 时，由 K 在 R^n 上可测，可推出 $K(x-y)$ 在 $R^n \times R^n$ 上可测([118]129 ～ 130). 所以，只要假设 f, K 在 R^n 上可测，

$$T(f,x)=\int_{R^n} K(x-y)f(y)\mathrm{d}y \tag{2.2}$$

就 a.e. 有定义. 卷积算子还可定义在广义函数空间上. 对于核 K 的若干特殊选择，就得到 Stieltjes 变换算子、Meijer 变换算子等. 下面仅就(2.2) 式的情形，讨论它的基本不等式.

(1)　**Young 不等式**：设 $K \in L^1(R^n), f \in L^p(R^n), 1 \leqslant p \leqslant \infty$，则 $Tf \in L^p(R^n)$ 且

$$\| Tf \|_p \leqslant \| K \|_1 \| f \|_p \tag{2.3}$$

推论 1　设 $f \in L^p(R^n), K \in L^q(R^n), 1 \leqslant p,q \leqslant \infty, 1/r=(1/p)+(1/q)-1 \geqslant 0$，则

$$Tf \in L^r(R^n)，且 \ \| Tf \|_r \leqslant \| K \|_q \| f \|_p. \tag{2.4}$$

([73]231 ～ 235)(2.4) 式还可进一步改进为

$$\| Tf \|_r \leqslant (C_p C_q C_{r'})^n \| f \|_p \| K \|_q. \tag{2.5}$$

式中　$C_t=\left(\frac{t^{1/t}}{(t')^{1/t'}}\right)^{1/2}, \frac{1}{t}+\frac{1}{t'}=1, t=p,q,r'$.

当 $t \to 1$ 或 ∞ 时 $C_t \to 1$. ([311]1975, 102(1): 159 ～ 182)(2.4) 式的加权形式：例如权函数 $\omega(t)=\frac{1}{t}$，记 $\| f \|_{p,w}=\left(\int_0^\infty | f(t) |^p w(t)\mathrm{d}t\right)^{1/p}$，则

$$\| Tf \|_{r,w} \leqslant \| K \|_{q,w} \| f \|_{p,w}.$$ ([73]369 ~ 370)

推论 2 设 $f \in L^p, g \in L^q, \varphi \in L^r, \frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 1$,则

$$\| f * g * \varphi \|_s \leqslant \| f \|_p \| g \|_q \| \varphi \|_r.$$

式中 $1 \leqslant p,q,r \leqslant \infty$.它可改进:设 $f_k \in L^{p_k}(R^n), 1 < p_k < \infty, \frac{1}{r} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{p_k}, 1 \leqslant r \leqslant \infty, (1/r) + (1/r') = 1$,则

$$\| f_1 * \cdots * f_m \|_r \leqslant (C_{p_1} \cdots C_{p_m} C_{r'})^n \prod_{k=1}^{m} \| f_k \|_{p_k}.$$

([311]1975,102(1):159 ~ 182)

(2) 设非负函数 $f,g \in L^p(R) \cap L^q(R). \frac{1}{t} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{s}, 1 \leqslant q \leqslant s \leqslant p < \infty$,则

$$\| (f^p * g^p)^{1/q} \|_p \leqslant \| f \|_s \| g \|_t \leqslant \| (f^p * g^p)^{1/p} \|_q.$$

(MR90i:62006,90j:26026)

(3) 利用本章 §1,No.15 可证明:设 $1 \leqslant p,q < \infty, 1 \leqslant r \leqslant \infty, \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$,则

$$| T(f,x) |^r \leqslant \| f \|_p^{r-p} \| K \|_q^{r-q} \int | f(y) |^p | K(x-y) |^q \mathrm{d}y.$$

(4) 设核 K 满足:$x > y > 0, K(x) \leqslant cK(y)$,式中 $c \geqslant 1$,当 $t > 0$ 时,$K(t) \geqslant 0$,$t < 0$ 时,$K(t) = 0$. $x > 0$ 时,$\int_0^x K(t)\mathrm{d}t > 0$. f 在$[0,\infty)$ 上非负可测,

$$T(f,x) = \frac{1}{\int_0^x K(t)\mathrm{d}t} \int_0^x K(x-t) f(t) \mathrm{d}t,$$ 则

$$\| Tf \|_p \leqslant \frac{cp^2}{p-1} \| f \|_p, 1 < p < \infty.$$ ([21]173)

(5) 设 $f \in L_{2\pi}^1, \int_0^{2\pi} | f | \ln(1 + | f |) < \infty$,$g$ 满足 $\exp(\lambda^{-1} | g |) \in L_{2\pi}^1, \lambda > 1$,则

$$| f * g | \leqslant \lambda \ln \lambda \int_0^{2\pi} | f | + \lambda \int_0^{2\pi} | f | \ln(1 + | f |) + \int_0^{2\pi} (\exp(\lambda^{-1} | g |) - 1).$$

提示:利用第 5 章 §3No.38 Young 不等式的下述形式:

$$xy \leqslant e^y + x\ln(1+x) - 1. \quad x,y \geqslant 0.$$

(6) 设 $f, K_n \in L_{2\pi}^1$. H_n 为$[-\pi,\pi]$ 上连续可微函数列,使得 $| K_n(x) | \leqslant H_n(x)$, $-\pi < x \leqslant \pi$;

$$C_1 = \sup_n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_n(x) \mathrm{d}x < \infty; C_2 = \sup_n \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} | xH'_n(x) | \mathrm{d}x < \infty,$$

令 $T(f,x) = \sup_n | (f * K_n)(x) |$,则

$$T(f,x) \leqslant (C_1 + 2C_2) f^{\Delta}(x).$$

式中 $f^{\Delta}(x) = \max\left\{ \sup_{h>0} \frac{1}{h} \int_0^h | f(x+t) | \mathrm{d}t, \sup_{h>0} \frac{1}{h} \int_0^h | f(x-t) | \mathrm{d}t \right\}$. ([73]387 ~ 392)

(7) 设 $S(R^n)$ 表示速降检验函数空间,$S'(R^n)$ 为缓增广义函数空间.(其定义见

[118]362) 若 $f \in S(R^n)$，$K \in S'(R^n)$，则 $Tf = f * K \in C^\infty(R^n)$，且

$|(Tf)(x)| \leqslant C(1+|x|^2)^{m/2}$. 式中 $S(R^n) = \{\varphi \in C^\infty(R^n): \|\varphi\|_m < \infty\}$，$\|\varphi\|_m = \sup\{(1+|x|^2)^{m/2}|D^\alpha\varphi(x)|: |\alpha| \leqslant m, x \in R^n\}$，$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$，$\alpha_k$ 为非负整数. $|\alpha| = \sum_{k=1}^n \alpha_k$. ([83]151)

(8)　令 $E_\alpha = \{x \in E: |f(x)| > \alpha\}$，$\alpha > 0$. $\omega(\alpha) = \mu(E_\alpha)$ 称为 f 的**分布函数**，已知 $0 < p < \infty$ 时，$\|f\|_p^p = \int_E |f|^p = p\int_0^\infty \alpha^{p-1}w(\alpha)\mathrm{d}\alpha$. ([118]131)

定义　$[f]_p = (\sup \alpha^p w(\alpha): \alpha > 0)^{1/p}$，$0 < p < \infty$，

若 $[f]_p < \infty$，称 $f \in WL^p$，由 Chebyshev 不等式(第 13 章 No. 42)，$L^p \subset WL^P$，且 $[f]_p \leqslant \|f\|_p$. 设 $1 < p, q \leqslant \infty$，$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$，$r < \infty$，若 $f \in L^p$，$K \in WL^q$，则 $Tf \in L^r$，且

$$\|Tf\|_r \leqslant C(p,q)\|f\|_p[K]_q;$$

若 $p = 1$，$q = r > 1$，$f \in L^1$，$K \in WL^q$，则

$Tf \in WL^q$，且 $[Tf]_q \leqslant C_q\|f\|_1$. ([64]241 ~ 242)

(9)　广义卷积不等式：设 $f, g \in L(-\infty, \infty)$，$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{\alpha}$，$0 < \alpha \leqslant p, q \leqslant 1$，则

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(c_1 y - c_2 x)\mathrm{d}x\right\}^\alpha \mathrm{d}y \geqslant c_1^{-1}c_2^{\frac{\alpha}{p}-\alpha}\|f\|_p^\alpha\|g\|_q^\alpha.$$

若 $\alpha \geqslant p, q \geqslant 1$ 或 $\alpha \leqslant p, q < 0$，则不等号反向.

([301]85(1982)，257 ~ 278)

(10)　Young 不等式：设 $p, q, r \geqslant 1$，$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 2$，$f \in L^p(R^n)$，$g \in L^q(R^n)$，$h \in L^r(R^n)$，则

$$\left|\int_{R^n} f(x)(g * h)(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{R^n} f(x)\left(\int_{R^n} g(x-y)h(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\right|$$
$$\leqslant C(p,q,r,n)\|f\|_p\|g\|_q\|h\|_r,$$

式中 $C(p,q,r,n) = (C_pC_qC_r)^n$ 是最佳常数，此处 $C_p^2 = p^{\frac{1}{p}}(p')^{\frac{1}{p'}}$，$p'$ 是 p 的共轭指数，即 $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

当 $p, q, r > 1$ 时，等号成立的充要条件是：

$$f(x) = C_1\exp\{-p'(x-\alpha_1, J(x-\alpha_1)) + i(\beta x)\},$$
$$g(x) = C_2\exp\{-q'(x-\alpha_2, J(x-\alpha_2)) - i(\beta x)\},$$
$$h(x) = C_3\exp\{-r'(x-\alpha_3, J(x-\alpha_3)) + i(\beta x)\}.$$

其中 C_1, C_2, C_3 为复数，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta \in R^n$，$\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3$，$J$ 是任意实对称正定矩阵. ([167]87 ~ 94)

(11)　在[1] 中，对 Young 不等式还有一系列推广，例如[1] 中定理 282：令

$$g(x) = \int_{R^1}\cdots\int_{R^1}\left(\prod_{j=1}^{n-1} f(x_j)\right) f\left(x - \sum_{k=1}^{n-1} x_k\right)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n-1},\quad m = \frac{2n}{2n-1},$$

则

$$\int_{R^1} g^2 \leqslant \left(\int_{R^1} f^m\right)^{2n-1}.$$

（此外见[1] 定理 278 ～ 281；另见[22]179 ～ 180）

注　若卷积核具有形式：$K_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kt$，则卷积算子

$$T_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x-t)f(t)\mathrm{d}t \tag{2.6}$$

又称为**奇异积分算子**，特别当 $K_n(t)$ 为 Dirichlet 核、Fejer 核、Jackson 核等时，相应的(2.6)式分别称为Dirichlet奇异积分算子、Fejer奇异积分算子、Jackson奇异积分算子等.

5.　**正线性算子不等式**：若 $\forall f(t) > 0, \forall x \in E, L(f,x) \geqslant 0$，则称线性算子 L 为 E 上正算子.

(1)　若正线性算子 $L_n: C[a,b] \to C[a,b]$，并满足：

$$L_n(1;x) = 1, L_n(t - \frac{a+b}{2}; x) = x - \frac{a+b}{2} + \alpha_n(x),$$

$$L_n[(t - \frac{a+b}{2})^2; x] = (x - \frac{a+b}{2})^2 + \beta_n(x).$$

式中当 $n \to \infty$ 时 $\alpha_n(x), \beta_n(x)$ 一致趋于零，则 $\forall f \in C[a,b]$，下式成立

$$|L_n(f,x) - f(x)| \leqslant \frac{5}{4} w(f, \delta_n).$$

式中　$\delta_n = 2[(b-a)|\alpha_n| + |\beta_n|]^{1/2}$.（[82]344 ～ 345）

(2)　若正线性算子 $T_n: C_{2\pi} \to C_{2\pi}$，并满足：$T_n(1;x) = 1$；$T_n(\cos t; x) = \cos x + \alpha_n(x)$；$T_n(\sin t; x) = \sin x + \beta_n(x)$，则 $\forall f \in C_{2\pi}$，下式成立

$$|T_n(f,x) - f(x)| \leqslant (1 + \pi^2)\omega(f, \delta_n),$$

式中　$\delta_n = \left[\frac{1}{2}(\|\alpha_n\|^2 + \|\beta_n\|^2)\right]^{1/4}$. $\alpha_n(x)$ 与 $\beta_n(x)$ 当 $n \to \infty$ 时一致趋于零.（[82]348）

(3)　设多项式线性算子 $L_n(f,x)$ 将 $C_{2\pi}$ 映射为三角多项式空间，设 $T_n(x)$ 为三角多项式，$L_n(T_n, x) = T_n(x)$，则

$$\|L_n\| \geqslant \frac{1}{22}\ln n. \quad ([82]122)$$

(4)　**Cauchy 不等式**：设 X, Y 为 Banach 空间，$T: X \to Y$ 为正线性算子，则

$$|T(fg,x)|^2 \leqslant T(f^2,x)T(g^2,x).$$

提示：对固定的 x，考虑 λ 的二次多项式：$T((f+\lambda g)^2; x) \geqslant 0$.

(5)　**极大不等式**：设$(X, \sum, \mu)$ 为 σ 有限测度空间. 若测度 μ 在可测变换 φ 下不变，即 $\mu[\varphi^{-1}(A)] = \mu(A)$　$(\forall A)$，称 φ 为**保测变换**. 令 $A_n f(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi^k x)$，若 $T: L^1(X) \to L^1(X)$ 为正线性算子，且 $\|T\| \leqslant 1$，则 $\forall f \in L^1(X)$，成立 $\int_E f \mathrm{d}\mu \geqslant 0$，

式中 $E = \{x: \sup_{n \geqslant 1} A_n f(x) > 0\}$.

(6)　设 X 为 Hilbert 空间，T 为 X 上正线性算子，$0 \leqslant \lambda \leqslant 1$，则 Hölder-McCarthy 不

等式

$$(Tx,x)^{\lambda} \geqslant (T^{\lambda}x,x),\ \|x\| = 1$$

与 Young 不等式：$\lambda(Tx,x)+1-\lambda \geqslant (T^{\lambda}x,x),\ \|x\| = 1$ （记为 $\lambda T + I - \lambda \geqslant T^{\lambda}$）等价，式中 I 为恒等算子.（[305]2001,108(1):68 ~ 69)

6. **Bernstein 算子不等式**：Bernstein 算子 B_n 定义为：

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k},\ 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

(1) 设 $f \in C[0,1]$，则

$$|B_n(f,x) - f(x)| \leqslant \frac{5}{4}w\left(f,\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

1960 年，Esseen 将系数 5/4 改进为

$$C = 2\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)[\varphi(2k+2)-\varphi(2k)] = 1.045564\cdots,$$

式中 $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t$ 为正态分布函数.

(Numer. Math. 1960,2:206 ~ 213)

(2) 设 $f \in \mathrm{Lip}_M^{\alpha},\ 0 < \alpha < 1$，则

$$\|B_n(f) - f\|_c \leqslant \frac{CM}{n^{\alpha/2}}.$$

(Kac,M. [329]1938,7:49 ~ 51;1939,8:170)

(3) $f' \in \mathrm{Lip}_M 1 \Leftrightarrow |B_n(f,x) - f(x)| \leqslant M\frac{x(1-x)}{2n},\ x \in [0,1].$

(Lorentz,G. G. ,[70]169)

(4) 设 $f'' \in C[0,1]$，则

$$|B_n(f,x) - B_{n+1}(f,x)| \leqslant \frac{x(1-x)}{n+1}\left(\frac{1}{3n}\right)^{1/2}\|f''\|_2.$$

$$|B_n(f,x) - B_{n+1}(f,x)| \leqslant \frac{x(1-x)}{2n(n+1)}\|f''\|_2.$$

$x \in [0,1]$.（[305]1986,93(4):308 ~ 309)

(5) 设 $1/2 \leqslant a < 1$，则 $\exists n_0 = n_0(a) \in N$，使得 $\forall n \geqslant n_0$，下式成立

$$\sup_{1-a \leqslant \frac{k}{n} \leqslant a}\left|B_n\left(f,\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant c\,w_2\left(f,\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

式中常数 c 满足 $0 < c < 1$.（Gonska,H. H. 等,Serdica,1995,21(2):137 ~ 150)

我们问：c 的最佳值是多少？

Bernstein 算子已有许多变形和推广. 例如：

(6) **Kantorovich 算子不等式**：

$$K_n(f;x) = (n+1)\sum_{k=0}^{n}\left(\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}}f(t)\mathrm{d}t\right)P_{n,k}(x),\ \text{式中 } P_{n,k}(x) = \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

1975 年 Bojanic,R. 和 Shisha,O. 证明：设 $f \in L[0,1]$，则对于 $n \geqslant 2$，有

$$\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,|K_n(f;x) - f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{2\pi^2}{3}\omega_1\left(f;\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

1962 年,李文清证明:若 $f \in C[0,1]$,则

$$|K_n(f;x)-f(x)| \leqslant \frac{5}{4}\omega\left(f;\sqrt{\frac{1}{n+1}}\right).$$ ([70]174 ~ 175)

(7) **Meyer-König-Zeller 算子(简称为 MKZ 算子)**:

$$M_n(f,x)=(1-x)^n\sum_{k=0}^{\infty}f\left(\frac{k}{n+k}\right)\binom{n+k-1}{k}x^k, x\in[0,1].$$

陈文忠等用概率论方法证明:若 $f \in BV[0,1]$,则当 n 充分大时,

$$\left|M_n(f,x)-\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]\right| \leqslant \frac{5}{nx}\sum_{k=1}^{n}V_{x-x/\sqrt{k}}^{x+(1-x)/\sqrt{k}}(g_x)$$

$$+\frac{65}{2\sqrt{n}x^{3/2}}|f(x+0)-f(x-0)|,$$

式中 $$g_x(t)=\begin{cases}f(t)-f(x+0), & x<t\leqslant 1, x\in(0,1),\\ 0 & t=x,\\ f(t)-f(x-0), & 0\leqslant t<x,\end{cases} \tag{2.7}$$

$V_a^b(g_x)$ 是 g_x 在$[a,b]$上的全变差.([336]1988,9A(2):234 ~ 240)

$M_n(f,t)$ 的推广是

$$\hat{M}_n(f,x)=(n+1)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_{\frac{k}{n+k}}^{\frac{k+1}{n+k+1}}f(t)\mathrm{d}t\right)\binom{n+k+1}{k}x^k(1-x)^n.$$

(相应的结果见[327]1989,56:245 ~ 255;[301]1994,187:1 ~ 16;[332]2002,18(3):99 ~ 102)

(8) **Bernstein-Bezier 算子(B-B 算子)**:

$$B_n^{(\alpha)}(f,x)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)[J_{n,k}^{(\alpha)}(x)-J_{n,k+1}^{(\alpha)}(x)],$$

式中 $$J_{n,k}(x)=\sum_{j=k}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

若 $f \in BV[0,1], n>2, x\in(0,1)$,则

$$\left|B_n^{(\alpha)}(f,x)-\left[\frac{1}{2^\alpha}f(x+0)+\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)f(x-0)\right]\right| \leqslant \frac{3\alpha}{nx(1-x)+1}\sum_{k=1}^{n}V_{x-(x/\sqrt{k})}^{x+(1-x)/\sqrt{k}}(g_x)$$

$$+\frac{3\alpha}{3\sqrt{nx(1-x)}+1}|f(x+0)-f(x-0)|+2h_n(x)|f(x)-f(x-0)|.$$

式中 $$h_n(x)=\begin{cases}1, & x=h/n,\\ 0, & x\neq k/n.\end{cases}$$ $g_x(t)$ 由(2.7)式定义.

(Alain,P. 等,[406]1995,321(5):575 ~ 580)

(9) **Szasz 算子**:

$$L_n(f,x)=\sum_{k=0}^{\infty}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nx)^k}{k!}e^{-nx}.$$

设 $0\leqslant a<b<\infty, D=[a,b], D_1=[a+\eta,b-\eta],(\eta>0)$. 若 $f\in C(D)$,且存在正常数 c_1,c_2,使得 $f(x)\leqslant c_1(x^2+1)e^{c_2x}$,则

$$\|L_n(f)-f\|_{C(D_1)}\leqslant 2\omega(f,\sqrt{b/n})+(c_3/n);$$

若加上 $f'\in C(D_1)$,则

$$\| L_n(f) - f \|_c \leqslant 2\sqrt{b/n}\,\omega\left(f', \sqrt{b/n}\right) + (c_4/n);$$

式中 c_3, c_4 是依赖于 b 的正常数.

(Ditzian, Z., [327]1975, 14:296 ~ 301; 1984, 40:226 ~ 241)

变形 Szasz 算子定义为

$$L_n^*(f,x) = n\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_0^{\infty} f(t)P_{n,k}(t)\mathrm{d}t\right)P_{n,k}(x),$$

式中 $P_{n,k}(x) = e^{-nx}\dfrac{(nx)^k}{k!}$. 1993 年，郭竹瑞等证明：设 $f \in C[0,\infty)$ 且有界，$t > 0$，则

$$| L_n^*(f,x) - f(x) | \leqslant M(x/n + 1/n^2)^{\alpha/2}, (x \geqslant 0, 0 < \alpha < 1) \Leftrightarrow \omega_1(f,t) = 0(t^{\alpha}).$$

(10)　**Baskakov 算子**：$f \in C(0,\infty)$.

$$T_n(f,x) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}.$$

以及更一般的广义 Lupas-Baskakov 算子

$$T_{n,\alpha}(f,x) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{\Gamma((n/\alpha)+k)}{k!\,\Gamma(n/\alpha)}(\alpha x)^k(1+\alpha x)^{-\frac{n}{\alpha}-k}$$

的有关结果见[81]9；[70]189 ~ 190.

BBH(Bleiman-Butzer-Hahn) 算子

$$T_n(f,x) = \frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k f\left(\frac{k}{n+1-k}\right), x \in [0,\infty)$$

的有关结果及其进展见[158]1 ~ 11

(11)　**多元 Bernstein 算子**. 以三角形区域 $D = \{(x,y): x \geqslant 0, y \geqslant 0, x+y \leqslant 1\}$ 上的 n 阶 Bernstein 算子为例：

$$B_n(f;x,y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k} f\left(\frac{k}{n},\frac{j}{n}\right)\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}x^k y^j(1-x-y)^{n-k-j},$$

有　$| B_n(f;x,y) - f(x,y) | \leqslant 2\omega\left(f;\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$. ([79]82)

有关 Bernstein 算子的综合报告见陈文忠，关于 Bernstein 型算子逼近的几个问题，河南大学学报，1985，2.

(12)　1989 年 Martinez, F. L. 证明：对于

$$B_{n,m}(f,x,y) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} f\left(\frac{j}{n},\frac{k}{m}\right)P_{j,n}(x)P_{k,m}(y),$$

式中　$P_{j,s}(t) = \dbinom{s}{j}t^j(1-t)^{s-j}, \displaystyle\sum_{j=0}^{s}P_{j,s}(t) = 1.$

若 f 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上连续，则

$$| B_{n,m}(f,x,y) - f(x,y) | \leqslant 3\omega(f, 1/\sqrt{n}, 1/\sqrt{m}).$$ ([327]1989, 59:300 ~ 306)

此外，单纯形上的 Bernstein 算子的逼近估计见[339]1991, 2:275 ~ 277. [364]1989, 6:588 ~ 599. 有关专著见[70]，[81] 和 Lorentz, G. G., Bernstein Polynomials, Toronto, 1953.

7. **Dirichlet 奇异积分算子(Fourier 和算子)不等式:**

$$S_n(f,x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(x-t)f(t)\mathrm{d}t.$$

式中 $D_n(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt$ 称为 n 阶 Dirichlet 核. $\|S_n\|=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|D_n(t)|\mathrm{d}t$ 称为 $D_n(t)$ 的 Lebesgue 常数([118]233 ~ 234). 有关 $D_n(t)$ 的不等式见第 6 章 §3 No. 41.

(1) $\frac{4}{\pi^2}\ln(n+1)\leqslant\|S_n\|\leqslant 1+\ln(2n+1)$;

实际上, $\|S_n\|=\frac{4}{\pi^2}\ln n+R_n$, $|R_n|\leqslant 3$. ([82]119 ~ 121)

(2) 设 $f\in L_{2\pi}^p$, $1<p<\infty$, 则

① $\|S_n(f)-f\|_p\leqslant(1+M_p)E_n^*(f)_p$;

② $\|S_n(f)-f\|_p\leqslant C\omega_r(f,1/n)$;

③ $\|S_n(f)\|_p\leqslant C_p\|f\|_p$. ([57]Vol. 1,266)

(3) 设 $f\in L_{2\pi}$, 则

① $\|S_n(f)-f\|_1\leqslant(\ln n)\omega_r(f,1/n)$.

② $\mu\{|S_n(f)|>\lambda\}\leqslant\frac{c}{\lambda}\|f\|_1$, 即 $S_n(f)$ 是弱(1,1) 型算子.

(4) 若 $f\in L_{2\pi}^p$, $1\leqslant p<\infty$, $\|f\|_p\leqslant 1$, 则 $\mu\{|S_n(f)|>\lambda\}\leqslant C_p/\lambda^p$.

(5) 设 $f\in L_{2\pi}^{\infty}$, 则

$$\|S_n(f)-f\|_{\infty}\leqslant(\ln n)\omega_r(f,1/n).$$

(6) 若 $f\in C_{2\pi}$, $\|f\|_c\leqslant 1$, 则

$$\mu\{|S_n(f)|>\lambda\}\leqslant Ce^{-\lambda}.$$

(7) 设 $f\in C_{2\pi}^r$, $r\geqslant 1$, 则

$$\|S_n(f)-f\|_c\leqslant C\frac{\ln n}{n^r}.$$

([68] 上册 271 页. 另见第 12 章 §2. No. 7)

(8) **Oskolkov 不等式:** 设 $f\in C_{2\pi}$, 则存在绝对常数 c, 使得

$$\|S_n(f)-f\|_c\leqslant c\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k-n+1}E_k^*(f).$$ ([71]107 ~ 109)

(9) **Lebesgue 不等式:**

$\|S_n(f)-f\|_c\leqslant(1+\|S_n\|)E_n^*(f)$. (另见第 12 章 §2No. 7)

(10) 设 $f\in\mathrm{Lip}\alpha$, $0<\alpha<1$, 则 $|S_n(f,x)-f(x)|\leqslant C\frac{\ln n}{n^\alpha}$.

(11) 设 $f\in BV(-\pi,\pi)$, 则 $|S_n(f,x)|\leqslant\|f\|_{\infty}+(1/\pi)V_0^{2\pi}(f)$.

(12) 设 $f\in H^1(T)$, 则

$$\frac{1}{\ln(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\|S_k(f)\|_{H^1}\leqslant C\|f\|_{H^1}.$$

(江寅生等. 证明及其推广见[332]1990, 6(2): 28 ~ 37)

(13) 设 φ 是[0,1] 上单调可微的凸函数, $\varphi(0)=1$, $\varphi(1)=0$, $\alpha=-\varphi'(1)$, 则

$$\sup_n \| S_n \| = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left| \int_0^1 \varphi(t)\cos(xt)\mathrm{d}t \right| \mathrm{d}x \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^1 \varphi(t)\,\frac{\sin \pi t}{t}\mathrm{d}t + \frac{2}{\pi}c.$$

式中 $c = \begin{cases} 2\alpha/\pi, & 0 < \alpha \leqslant \pi/2, \\ 1 + \ln(2\alpha/\pi), & \alpha \geqslant \pi/2. \end{cases}$

(MR88b:42015)

(14)　设 $f \in C_{2\pi}$，且 f 的 Fourier 系数 c_k 递减和对数上凸，即　$c_k^2 \geqslant c_{k+1}c_{k-1}$，则

$$\| S_n(f) - f \|_c \leqslant 4eE_n^*(f).$$

(Newman-Rivlin,[71]119 ～ 121)

(15)　谢周在[71]153 中提出：若 $f \in C_{2\pi}$ 且 f 的 Fourier 系数 $c_k = \hat{f}(k)$ 递减，下式是否成立

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\| S_n(f) - f \|_c}{E_n^*(f)} = 0(1)?$$

8.　**FC 和算子不等式**：设 $T_n(x) = \cos(n\arccos x)$ 为 Chebyshev 多项式(见第 6 章 §2)，$f \in C[-1,1]$ 的 Fourier-Chebyshev 级数的 n 阶部分和算子(FC 和算子)为

$$S_n(f,x) = \sum_{k=0}^n a_k T_k(x),$$

式中 $a_k = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{f(x)T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$，则

$$\| S_n(f) - f \|_c \leqslant (3 + \ln n)E_n(f),\quad n \geqslant 2.$$

若 $f \in C^r[-1,1]$，$r \geqslant 1$，则

$$\| S_n(f) - f \|_c \leqslant C\frac{\ln n}{n^r}.$$

9.(1)　**FL 算子不等式**：设 $P_n(x) = \dfrac{1}{n!2^n}[(x^2-1)^n]^{(n)}$，

$K_n(x,t) = \displaystyle\sum_{k=0}^n (k + (1/2))P_k(x)P_k(t)$，$f \in L_{2\pi}$，则

$S_n(f,x) = \displaystyle\int_{-1}^1 f(t)K_n(x,t)\mathrm{d}t$ 称为 FL 算子(Fourier-Legendre 算子)．$S_n(t)$ 的 N-V 平均定义为

$$W_n(f,x) = \frac{1}{Q_n}\sum_{k=0}^n q_k^{-1} S_k(f,x),$$

式中 $q_n > 0, q_n \downarrow, q_0 = 1, Q_n = \displaystyle\sum_{k=0}^n q_k \to \infty (n\to\infty)$.

若 $f \in BV[-1,1]$，$x \in (-1,1)$，则对充分大的 n，下式成立

$$| W_n(f,x) - \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] | \leqslant \frac{24}{Q_n}(1-x^2)^{-3/2}\sum_{k=1}^n V_{x-(1+x)/k}^{x+(1-x)/k}(g_x)$$
$$+ \frac{1}{Q_n}(1-x^2)^{-1} | f(x+0) - f(x-0) |.$$

式中 $g_x(t) = \begin{cases} f(t) - f(x-0), & -1 \leqslant t < x, \\ 0, & t = x, \\ f(t) - f(x+0), & x < t \leqslant 1. \end{cases}$

$V_a^b(g_x)$ 是 g_x 在$[a,b]$上的全变差.

(匡继昌.全国第五届逼近论会议论文集.1988,101.)

(2)　**FF和算子不等式:** 设 $S_n(f,x)=\sum_{k=1}^{n}a_kf_k(x)$ 为Fourier-Franklin级数的n阶部分和算子(FF和算子).$f\in C[0,1]$,则

$$\|S_n(f)-f\|_c\leqslant 8\omega(f,1/n).$$

f 的 Fourier-Franklin 系数 $a_n(f)$ 满足:

$$|a_n(f)|\leqslant\frac{12\sqrt{3}}{2^{m/2}}\omega(f,\frac{1}{2^m}).$$

式中 $n=2^m+k,k=1,\cdots,2^m,m=0,1,\cdots$.

若 $f\in L^p[0,1],1<p<\infty$.令 $S(f,x)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2(f)f_k^2(x)\right)^{1/p}$,则

$$C_p\|f\|_p\leqslant\|S(f)\|_p\leqslant C'_p\|f\|_p$$

([321]1928,100:522～529;[107]2:551)

10.　**正交和算子不等式:** 设$\{P_n\}$是区间(a,b)上关于权函数$\omega(t)$正交的多项式系,$\forall f\in L_\omega^2(a,b)$,$f$关于$\{P_n\}$的Fourier系数为

$c_n=\int_a^b f(t)P_n(t)\omega(t)\mathrm{d}t$. $S_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n}c_kP_k$ 称为**正交和算子**.Lebesgue 函数为 $L_n(x)=\int_a^b\left|\sum_{k=0}^{n}P_k(x)P_k(t)\right|\omega(t)\mathrm{d}t$.则成立 **Lebesgue 不等式:**

$$|S_n(f,x)-f(x)|\leqslant[1+L_n(x)]E_n(f).$$

关于无穷区间上加权正交的多项式系的 Fourier 级数,见 Nevai,P.等.[327]1986,48:3～167.

11.　**FH和算子不等式:** Haar 函数系$\{\varphi_n(t)\}$定义为:$\varphi_1(t)=1,t\in[0,1]$,记 $n=2^m+k,k=1,\cdots,2^m,m=0,1,2,\cdots$

$$\varphi_n(t)=\begin{cases}2^{m/2}, & t\in\left[\frac{2k-2}{2^{m+1}},\frac{2k-1}{2^{m+1}}\right];\\ -2^{m/2}, & \left[\frac{2k-1}{2^{m+1}},\frac{2k}{2^{m+1}}\right];\\ 0, & t\notin\left[\frac{k-1}{2^m},\frac{k}{2^m}\right].\end{cases}$$

若 t_0 为不连续内点,则 $\varphi_n(t_0)=\frac{1}{2}[\varphi_n(t_0-0)+\varphi_n(t_0+0)]$,$\varphi_n(0)=\lim_{t\to0^+}\varphi_n(t)$,$\varphi_n(1)=\lim_{t\to1-0}\varphi_n(t)$.$f$ 的 Fourier-Haar 级数的 n 阶部分和算子(简称为 FH 和算子)为

$$S_n(f,t)=\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k(t).$$

(1)　若 $f\in[0,1]$,则 F-H 系数 $c_n(f)$ 满足

$$|c_n(f)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2n}}\omega(f,\frac{1}{n}),n\geqslant 2.$$

$$\|S_n(f)-f\|_c\leqslant 12\omega(f,1/n).$$

(2)　若 $f \in L^p[0,1], 1 \leqslant p < \infty, r = (2-p)/(2p)$，则

$|c_n(f)| \leqslant n^r \omega(f, 1/n)_p, n = 1,2,\cdots,$

$\left(\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} |c_k(f)|^p\right)^{1/p} \leqslant 8 \times 2^{nr} \omega(f, \frac{1}{2^n})_p, n = 0,1,2\cdots;$

$\| S_n(f) - f \|_p \leqslant 24\omega(f, 1/n)_p.$

(3)　若 $f \in BV[0,1]$，则

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} |c_k(f)| \leqslant \left(\frac{3}{2\sqrt{2^n}}\right) V_0^1(f). n = 0,1,\cdots$$

见 Kashin, B. S. 等. Orthogonal Series, Moscow, 1984. 它们在 Banach 空间中的推广，见 Singer, I. M. , Bases in Banach spaces, 1 ～ 2, Springer, 1970 ～ 1981.

12.　**Hilbert 变换不等式(共轭函数不等式)**：设 $f \in L(T). T = (-\pi, \pi], a_k, b_k$ 为 f 的 Fourier 系数，则复数幂级数

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k - ib_k)z^k, \tag{2.8}$$

$(z = e^{ix})$ 的实部就是 f 的 Fourier 级数：

$$S(f,x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

而(2.8)式的虚部

$$\tilde{S}(f,x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-b_k \cos kx + a_k \sin kx)$$

称为 f 的**共轭 Fourier 级数**.

若(2.8)式写成复数形式：$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$，则

$$\tilde{S}(f,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-i\operatorname{sgn} k)c_k e^{ikx}.$$

共轭 Dirichlet 核为

$$\widetilde{D_n} = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\sin kt = \frac{1}{\pi}\,\frac{\cos(t/2) - \cos(n+1/2)t}{2\sin(t/2)}.$$

令 $\varphi_x(t) = f(x+t) - f(x-t)$，则

$$\widetilde{S_n}(f,x) = \sum_{k=1}^{n}(-b_k \cos kx + a_k \sin kx) = \int_{-\pi}^{\pi}\widetilde{D_n}(x-t)f(t)\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi_x(t)\left[\frac{1}{2\mathrm{tg}\,\frac{t}{2}} - \frac{\cos nt}{2\mathrm{tg}\,\frac{t}{2}}\right]\mathrm{d}t + o(1).$$

$$\tilde{f}(x) = \lim_{\delta \to +0}\frac{1}{\pi}\int_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi}\frac{-f(x-t)}{2\mathrm{tg}(t/2)}\mathrm{d}t.$$

称为 f 的**共轭函数**. $\widetilde{S_n}(f,x)$ 的收敛性与 $\tilde{f}(x)$ 的存在性有关. $\tilde{f}(x)$ 又称为 f 的 Hilbert 变换，记为

$$H(f,x) = \tilde{f}(x) = P.V.\left(-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x-t)}{2\mathrm{tg}(t/2)}\mathrm{d}t\right).$$

令 $\widetilde{f}_\delta(x)=H_\delta(f,x)=-\frac{1}{\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}\frac{f(x-t)}{2\operatorname{tg}(t/2)}\mathrm{d}t$,

则 $\lim\limits_{\delta\to 0}H_\delta(f,x)=H(f,x)$ a. e.

$H^*(f,x)=\sup\limits_{0<\delta\leqslant\pi}|H_\delta(f,x)|$ 称为 f 的**极大共轭函数或极大 Hilbert 变换.**

(1) **Riesz 不等式**:设 $f\in L^p(T),1<p<\infty$,则

$$\|H(f)\|_p\leqslant C_p\|f\|_p;\quad \|H^*(f)\|_p\leqslant C_p^*\|f\|_p,$$

式中 $C_p=\begin{cases}0(\frac{1}{p-1}), & 1<p<2,\\ 0(p), & 2<p<\infty;\end{cases}\quad C_p^*=\begin{cases}0(\frac{1}{(p-1)^2}), & p\to 1+0,\\ 0(p), & p\to\infty.\end{cases}$

([87]117 ~ 121)

(2) **Kolmogorov 不等式**:设 $f\in L(T)$,则 $Hf\in WL(T)$ 和 $H^*f\in WL(T)$,即存在常数 c,使得 $\forall\lambda>0$,下式成立

$$\mu\{|Hf|>\lambda\}\leqslant\frac{c}{\lambda}\|f\|_1;\quad \mu\{|H^*f|>\lambda\}\leqslant\frac{c}{\lambda}\|f\|_1.$$

([87]117 ~ 121)

(3) 设 $f\in L^p(T),1<p<\infty,-1<\alpha<p-1$,则

$$\int_{-\pi}^{\pi}[H(f,x)]^p x^\alpha dx\leqslant C_p\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^p x^\alpha dx.$$

(Babenko. K. I. ,[21]305)

(4) **Zygmund 不等式**:设 $|f(x)|\leqslant\pi/2$,则

$$\frac{1}{2\pi}\int_T[\cos f(x)]\exp(|H(f,x)|)\mathrm{d}x\leqslant 2\cos\left(\frac{1}{2\pi}\int_T f(t)\mathrm{d}t\right)\leqslant 2.$$

推论 1 设 $\|f\|_\infty<\pi/2$,则

$$\int_T\exp(|H(f,x)|)\mathrm{d}x\leqslant\frac{4\pi}{\cos\|f\|_\infty}.$$

推论 2 设 $\|f\|_\infty<\pi/2$,则

$$\mu\{|H(f,x)|>\lambda\}\leqslant\frac{8\pi}{\cos(\|f\|_\infty)}\exp(-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}),\ \forall\lambda>0.$$

若 $\|f\|_\infty\leqslant 1$,则

$$\mu\{|H(f,x)|>\lambda\}>2\pi(1-\frac{4}{\cos\sqrt{2}}e^{-\lambda}).$$

([87]124 ~ 125;[85]70)

(5) **Zygmund 不等式**:设 $f\ln^+f\in L(T)$,则存在与 f 无关的常数 $c_1,c_2>0$,使得

$$\int_T|H(f,x)|\mathrm{d}x\leqslant c_1\int_T|f|\ln^+|f|+c_2.$$

([87]122 ~ 123)

(6) 设 $f\in H^1(T)$,则

$$\|H(f)\|_{H^1}\leqslant C\|f\|_{H^1}.$$

(7) $\sup\limits_{|x-y|\leqslant\delta}|H(f,x)-H(f,y)|\leqslant C\left\{\int_0^\delta\frac{\omega(f,t)}{t}\mathrm{d}t+\delta\int_\delta^\infty\frac{\omega(f,t)}{t^2}\mathrm{d}t\right\}.$

(Lukashenko,T. P. MR91a:42007)

(8)　$H(f)$ 与 f 在 T 上的递减重排 f^* 有密切联系(f^* 的定义见第13章No. 20). 记 $f^{**}(t)=\frac{1}{t}\int_0^t f^*(u)\mathrm{d}u$. 下面的 c 取

$$c=\Big(\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}(1/(2k-1)^2)\Big)/\Big(\sum_{k=1}^{\infty}(1/(2k-1)^2)\Big)=0.7424537\cdots$$

①　设 $f\in L\ln^+L$,则

$$\| H(f)\|_1\leqslant\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}f^*(t)\ln\operatorname{ctg}\Big(\frac{t}{8}\Big)\mathrm{d}t,$$

式中 $2/\pi$ 是最佳常数;

②　设 $f\in L^\infty(T)$,则

$$\|(H(f))^{**}/(1+\ln(2\pi/t))\|_\infty\leqslant c\| f\|_\infty,$$

③　$\| H(f)\|_1\leqslant c\| f^{**}\|_1$.

([21]305 ~ 306)

(9)　非周期函数的 Hilbert 变换定义为

$$H(f,x)=-\lim_{\delta\to0+}\frac{1}{\pi}\int_{|t|>\delta}\frac{f(x-t)}{t}\mathrm{d}t,\quad f\in L^p(R^1),1\leqslant p<\infty.$$

若 $f\in L^p(R^1),1<p<\infty$,则　$\| H(f)\|_p\leqslant c_p\| f\|_p$.

(详细的结果见 Andersen, K. F. [308]1976,56:99 ~ 107)

13.　**Fejer 算子不等式**:设

$$K_n(t)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}D_k(t)=\frac{2}{n+1}\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{2\sin(t/2)}\right)^2,x\neq 2m\pi$$

为 Fejer 核,(第 6 章 §3No. 42)Fejer 算子定义为

$$\sigma_n(f,x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi[f(x+t)+f(x-t)]K_n(t)\mathrm{d}t.$$

(1)　$\|\sigma_n(f)\|_X\leqslant\| f\|_X, X=C(T)$ 或 $L^p(T),1\leqslant p\leqslant\infty$;

(2)　$\| f+\sigma_n(f)-2\sigma_{2n}(f)\|_c\leqslant E_n^*(f)$.

([109]160)

(3)　设 $f\in C_{2\pi}$,则

①　$\|\sigma_n(f)-f\|_c\leqslant\Big(1+\frac{2}{n}\Big)\omega\Big(f,\frac{\ln n}{n}\Big)$;

②　$\|\sigma_n(f)-f\|_c\leqslant\Big(4-\frac{6}{\pi}\Big)\omega\Big(f,\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)$.

(侯象乾,宁夏大学学报,1982,1;1992,1)

③　$\|\sigma_n(f)-f\|_c\leqslant\frac{16}{n+1}\sum_{k=0}^{n}E_k^*(f)$.

(Stechkin, S. B. [71]105 ~ 107)

(4)　设 $f\in L_{2\pi}^p,1\leqslant p<\infty$,则

$$\|\sigma_n(f)-f\|_p\leqslant\Big(1+\frac{\pi}{2}\Big)^2\omega_2\Big(f,\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)_p.$$

(5)　设 $f\in BV[0,2\pi]$,则

$$\left|\sigma_n(f,x)-\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]\right|\leqslant\frac{5}{n+1}\sum_{k=0}^{n}V_0^{(\pi/k+1)}(g_x),$$

式中

$$g_x(t)=\begin{cases}f(x+t)+f(x-t)-f(x+0)-f(x-0), & t\neq 0,\\ 0, & t=0.\end{cases}$$

(匡继昌,湖南师范大学学报,1985,81(4):1 ~ 4)

(6) **Bernstein 不等式**:设 $f\in C_{2\pi}\cap \mathrm{Lip}_M\alpha$,$0<\alpha\leqslant 1$,则

$$|\sigma_n(f,x)-f(x)|\leqslant\begin{cases}c_\alpha M n^{-\alpha}, & 0<\alpha<1,\\ Mc\dfrac{\ln n}{n}, & n>1,\alpha=1,\end{cases}$$

式中 $c_\alpha<\dfrac{2^\alpha\cdot\pi}{1-\alpha^2}$, $c<\dfrac{7}{2}\pi$.

([79]57 ~ 58.[332]1994.2:68;[85]21 ~ 22 指出 c 可改进为 2π)

(7) 设 $f\in \mathrm{Lip}_M 1$,则

$$\|\sigma_n(f)-f\|_\infty\leqslant C\frac{\ln(n+1)}{n+1},$$

式中 $C=\dfrac{\pi^2-4}{\pi\ln 2}$ 是最佳常数.(Ukrain Math. Zh. 1990,42(1):75 ~ 83)

(8) **K-Z 不等式(Kaczmarz-Zygmund 不等式)**:

令 $G(f,x)=\left(\sum_{n=2}^{\infty}n\,|\sigma_n(f,x)-\sigma_{n-1}(f,x)|^2\right)^{1/2}$.若 $f\in L^2[-\pi,\pi]$,则 $\|G(f)\|_2\leqslant C\|f\|_2$.从而 $G(f,x)<\infty\ a.e.$ ([87]71)

(9) **Korovkin 不等式**:设 $f\in C_{2\pi}$,则 $\|\sigma_n(f)-f\|_c\leqslant\left(1+\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}\right)\omega\left(f,\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

([79]61)

(10) 令 $C_n=\sup\limits_{\substack{f\in C_{2\pi}\\ f\neq\mathrm{const}}}\dfrac{\|\sigma_n(f)-f\|_c}{\omega(f,\frac{\ln n}{n})}$,

则 $\lim\limits_{n\to\infty}C_n=1+2/\pi$ 是最佳逼近常数.(万传良,新疆大学学报,1991,2:27 ~ 31)

14. **(C,α) 平均算子不等式**:设 $f\in L_{2\pi}$,$S_n(f,x)$ 为 f 的 Fourier 级数 n 阶部分和.$\alpha>-1$,$(\alpha)_n=\dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)}$,$E_n^*(f)_p$ 为 f 在 $L_{2\pi}(1\leqslant p<\infty)$ 中三角多项式的最佳逼近(第 12 章 §2),则

$$\sigma_n^\alpha(f,x)=\frac{1}{(\alpha)_n}\sum_{k=0}^{n}(\alpha-1)_{n-k}S_k(f,x)$$

称为 f 的(C,α) 平均算子.$\alpha=1$ 时,$(C,1)$ 平均算子就是 Fejer 算子.

(1) 设 $f\in C_{2\pi}$,则当 $\alpha>0$ 时,下式成立

$$\|\sigma_n(f)-f\|_c\leqslant\frac{C_\alpha}{(\alpha)_n}\sum_{k=0}^{n}(\alpha-1)_{n-k}E_k^*(f).$$

(孙永生,[335]1963,6:379 ~ 387)

(2) 设 $f\in L_{2\pi}^p$,$1\leqslant p<\infty$,$\lambda\geqslant -1$,则

$$\left\| \sum_{k=0}^{n}(k+1)^{\lambda}[S_k(f)-f] \right\|_p \leqslant C\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{\lambda}E_k^*(f)_p.$$

(Timan).(有关进一步的结果见[70]221 ～ 223)

15.　**共轭 Fejer 算子不等式**:共轭 Fejer 核定义为:

$$\widetilde{K}_n(t) = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2} - \frac{1}{n+1}\frac{\sin(n+1)t}{(2\sin t/2)^2}.$$

(第 6 章 §3No.45).$\psi_x(t) = \dfrac{1}{2}[f(x+t)-f(x-t)]$ 是 f 在 x 的奇部.设$\widetilde{S}_n(f,x)$ 是 f 的共轭 Fourier 级数的部分和.(本节 No.12) 则 $\widetilde{\sigma}_n(f,x) = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\widetilde{S}_k(f,x)$ $= -\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi_x(t)\widetilde{K}_n(t)\mathrm{d}t$ 称为 f 的共轭 Fejer 算子.若 $f\in L(T)$,则

(1)　$\sup_n |\widetilde{\sigma}_n(f,x) - \widetilde{f}_{\frac{1}{n}}(x)| < c\,M(f,x).$

式中$\widetilde{f}_{\delta}(x)$ 由本节 No.12.定义.$M(f,x)$ 是 f 的 Hardy-Littlewood 极大函数.(本节 No.30)

(2)　$\widetilde{\sigma}(f,x) = \sup_n \widetilde{\sigma}_n(f,x) \leqslant c\,M(f,x).$

([141]245 ～ 246)

16.　**Abel 平均算子(Poisson 积分)不等式**:f 的 Fourier 级数

$$S(f,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

的 Abel 平均称为 f 的 Poisson 积分:

$$f(r,x) = (f*P)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)P(r,t)\mathrm{d}t,$$

式中 $P(r,t) = \dfrac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}r^n\cos nt$ 为周期的 Poisson 核,$0\leqslant r<1$.(第 6 章 §2 No.47)

(1)　若 $T=[-\pi,\pi)$,$f\in L(T)$,且 $\left|\dfrac{1}{h}\int_0^h f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant M$, $|h|\leqslant\pi$,则

① $|f(r,x)| \leqslant 3M\left(1+\dfrac{|x|}{1-r}\right)$;

② $\left|\int_0^x f(r,u)\mathrm{d}u\right| \leqslant KM|x|$.([57]Vol.1.101)

(2)　若 $f\in \mathrm{Lip}\alpha$,$0<\alpha<1$,则

$$\|f(r,\cdot)-f\|_c \leqslant (1-r)^{\alpha}\sec\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) + O(1-r).$$

(3)　**Natanson 不等式**:若 $f\in \mathrm{Lip}1$,则

$$\|f(r,\cdot)-f\|_c \leqslant \frac{2(1-r)}{\pi}|\ln(1-r)| + O(1-r).$$

([71]102 ～ 104)

17.　**Jackson 算子不等式**:$J_n(f,x) = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(x-t)f(t)\mathrm{d}t$ 称为 Jackson 算子.

式中 $K_n(t)=\frac{3}{2n(2n^2+1)}\left(\frac{\sin nt/2}{\sin t/2}\right)^4$ 称为 n 阶 Jackson 核，它满足 $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(t)\mathrm{d}t=1$；$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}tK_n(t)\mathrm{d}t\leqslant\frac{2.5}{n}$；$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}t^2K_n(t)\mathrm{d}t\leqslant\left(\frac{\pi}{n}\right)^2$.

(1) 设 $f\in C(T)$，则

$$|J_n(f,x)-f(x)|\leqslant\frac{3}{2}\omega(f,\frac{\pi}{n+1}),$$

仅当 f 为常值函数时等号成立，式中系数 3/2 是最佳的.（王兴华，[334]1964，14(2)：231 ~ 237）

(2) 若 $f'\in C(T)$，则

$$|J_n(f,x)-f(x)|\leqslant\frac{6\pi^2}{n}\omega(f',\frac{1}{n})+\left(\frac{\pi}{n}\right)^2\|f'\|_c.$$ （[70]183 ~ 184）

(3) 在 $f'(x+0)$，$f'(x-0)$ 存在的点 x 上，下式成立

$$J_n(f,x)-f(x)=\frac{3\ln 2}{\pi n}[f'(x+0)-f'(x-0)]+o(\frac{1}{n}),(n\to\infty).$$

（吴顺唐，[335]1966，9(3)：245 ~ 250）

(4) 设 $f'\in C2\pi$，则在 $f''(x+0)$，$f''(x-0)$ 存在的点 x，下式成立

$$J_n(f,x)-(f,x)=\frac{3}{4n^2}[f''(x+0)+f''(x-0)]+o(\frac{1}{n^2}),(n\to\infty).$$

（陈文忠，逼近论会议论文集，杭州大学，1978，110 ~ 113）

(5) $K_n(t)$ 可推广为

$$K_{m,n}(t)=\frac{1}{\alpha_{m,n}}\left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^{2m},\text{式中}\quad\alpha_{m,n}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^{2m}\mathrm{d}t.$$

$J_{m,n}(f,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_{m,n}(x-t)f(t)\mathrm{d}t$ 称为 Jackson 型算子.

Jackson 型核 $K_{m,n}(t)$ 具有下述性质：

① $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_{m,n}(t)\mathrm{d}t=1$；

② 存在正的常数 c_1,c_2，使得 $c_1n^{2m-1}<\alpha_{m,n}<c_2n^{2m-1}$；

③ $\int_{\delta}^{\pi}K_{m,n}(t)\mathrm{d}t\leqslant\frac{c}{(n\delta)^{2m-1}}$，$0<\delta<\pi$；

④ 当 $j\leqslant 2m-2$ 时，$\int_{-\pi}^{\pi}|t|^jK_{m,n}(t)\mathrm{d}t=0(\frac{1}{n^j})$.（[82]138 ~ 141）

当 $f\in C_{2\pi}$ 时，成立 $\|J_{3,n}(f)-f\|_c\leqslant\begin{cases}(4-6/\pi)\omega(f,1/n).\\(8-17/\pi)\omega_2(f,1/n).\end{cases}$（[332]1992，8(2)35 ~ 45）

$J_{m,n}$ 算子的进一步推广见[70]184 ~ 185 和[82] 第 2 章.

18. **Jackson 型算子不等式：**

$$J_p(f,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K_p(x-t)f(t)\mathrm{d}t,\text{式中}\quad K_p(t)=\frac{96}{p^3}\left(\frac{\sin(pt/4)}{t}\right)^4.$$

若 $f\in C(R^1)$ 且有界，则

(1)　$\| J_p(f) - f \|_c \leqslant 5\omega(f, \frac{1}{p})$;

(2)　$\| J_p(f) - f \|_c \leqslant \left[1 + \frac{3}{\pi}\int_0^{\infty} \left[\frac{4t}{\pi}\right]\left(\frac{\sin t}{t}\right)^4 dt\right]\omega(f, \frac{\pi}{p})$.

(王兴华,[334]1964,14(2):231 ~ 237;[70]185)

19.　**A 型奇异积分算子不等式:**

$A_n(f,x) = \frac{1}{\alpha_n}\int_a^b K_n(x,t)f(t)dt$. 式中 $K_n(x,t) = [\varphi(x,t)]^n, \alpha_n = \int_a^b K_n(x,t)dt$.　$\varphi \in C([a,b]\times[a,b])$,当 $t \neq x$ 时,$|\varphi(x,t)| < \varphi(x,x)$, $\forall x(a,b)$, $\exists \lambda > 0$,
使得

$$\lim_{t\to x}\frac{|\varphi(x,t) - \varphi(x,x)|}{|t-x|^{\lambda}} = \beta > 0.$$

(1)　**徐利治不等式:** $\forall f \in C[a,b]$, $f(x) \neq 0$,下式成立

$$|A_n(f,x) - f(x)| \leqslant C\omega(f, \frac{1}{n^{1/\lambda}}).$$

当 $\delta > 0$ 充分小时,可取 $C = 1 + (\Gamma(2/\lambda)/\Gamma(1/\lambda))(1/\beta)^{\frac{1}{\lambda}} + \delta$.

若 $f' \in C[a,b]$,则

$$A_n(f,x) - f(x) = o((1/n)^{1/\lambda}).$$

([335]1956,2(4):695 ~ 702)

(2)　若 $f \in \mathrm{Lip}_1\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$,,则

$$\| A_n(f) - f \|_{\infty} = (1/(\beta n))^{\alpha/\lambda}\Gamma((1+\alpha)/\lambda)/\Gamma(1/\lambda) + o((1/n)^{\alpha/\lambda}).$$
$(n \to \infty)$.([70]186)

20.　**Vallee-Poussin 算子不等式:**

$$V_n(f;x) = \frac{2^{2n-1}}{\pi\binom{2n}{n}}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\cos\frac{t-x}{2}\right]^{2n} dt$$
$$= \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left(\cos\frac{t}{2}\right)^{2n} dt.$$

(1)　若 $f \in C_{2\pi}$,则 $\| V_n(f) - f \|_c \leqslant 2\omega(f, \frac{1}{\sqrt{n}})$;式中系数 3 是最佳的.

(2)　若 $f \in \mathrm{Lip}_M^{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$,则

$$\| V_n(f) - f \|_c \leqslant \frac{3M}{\sqrt{n^{\alpha}}},$$

([60] 上册 214 ~ 215)

(3)　若 $f \in C_{2\pi}$,则

$$\| V_n(f) - f \|_c \leqslant 4E_n^*(f).$$

(4)　设 $f \in L^p(0,2\pi)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$,则

$$\| V_n(f) - f \|_p \leqslant 4E_n(f)_p.$$

式中　$E_n(f)_p = \inf\{\| f(x) - \sum_{k=-n}^{n} a_k \exp(ikx) \|_p ; a_k \text{ 为复数}\}$.

([110]Vol. 1:385 ~ 386)

$$\| V''_n(f) \|_p \leqslant n \| f \|_p (1 \leqslant p \leqslant \infty).$$

(5) $V_n(f)$ 的直接推广是

$$V_{n,m}(f,x) = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m} S_{n-k}(f,x) = \frac{2}{\pi(m+1)}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_{n-\frac{m}{2}}(t)\ D_{\frac{m}{2}}(t)\mathrm{d}t;$$

当 $f \in C_{2\pi}$ 时，有

$$\| V_{n,m}(f) - f \|_c \leqslant \pi\left(2 + \log\frac{n+1}{m+1}\right)E^*_{n-m}(f).$$

算子 $V_{n,m}(f)$ 的范数为 $\| V_{n,m} \| \leqslant \pi\left(2 + \log\dfrac{n+1}{m+1}\right)$.

注 从第 m 个到第 $n-1$ 个 Dirichlet 核的算术平均，称为具有指标 m 与 n 的 Vallèe-Poussin 核：

$$V_{n,m}(x) = \frac{1}{n-m}\sum_{k=m}^{n-1} D_k(x) = D_m(x) + \frac{n}{n-m}\sum_{k=m+1}^{n-1}(1-\frac{k}{n})\cos kx.$$

特别，$V_{n+1,n}(x) = D_n(x)$ 为 Dirichlet 核；$V_{n,0}(x) = K_n(x)$ 为 Fejer 核.

([82]126 ~ 127；[71]91 ~ 95)

21. **L 插值(Lagrange 插值)算子不等式**：对 $[a,b]$ 作分划：$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，令 $\omega(x) = \prod_{k=1}^{n}(x - x_k)$， $l_k(x) = \dfrac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)}$.

则 L 插值算子 L_n 定义为 $L_n: C[a,b] \to C[a,b]$，$L_n(f,x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)l_k(x)$.

(1) **Bernstein-Faber 不等式**：$\| L_n \| = \max_{x\in[a,b]}\sum_{k=1}^{n} | l_k(x) | > \dfrac{\ln n}{8\sqrt{\pi}}$. ([62]156 ~ 157；[71]309 ~ 310)

若 $\{x_k\}$ 是 Chebyshev 多项式 $T_{n+1}(x)$ 的零点全体，则

$$\| L_n \| \leqslant 8 + \frac{4}{\pi}\ln(n+1). \quad ([71]311 \sim 313)$$

(2) 若 $f \in C[-1,1]$，则

$$\| L_n(f) - f \|_c \leqslant (1 + \| L_n \|)E_n(f).$$

([71]306 ~ 307)

(3) 设 $f^{(n+1)} \in C[-1,1]$，则

$$\| L_n(f) - f \|_c \leqslant \| \omega \|_c \frac{\| f^{(n+1)} \|_c}{(n+1)!}.$$

1991 年 Howell 提出猜想：对于 $0 \leqslant k \leqslant n$，是否成立

$$\| L_n^{(k)}(f) - f^{(k)} \|_c \leqslant \| \omega^{(k)} \|_c \frac{\| f^{(n+1)} \|_c}{(n+1)!}.$$

([71]346 ~ 347)

22. **H-F 插值算子不等式(Hermite-Fejer 插值多项式算子不等式)**：

$$H_n(f,x) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} f(x_{k,n})(1 - x\cdot x_{k,n})\left(\frac{T_n(x)}{x - x_{k,n}}\right),$$

式中 $x_{k,n} = \cos\left(\dfrac{2k-1}{2n}\pi\right)$，$k = 1,2,\cdots,n$，是第一类 Chebyshev 多项式 $T_n(x)$ 的零点. $x \in [-1,1]$.

(1) **Moldovan 不等式：**

$$|H_n(f,x)-f(x)|\leqslant 2\pi\omega\left(f,\frac{\ln n}{n}\right).\ ([70]193)$$

(2) **王仁宏不等式：**若 $f\in \mathrm{Lip}\alpha,0<\alpha<1$，则

$$|H_n(f,x)-f(x)|\leqslant 4\left(2+\frac{1}{1-\alpha}\right)\left(\frac{\pi}{n}\right)^{\alpha}.$$

若 $f\in \mathrm{Lip}\ 1$，则

$$|H_n(f,x)-f(x)|\leqslant 4\pi\left(1+\frac{2}{\ln 2}\right)\frac{\ln n}{n}\leqslant 48.8342\ \frac{\ln n}{n}.$$

([333]1979,7:292 ~ 295) 进一步的结果见[71]330 ~ 333.

23. **Fourier 积分算子不等式：**

$$S_n(f,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K_n(x-t)f(t)\mathrm{d}t,\text{式中}\quad K_n(t)=\frac{\sin nt}{t}.$$

设 $f\in BV(R^1)\cap L^p(R^1),1<p\leqslant 2$，则

(1) $\|S_n(f)-f\|_p\leqslant C\omega\left(f,\frac{1}{n}\right)_p$；

(2) $\|S_n(f)-f\|_p\leqslant \frac{c}{n^{1/p}}[V(f)]^{1/p}\omega\left(f,\frac{1}{n}\right)^{1/q}$.

式中 $V(f)$ 是 f 在 R^1 上的全变差，$1/p+1/q=1$. ([70]201)

24. **GW 算子不等式(Gauss-Weierstrass 算子不等式)：**GW 算子定义为：

$$G_t(f,x)=\int_{-\infty}^{\infty}K_t(x-y)f(y)\mathrm{d}y,\text{式中}\quad K_t(y)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left(-\frac{y^2}{4t}\right).$$

若 $f\in C[a,b],E=[a_1,b_1]\subset[a,b]$，且 $\exists\,\eta>0$，使得

$$[a_1-\eta,b_1+\eta]\cap((-\infty,\infty)-[a,b])=\varnothing,\text{则}$$

(1) $\|G_t(f)-f\|_{C(E)}\leqslant 2\omega\left(f,\sqrt{\frac{2}{n}}\right)+\frac{c_1}{n}$；

(2) 若 $f'\in C[a,b]$，则

$\|G_t(f)-f\|_{C(E)}\leqslant 2\sqrt{\frac{2}{n}}\omega\left(f',\sqrt{\frac{2}{n}}\right)+\frac{c_2}{n}$. 式中 c_1,c_2 是与 a,b,η 有关的常数.

(Ditzian,Z.,[327]1975,14:296 ~ 301) 问题：能否给出(1)(2) 中常数 c_1,c_2 的估计？

25. **Gamma 算子不等式：**

(1) 设 f 在$(0,\infty)$ 上有界连续. $G_n(f,x)=\int_0^{\infty}K_n(x,t)f(nt)\mathrm{d}t$ 称为 Gamma 算子，

式中 $K_n(x,t)=\frac{1}{t}\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{x}{t}\right)^n\exp\left(-\frac{x}{t}\right)$. 则

$$|G_n(f,x)-f(x)|\leqslant\frac{c}{2x^2}+o(1),x\in(a,b)\subset(0,\infty)$$

成立的充要条件是

$$|y^2f'(y)-x^2f'(x)|\leqslant\frac{c}{xy}|y-x|,x,y\in[a,b].$$

(Berens,H.[327]1972,6(2):135 ~ 146)

(2) **Gamma 型算子定义为：**

$$T(f,x)=\frac{1}{\Gamma([tx]+1)}\int_0^\infty f\left(\frac{u}{t}\right)u^{[tx]}e^{-u}\mathrm{d}u,$$

式中 $x\geqslant 0,t>\alpha,f\in C[0,\infty),\ |f(x)|\leqslant Ce^{\alpha x}$,

$$\Delta_h^1 f(x)=f(x+h/2)-f(x-h/2),x\geqslant h/2\geqslant 0,$$

$$\Delta_h^2 f(x)=\Delta_h^1(\Delta_h^1 f)(x),\varphi(x)=\sqrt{x},x\geqslant 0.$$

定义如下光滑模:$\delta>0$.

$$\omega^1(f,\delta)_\infty=\sup\left\{|\Delta_h^1 f(x)|:x\geqslant\frac{h}{2},0\leqslant h\leqslant\delta\right\},$$

$$\omega_\varphi^2(f,\delta)_\infty=\sup\{|\Delta_{h\varphi}^1 f(x)|:x\geqslant h^2,0\leqslant h\leqslant\delta\}.$$

若 $\omega^1(f,\delta)_\infty<\infty,\omega_\varphi^2(f,\delta)_\infty<\infty,a\geqslant 1,t>0$,则

① $$\|Tf-f\|_\infty\leqslant(1+\sqrt{[a]+2})\omega^1(f,\frac{1}{t})_\infty+$$

$$+\left(\frac{7}{2}+\frac{1}{[a]}+2\sqrt{\frac{1}{[a]}+1}\right)\omega_\varphi^2\left(f,\frac{1}{\sqrt{t}}\right)_\infty;$$

② $$\omega^1\left(f,\frac{1}{t}\right)_\infty+\omega_\varphi^2\left(f,\frac{1}{\sqrt{t}}\right)_\infty\leqslant 105\|Tf-f\|_\infty.$$

(Adell,J. A. 等.[328]1999,15(4):537 ~ 555) 我们问:(1)(2) 中的最佳常数是多少?

26. **B-郑算子不等式(Bohman-郑维行算子不等式):**

$$B_\sigma(f,x)=\int_{-\infty}^{\infty}K_\sigma(x-t)f(t)\mathrm{d}t \text{ 称为 B-郑算子},$$

式中 $$K_\sigma(t)=\frac{4\pi}{[\pi^2-(\sigma t)^2]^2}\left(\cos\frac{\sigma t}{2}\right)^2.$$

郑维行不等式:设 $\frac{f(x)}{1+x^4}\in L(R^1)$,则

(1) $|B_\sigma(f,x)-f(x)|\leqslant(5-\frac{4}{\pi})\omega(f,\frac{1}{\sigma})$;

(2) $|B_\sigma(f,x)-f(x)|\leqslant 9\omega_2(f,\frac{1}{\sigma})$;

(3) 若 $\omega_2(f,\delta)\leqslant C\delta^2$,则 $\|B_\sigma(f)-f\|_c\leqslant\frac{C\pi^2}{2\sigma^2}$.

([334]1965,15(1):54 ~ 62)

27. **B-R 算子(Bernstein-Rogosinski 算子)不等式:**

$$B_n(f,x)=\int_{-\pi}^{\pi}K_n(t-x)f(t)\mathrm{d}t \quad \text{称为 BR 算子},$$

式中

$$K_n(t)=\frac{1}{4\pi}\left(\cos\frac{(2n+1)}{2}t\right)\left[\frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4n+2}\right)}-\frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4n+2}\right)}\right].\tag{2.9}$$

设 $f\in C_{2\pi}$,则

$$|B_n(f,x)-f(x)|\leqslant(2\pi+1)E_n^*(f)+\omega\left(f,\frac{2\pi}{2n+1}\right)\text{([60])}$$

28. **Bernstein 求和算子不等式**：Bernstein 求和算子定义为：

$$B_n(f,x)=\sum_{k=0}^{2n}K_n(x_{k,n}-x)f(x_{k,n}),$$

式中　$K_n(t)$ 由(2.9)式定义，$x_{k,n}=\dfrac{2k\pi}{2n+1}$，$k=0,1,\cdots,2n$.

$$|B_n(f,x)-f(x)|<(1+2\pi+4\pi^2)E_n^*(f)+\omega\left(f,\frac{2\pi}{2n+1}\right).$$

([60] 和[70]219)

29. **B-S 算子(Bojanic-Shisha 算子)不等式**：BS 算子定义为：

$$B_n(f,x)=\sum_{k=1}^{m_n+2}f(t_{k,n})K_n(t_{k,n}-x).\tag{2.10}$$

式中　$K_n(t)=\dfrac{2}{m_n+2}\left(\dfrac{1}{2}+\sum_{k=1}^{m_n}r_{k,n}\cos kt\right)$，　$t_{k,n}=\dfrac{2k\pi}{m_n+2}$，$k=1,2,\cdots,m_n+2$.

(1)　若 $f\in C_{2\pi}$，则

$$|B_n(f,x)-f(x)|\leqslant(1+\pi)\omega\left(f,\sqrt{\frac{1-r_{1,n}}{2}}\right).$$

(2)　取 $m_n=2n-2$，则 $t_{k,n}=k\pi/n$.

$$K_n(t)=\frac{3}{2n^2(2n^2+1)}\left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^4.$$

这时(2.10)式中 $B_n(f,x)$ 成为离散的 Jackson 算子，从而

$$|B_n(f,x)-f(x)|\leqslant(1+\pi)\omega\left(f,\frac{1}{n}\right).$$

(3)　取 $m_n=n-2$，则 $t_{k,n}=\dfrac{2k\pi}{n}$，

$$K_n(t)=2\left(\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}\right)^2\left(\frac{\cos(nt/2)}{\cos t-\cos(\pi/n)}\right)^2.$$

这时(2.10)式中 $B_n(f,x)$ 成为离散的 Korovkin 算子，从而

$$|B_n(f,x)-f(x)|\leqslant(1+\pi)\omega(f,\pi/(2n)).$$

([70]220 ~ 221；[327]1974,11:231 ~ 235)

30. **H-L 极大算子不等式**：设 $f\in L_{\mathrm{loc}}(R^n)$，$Q$ 是包含 x 的任一方体，其边平行于坐标轴，则

$$M(f,x)=\sup_{x\in Q}\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q|f(y)|\,\mathrm{d}\mu(y)$$

称为 f 的 Hardy-Littlewood 极大函数，我们简称为 **H-L 极大函数**，M 称为 **H-L 极大算子**.

设 $0<r<\infty$，定义　$M_r(f,x)=[M(|f|^r,x)]^{1/r}$.

(1)　设　$f\in L^p(R^n)$，$1<p\leqslant\infty$，则 $M(f)\in L^p(R^n)$，且

$$\|M(f)\|_p\leqslant C_p\|f\|_p.$$

式中　$C_p=2\left(\dfrac{pc}{p-1}\right)^{1/p}$.([137]3 ~ 4 或[118]137)

(2)　设 $f\in L(R^n)$，则 M 为弱(1,1)型算子，即 $\forall\lambda>0$，

$$\mu\{x:M(f,x)>\lambda\}\leqslant\frac{C}{\lambda}\|f\|_1.$$

([118]136)

(3) 设 $f \in L(R^n)$, $A_\alpha = \{x \in R^n : M(f,x) > \alpha\}$，则

$$\frac{1}{2^n\alpha}\int_{A_\alpha} |f| \leqslant \mu(A_\alpha) \leqslant \frac{1}{\alpha}\int_{A_\alpha} |f|.$$

([86]45 ~ 46)

(4) $\| M(f) \|_{p,w} \leqslant C \| f \|_{p,\omega} (1 < p < \infty) \Leftrightarrow \omega \in A_p$.

(第 13 章；[309]1972,165:207 ~ 226)

推广 $\displaystyle\int_{R^n} G(M(f,x))\omega(x)\mathrm{d}x \leqslant c\int_{R^n} G(|f(x)|)\omega(x)\mathrm{d}x.$

式中 ω 为 R^n 上非负权函数，$G(t) = \int_0^t g(u)\mathrm{d}u$ 为 Young 函数.

([329]1981/82,71(3):277 ~ 284)

(5) 设 $f_k \in L^p(R^n)$, $1 < p < \infty$, $\left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|^2\right)^{1/2} \in L^p(R^n)$，则

$$\left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |M(f_k)|^2\right)^{1/2} \right\|_p \leqslant C_p \left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2\right)^{1/2} \right\|_p.$$

式中 $c_p = \begin{cases} 0\left(\dfrac{1}{p-1}\right), (p \to 1) \\ 0(p^{1/2}), (p \to \infty) \end{cases}$ 是最佳的.([72]29)

(6) 设 $f \in L^p(R^n)$, $1 < p < \infty$, ω 为 R^n 上非负权函数，则

$$\| M(f) \|_{p,\omega} \leqslant C(n,p)\left(\int_{R^n} |f|^p M(\omega)\right)^{1/p}.$$

([310]1971.92:107 ~ 115)

(7) $\| M(f) \|_p \leqslant C(p,n)\left[\int_Q |f| (\ln^+ |f|)^{n-1} + 1\right]$, $0 < p < 1$,

$\| M(f) \|_1 \leqslant C(n)\left[\int_Q |f| (\ln^+ |f|)^n + 1\right]$. ([57]Vol. 2:306)

(8) 设 $1 < r < p$，则 $\| M_r(f) \|_p \leqslant C(p,r) \| f \|_p$.

(9) 设 $f \in L^1(R^n)$, $0 < p < 1$, $\lambda > 0$. $E_\lambda = \{x \in R^n : M(f,x) > \lambda\}$，则

$$\mu(E_\lambda) \leqslant \frac{C}{(1-p)\lambda}\int_{E_\lambda} |f|.$$

(10) 设 $0 < p < 1$，E 为 R^n 中可测集，f 为 R^n 上非负可测函数，则

$$\int_E M(f,x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{p}\mu(E) + \frac{c}{1-p}\int_{R^n} (f\ln^+ f).$$

(11) 设 $1 \leqslant p < \infty$, $\lambda > 0$. 若 $\mu\{x \in R^n : M(f,x) > \lambda\} \leqslant \frac{c}{\lambda^p} \| f \|_p^p$，则 $\forall$ 方体 Q，下式成立

$$\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q |f| \mathrm{d}\mu \leqslant C\left\{\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q |f|^p \mathrm{d}\mu\right\}^{1/p}.$$

(12) 设 f 是 $(0,\infty)$ 上非负局部可积函数，则 $\forall x > 0$，下式成立

$$x\int_x^{\infty} \frac{f(t)}{t^2}\mathrm{d}t \leqslant 2M(f,\xi), 0 < \xi \leqslant x.$$

(13)　设$\alpha>0$, $f\in L^1_{\text{loc}}(R^n)$，则存在正常数$C(\alpha)$，使得$\forall Q_0=Q(x_0,r)$（中心在$x_0$，边长为$r$的方体），下式成立

$$\int_{R^n}\frac{|f(x)|}{r^{n+\alpha}+|x-x_0|^{n+\alpha}}\mathrm{d}x\leqslant\frac{c}{r^\alpha}\{\inf_{x\in Q_0}M(f,x)\}.$$

(14)　设Q为R^n中方体，x_0为Q的中心，令

$$T(f,x)=\int_{Q^c}\frac{|x-x_0|}{|y-x_0|^{n+1}}|f(y)|\mathrm{d}y,x\in Q,\text{则}$$

$$|T(f,x)|\leqslant CM(f,x).$$

(15)　设$0<\alpha<n$, $\beta>0$, $\delta>0$，则存在常数$C=c(n)$，使得

① $\displaystyle\int_{B(x,\delta)}\frac{|f(y)|\mathrm{d}y}{|x-y|^{n-\alpha}}\leqslant C\delta^\alpha M(f,x)$;　② $\displaystyle\int_{B(x,\delta)^c}\frac{|f(y)|\mathrm{d}y}{|x-y|^{\beta+n}}\leqslant\frac{c}{\delta^\beta}M(f,x)$.

([117]85 ~ 86)

(16)　设$\varphi\in L^1(R^n)$, $\varphi_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$, $\varepsilon>0$，φ的最小径向递减控制函数$g(x)=\sup_{|y|\geqslant|x|}|\varphi(y)|\in L^1(R^n)$.

则　$\sup_{\varepsilon>0}|(f*\varphi_\varepsilon)(x)|\leqslant\|g\|_1M(f,x)$, $f\in L^1_{\text{loc}}(R^n)$.

（证明及其改进见[132]261 ~ 270；[142]59 ~ 61）

注　(16)表明，用H-L极大算子可以控制许多我们常见的算子.

(17)　**加权Hardy不等式**：设$g^*(y)$是g在$(0,\infty)$上的递减重排，$\omega(x)$为非负权函数，$1\leqslant q<\infty$，令

$$\|g\|_{\Lambda_q(w)}=\left(\int_0^\infty(g^*(x)^q)w(x)\mathrm{d}x\right)^{1/q}.$$

则古典的Lorentz空间$\Lambda_q(w)$定义为

$$\Lambda_q(w)=\{g:\|g\|_{\Lambda_q(w)}<\infty\}.$$

特别当$w(x)=(\frac{q}{p})x^{(q/p)-1}$时，$\Lambda_q(w)$就是$L(p,q)$空间，$M(g,x)$为$g$的H-L极大函数.

1990年Arino, M. A.等证明：

①　若$1\leqslant q<\infty$, $n\geqslant1$, $w(x)$为非负函数，则$\forall g\in\Lambda_q(w)$,

$$\|M(g)\|_{\Lambda_q(w)}\leqslant c\|g\|_{\Lambda_q(w)}\tag{2.11}$$

成立的充要条件是对$(0,\infty)$上所有非负递减函数f，有**Hardy不等式**

$$\int_0^\infty\left|\frac{1}{x}\int_0^xf(t)\mathrm{d}t\right|^qw(x)\mathrm{d}x\leqslant c\int_0^\infty|f(x)|^qw(x)\mathrm{d}x;\tag{2.12}$$

而(2.12)式成立的充要条件是

$$\int_r^\infty w(x)/x^q\mathrm{d}x\leqslant cr^{-q}\int_0^rw(x)\mathrm{d}x\tag{2.13}$$

对所有正数r成立.

②　若$w(x)$为非负函数，$1\leqslant q<\infty$，且

$$\sup_{r>0}\frac{1}{r}\left(\int_0^rw(x)\mathrm{d}x\right)^{1/q}\left(\int_0^rw(x)^{-q'/q}\mathrm{d}x\right)^{1/q'}<\infty,\tag{2.14}$$

则对所有非负递减函数f，(2.12)式成立，或等价的(2.11)式成立. 当w是递增函数时，其逆也成立.

([309]1990,320(2):727 ～ 735)

(18)　**Kakeya 极大算子不等式(F-S 不等式)**:设 δ 为小参数,记为 $0 < \delta \ll 1$,$f \in L_{loc}(R^n)$,$n \geqslant 2$,定义

$$T_{h,\delta}(f,x) = \sup_D \frac{1}{\mu(D)}\int_D |f(y)|\,dy.$$

式中管状域 D 包含 $x \in R^n$,D 的长为 h,截面积的半径为 $h\delta$. 于是 **Kakeya 极大算子**定义为

$$T_\delta(f,x) = \sup_{h>0} T_{h,\delta}(f,x).$$

若 $n = 2$,$1 < p \leqslant 2$,则 $\forall \varepsilon > 0$,成立 **Fefferman-Stein 型不等式**:

$$\left(\int_{R^2} [T_\delta(f,x)]^p w(x)\,dx\right)^{1/p} \leqslant c(p,\varepsilon)\left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{2}{p}-1+\varepsilon}\left(\int_{R^2} |f(x)|^p T_\delta(w,x)\,dx\right)^{1/p}.$$

记为

$$\| T_\delta(f) \|_{p,w} \leqslant c(p,\varepsilon)(1/\delta)^{\frac{2}{p}-1+\varepsilon} \| f \|_{p,T_\delta w},$$

而当 $n \geqslant 3$,$1 < p \leqslant \dfrac{n^2-2}{2n-3}$ 时,下式成立

$$\| T_\delta(f) \|_{p,w} \leqslant c(n,p)\left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{n}{p}-1}\left(\log\frac{1}{\delta}\right)^{\alpha(n)} \| f \|_{p,T_\delta w}.$$

(Tanaka. H. ,[308]2001,129(8):2373 ～ 2378) 我们问:上述 p 的范围能否再改善?

(19)　H-L 极大算子的推广是 **H-L 分数次极大算子**:

$$M(f,x,\alpha) = \sup_{x\in Q} \frac{1}{(\mu(Q))^{1-\alpha/n}}\int_Q |f(y)|\,d\mu(y).$$

①　若 φ 是非负递减径向函数,$0 < \alpha < n$,$\int_{R^n} \dfrac{\varphi(x)}{|x|^\alpha}dx < \infty$,则

$$\left|\int_{R^n} f(x-n)\frac{1}{t^{n-\alpha}}\varphi\left(\frac{y}{t}\right)dy\right| \leqslant c_\alpha M(f,x,\alpha).$$

②　$\alpha > 0$,$1 \leqslant p < n/\alpha$,$1/q = 1/p - \alpha/n$,则 $M(f,x,\alpha)$ 为弱 (p,q) 型算子,即 $\forall \lambda > 0$,下式成立

$$\mu\{x \in R^n : M(f,x,\alpha) > \lambda\} \leqslant \left\{\frac{c}{\lambda}\| f \|_p\right\}^q.$$

特别地,$\| M(f,\alpha) \|_\infty \leqslant \| f \|_p$.

③　令 $E_\lambda = \{x \in R^n : M(f,x,\alpha) > \lambda\}$,若 μ 为双倍测度,即存在常数 c,使得对任意方体 Q,有 $\mu(2Q) \leqslant c\mu(Q)$,则 $\forall f \in L^1(R^n)$,$\forall \lambda > 0$,下式成立

$$\mu(E_\lambda) \leqslant \frac{c}{\lambda}\int_{E_\lambda} |f|\,d\mu.$$

④　设 $0 < \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{\alpha}{n} < \infty$,$w \in A_{pq}$,则

$$\left(\int_{R^n} [M(f,x,\alpha)]^q [w(x)]^q dx\right)^{1/q} \leqslant c\left(\int_{R^n} [|f(x)|w(x)]^p dx\right)^{1/p}.\ ([87]257)$$

(20)　H-L 极大算子的另一方向推广是 Lorentz 空间 $L(p,q)$、齐性空间、Riemann 流形和各种加权空间等. 例如,设 $f: R^n \to R$ 是可测函数,令

$\lambda_f(y) = \mu\{x \in R^n : |f(x)| > y\}$, $y > 0$. Lorentz 空间 $L(p,q)$ 中 f 的范数定义为

$$\| f \|_{p,q} = \begin{cases} \int_0^\infty [\lambda_f(y)]^{q/p} d(y^q)^{1/q}, & 1 \leqslant q < \infty, \\ \sup_{y>0} y\lambda_f(y)^{1/p}, & q = \infty. \end{cases} \qquad M_{p,q}(f,x) = \sup_{x\in Q} \frac{\| f\varphi_Q \|_{p,q}}{[\mu(Q)]^{1/p}},$$

式中 φ_Q 为 Q 的特征函数. 特别, $M_{1,1}(f,x)$ 就是上述 H-L 极大算子 $M(f,x)$. ([308]1987, 101(1):272 ~ 276)

(21)　**H-L(Hardy-Littlewood) 嵌入不等式**: 设 $\Gamma(x) = \{(y,t) \in R_+^{n+1} : |x-y| < t\}$ 是以 x 为顶点的角形区域, u 的非切向极大函数定义为

$$N(u,x) = \sup\{| u(y,t) | : (y,t) \in \Gamma(x)\}.$$

若 F 定义在 R_+^{n+1} 上, $N(F) \in L^p(R^n)$, $0 < p < \infty$, 则当 $p < q < \infty$ 时, 下式成立

$$\left(\int_{R^{n+1}} t^{n(\frac{q}{p}-1)} | F(x,t) |^q \mathrm{d}x \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/q} \leqslant c \| N(F) \|_p.$$

([315]1975,16:1 ~ 64)

邓一韩在[137]138 提出: 径向极大函数与非切向极大函数在 $L^p(0 < p \leqslant 1)$ 范数意义下相互控制的最弱条件是什么?我们问, 将 L^p 范数换成 H^p 范数时又如何?

31.　**Fourier 变换不等式**: 设 $f \in L^1(R^n)$, 则 f 的 Fourier 变换定义为

$$\hat{f}(x) = \int_{R^n} f(t) e^{-2\pi i x t} \mathrm{d}t.$$

式中 $xt = \sum_{k=1}^n x_k t_k$ 为向量 x, t 的内积.

(1)　**H-Y 不等式(Housdorff-Young 不等式)**: 设 $f \in L^p(R^n)$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, $1/p + 1/q = 1$, 则

$$\hat{f} \in L^q(R^n), \text{且 } \| \hat{f} \|_q \leqslant \| f \|_p. \tag{2.15}$$

特别地, $f \in L^1(R^n)$ 时, $\hat{f} \in L^\infty(R^n)$, 且 $\| \hat{f} \|_\infty \leqslant \| f \|_1$. 而 $f \in L^2(R^n)$ 时, $\| \hat{f} \|_2 = \| f \|_2$. (2.15) 式的精确形式是下述 **Babenko 不等式**:

$$\| \hat{f} \|_q \leqslant c_p^n \| f \|_p, 1 < p \leqslant 2.$$

式中 $c_p = \left(\dfrac{p^{1/p}}{q^{1/q}}\right)^{1/2}$. ([311]1975,102(1):159 ~ 182.) 注意(2.15) 式对于 $p > 2$ 不成立.

(2)　**Pitt 不等式**: 设 $1 < p \leqslant q < \infty$, $0 \leqslant \beta < 1/q$, $0 \leqslant \alpha = \beta + 1 - (1/p) - (1/q)$. 若 $| y |^\alpha f \in L^p(R^n)$, 则

$$| x |^{-\beta} \hat{f} \in L^q(R^n), \quad \text{且} \quad \| \, | x |^{-\beta} \hat{f} \|_q \leqslant \| \, | y |^\alpha f \|_p.$$

(证明及其推广见[368]1984,33(2):257 ~ 270)

(3)　**HLP 不等式(Hardy-Littlewood-Paley 不等式)**:

令　$$w_p(x) = | x |^{(p-2)n}, \| f \|_{p,w} = \left(\int_{R^n} | f |^p w\right)^{1/p}.$$

①　若 $1 < p \leqslant 2$, $f \in L^p(R^n)$, 则存在常数 c_p, 使得

$$\| \hat{f} \|_{p,w_p} \leqslant c_p \| f \|_p;$$

②　若 $2 \leqslant q < \infty$, $f \in L^q_{w_q}$, 则 $\exists c_q > 0$, 使得

$$\| \hat{f} \|_q \leqslant c_q \| f \|_{q,w_q}.$$

提示:用 Marcinkiewicz 插值定理.

③　若 $0 < p \leqslant 1$,则

$$\| \hat{f} \|_{p,w_p} \leqslant c_p \| f \|_{H^p}. \quad ([87]370)$$

我们问:c_p 的最佳值是多少?

32.　**分数次积分算子不等式**:α 阶分数次积分算子 I_α 定义为

$$I_\alpha(f,x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\mathrm{d}t, \tag{2.16}$$

式中 $\alpha > 0, x \geqslant 0$. 而

$$I_\alpha(f,x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^\infty (t-x)^{\alpha-1} f(t)\mathrm{d}t \tag{2.17}$$

称为 **α 阶 Weyl 积分.**

下面的不等式中,$I_\alpha(f,x)$ 由(2.16)或(2.17)式定义均成立:

(1)　**HLS(Hardy-Littlewood-Sobolev)不等式**:设 $f \in L^p(0,\infty), f \geqslant 0, p > 1, 0 < \alpha < \frac{1}{p}, \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \alpha$. 则 $I_\alpha(f) \in L^q(0,\infty)$ 且 $\| I_\alpha(f) \|_q \leqslant C_{p,q} \| f \|_p$.
([1]324 ~ 325;[87]151 ~ 152)

2000 年许明用小波分析方法,证明了 I_α 的交换子的 H^1 有界性,即

$$\| fI_\alpha(g) - gI_\alpha(f) \|_{H^1} \leqslant c \| f \|_p \| g \|_q.$$

式中 $1 < p, q < \infty, (1/p) + (1/q) = 1 + \alpha, 0 < \alpha < 1$.

(中山大学学报,2000,39(4):10 ~ 14)

(2)　**HL 不等式(Hardy-Littlewood 不等式)**:设 $p > 1, 0 \leqslant \alpha < 1/p$, $p \leqslant q \leqslant p/(1-\alpha p)$,或 $p > 1, \alpha \geqslant (1/p), p \leqslant q, f \in L^p(0,\infty)$,则

$$\| I_\alpha(f) \|_{q,\omega} \leqslant C \| f \|_p,$$

式中 $\omega(x) = x^t, t = -(p - q + pq\alpha)/p$.

我们问:$c = c(p,q,\alpha)$ 的表达式是什么?c 的最佳值是什么?

([1]335,定理 402. 证明见[354]1928,27:565 ~ 606)

(3)　设 $a, b > 0, p > 1, r \geqslant 0, l > (1/p) - 1$,

当 $r = 0$ 时,① $0 < a < \frac{1}{p}, p \leqslant q \leqslant \frac{1}{(1/p) - a}$;或 ② $a = \frac{1}{p}, p \leqslant q < \infty$;或 ③ $a > \frac{1}{p}, p \leqslant q \leqslant \infty$;而当 $r > 0$ 时,① $0 < a < r, \frac{1}{(1/p) + r} < q < \frac{1}{(1/p) + r - a}$;或 ② $r \leqslant a < r + \frac{1}{p}, \frac{1}{(1/p) + r} < q \leqslant \frac{1}{1/p + r - a}$;或 ③ $a \geqslant r + \frac{1}{p}, \frac{1}{(1/p) + r} < q \leqslant \infty$,则

$$\left(\int_0^\infty | x^{-(r+l)} e^{-bx} I_a(f,x) |^q \mathrm{d}x\right)^{1/q} \leqslant c\left(\int_0^\infty | x^{-l} e^{-bx} f(x) |^p \mathrm{d}x\right)^{1/p},$$

式中 $c = c(a,b,q,p,l,r)$,$I_a(f,x)$ 由(2.16)定义.

(Kochneff,E.,[327]1997,91(1):84 ~ 102)

我们问:常数 c 的表达式及最佳值是什么?

$I_\alpha(f)$ 的变形见 Nonlinear Stud,1999,6(2):207 ~ 230.

(4)　令 $J_\alpha(f,x) = x^{-\alpha} I_\alpha(f,x)$,式中 $I_\alpha(f,x)$ 由(2.16)式定义,$1 < p \leqslant \infty$,则

$$\| J_\alpha(f) \|_p \leqslant \frac{\Gamma(1-1/p)}{\Gamma(\alpha+1-1/p)} \| f \|_p.$$

(5) R^n 上的分数次积分算子又称为 **Riesz 位势算子**:

$$I_\alpha(f,x) = \frac{1}{c(\alpha)}\int_{R^n} | x-y |^{\alpha-n} f(y)\mathrm{d}y.$$

相应地有截断 Riesz 位势算子:

$$J_\alpha(f,x) = \frac{1}{c(\alpha)}\int_{|y|\leqslant 2|x|} | x-y |^{\alpha-n} f(y)\mathrm{d}y.$$

式中 $0<\alpha<n, c(\alpha) = \pi^{n/2}2^\alpha\Gamma(\frac{\alpha}{2})/\Gamma(\frac{n}{2}-\frac{\alpha}{2})$.

① 设 $f\in L^p(R^n), 1<p<n/\alpha$,则
$I_\alpha(f,x) \leqslant c\| f \|_p^{\alpha p/n}[M(f,x)]^{1-\alpha p/n}$;
$\| I_\alpha(f) \|_q \leqslant c(\alpha,p,q)\| f \|_p$,式中 $1/q = (1/p)-(\alpha/n)$;

② 若 $f\in L^1(R^n), (1/q) = 1-(\alpha/n)$,则 $\forall\lambda>0$,下式成立

$$\mu\{x\in R^n: I_\alpha(f,x)>\lambda\} \leqslant c\left(\frac{1}{\lambda}\| f \|_1\right)^q.$$

([142]68 ~ 71)

③ 设 μ 为 R^n 上正的 Borel 测度. 若 $0<\alpha<n, 1<p<\infty, (1/p)+(1/q)=1, Q$ 为 R^n 中方体,则

$$\int | I_\alpha(f,x) |^p \mathrm{d}\mu(x) \leqslant c\int | f |^p \mathrm{d}x \quad (f\geqslant 0)$$

$$\Leftrightarrow \int_Q [I_\alpha(\varphi_Q \mathrm{d}\mu, x)]^q \mathrm{d}x \leqslant c\int_Q \mathrm{d}\mu < \infty;$$

若 $\alpha>(n/p), 1<p<\infty, f\geqslant 0, E = \{x\in R^n: r\leqslant | x | \leqslant 2r\}$,

则 $$\int | J_\alpha(f,x) |^p \mathrm{d}\mu(x) \leqslant c\int | f |^p \mathrm{d}x \Leftrightarrow \sup_{r>0} r^{p\alpha-n}\int_E \mathrm{d}\mu(x) < \infty.$$

([368]1984,33(3):353 ~ 366)

④ 设 $0<\alpha,\delta<1, 1<p<q<\infty, \frac{1}{r} = \frac{1-\delta}{p}+\frac{\delta}{q}, f(x)\geqslant 0$,则

$$\| I_{\alpha\delta}(f) \|_r \leqslant c\| f \|_p^{1-\delta}\| I_\alpha(f) \|_q^\delta.$$

([142]75;Appl. Anal. 2000,76(3 ~ 4):249 ~ 260)

⑤ **加权不等式**:设 $1<p<\infty, 0<q<\infty$, f 是 R^n 上径向非负递减(或递增)函数. u,v 为 R^n 上非负局部可积权函数,则 $\| I_\alpha(f) \|_{q,u} \leqslant c\| f \|_{p,v}$.

(Rakotondratsimba, Y., Z. Anal. Anwendungen1996,15(1):75 − 93)

(6) 周期 $T = (-\pi,\pi]$ 函数 f 的分数次积分算子

$$I_\alpha(f,x) = \int_T | t |^{\alpha-1} f(x-t)\mathrm{d}t, x\in T.$$

$$M_\alpha(f,x) = \sup_{x\in Q}\frac{1}{[\mu(Q)]^{1-\alpha}}\int_Q | f(y) | \mathrm{d}y, 0<\alpha<1.$$

① **Welland 不等式**:设 $f\in L(T), 0<\delta<\alpha<\alpha+\delta<1$,则
$| I_\alpha(f,x) | \leqslant c[M_{\alpha-\delta}(f,x)M_{\alpha+\delta}(f,x)]^{1/2}$.

② **Adam 不等式**:设 $\alpha>0, 0<\delta<1, 1<p<\delta/\alpha, 1\leqslant q\leqslant\infty, f\in L^p(T), M_{\alpha/p}(f)$

$\in L^q(T)$，则 $I_\alpha(f) \in L^r(T)$ 且

$$\| I_\alpha(f) \|_r \leqslant C \| M_{\alpha/p}(f) \|_q^{\alpha p/\delta} \| f \|_p^{1-\alpha p/\delta}.$$

③ **$I_\alpha(f)$ 的好 λ 不等式**：设 $\lambda, \varepsilon, \delta$ 为正的常数，$D \subset T = (-\pi, \pi]$，令

$E = \{x \in D : I_\alpha(f,x) > \varepsilon\lambda, M_\alpha(f,x) \leqslant \delta\lambda\}$.

则存在只依赖于 α 的常数 ε_0 和 β，使得 $\forall f \geqslant 0$，下式成立

$D \cap \{x \in T : I_\alpha(f,x) \leqslant \lambda\} \neq \varnothing, \mu(E) \leqslant \beta(\delta/\varepsilon)^{\frac{1}{1-\alpha}}\mu(D), \forall \varepsilon > \varepsilon_0$.

([87]163 ~ 166)

注 当 D 换成 R^n 中方体时，不等式右边的指数 $\dfrac{1}{1-\alpha}$ 应换成 $\dfrac{n}{1-\alpha}$. ([142]76)

(7) 设 $\omega : (0,\infty) \to (0,\infty)$，$B_0 = B(0,1)$ 是中心在原点的单位球，φ_{B_0} 为 B_0 的特征函数，于是广义分数次积分算子定义为

$$I_\omega(f,x) = \int_{R^n} \frac{\omega(|x-y|)}{|x-y|^n} f(y)\mathrm{d}y$$

及其变形：

$$\tilde{I}_\omega(f,x) = \int_{R^n} \left(\frac{\omega(|x-y|)}{|x-y|^n} - \frac{\omega(|y|)(1-\varphi_{B_0}(y))}{|y|^n} \right) f(y)\mathrm{d}y.$$

Nakai，Eridani 先后证明了 $I_\omega, \tilde{I}_\omega$ 在广义 Morrey 空间之间的有界性.

([330]2002,33(4):335 ~ 340)

33. **C-Z(Calderon-Zygmund) 奇异积分算子不等式**：

定义 1 设算子 $T : L^2(R^n) \to L^2(R^n)$，$\sigma \in L^\infty(R^n)$，若

$$\widehat{(Tf)}(x) = \sigma(x)\hat{f}(x),$$

则称 T 是 L^2 上的乘子(算子)，$\sigma(x)$ 称为 T 的符号.

例如 Hilbert 变换是 $L^2(R^n)$ 上的乘子，其符号 $\sigma(x) = -i\operatorname{sgn} x$.

定义 2 C-Z 奇异积分算子定义为

$$T(f,x) = P.V.\int_{R^n} K(x-y)f(y)\mathrm{d}y = (K * f)(x). \tag{2.18}$$

特别当 $K(x) = \dfrac{\Omega(x)}{|x|^n}$，其中 $\Omega(x)$ 是零次齐次函数，即 $\Omega(\lambda x) = \Omega(x), \lambda > 0$，且 $\Omega(x)$ 在单位球面 $\sum_n$ 上的平均值为零，即 $\int_{\sum_n} \Omega(x')\mathrm{d}x' = 0$，则称(2.18)式为经典 C-Z 奇异积分算子，而

$$R_j(f,x) = C_n P.V.\int_{R^n} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} f(x-y)\mathrm{d}y$$

称为 f 的 **Riesz 变换**，式中 $C_n = \pi^{-\frac{n+1}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)$.

$$T_\varepsilon(f,x) = \int_{|x-y|>\varepsilon>0} K(x-y)f(y)\mathrm{d}y, \ f \in C_0^\infty(R^n),$$

称为截断 C－Z 算子.

定义 3 设 $K(x)$ 在 $R^n - \{0\}$ 上局部可积，且存在常数 c_1, c_2, c_3，使得

① $\left| \int_{\delta<|x|<N} K(x)\mathrm{d}x \right| \leqslant c_1$； $\lim\limits_{\delta\to 0} \int_{\delta<|x|<N} K(x)\mathrm{d}x$ 存在；

② $\int_{|x|<r} |x||K(x)|\mathrm{d}x \leqslant c_2 r$;

③ $\int_{|x|\geqslant 2|y|} |K(x-y)-K(x)|\mathrm{d}x \leqslant c_3, y \neq 0$.（Hörmander 条件）

则称 $K(x)$ 为 C-Z 核，记 $K_{\varepsilon,N}(x) = K(x)\varphi_E(x)$，式中 $E=\{x:\varepsilon<|x|<N\}$，$\varphi_E$ 为 E 的特征函数.

(1) **Calderon-Zygmund 不等式(C-Z 不等式)**：设 K 为 C-Z 核，则 $\forall f \in C_0^\infty(R^n)$，下式成立

$$\|T_\varepsilon f\|_p \leqslant C_p \|f\|_p, 1<p<\infty.$$

([142]135 ~ 137)

(2) $T^*(f,x) = \sup\limits_{0<\varepsilon<N} |(K_{\varepsilon,N} * f)(x)|$ 称为极大 C-Z 奇异积分算子. 若 C-Z 核 $K(x)$ 还满足

$$|K(x_1-y)-K(x_2-y)| \leqslant c_4 \frac{|x_1-x_2|}{|x_3-y|^{n+1}}.$$

式中 $|x_k - x_j| \leqslant r/2$，$|x_k - y| \geqslant r, r>0, k,j, = 1,2,3$，则

① 当 $0<\alpha<1$ 时，成立 **Cotlar 不等式**：

$$T^*(f,x) \leqslant c\{[M(|Tf|^\alpha,x)]^{1/\alpha} + M(f,x)\}, f \in C_0^\infty(R^n).$$

② $\|T^*(f)\|_p \leqslant c\|f\|_p, 1<p<\infty$.

③ $\mu\{x \in R^n : T^*(f,x) > \lambda\} \leqslant \frac{c}{\lambda}\|f\|_1, \lambda>0$.

([142]140 ~ 143)

(3) C-Z 奇异积分算子的推广是振荡积分算子和 Fefferman 算子，广义 C-Z 算子等，例如：振荡积分算子 T 定义为

$$T(f,x) = \mathrm{P.V.}\int_{R^n} \exp(iB(x,y))K(x-y)f(y)\mathrm{d}y,\ f \in C_0^\infty(R^n).$$

式中 B 为 R^n 上非退化线性变换，$B(x,y)=(Bx)\cdot y$ 是双线性型. $K(x) \in C^\infty(R^n - \Omega)$ 且在原点的一个邻域内重合于一个 μ 阶齐次函数，还具有消失性；$\int_{|x|=\varepsilon} K(x)\mathrm{d}x = 0$，$0<\varepsilon\leqslant 1$，当 $B=0, \mu=n$ 时，T 就是通常的奇异积分.

① 1986 年，Stein, E. M., Phong, D. H. 证明：当 $1<p<\infty$ 时，若 $\mu \geqslant n$，则

$$\|Tf\|_p \leqslant c_1 \|f\|_p.$$

若 $0<\mu<n$，且 $|(1/2)-(1/p)| \leqslant \mu/(2n)$，则 $\|Tf\|_p \leqslant c_2\|f\|_p$.
式中常数 c_2 与 n,p,μ,B 有关，而 c_1 与 B 无关.

② 1987 年，胡伟将上述结果推广到加权情形. 设 $\mu \geqslant n$，则对于 $w(x) \in A_p$ $(1<p<\infty)$，有

$$\int |T(f,x)|^p w(x)\mathrm{d}x \leqslant c_3 \int |f(x)|^p w(x)\mathrm{d}x;$$

若 $0<\mu<n$，则对于 $w(x) \in A_p, 1<p<\infty, \alpha = 2n|(1/2)-(1/p)| \leqslant \mu$，下式成立

$$\int_{R^n} |T(f,x)|^p [w(x)]^r \mathrm{d}x \leqslant c\int_{R^n} |f(x)|^p [w(x)]^r \mathrm{d}x;$$

式中 $r=\frac{\mu-\alpha}{n-\alpha}$. 当 $p=1,\mu>n,w\in A_1$ 时，有

$$w\{x\in R^n: |T(f,x)|>\lambda\}\leqslant\frac{c}{\lambda}\int_{R^n}|f(x)|w(x)\mathrm{d}x,(\lambda>0).$$

常数 c 与 f,B 无关.([352]1988,15,(3):256 ~ 266)

(4)　在 C-Z 算子的推广中，下述 BCP 不等式起着十分重要的作用：

BCP 不等式(Benedek-Calderon-Panzone 不等式)：设 T 为 $C_0^\infty(R^n)$ 上次线性算子并满足：

① $\mu\{|Tf|>\lambda\}\leqslant\left(\frac{c}{\lambda}\|f\|_r\right)^r,1<r<\infty$；(即 T 为弱 (r,r) 型).

② 设 $f\in L(R^n)$，$\mathrm{supp}f\subset B(x_0,r)=B_0$，($B_0$ 是以 x_0 为中心，r 为半径的球)，且存在常数 $c_1,c_2>1$，使得

$$\int_{R^n-C_1B_0}|T(f,x)|\mathrm{d}x\leqslant c_2\|f\|_1.$$

式中 c_1B_0 是以 x_0 为中心，c_1r 为半径的球. 则 T 为弱 $(1,1)$ 型算子，即

$$\mu\{|Tf|>\lambda\}\leqslant\frac{c_3}{\lambda}\|f\|_1.$$

([87]280 ~ 281)

C-Z 奇异积分算子的各种推广及在 $L^p(R^n)$. $BMO(R^n)$, $H^p(R^n)$, Lipα, Besov 空间上的相应不等式见[87]、[142]、[137]、[136]、[129]、[92]、[88]、[86] 等.

34.　**L-P(Littlewood-Paley)g 函数不等式**：设 $u(x,t)=(P_t*f)(x)$ 为 f 的 Poisson 积分.

$$|\nabla u(x,t)|^2=\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2+\sum_{k=1}^n\left|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right|^2.$$

则 L-P g 函数定义为

$$g(f,x)=\left(\int_0^\infty|\nabla(u,t)|^2t\mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

另两个基本的算子是面积函数 $S(f,x)$ 和 $g_\lambda(f,x)$：

$$S(f,x)=\left(\iint_{\Gamma(x)}|\nabla u(y,t)|^2t^{1-n}\mathrm{d}y\mathrm{d}t\right)^{1/2},$$

$$g_\lambda^*(f,x)=\left(\iint_{R_+^{n+1}}|\nabla u(y,t)|^2\left(\frac{t}{|x-y|+t}\right)^{\lambda n}t^{1-n}\mathrm{d}y\mathrm{d}t\right)^{1/2},$$

式中 $\Gamma(x)=\{(y,t)\in R_+^{n+1}:|y-x|<t\},t>0$.

(1)　设 $1<p<\infty,\lambda>2/p,f\in L^p(R^n)$，则

$$g(f,x)\leqslant CS(f,x)\leqslant C_\lambda g_\lambda^*(f,x).$$

而且　$\|g_\lambda^*(f)\|_p\leqslant C(p,\lambda)\|f\|_p$.

(2)　当 $0<p\leqslant1,p>2/\lambda$ 时 $\|g_\lambda^*(f)\|_p\leqslant C(p,\lambda)\|f\|_{H^p}$.

(3)　设 $f\in L^p(R^n),1<p<\infty$，则 $g(f)\in L^p(R^n)$，且

$$C_p\|f\|_p\leqslant\|g(f)\|_p\leqslant C_p^*\|f\|_p.$$

(4)　在上述平方积分函数 g,S,g_λ^* 中的 Poisson 积分 $(P_t*f)(x)$ 可换成 $(f*\varphi_t)(x)$，式中 $\varphi\in C_0^\infty(R^n)$，$\int\varphi=0$，$\varphi_t(x)=t^{-n}\varphi(\frac{x}{t}),t>0$，例如，

$$S_\varphi(f,x)=\left(\int_{|x-y|<t}|(f*\varphi_t)(y)|^2\frac{\mathrm{d}t\mathrm{d}y}{t^{n+1}}\right)^{1/2}.$$

我们可以建立这些函数的加权范数不等式,例如,设 $w^*(x)=M(w,x)$ 表示 w 的 H-L 极大函数,则

① $\|S_\varphi(f)\|_{2,w}\leqslant C(n,\varphi)\|f\|_{2,w^*}$.

② $1<p\leqslant 2$ 时, $\|S(f)\|_{p,w}\leqslant C(n,p)\|f\|_{p,w^*}$.

③ $2<p<\infty$ 时, $\|S(f)\|_{p,w}\leqslant C(n,p)\|f\|_{p,v}$,

式中　$v(x)=[w^*(x)]^{p/2}[w(x)]^{-(\frac{p}{2}-1)}$.

②③ 中 $S(f)$ 换成 $S_\varphi(f)$ 时仍成立.([368]1987,36(2):277 ~ 294)

加权 Sobolev 空间及其他空间中的 L-P 不等式见彭立中[335]1985.2. 和专著[87][137][142]等.

(5)　设 $S_n(f,x)$ 是 $f\in L^p_{2\pi}(1<p<\infty)$ 的 Fourier 级数的 n 阶部分和,则 f 的 L-P g 函数定义为

$$G(f,x)=\left(\sum_{k=0}^{\infty}|S_{n_k}(f,x)-S_{n_{k-1}}(f,x)|^2\right)^{1/2},\quad \frac{n_{k+1}}{n_k}\geqslant\lambda>1,$$

这时成立 **Littlewood-Paley 不等式**:

$$C_p\|f\|_p\leqslant\|G(f)\|_p\leqslant C_p^*\|f\|_p.$$

式中　$C_p^*=\begin{cases}O(p), & p\to\infty,\\ O\left(\left(\frac{1}{p-1}\right)^{3/2}\right), & p\to 1+0.\end{cases}$

1990 年,Pichorides 证明, $f\in H^p(1<p<\infty)$, $C_p^*=O\left(\frac{1}{p-1}\right)$, $p\to 1+0$, $C_p^{-1}=O(p\ln p)(p\to\infty)$. 并猜想　$C_p^{-1}=O(p^{1/2})$, $p\to\infty$.
(Collog. Math. 1990,60/61(2):687 ~ 691 和[308]1992.114(3):787 ~ 789)

35.　**Stieltjes 变换不等式**: f **的 Stieltjes 变换定义为**:

$$S_\lambda(f,x)=\int_0^\infty(x+t)^{-\lambda}f(t)\mathrm{d}t.$$

设 u,v 为非负权函数, $\lambda>0$, $1\leqslant q<p\leqslant\infty$, $1/r=1/q-1/p$, p', q' 分别为 p,q 的共轭指数,则 $\|S_\lambda(f)\|_{q,u}\leqslant C\|f\|_{p,v}$ 成立的充要条件是:

$$\int_0^\infty\left[\int_0^\infty\frac{v(x)}{(x+t)^{\lambda q}}\mathrm{d}x\right]^{r/q}\left[\int_0^\infty\frac{u(x)^{1-p'}}{(1+(s/t))^{\lambda p'}}\mathrm{d}s\right]^{r/q'}u(t)^{1-p'}\mathrm{d}t<\infty.$$

(Gordon,S.[392]1988,110(1 ~ 2):73 ~ 78)

36.　**几何平均算子不等式**:设 $f(x)>0$ a.e. $x\in(0,\infty)$, f 的几何平均算子定义为

$$T(f,x)=\exp\left(\frac{k+1}{x^{k+1}}\int_0^\infty t^k\ln f\mathrm{d}t\right).$$

设 $1<p\leqslant\infty$, $0<q<p$,则

$$\|T(f)\|_{q,u}\leqslant c\|f\|_{p,v}.$$

(Jain,P.,Singh,A.P.,[399],2000,13(8):63 ~ 67) 更一般的平均算子定义为

$$T_t(f,x)=\frac{1}{g(t)}\int_0^t f[g^{-1}(g(x)+g(u))]\mathrm{d}g(u),x\in[-1,1].$$

式中 g 是$[-1,1]$上绝对连续的奇函数且 $g'(x)>0$ *a.e.*

([323]1999,51(3):546 ~ 565;[301]2001,263(1):135 ~ 152)

37. 设 $H^p(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 为通常的 Hardy 类,$f \in H^\infty$,

$$G(f) = \sup_{|\theta| \leqslant \pi} \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{|f(\exp i(\theta+t)) - f(\exp i(\theta-t))|}{2\sin(t/2)}\mathrm{d}t.$$

则

(1) $G(f) \leqslant \pi \| f' \|_{H^1}$;

(2) $\sup\limits_{|\theta| \leqslant \pi}\int_0^1 |f'(re^{i\theta})| \mathrm{d}r \leqslant \frac{\pi}{2}(\| f \|_{H^\infty} + G(f))$.

(Stoilov,Reyo,Math. and Math. Education,1985)

38. **算子的分数幂不等式**:设 T_1, T_2 分别是 Hilbert 空间 X,Y 上正自共轭算子,T 是 X 到 Y 上的有界线性算子.

若 $\| T_2 Tx \| \leqslant M \| T_1 x \|$,则成立 **Heinz 不等式**:

$$\| T_2^\alpha Tx \| \leqslant M^\alpha \| T \|^{1-\alpha} \| T_1^\alpha x \|, 0 \leqslant \alpha \leqslant 1. \quad ([107]2:547)$$

39. **高丁(Garding)不等式**:设 $P(x,D) = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant 2m} a_\alpha(x) D^\alpha$ 是定义在区域 G 上的椭圆型微分算子,其主部 $P_{2m}(x,D)$ 所对应的多项式记为 $P_{2m}(x,y)$,若存在正常数 c_0,使得 $\forall x \in G, y \in R^n$,下式成立

$$\mathrm{Re}P_{2m}(x,y) \geqslant c_0 |y|^{2m}.$$

则存在正常数 c_1, c_2,使得 $\forall u \in C_0^\infty(G)$,下式成立

$$\mathrm{Re}(P(x,D)u,u) \geqslant c_1 \| u \|_m^2 - c_2 \| u \|_0^2.$$

(Hörmander,L., The analysis of linear partial differential operators,3. Springer-Verlag,1985)

40. **强制性不等式**:是指对某个双线性形式给出下界估计的不等式,或者用已知函数的范数和边界数据的范数给出某个椭圆型方程解的范数的上界估计的不等式.例如,设 W_2^m 是 Sobolev 空间,$\overset{\circ}{W}{}_2^m$ 是 W_2^m 的具有紧支集的元(即在域 G 的边界附近为零的元)的子空间,$\overset{\circ}{W}{}_2^m \subset X \subset W_2^m$,则

$$\mathrm{Re}D(u,u) \geqslant c \| u \|_m^2 - \lambda \| u \|_0^2 \quad (\lambda \geqslant 0, c > 0)$$

就是 $D(v,u) = \sum\limits_{\substack{|\alpha| \leqslant m \\ |\beta| \leqslant m}} (\partial^\alpha v, a_{\alpha\beta}\partial^\beta u)$ **的强制性不等式.**

若方程 $L(u) \triangleq \sum\limits_{|\alpha| \leqslant 2m} a_\alpha(x)\partial^\alpha(u) = f$ 的解在区域 G 的边界 ∂G 上满足条件 $M_j(u) = 0, j = 0,\cdots,m-1, M_j$ 为 j 阶微分算子,则

$$\| u \|_{2m} \leqslant c_1 \| L(u) \|_0 + \lambda_1 \| u \|_0, c_1 > 0, \lambda_1 \geqslant 0.$$

是椭圆型方程边值问题的强制性不等式.更一般情形见[107]1:637 ~ 638.

41. **N-H(von Neumann-Heinz)不等式**:设 X 为 Hilbert 空间.$T:X \to X$ 为谱算子,$p(T)$ 表示算子多项式,则

$$\| p(T) \| \leqslant \max\{|p(y)| : |y| \leqslant \| T \|\}.$$

它是函数演算中的基本不等式,而函数演算则是谱分析和 Banach 代数理论的基本工具之一.([107]2:596 ~ 598)

42. **耗散算子不等式**:设 X 为复 Hilbert 空间.$T:X \to X$ 为有界线性算子

$$\mathrm{Re}T=\frac{1}{2}(T+T^*),\mathrm{Im}T=\frac{1}{2i}(T-T^*),$$

T^* 为 T 的共轭算子，I 为恒等算子，若 $\mathrm{Im}T>0$，即 $\mathrm{Im}T$ 为可逆的正算子，则称 T 为严格耗散算子. 记 $T_0=(T-iI)(T+iI)^{-1}$，若 $\|T_0\|<1$，则

(1) $\pm(I-T^*T)\leqslant\frac{2\|T_0\|}{1-\|T_0\|^2}(I-T^*)(I-T)$;

(2) $\pm\mathrm{Re}T\leqslant\frac{2\|T_0\|}{1-\|T_0\|^2}I$;

(3) $\frac{1-\|T_0\|}{1+\|T_0\|}I\leqslant\mathrm{Im}T\leqslant\frac{1+\|T_0\|}{1-\|T_0\|}I$;

(4) $2\frac{1-\|T_0\|}{1+\|T_0\|}\mathrm{Im}T\leqslant(I+T^*)(I+T)\leqslant2\frac{1+\|T_0\|}{1-\|T_0\|}\mathrm{Im}T$.

(Fan Ky[386]1988,105:237 ~ 248)

43. **收缩算子不等式**：设 X 为复 Hilbert 空间. $T:X\to X$ 为有界线性算子，T^*，I，$\mathrm{Re}T$，$\mathrm{Im}T$ 的定义见 No. 42. 若 $\|T\|<1$，则

(1) $\frac{T^*T-\|T\|I}{1-\|T\|}\leqslant\mathrm{Re}T\leqslant\frac{T^*T+\|T\|I}{1+\|T\|}$;

(2) $\frac{T^*T-\|T\|I}{1-\|T\|}\leqslant\mathrm{Im}T\leqslant\frac{T^*T+\|T\|I}{1+\|T\|}$;

(3) $\frac{1-\|T\|}{1+\|T\|}(I-T^*)(I-T)\leqslant I-T^*T\leqslant\frac{1+\|T\|}{1-\|T\|}(I-T^*)(I-T)$;

(4) $\pm\mathrm{Re}T\leqslant\frac{\|T\|}{1-\|T\|^2}(T^*-iI)(T+iI)$;

(5) $\pm\mathrm{Im}T\leqslant\frac{\|T\|}{1-\|T\|^2}(I-T^*)(I-T)$.

(Fan Ky[386]1988,105:237 ~ 248). 另见第 9 章 §2No. 16.

44. **Ascoli 不等式**：设 X 为赋范线性空间，E 为 X 中闭凸集，则 $\forall x_0\in X-E$，存在 X 上有界线性泛函 f（记为 $f\in X^*$）和 $\alpha\in R^1$，使得

$$f(x)<\alpha<f(x_0),\forall x\in E.$$

提示：这是泛函分析中凸集分离定理的推论.

45. **线性算子的谱半径 $r_\sigma(T)$ 不等式**：设 X 是复 Banach 空间，则复平面 C 上以原点为中心包含 T 的谱 $\sigma(T)$ 的最小闭圆盘的半径 $r_\sigma(T)=\sup\{|\lambda|:\lambda\in\sigma(T)\}$ 称为 T 的谱半径.

(1) $r_\sigma(T)\leqslant\|T\|$;　　(2) $r_\sigma(T_1+T_2)\leqslant r_\sigma(T_1)+r_\sigma(T_2)$;

(3) $r_\sigma(T_1T_2)\leqslant r_\sigma(T_1)r_\sigma(T_2)$;　　(4) $r_\sigma(T)=\lim\limits_{n\to\infty}\|T^n\|^{1/n}$.

式中 $T_1,T_2\in B(X)$，且 $T_1T_2=T_2T_1$.（[118]358）

46. **Hardy 算子不等式**：设 $K(x,y)$ 非负，关于 x 递增而关于 y 递减，而且存在常数 $c>0$，使得 $K(x,y)\leqslant c[K(x,z)+K(z,y)]$，$0<y<z<x$，则

$$T_\alpha(f,x)=\int_0^x[K(x,y)]^\alpha f(y)\mathrm{d}y$$

称为广义 Hardy 算子(GHO)，$T_1(f,x)$ 记为 $T(f,x)$.

设 $r,q \geqslant 1, 1 < p \leqslant q+r, \alpha > 1, w, v$ 为非负权函数.

$\| f \|_{p,v} = \left(\int_0^\infty |f(x)|^p v(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p} < \infty$,则成立 **Opial 型不等式**:

$$\left(\int_0^\infty |T(f,x)|^q |T_\alpha(f,x)|^r w(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q+r}} \leqslant c \| f \|_{p,v}.$$

(Steven, B. [329]1997, 126(1): 27 ~ 50; Kerman, R, Function Spaces. Pozman, 1998: 269 ~ 278; [308]1998, 126(6): 1739 ~ 1746)

47. 设 T 为 Hilbert 空间 X 上有界线性算子,I 为恒等算子,若 $0 < m < M, 0 < mI \leqslant T \leqslant MI, 0 < r < p$,令

$$K(m,M,p) = \frac{(p-1)^{p-1}}{p^p} \frac{(M^p - m^p)^p}{(M-m)(mM^p - Mm^p)^{p-1}},\text{则}$$

(1) $(T^p x, x)^{1/p} \leqslant K(m^r, M^r, p/r)^{1/p} (T^r x, x)^{1/r}$;

(2) 若 $T_1 \geqslant T_2 \geqslant 0, 0 < mI \leqslant T_k \leqslant MI, k = 1,2$,则

$$T_1^p - T_2^p \geqslant \frac{-(mM^p - Mm^p)}{M-m}\left[K(m,M,p)^{1/(p-1)} - 1\right], p > 1.$$

(Takeaki, Y. [303]2000, 3(1): 89 ~ 96)

48. **Marcus 不等式**,设 T_k, A_k 为 Hilbert 空间 X 上算子,其中 A_k 为正的可逆算子,T_k^* 为 T_k 的共轭算子,则

$$\sum_{k=1}^n T_k^* A_k^{-1} T_k \geqslant \left(\sum_{k=1}^n T_k\right)^* \left(\sum_{k=1}^n A_k\right)^{-1} \left(\sum_{k=1}^n T_k\right).$$

(Ritsuo, N. 等. Math. Japan 1999, 50(1): 35 ~ 39)

49. 设 f 是 R^{n+1} 中单位球面 $\sum_n$ 上的平方可积函数,它的球形调和展开为

$$f = \sum_{k=0}^\infty Y^{(k)}.$$

Pf 是它的单位球上的调和延拓,$P_r f$ 是 Pf 在球面 $|x| = r$ 上的限制,于是 $P_r f = \sum_{k=0}^\infty r^k Y^{(k)}, 1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$,则

$$\| P_r f \|_q \leqslant \| f \|_p \Leftrightarrow r^2 < (p-1)/(q-1).$$

([65]146 ~ 162)

50. **H-S 范数不等式**:设 $B(X)$ 是可分复 Hilbert 空间 X 上所有有界线性算子的 C^* 代数,$\{e_k\}$ 为 X 的正交基,若 $T \in B(X), \sum_{k=1}^\infty \| Te_k \|^2 < \infty$,则称 T 为 H-S(Hilbert-Schmidt) 类. T 的 HS 范数定义为

$$\| T \|_2 = \left(\sum_{k=1}^\infty \| Te_k \|^2\right)^{1/2}.$$

设 $T, T_k \in B(X), k = 1,2$, 令 $A_n = |T_1|^n T + T|T_2|^n$;

$$B_n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} T_1^{n-k} T T_2^k; \quad G_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} T^{n-k} T T_2^k; \quad H_n = T_1^n T - T T_2^n,$$

式中 $|T| = (T^* T)^{1/2}$ 为 T 的绝对值,则

(1) $2\| A_n \|_2 \leqslant \| B_n \|_2 + \| G_n \|_2$.

推论 若 T_1,T_2 还是正算子,则

$$\| A_n \|_2 \leqslant \| B_n \|_2.$$

(2) 若 T_1,T_2 还是正规算子,则

$$\| B_n \|_2 \leqslant 2^{n-1} \| A_n \|_2; \quad \| G_n \|_2 \leqslant \| H_n \|_2.$$

(3) 若 T_1,T_2 还是自共轭算子,则

$$\| G_{2n+1} \|_2 \leqslant 2^{2n} \| H_{2n+1} \|_2.$$

证明及更多的类似不等式见[301]2002,268(1):67 ~ 73.

51. 设A,B,T为Hilbert空间X上有界线性算子.若A,B为自共轭算子,$A\leqslant B$表示$B-A$为半正定算子.

(1) **Furuta 不等式**:若$0\leqslant A\leqslant B, r\geqslant 0, 0\leqslant p\leqslant q$,令$t=(p+r)/(q+r)$,则

$$A^{r/2}B^pA^{r/2}\leqslant (A^{r/2}B^qA^{r/2})^t;\quad (B^{r/2}A^qB^{r/2})^t\leqslant B^{r/2}A^pB^{r/2}.$$

(2) 若f是区间D上连续函数,若

$$A\leqslant B\Rightarrow f(A)\leqslant f(B),$$

称f是算子单调函数;若$\forall\lambda\in[0,1], f(\lambda A+(1-\lambda)B)\leqslant\lambda f(A)+(1-\lambda)f(B)$,则称$f$是**算子凸函数**.

若$A\geqslant 0, \| B\| \leqslant 1, f$是$[0,\infty)$上算子单调函数,则

$$B^* f(A)B\leqslant f(B^* AB).$$

(3) **L-H(Löwner-Heinz) 不等式**:$0\leqslant A\leqslant B\Rightarrow A^\alpha\leqslant B^\alpha, 0<\alpha\leqslant 1$.更一般地,若$0\leqslant B\leqslant A, p,r\geqslant 0, q\geqslant 1$,且$(1+2r)q\geqslant p+2r$,令$\beta=(p+2r)/q$,则

$$B^\beta\leqslant (B^rA^pB^r)^{1/q};(A^rB^pA^r)^{1/q}\leqslant A^\beta.$$

([308]1987,101(1):85 ~ 88 和 2001,129(11):3339 ~ 3344)

52. **正线性泛函的 AC(Aczel-Chebyshev) 不等式**:设f是非负函数空间X上正线性泛函,且$f(1)=1$,若$x(t),y(t)$同为递增或同为递减,则

(1) $f(x)f(y)\leqslant f(xy)$.

(2) 若$f(x)\geqslant 0, f(y)\geqslant 0, x_0-f(x)\geqslant 0, y_0-f(y)\geqslant 0$,则

$$\frac{x_0y_0-f(xy)}{(x_0-f(x))(y_0-f(y))}\geqslant 1.$$

(孙燮华,[301]2000,245(2)393 ~ 403)

53. **正算子不等式**:给定函数集$\{u\}$,它们满足某些边条件,算子L作用在这些函数上,如何从$L(u)\geqslant 0$推出$u\geqslant 0$?它们往往与微分方程的解有密切联系.例如:

Caplygin 不等式:设$t\geqslant 0$时,$u''+p(t)u'-q(t)u>0, v''+p(t)v'-q(t)v=0; q(t)\geqslant 0, u(0)=v(0), u'(0)=v'(0)$,则$u(t)>v(t), \forall t\geqslant 0$.

在有限区间$[0,a]$上,还可以得到更精确的结果,这是个庞大的课题,[2]用了一章(第4章)的篇幅专门讨论算子的正性.

54. **极小极大不等式**:设X,Y为实赋范线性空间.A,B分别是X,Y中非空紧凸集.泛函$f:A\times B\to R^1$满足:

(1) $\forall y\in B, f(\cdot,y)$是$A$上的凹泛函且上半连续;

(2) $\forall x\in A, f(x,\cdot)$是$B$上凸泛函且下半连续,则存在$(x_0,y_0)\in A\times B$,使得

$$f(x,y_0)\leqslant f(x_0,y_0)\leqslant f(x_0,y), \forall (x,y)\in A\times B.$$

提示：利用泛函分析中凸集分离定理(Hahn-Banach 泛函延拓定理的几何形式).

上述不等式称为 Von Neumann 极小极大定理(鞍点定理)，是对策论的基本定理，它在非线性泛函分析及最优化理论中也有重要应用. 上述不等式已有许多推广，特别是 Fan Ky 对此作了系统的研究，例如，他证明：

设 D 是 Hausdorff 拓扑线性空间 X 中紧凸集，f 定义在 $D\times D$ 上，并满足：

(1) $\forall x\in X$，$f(x,y)$ 是 y 在 D 上的下半连续函数；

(2) $\forall y\in X$，$f(x,y)$ 是 x 在 D 上拟凹函数，则

$$\min_{y\in D}\sup_{x\in D} f(x,y)\leqslant \sup_{x\in X} f(x,x).$$

([5]3:103 ~ 113; Proc. Nat. Acad. Sci., 1952, 38:121 ~ 126; 1953, 39(1):42 ~ 47; [354]1987, 194:7 ~ 13; Sion, M. [313]1958, 8:171 ~ 176 等)

55. **Banach 极限不等式**：设 $c=\{x=(x_1,\cdots,x_n,\cdots):\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在$\}$，$l^\infty=\{x=(x_1,\cdots,x_n,\cdots):\sup\limits_n|x_n|<\infty\}$. 若 $x=(x_1,\cdots,x_n,\cdots)\in c$，定义 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=f(x)$. 则 f 是空间 c 上的线性泛函，而且 f 可以延拓成 l^∞ 上的泛函 F，使得

$$\liminf_{n\to\infty} x_n\leqslant F(x)\leqslant \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

这时 $F(x)$ 称为 x 在 l^∞ 中的 Banach 极限.

56. 广义 Riesz 位势算子不等式：设 E 为 R^n 中区域，$0<\alpha<n$，广义 Riesz 位势算子定义为

$$T_\alpha(f,x)=\int_E\frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\mathrm{d}y.$$

当 $E=R^n$ 见 No. 32(5). 若 $0<\mu(E)<\infty$，$f\in L^1(E)$，则

$$T_\alpha f\in L^q(E),\qquad 式中\ 1\leqslant q<\frac{n}{n-\alpha}.$$

而且

$$\|T_\alpha f\|_q\leqslant C(q,\alpha)\|f\|_1,\qquad 式中\ C(q,\alpha)=\frac{V_n^{1-\frac{\alpha}{n}}}{\left\{1-\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)q\right\}^{\frac{1}{q}}}[\mu(E)]^{\frac{1}{q}-1+\frac{\alpha}{n}}.$$

$V_n=\dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$ 是 R^n 中单位球的体积. ([173]421)

57. 微分算子不等式：设 $A(x)$ 是 $C^\infty(R^n)$ 函数，取值于实对称 $n\times n$ 矩阵，且其矩阵元素是 R^n 中无穷次可微函数，$\forall y\in R^n$，$(y,A(x)y)\geqslant 0$，此处$(\cdot,\cdot)$是 R^n 中通常的内积. 定义微分算子

$$L(f)=\sum_{k,j=1}^n\partial_kA_{k,j}(x)\partial_jf.$$

若 $f\in L^1_{\text{loc}}(R^n)$，使得 $L(f)\in L^1_{\text{loc}}(R^n)$，则对任意非负的 $g\in C_0^\infty(R^n)$，成立 Kato 不等式：

$$\int_{R^n}|f(x)|L(g,x)\mathrm{d}x\geqslant\int_{R^n}\mathrm{Re}[(\mathrm{sgn}f(x))L(f,x)]g(x)\mathrm{d}x.$$

式中 $\mathrm{sgn}f$ 是 f 的符号函数. ([167]178)

58.　算子数值半径不等式：设 X 是复 Hilbert 空间，算子 T 的值域定义为 $\Omega(T)=\{(Tx,x):x\in X,\ \|x\|=1\}$，而算子 T 在 X 上的数值半径定义为

$$\omega(T)=\sup\{|\lambda|:\lambda\in\Omega(T)\}=\sup\{|(Tx,x)|:\|x\|=1\}.$$

$T\in B(X)$ 表示 T 是 X 上有界线性算子. 则对于 $T\in B(X)$，下式成立

(1)　$\omega(T)\leqslant\|T\|\leqslant 2\omega(T)$.

(2)　若 λ 是非零复数，$r>0$，且 $\|T-\lambda I\|\leqslant r$，则

$$0\leqslant\|T\|-\omega(T)\leqslant\frac{r^2}{2|\lambda|}.$$

(3)　若 $|\lambda|>r$，$\|T-\lambda I\|\leqslant r$，则 $\left[1-\left(\frac{r}{|\lambda|}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{\omega(T)}{\|T\|}\leqslant 1$，

$$0\leqslant\|T\|^2-\omega^2(T)\leqslant\frac{2r^2}{|\lambda|+\sqrt{|\lambda|^2-r^2}}\omega(T).$$

(4)　$\omega(T)\leqslant\left\{\frac{1}{2}[\omega(T^2)+\|T\|^2]\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant\|T\|$.

(5)　$\|T\|\leqslant\omega(T)+\frac{1}{2}\|T\|^{-1}(\|T-\|T\|\cdot I\|^2)$.　$(T\neq 0)$

(6)　$\|T\|^2\leqslant[(1-\alpha)^2+\alpha^2]\omega^2(T)+\alpha\|T-tI\|^2+(1-\alpha)\|T-itI\|^2$，式中 $t\in R^1$，$\alpha\in[0,1]$.

(7)　$0\leqslant\|T\|^2-\omega^2(T)\leqslant\inf\{\|T-tI\|^2:t\in R\}$.

(8)　$\|T\|^2\leqslant\frac{1}{2}\omega^2(T)+\frac{1}{2}\inf\{\|T-tI\|^2+\|T-itI\|^2:t\in R\}$.

(9)　$\|T\|^p\leqslant\frac{1}{4}\{\|T+\|T\|\cdot I\|^p+\|T-\|T\|\cdot I\|^p\}$，　$p\geqslant 2$.

(S. S. Dragomir，[330]39(2008)，1 ～ 7)

第十五章　概率统计不等式

本章用 $P(A)$ 表示事件的概率，ω 为基本事件，$\Omega=\{\omega\}$ 是一切基本事件的集合，称为基本事件空间. 事件构成 σ 域 $\mathscr{F}$，于是，$(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间. 设 $\xi=\xi(\omega)$ 是定义在 Ω 上的实值函数，若 $\forall x\in R^1$，$\{\xi(\omega)<x\}\in\mathscr{F}$，则称 $\xi=\xi(\omega)$ 为随机变量，$F(x)=P(\xi<x)$ 称为 ξ 的分布函数.

若存在可数集合 E，使得 $P(\xi\in E)=1$，则称 ξ 为离散型随机变量. 若对于所有 k，$P(\xi=x_k)=p_k\geqslant 0$，且 $\sum_{k=1}^{\infty}p_k=1$，则称 $\{p_k\}$ 是 ξ 的概率质量函数. 若分布函数 F 绝对连续，即若存在非负函数 $f(x)$，使得对每个实数 x，有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t,$$

则称 ξ 是连续型随机变量，f 称为 ξ 的概率密度函数，记为 $p.d.f.$，F 称为累积分布函数，记为 $c.d.f.$，因为

$$\lim_{x\to\infty}F(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)dt=1,\text{所以}\quad P(a<\xi\leqslant b)=F(b)-F(a)=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

设 $F(x)$ 是随机变量 $\xi=\xi(\omega)$ 的分布函数，$g(x)$ 为一元 Borel 可测函数. 若 L-S 积分 $\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|dF(x)<\infty$，则

$$Eg(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)dF(x) \tag{①}$$

称为 $g(\xi)$ 的数学期望(亦称概率平均值).

对于连续型分布函数 $F(x)$，若 $F'(x)=f(x)$，则 ① 式变成

$$Eg(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)f(x)\mathrm{d}x. \tag{②}$$

对于密度矩阵为

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \end{pmatrix}$$

的离散型分布 $F(x)$，① 式化为

$$Eg(\xi)=\sum_{j=1}^{\infty}g(x_j)p_j. \tag{③}$$

特别地，(1) 若取 $g(x)=x^k(k\geqslant 0)$，则称 $E\xi^k$ 为 ξ 的 k 阶矩，或 k 阶原点矩，记为 m_k. $\mu_k=E[(\xi-E\xi)^k]$ 称为 ξ 的 k 阶中心矩.

(2)　若取 $g(x)=|x|^k(k\geqslant 0)$，则称 $E|\xi|^k$ 为 ξ 的 k 阶绝对矩，$v_k=E(|\xi-E\xi|^k)$ 称为 ξ 的 k 阶中心绝对矩.

(3) 若取 $g(x)=(x-E\xi)^2$,则称 $E(\xi-E\xi)^2$ 为 ξ 的方差,记为 $D\xi$,即

$$D\xi=\int_{-\infty}^{\infty}(x-E\xi)^2\mathrm{d}F(x). \quad ④$$

通常记 $\sigma=\sqrt{D\xi}$. 当 $F(x)$ 为连续型或离散型时,④ 式分别化为

$$D\xi=\int_{-\infty}^{\infty}(x-E\xi)^2 f(x)\mathrm{d}x, \quad ⑤$$

$$D\xi=\sum_{j=1}^{\infty}(a_j-E\xi)^2 p_j. \quad ⑥$$

设(ξ,η) 是二维随机变量,ξ,η 的数学期望、方差都存在,则 ξ 与 η 的协方差定义为

$$\mathrm{cov}(\xi,\eta)=E(\xi-E\xi)(\eta-E\eta).$$

若 $D\xi,D\eta$ 都不为零,则称

$$\gamma=\frac{\mathrm{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi D\eta}}$$

为 ξ 与 η 的相关系数.

概率论的基本概念与实分析(测度与积分)相应概念的对比见[118]278 ~ 279,例如,$A\subset B$ 表示事件 A 发生引起事件 B 发生,A^c 表示事件 A 不发生,$A\cup B$ 表示事件 A,B 至少有一个发生,$A\cap B$ 表示事件 A,B 同时发生,等等.

在本章中,若无特别声明,还统一使用以下固定的记号,$\xi_1,\cdots,\xi_n$ 为随机变量,$S_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k$,$\sigma_k^2=D(\xi_k)$,$\sigma^2=\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2$, $\bar{\xi}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$,$E(\bar{\xi})=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(\xi_k)$,$\bar{\sigma}=\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2\right)^{1/2}$.

§1 事件概率与数字特征不等式

一、 事件概率不等式:

下面设 A,B,A_k 为任意事件, $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$.

1. 若 $A\subset B$,则 $P(A)\leqslant P(B)$.

2. $P(A\cap B)\leqslant\min\{P(A),P(B)\}\leqslant P(A\cup B)$; $|P(A)-P(B)|\leqslant P(A\Delta B)$.

3. $\max\{P(A),P(B)\}\leqslant P(A\cup B)\leqslant 2\max\{P(A),P(B)\}$.

4. $|P(A\cap B)-P(A)P(B)|\leqslant 1/4$.

5. $P(\liminf\limits_{k\to\infty}A_k)\leqslant\liminf\limits_{k\to\infty}P(A_k)\leqslant\limsup\limits_{k\to\infty}P(A_k)\leqslant P(\limsup\limits_{k\to\infty}A_k)\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty}P(A_k)$.

   (注意:$\liminf\limits_{k\to\infty}A_k=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}A_n$;$\limsup\limits_{k\to\infty}A_k=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n$)

6. [MCU] $P(A\cup B)P(A\cap B)\leqslant P(A)P(B)$.

7. $P(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k)$;

   $P\{(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k)\Delta(\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k)\}\leqslant P(\bigcup_{k=1}^{\infty}(A_k\Delta B_k))\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k\Delta B_k)$.

8. $P(\bigcap_{k=1}^{n} A_k) \geqslant 1 - \sum_{k=1}^{n}[1 - P(A_k)]$.

9. **Boole 不等式**:$P(A \cap B) \geqslant 1 - P(A^c) - P(B^c)$.

推论 1 $P(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k) \geqslant 1 - \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k^c)$.

推论 2 设 $P(A) = p, P(B) = 1 - \sqrt{p}, 0 < p < 1$,则 $P(A^c \cap B^c) > 0$.

10. **蕴涵法则**:若 $A_1 \cap A_2 \subset B$,则

$$P(B^c) \leqslant P(A_1^c \cup A_2^c) \leqslant P(A_1^c) + P(A_2^c).$$

11. **Bonferroni 不等式**:

$$\sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{j<k} P(A_j \cap A_k) \leqslant P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

1998 年,石焕南推广为:设 $m \leqslant n$,若 m 为偶数,则

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \geqslant \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} P(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j});$$

若 m 为奇数,则不等号反向,证明用数学归纳法.([351]1998,2:17)

12. **Chung-Erdös 不等式**:若 $P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) > 0$,则

$$\left[\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\right]^2 - \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \leqslant 2P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \sum_{1 \leqslant j < k < n} P(A_j \cap A_k). \text{([143]202)}$$

13. 若 $P(B) > 0, P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ 称为事件 A 关于事件 B 的条件概率,则

(1) $P(A \mid B) \geqslant 1 - \dfrac{P(A^c)}{P(B)}$.

(2) $\dfrac{P(A) + P(B) - 1}{P(B)} \leqslant P(A \mid B) \leqslant \dfrac{P(A) + P(B)}{P(B)}$.

二、 随机变量的数字特征不等式

1. **Hölder 不等式**:设 $E(|\eta|^q) < \infty, E(|\xi|^p) < \infty, 1 < p < \infty, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$,则

$$E(|\xi\eta|) \leqslant [E(|\xi|^p)]^{1/p}[E(|\eta|^q)]^{1/q}.$$

仅当存在两个不全为零的常数 α, β,使得 $P(\alpha|\xi|^p + \beta|\eta|^q = 0) = 1$ 时等号成立.

特别地,$p = q = 2$ 时,得到 **Cauchy-Schwarz 不等式**:

$$|E(\xi\eta)| \leqslant E(|\xi\eta|) \leqslant [E(|\xi|^2)]^{1/2}[E(|\eta|^2)]^{1/2}.$$

仅当存在实数 α,使得 $P\{\alpha\xi + \eta = 0\} = 1$ 时等号成立.

证 利用第 3 章 No. 27. Young 不等式:

$$|ab| \leqslant \frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{q}|b|^q.$$

令 $a = \xi[E(|\xi|^p)]^{-1/p}, b = \eta[E(|\eta|^q)]^{-1/q}$,

并在不等式两边同时求数学期望,得到 $E(|ab|) \leqslant \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

注 Cauchy 不等式还具有以下形式：

(1) $E(\xi\eta) \leqslant [E(\xi^2)]^{1/2}[E(\eta^2)]^{1/2}$.

(2) $\mathrm{cov}(\xi\eta) \leqslant [D(\xi)]^{1/2}[D(\eta)]^{1/2}$.

在实际应用中，Hölder 不等式还可写成以下形式：

设$(\Omega,\mathscr{F},P)$为概率空间，$(X,\sum,\mu)$为σ有限测度空间，f为$X\times\Omega$上非负乘积可测函数，则

$$\int_X \exp\left[\int_\Omega \log f(x,\omega)P(\mathrm{d}\omega)\right]\mu(\mathrm{d}x) \leqslant \exp\left\{\int_\Omega \log\left[\int_X f(x,\omega)\mu(dx)\right]P(d\omega)\right\}.$$

1987 年，Duoandikoetxea，J. 证明了**反向 Hölder 不等式**：

设$\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n,\cdots)$是随机变量，其中$\xi_j$是独立的，并且有分布函数$\exp(-\pi\mid x\mid^2)$，若$P(\xi)$是变量$\xi_1,\cdots,\xi_n,\cdots$的$k$阶多项式，则

$$E(\mid P\mid^q)^{1/q} \leqslant q^{k/2}E(\mid P\mid^2)^{1/2}, 2<q<\infty,$$

$$E(\mid P\mid^2)^{1/2} \leqslant 4^\alpha E(\mid P\mid^q)^{1/q}, 0<q<2, \alpha=k((2/q)-1).$$

([308]1987,101(3):487 ~ 491)

2. **Minkowski 不等式**：设$p\geqslant 1, E\mid\xi\mid^p<\infty, E\mid\eta\mid^p<\infty$，则

$$(E\mid\xi+\eta\mid^p)^{1/p} \leqslant (E\mid\xi\mid^p)^{1/p}+(E\mid\eta\mid^p)^{1/p}. \tag{1.1}$$

若$0<p<1$，则

$$E\mid\xi+\eta\mid^p \leqslant E\mid\xi\mid^p+E\mid\eta\mid^p. \tag{1.2}$$

证 若$p=1$，则从$\mid\xi+\eta\mid\leqslant\mid\xi\mid+\mid\eta\mid$可立即推得(1.1)式；若$p>1$且$E\mid\xi+\eta\mid^p=0$，则(1.1)式显然成立；若$p>1, E\mid\xi+\eta\mid^p\neq 0$，则从

$$\mid\xi+\eta\mid^p \leqslant \mid\xi\mid\cdot\mid\xi+\eta\mid^{p-1}+\mid\eta\mid\cdot\mid\xi+\eta\mid^{p-1}.$$

有

$$E\mid\xi+\eta\mid^p \leqslant E(\mid\xi\mid\cdot\mid\xi+\eta\mid^{p-1})+E(\mid\eta\mid\cdot\mid\xi+\eta\mid^{p-1}).$$

右边利用 Hölder 不等式即可推得(1.1)式.

当$0<p<1$时，从$\mid\xi+\eta\mid^p\leqslant\mid\xi\mid^p+\mid\eta\mid^p$即可推得(1.2)式.

3. **C_p 不等式**：$E(\mid\xi+\eta\mid^p)\leqslant C_p(E\mid\xi\mid^p+E\mid\eta\mid^p)$，式中

$$C_p=\begin{cases}2^{p-1}, p\geqslant 1,\\ 1, \quad 0<p\leqslant 1.\end{cases}$$

推广 $E\left(\left|\sum_{k=1}^n \xi_k\right|^p\right)\leqslant C_p\sum_{k=1}^n E(\mid\xi_k\mid^p)$，式中

$$C_p=\begin{cases}n^{p-1}, p\geqslant 1,\\ 1, \quad 0<p\leqslant 1.\end{cases}$$

4. **Jensen 不等式**：设随机变量ξ取值于区间(a,b)，$-\infty\leqslant a<b\leqslant\infty$，$g$是区间$(a,b)$上连续的凸函数. 则当$E\xi, Eg(\xi)$存在时，有

$$g(E\xi)\leqslant Eg(\xi).$$

证 任取$x_0\in(a,b)$，设曲线$y=g(x)$在点x_0的切线斜率为$k(x_0)$，由曲线的凸性，有$g(x)\geqslant g(x_0)+k(x_0)(x-x_0)$. 取$x_0=E\xi, x=\xi$，得

$$g(\xi) \geqslant g(E\xi) + k(E\xi)(\xi - E\xi).$$

再由数学期望的单调性及非负性即可得证.

注： 所证不等式可加细为：$0 \leqslant Eg(\xi) - g(E\xi) \leqslant E(\xi g'(\xi)) - E(g'(\xi))E(\xi)$.

([330]34(2003),175 ~ 187)

5. **Lyapunov 不等式：** 设 $0 < p \leqslant q$，则

$$[E(|\xi|^p)]^{1/p} \leqslant [E(|\xi|^q)]^{1/q},$$

仅当 ξ 为退化的或 $p \geqslant 0$ 且 $E(\xi^p) = \infty$ 或 $q \leqslant 0$ 且 $E(\xi^q) = \infty$ 时等号成立.

证 令 $t = q/p, g(x) = |x|^t$，利用上述 Jensen 不等式即可得证，另见[6]455.

推论 1 设 $p_1 \geqslant p_2 \geqslant p_3 \geqslant 0$，则

$$[E(|\xi|^{p_1})]^{p_2-p_3}[E(|\xi|^{p_2})]^{p_3-p_1}[E(|\xi|^{p_3})]^{p_1-p_2} \geqslant 1.$$

推论 2 设 $p \geqslant 1$，则成立 **Rao 不等式：**

$$[E(|\xi|^p)]^{2p} \leqslant [E(|\xi|^{p-1})]^p[E(|\xi|^{p+1})]^p.$$

(Linear statistical inferences. Wiley. 1973, P149)

6. **AG 平均不等式：** 设 ξ 为非负的随机变量，则

$$E\xi \geqslant \exp E(\ln\xi).$$

仅当 ξ 为退化的，或 $E(\ln\xi) = \infty$ 时等号成立.([6]454 ~ 455)

7. 设 ξ 为非负随机变量，则当 $r > 0$ 时，$(E\xi^r)^{1/r} \geqslant \exp E(\ln\xi)$，而当 $r < 0$ 时，不等号反向. 仅当 ξ 为退化的或 $r \geqslant 0$ 且 $E\xi^r = \infty$ 时等号成立.([6]455)

8. 设 ξ 是具有有限一阶矩的正的随机变量，则

(1) $p \geqslant 1$ 时，$[E(\xi)]^p \leqslant E(\xi^p)$，$0 < p \leqslant 1$ 时不等号反向.

(2) $E(1/\xi) \leqslant 1/E\xi$.

9. **Kruskal 不等式：** 设 ξ 是具有有限期望并且满足 $\xi \geqslant a > 0$ 的非退化随机变量，则

$$E(\sqrt{\xi^2 - a^2}) \leqslant \sqrt{(E\xi)^2 - a^2}.\ ([143]201)$$

10. **优化向量不等式：** 设 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 为随机变量，且联合分布关于它的分量的排列是不变的. 若向量 $b = (b_1, \cdots, b_n)$ 被向量 $a = (a_1, \cdots, a_n)$ 所优化，即 a, b 的各个分量可重新排列，使其 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n, b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n$，

$$\sum_{j=1}^{k} a_j \geqslant \sum_{j=1}^{k} b_j, k = 1, \cdots, n-1,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{j=1}^{n} b_j.\text{(见第七章 §1 定义 6)}$$

又若 f 是凸的对称函数，则

$$Ef(a_1\xi_1, \cdots, a_n\xi_n) \geqslant Ef(b_1\xi_1, \cdots, b_n\xi_n).$$

(Marshall; A. W. 等, [301]1965, 12:87 ~ 90)

11. [MCU]. 设 ξ, η 为随机变量，$E(\xi) = E(\eta) = 0, D(\xi) = D(\eta) = 1, \mathrm{cov}(\xi, \eta) = r$，则 $E(\max\{\xi^2, \eta^2\}) \leqslant 1 + \sqrt{1 - r^2}$.

12. **Gurland 不等式：**

(1) 设 f, g 是两个同向单调函数(即同时递增或同时递减)，且至少有一个连续，则

$$E(f(\xi)g(\xi)) \geqslant E(f(\xi))E(g(\xi)),$$

若 f,g 异向单调(即其一递增,另一递减),则不等号反向. 特别当 ξ 为非负随机变量时,下式成立

$$E(\xi^{p-1}) \leqslant E(\xi^p)E(\xi^{-1}),(p>0).$$ (Amer. Statist. 1967,21(2):24 ~ 25)

(2)　设 $f_1,\cdots,f_n$ 为非负单调连续函数,且都递增或都递减,则

$$E\left(\prod_{k=1}^{n} f_k(x)\right) \geqslant \prod_{k=1}^{n} E(f_k(x)).$$

特别,当 ξ 为非负随机变量,$p \geqslant 1$ 或 $p \leqslant 0$ 时,下式成立

$$E(\xi^p) \geqslant [E(\xi)]^p \geqslant [E(\xi^{-1})]^{-p} \geqslant [E(\xi^{-p})]^{-1}.$$

(Amer. Statist. 1968,22(2):26 ~ 27)

13.　设 ξ 为正的随机变量,则

(1)　若 $p>0,q\geqslant 0$,则　$E(\xi^{p+q-1})E(\xi^p) \leqslant E(\xi^{p+q})E(\xi^{p-1})$;

(2)　若 $p \geqslant 0$,则

$$\frac{1}{[E(\xi)]^p} \leqslant \frac{E(\xi^{-1})}{[E(\xi)]^{p-1}} \leqslant \cdots \leqslant \frac{E(\xi^{-(p-1)})}{E(\xi)} \leqslant E(\xi^{-p}).$$

(Sclove 等. 1967)

14.　设 ξ 为非负随机变量,则

(1)　$p \geqslant q \geqslant 1$ 时,$E(\xi^p) \geqslant [E(\xi^{p/q})]^q \geqslant [E(\xi)]^p + [E(\xi^{p/q}) - (E\xi)^{p/q}]^q$;

(2)　$p \geqslant 2$ 时,$E(\xi^p) \geqslant [E(\xi)]^p + [D(\xi)]^{p/2}$.

(Tong, Y. L., J. Amer. Statist, Asso. 1970,65:1243 ~ 1247)

15.　对任意实数 a,$D(\xi) \leqslant E[(\xi-a)^2]$,仅当 $a=E(\xi)$ 时等号成立.

16.　设 ξ 是离散型随机变量,$P(\xi=x_k)=p_k,1\leqslant k\leqslant n$. 令 $a=\sum_{k=1}^{n} p_k x_k$,
$M=\max_k\{x_k\},m=\min_k\{x_k\}$,则

(1)　$D(\xi) \leqslant (M-a)(a-m) \leqslant \frac{1}{4}(M-m)^2$.

(Moors 等. Sankhya B, 1971,33:385 ~ 388)

(2)　设 g 是 C^* 代数 A 到 C^* 代数 B 的正单位线性映射,a 为 A 中自伴元,$m\leqslant a\leqslant M$,则

$$g(a^2)-[g(a)]^2 \leqslant [M-g(a)][g(a)-m] \leqslant \frac{1}{4}(M-m)^2;$$

$$g(a^{-1}) \leqslant \frac{(M+m)^2[g(a)]^{-1}}{4Mm}, a>0.$$

([305]2000,107(4):353 ~ 357)

17.　[MCU]. 对于取值[a,b] 的二阶矩存在的随机变量 ξ,恒有

(1)　$a \leqslant E(\xi) \leqslant b$;

(2)　$E(\xi) \leqslant (b-a)^2/4$.

18.　设 ξ 是存在有限二阶矩的随机变量,α 是有限实数,$\eta=\min\{\xi,\alpha\}$,则

$$E(\eta-E\eta)^2\leqslant E(\xi-E\xi)^2.$$

19. 设ξ是有二项分布的随机变量，它的参数为(n,p)，则$\forall k:1\leqslant k\leqslant n$，下式成立

$$E(\min\{\xi,k\})\geqslant k\{1-[1-(p/k)]^n\}.$$

问题：对于$E(\min\{\xi,k\})$，有比$\min\{np,k\}$更好的上界吗？([305]1991,98E3332)

20. **钟开莱不等式**：设ξ_k为非负随机变量，则

(1) $p>1$时，

$$E\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right|^p\right)\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^p;\quad\left\{E\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right|^p\right)\right\}^{1/p}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[E(|\xi_k|^p)]^{1/p}.$$

(2) 若$p\geqslant 1$，则$E[(\sum_{k=1}^{n}\xi_k)^p]\geqslant\sum_{k=1}^{n}E(\xi^p)$. 当$p\leqslant 1$时，不等号反向.([30]314)

21. 设$\xi_1\cdots,\xi_n$为独立随机变量，且中位数皆为零，则

$$E\left(\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right|\right)\geqslant\frac{1}{2^{n-1}}\binom{n-1}{[\frac{n}{2}]}E\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|\right).$$

(Tukey, J. W., Ann. Math. Statist. 1946, 17: 75 ~ 78)

22. 设$\xi_1\cdots,\xi_n$为独立同分布随机变量，$E(\xi)=0$. 若$\exists m\in N$，$E(\xi^{2m})<\infty$，实数$\{a_k\}$满足$\sum_{k=1}^{n}a_k^2=1$，则

(1) $E\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\xi_k\right)^2\leqslant E(\xi^2)$.

(2) $m\geqslant 2$时，$E\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\xi_k\right)^{2m}<\left(\frac{3}{2}\right)^{m-2}(2m-1)!!E(\xi^{2m})$.

([336]1981, 2(4): 451 ~ 461)

23. [MCU]. 设$\xi_1,\cdots,\xi_n$是二阶矩有限的随机变量，令$S_k=\sum_{j=1}^{k}\xi_j$，$1\leqslant k\leqslant n$，则

(1) $S_k^2\leqslant k\sum_{j=1}^{k}\xi_j^2$； (2) $E(\max_{1\leqslant k\leqslant n}S_k^2)\leqslant n\sum_{k=1}^{n}E(\xi_k^2)$.

24. **Whittle 不等式**：设$\xi_1,\cdots,\xi_n$是独立同分布的随机变量，且$P(\xi_k=\pm 1)=1/2$，$1\leqslant k\leqslant n$，则对于任意实数b_k，$1\leqslant k\leqslant n$，$p\geqslant 2$，有

$$E\left(\left|\sum_{k=1}^{n}b_k\xi_k\right|^p\right)\leqslant K(p,n)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)^{p/2}. \tag{1.3}$$

式中$K(p,n)=2^{-n}n^{-p/2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|n-2k|^p$，仅当$p=2$或所有$b_k$的绝对值相等时等号成立.([352]1989, 16(3): 350 ~ 351)

25. **Moran 不等式**：在 No. 24 的条件下，Moran猜测，对任何实数$a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant 0$，$n\geqslant 1$，有

$$E\left(\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\xi_k\right|\right)\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{1/2}, \tag{1.4}$$

仅当$a_1=a_2$，$a_3=\cdots=a_n=0$时(1.4)式中等号成立. 1984年刘坤会证明了上述猜

测.([364]1984,3:193 ~ 209)

问题:(1.3) 式左边的下界是什么?

26. 1987 年邵启满证明了取值于 Banach 空间的 φ — 混合序列的矩不等式. 作为推论,对独立情形得到了比 Marcinkeiwicz-Zygmund 不等式更为实用的矩不等式,即

(1) 设 $\{\xi_n\}$ 是实值随机变量的 φ — 混合序列,令 $S_k(n)=\sum_{j=k+1}^{k+n}\xi_j$. 若存在正的数列 $\{C_{k,n}\}$,使得对于每个 $k\geqslant 0,n\geqslant 1,m\leqslant n$,都有 $ES_k^2(m)\leqslant C_{k,n}$,则对每个 $q\geqslant 2$,存在仅依赖于 $\varphi(\cdot)$ 和 q 的常数 K,使得

$$E(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|S_k(j)|^q)\leqslant K(C_{k,n}^{q/2}+E(\max_{k\leqslant j\leqslant k+n}|\xi_j|^q)).$$

(2) 设 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 为独立随机变量序列,若 $E\xi_k^2<\infty,E\xi_k=0,1\leqslant k\leqslant n$,则对每个 $q\geqslant 2$,有

$$E(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|^q)\leqslant(96q)^q\Big[\Big(\sum_{k=1}^{n}E\xi_k^2\Big)^{q/2}+E(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k|^q)\Big],$$

式中 $S_k=\sum_{j=1}^{k}\xi_j$,式中的阶不能再改进. 作者还进一步猜测,这个不等式对于鞅差序列也同样成立,但未能证明.

(3) 设 ξ,η 为任意两个实值随机变量,若存在正数 A,a,c_1,c_2 及 $0<b<1$,使得对于所有 $x\geqslant A$,都有 $P(|\eta|\geqslant x)\leqslant c_1P(|\xi|\geqslant ax)+c_2P(|\eta|\geqslant bx)$,则对每个 $q>0$,当 $0<c_2<b^q$ 时,有

$$E|\eta|^q\leqslant\frac{A^q+c_1a^{-q}E|\xi|^q}{(1-c_2b^{-q})}.$$

([334]1988,31(6):736 ~ 747;[339]1989,9(1):24)

27. **Prophet 不等式**:设 $\{\xi_k\}$ 是定义在概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$,并在区间 $[0,1]$ 中取值的独立随机变量列,T 是所有有限的几乎必然的停止时间的集. 1987 年 Hill,T. 等证明

$$E(\sup_{n\geqslant 1}\xi_n)-\sup_{t\in T}E\xi_t\leqslant 1/4.$$

当 $n\geqslant 2$ 时,上界是最好的.([308]1987,83:582 ~ 585)

1990 年,Jones,M. 证明

$$E(\max_{1\leqslant j\leqslant n}(\xi_j-jc))-\sup_{t\in T_n}E(\xi_t-tc)\leqslant[1/c]c(1-c)^{[1/c]},c>0;$$

$$E(\max_{1\leqslant j\leqslant n}(\xi_j-jc))-\sup_{t\in T_n}E(\xi_t-tc)\leqslant\Big(\frac{n-1}{n}\Big)^n\quad(c\geqslant 0);$$

$$E(\max_{1\leqslant j\leqslant n}(\xi_j-jc))-\sup_{t\in T_n}E(\xi_t-tc)\leqslant 1/e\quad(c\geqslant 0).$$

上述三个上界都是最好的.(J. Mult. Anal. 1990,34(2):238 ~ 253)

28. 设 ξ,η 是相互独立的随机变量,则

(1) $D(\xi\eta)\geqslant D(\xi)D(\eta)$.

(2) $E\Big[\Big(\frac{\xi}{\eta}\Big)^k\Big]\geqslant\frac{E(\xi^k)}{E(\eta^k)},k\in N$.

(3) 若 $E(\xi)=E(\eta)=0,E(\eta^{-1})$ 存在,则

$$D\left(\frac{\xi}{\eta}\right) \geqslant \frac{D(\xi)}{D(\eta)}.$$

(2)(3)(Mullen, K., Amer. Statist. 1967, 2(3): 30 ~ 31)

29. [MCU]. 设ξ, η是正的随机变量，其联合密度函数$f(x,y)$关于每个变量x, y递减，$E(\xi), E(\eta) < \infty$，则

(1) $E(\xi) + E(\eta) \leqslant 3E(|\xi - \eta|)$；

(2) 若$0 < \xi, \eta < 1$，则$4E(\xi\eta) \leqslant 3E(|\xi - \eta|)$.

提示：设 $\varphi_{\{\xi \geqslant \eta\}} = \begin{cases} 1, (\xi \geqslant \eta) \\ 0, (\xi < \eta) \end{cases}$ 是$\{\xi \geqslant \eta\}$的特征函数，则

$$3E(|\xi - \eta|) - E(\xi) - E(\eta) = 2E\{[(\xi - 2\eta)\varphi_{\{\xi \geqslant \eta\}}] + [\eta - 2\xi\varphi_{\{\eta > \xi\}}]\}.$$

$$E[(\xi - 2\eta)\varphi_{\{\xi \geqslant \eta\}}] = \int_0^{\infty}\int_0^x (x - 2y) f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^{\infty}\int_0^{\frac{x}{2}} (x - 2y) f\left(x, \frac{x}{2}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_0^{\infty}\int_{x/2}^{x} (x - 2y) f\left(x, \frac{x}{2}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = 0.$$

同理，$E[(\eta - 2\xi)\varphi_{\{\eta > \xi\}}] \geqslant 0$. 从而(1)得证.(2)的证明类似.

30. 若ξ, η是独立同分布的随机变量，$E(\xi) = 0$，则当$1 \leqslant p \leqslant 2$时，下式成立

$$(1/2)E(|\xi - \eta|^p) \leqslant E(|\xi|^p) \leqslant E(|\xi - \eta|^p);$$

31. Bennet 不等式：设$E(\xi) = 0$，$|\xi| \leqslant M$，$p \geqslant 2$，则

$$E(\xi^p) \leqslant E(|\xi|^p) \leqslant M^{p-2}D\xi.$$

当$k = 3, 5, 7, \cdots$(奇数)时，

$$E|\xi^k| \leqslant M^{k-2}D\xi\left[\frac{1 - \left(\frac{\sqrt{D\xi}}{M}\right)^{2(k-1)}}{1 + \left(\frac{\sqrt{D\xi}}{M}\right)^2}\right] \leqslant M^{k-2}D\xi.$$

(Biometrka, 1965, 52: 559 ~ 569)

32. 设ξ是随机变量，其密度函数$f \in AC[a,b]$，$f' \in L^{\infty}[a,b]$，$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，则

(1) $$\left|E(\xi) + \left(\frac{b-a}{2}\right)F(x) - \frac{x+b}{2}\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{4}(b-a)\|f'\|_{\infty}\left[\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}(b-a)^2\right]$$

$$\leqslant \frac{1}{12}(b-a)^3\|f'\|_{\infty}, \forall x \in [a,b].$$

(Barnett, N. S. 等, [330]2001, 32(1): 55 ~ 60)

(2) $$\left|E(\xi) - \frac{a+b}{2} - \frac{(b-a)^2}{12}[f(b) - f(a)]\right|$$

$$\leqslant \frac{(b-a)^3}{24}\left\|f' - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}\right\|_{\infty}; \tag{1.5}$$

若$f' \in L^p[a,b]$，$p > 1$，$(1/p) + (1/q) = 1$，则(1.5)式右端改为

$$\frac{(b-a)^{2+1/q}}{8(2q+1)^{1/q}}\left\| f'-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right\|_p;$$

若 $f'\in L[a,b]$，则(1.5)式右端改为

$$\frac{(b-a)^2}{8}\left\| f'-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right\|_1.$$

(Barnett 等，[330]2002，33(2)：127 ~ 128)

33.　**Keilson 不等式：**

(1)　设 $f(x)$ 为对数凹函数，则

$$\left(\frac{E(\xi^{k+1})}{(k+1)!}\right)^{\frac{1}{k+1}}\leqslant\left(\frac{E(\xi^k)}{k!}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

(2)　离散分布情形，即 f 是定义在非负整数集上的对数凹函数，即满足 $f^2(k)\geqslant f(k-1)f(k+1)$，则

$$\left(\frac{E(\xi(\xi-1)\cdots(\xi-k))}{(k+1)!}\right)^{\frac{1}{k+1}}\leqslant\left(\frac{E(\xi(\xi-1)\cdots(\xi-k+1))}{k!}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

(Ann. Math. Statist. 1972，43：1702 ~ 1708)

34.　设 $(B,\|\cdot\|)$ 是实可分的 Banach 空间，$\xi_1,\cdots\xi_n$ 是独立的 B 值随机元，$E(\|\xi_k\|^p)<\infty$，$1\leqslant k\leqslant n$.

(1)　若 $1<p\leqslant 2$，则

$$E\left(\left|\left\|\sum_{k=1}^n\xi_k\right\|-E\left(\left\|\sum_{k=1}^n\xi_k\right\|\right)\right|\right)^p\leqslant c(p)\sum_{k=1}^n E(\|\xi_k\|^p);$$

(2)　若 $p>2$，则

$$E\left(\left|\left\|\sum_{k=1}^n\xi_k\right\|-E\left(\left\|\sum_{k=1}^n\xi_k\right\|\right)\right|\right)^p\leqslant c_p\left[\sum_{k=1}^n E(\|\xi_k\|^p)+\left(\sum_{k=1}^n E(\|\xi_k\|^2)\right)^{p/2}\right].$$

设 $x_k,y_k\in B$，$p\geqslant 2$，则(2)可改进为

$$E\left(\left|\left\|\sum_{k=1}^n\xi_k\right\|-E\left(\left\|\sum_{k=1}^n\xi_k\right\|\right)\right|\right)^p$$
$$\leqslant c_p\left[\sum_{k=1}^n E(\|\xi_k-x_k\|^p)+\left(\sum_{k=1}^n E(\|\xi_k-y_k\|^2)\right)^{p/2}\right].$$

1992年，刘立新利用优化方法作了进一步推广：设 $(X,\sum,\|\cdot\|)$ 是半范可测向量空间，ξ_k 为 X 值独立随机元列，$S_n=\sum_{k=1}^n\xi_k$，$\forall x_k\in X$，记 $A_n=\sum_{k=1}^n E(\|\xi_k-x_k\|)$，$B_n=\sum_{k=1}^n E(\|\xi_k-x_k\|^2)$. g 是 R^1 上非负凸的偶函数，$g(0)=0$，$Eg(\|\xi_k\|)<\infty$，$1\leqslant k\leqslant n$，$0<A_n,B_n<\infty$，则 $\forall r>0$，下式成立

$$Eg(\|S_n\|-E(\|S_n\|))\leqslant\sum_{k=1}^n Eg(4r\|\xi_k-x_k\|)+2e^r\int_0^\infty\left(1+\frac{x}{4A_n}\right)^{-r}\mathrm{d}g(x);$$

$$Eg(\|S_n\|-E(\|S_n\|))\leqslant\sum_{k=1}^n Eg(4r\|\xi_k-x_k\|)+2e^r\int_0^\infty\left(1+\frac{x^2}{16rB_n}\right)^{-r}\mathrm{d}g(x).$$

(吉林大学学报，1993，1：1 ~ 6)

35.　$\operatorname{cov}(\xi,\eta)\leqslant D(\frac{\xi+\eta}{2})$.

特别，当 ξ,η 为正的随机变量时，若 $0\leqslant p\leqslant 1$，则

$\operatorname{cov}(\xi,\eta)\leqslant D[\frac{1}{2}(\xi^p+\eta^p)]^{1/p}$；　$\operatorname{cov}(\xi,\frac{\eta}{\xi})\leqslant D(\xi^{1/2})$.

(Kimeldorf, G. 等, J. Amer. statist. Asso. 1973, 68: 228 ~ 230)

36.　**方差平均不等式**：2003年文家金等引入方差平均 $D_r(x,p)$. 设 $P\{\xi=x_k\}=p_k$，$1\leqslant k\leqslant n$.

$$E(\xi)=A(x,p)=\frac{1}{\sum_k p_k}\sum_k p_k x_k,$$

$$E(\xi^r)=A(x^r,p),\quad D_r(\xi)=A(x^r,p)-[A(x,p)]^r,$$

$$D_r(x,p)=\left[\frac{2}{r(r-1)}\frac{D_r(\xi)}{D(\xi)}\right]^{1/(r-2)},\quad r\geqslant 2.$$

(1)　若 $r\in N, r>3$，则 $D_r(x,p)\geqslant D_3(x,p)$；且

$$D_r(x,p)\geqslant\left(\frac{2}{r}\right)^{1/(r-2)}A(x,p),$$

式中　$(2/r)^{1/(r-2)}$ 是最佳常数.

(2)　猜想实数 $r\geqslant 2$ 时，$D_r(x,p)$ 关于 r 递增. ([351]2003, 2: 19 ~ 32)

37.　设 $0\leqslant m\leqslant f(x)\leqslant M$，$x\in[a,b]$，记 $\Delta=\left|E(\xi)-\frac{1}{2}(a+b)\right|$，则

(1)　$\Delta\leqslant\frac{1}{8}(b-a)^2(M-m)$.

(2)　$\Delta\leqslant\frac{1}{2}(b-a)^2\left(\frac{1}{b-a}-m\right)$.

(3)　$\Delta\leqslant\frac{1}{2}(b-a)^2\left(M-\frac{1}{b-a}\right)$.

(刘证, Appl. Math. E-Notes7(2007), 93 ~ 101)

38.　设 ξ,η 是正的独立的随机变量，则

(1)　$\frac{E((\xi+\eta)^{-1})}{E((\xi+\eta)^{-2})}\geqslant\frac{E(\xi^{-1})}{E(\xi^{-2})}+\frac{E(\eta^{-1})}{E(\eta^{-2})}$.

(2)　$\frac{1}{E((\xi+\eta)^{-1})}\geqslant\frac{1}{E(\xi^{-1})}+\frac{1}{E(\eta^{-1})}$.　(Brown)

([305]113(9)(2006), 817 ~ 822)

39.　Rosenthal 不等式：设 $\{\xi_k: 1\leqslant k\leqslant n\}$ 是具有零均值的实值独立随机变量序列，$p>2$，则存在常数 C_p，使得

$$E\left(\left|\sum_{k=1}^n\xi_k\right|^p\right)\leqslant C_p\max\left\{\sum_{k=1}^n E(|\xi_k|^p),\left[\sum_{k=1}^n E(|\xi_k|^2)\right]^{\frac{p}{2}}\right\}.$$

(Israel J. Math. 8(1970), 273 ~ 303) 我们问：C_p 的最佳值是多少？

40.　设 X 是 Hilbert 空间，$2\leqslant p<\infty$，则存在常数 $C>0$，使得对于任意具有零均

值的 X 值独立随机变量序列 $\xi_1,\cdots,\xi_n$，有下式成立

$$C^{-1}\left\{E\left(\sum_{k=1}^{n}\|\xi_k\|^2\right)^{\frac{p}{2}}+\sum_{k=1}^{n}E(\|\xi_k\|^p)\right\}\leqslant E\left(\left\|\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right\|^p\right)$$

$$\leqslant C\left\{E\left(\left(\sum_{k=1}^{n}\|\xi_k\|^2\right)^{\frac{p}{2}}\right)+\sum_{k=1}^{n}E(\|\xi_k\|^p)\right\}.$$

([414]23(1)(2007)，4 ～ 10) 我们问，常数 C 的大小能确定吗？

41.　设 $\xi_1,\cdots,\xi_m$，$\eta_1,\cdots,\eta_n$ 分别是独立同分布的随机变量，$D(\xi_k)=\sigma_1^2$，$D(\eta_k)=\sigma_2^2$，φ 是标准正态分布的概率密度函数，则

$$\left|f(x,y)-\frac{\sqrt{mn}}{\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(t,s)\varphi\left(\frac{\sqrt{m}(t-x)}{\sigma_1}\right)\varphi\left(\frac{\sqrt{n}(s-y)}{\sigma_2}\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}s\right|$$

$$\leqslant\frac{C}{2}\left(\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}+\frac{2\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{mn}}\right)$$

式中 f 在定义域内连续且二阶偏导数一致有界.([330]34(2003)，371 ～ 381)

§2　概率分布函数不等式

1.　**Chebyshev 不等式**：设 $t>0$，则

$$P\{|\xi-E\xi|\geqslant t\}\leqslant(\sigma/t)^2\quad\text{或}\quad P\{|\xi-E\xi|\geqslant t\cdot\sigma\}\leqslant 1/t^2.\tag{2.1}$$

注 1　对于 $E\xi^2<\infty$，(2.1) 式不能再改进. 但若高阶矩存在，则在某些情形下，(2.1) 式仍可改进. 例如，我们有：设 $E|\xi|^4<\infty$，$E\xi=0$，$\sigma=\sqrt{D\xi}$，则对于 $t>1$，有

$$P\{|\xi|\geqslant t\sigma\}\leqslant\frac{E\xi^4-\sigma^4}{E\xi^4+(t\sigma)^4-2t^2\sigma^4},\tag{2.2}$$

若　$t^2\geqslant\dfrac{E(\xi^4)}{\sigma^4}$，则(2.2) 式比(2.1) 式好；但当　$1\leqslant t^2<\dfrac{E(\xi^4)}{\sigma^4}$ 时，则(2.2) 式比(2.1) 式差；若 $0<t\leqslant 1$，则 $P\{|\xi-E\xi|\geqslant t\sigma\}\leqslant 1$.

注 2　(2.1) 式是由 Bienayme(1853) 与 Chebyshev(1866) 独立发现的，但在近代文献中，(2.1) 式及其各种变形和推广都称为 Chebyshev(型) 不等式，将其应用于随机变量之和，在各种形式的大数律及重对数律的证明中起着重要作用.

注 3　(2.1) 式可推广为

$$P\{|\xi-E\xi|\geqslant 2\sigma\}+P\{|\xi-E\xi|\geqslant 3\sigma\}\leqslant 1/4.\ ([305]2000,107(3):282)\tag{2.3}$$

2.　**单边 Chebyshev 不等式(Cantelli 不等式)**：设 $D\xi=\sigma^2<\infty$，则当 $t>0$ 时，

$$P\{\xi-E\xi>t\}>\frac{\sigma^2}{\sigma^2+t^2};$$

当 $t<0$ 时，

$$P\{\xi-E\xi>t\}>1-\frac{\sigma^2}{\sigma^2+t^2}=\frac{t^2}{\sigma^2+t^2}.$$

3.　**Cantelli 不等式**：记 $\upsilon_p=E(|\xi-E\xi|^p)$.

(1)　若 $t^p\leqslant\upsilon_{2p}/\upsilon_p$，$p\geqslant 1$，则 $P\{|\xi-E\xi|\geqslant t\}\leqslant\upsilon_p/t^p$.

(2) 若 $t^p \geqslant \frac{\upsilon_{2p}}{\upsilon_p}, p \geqslant 1$,则 $P\{|\xi - E\xi| \geqslant t\} \leqslant \frac{\upsilon_{2p} - \upsilon_p^2}{(t^p - \upsilon_p)^2 + \upsilon_{2p} - \upsilon_p^2}$.

4. **Markov 不等式**:设 $E(|\xi|^p) < \infty, p > 0$, 则 $\forall t > 0$,下式成立

$$P\{|\xi| \geqslant t\} \leqslant \frac{E(|\xi|^p)}{t^p}. \tag{2.4}$$

特别地,有 $P\{|\xi - E\xi| \geqslant t\} \leqslant \frac{E(|\xi - E\xi|^p)}{t^p}$,

更一般地,设 g 是 R^1 上偶函数且在$[0,\infty)$ 上递增,则 $\forall t \geqslant 0$,下式成立

$$\frac{Eg(\xi) - g(t)}{\text{a. e. sup}g(\xi)} \leqslant P\{|\xi| \geqslant t\} \leqslant \frac{Eg(\xi)}{g(t)}, \tag{2.5}$$

式中 $\text{a. e. sup}g(\xi) = \inf\{t: P\{g(\xi) \geqslant t\} = 0\}$,若 g 在 R^1 上递增,则(2.5) 式中间一项 $P\{|\xi| \geqslant t\}$ 换成 $P\{\xi \geqslant t\}$,其中 t 为实数.([78]233)

若 g 是非负 Borel 可测函数,若 $Eg(\xi)$ 存在,则 $\forall t > 0$,下式成立

$$P\{g(\xi) \geqslant t\} \leqslant \frac{Eg(\xi)}{t}.$$

5. **指数不等式**:设 $c > 0, t > 0$,则

$$P\{\xi \geqslant t\} \leqslant \frac{E(e^{c\xi})}{e^{ct}}.$$

6. **Gauss 不等式**:设 ξ 具有单峰分布,其众数 m_0 与数学期望 $E(\xi)$ 相等,则当 $t \geqslant \frac{2}{3}\sigma$ 时,$P\{|\xi - m_0| \geqslant t\} \leqslant \frac{4}{9}\left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)^2$;若 $t \geqslant \delta$,式中 $\delta = \frac{E(|\xi - E\xi|)}{\sigma}$,则

$$P\{|\xi - E\xi| \geqslant t\sigma\} \leqslant \frac{4}{9}\,\frac{1-\delta^2}{(t-\delta)^2}.$$

7. **Camp-Meidell 不等式**:设 ξ 具有单峰分布,m_0 为其众数,令

$$\tau^2 = \sigma^2 + (E\xi - m_0)^2, s = \frac{|E\xi - m_0|}{\sigma}.$$

(1) 若 $t \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}$,则 $P\{|\xi - m_0| \geqslant t\tau\} \leqslant 1 - \frac{t}{\sqrt{3}}$.

若 $t \geqslant \frac{2}{\sqrt{3}}$,则 $P\{|\xi - m_0| \geqslant t\tau\} \leqslant \frac{4}{9t^2}$.

(2) 若 $t > s$,则 $P\{|\xi - E\xi| \geqslant t\sigma\} \leqslant \frac{4}{9}\,\frac{(1+s^2)}{(t-s)^2}$.

(Savage,I. R. ,J. Res. Nat. Bur. Stand. 1961,65(B):211 ~ 222)

8. **Pearson 不等式**:设 $p > 0, \upsilon_p = E(|\xi - E\xi|^p)$,则

$$P\{|\xi - E\xi| \geqslant t\upsilon_p^{1/p}\} \leqslant \frac{1}{t^p};\quad P\{|\xi - E\xi| \geqslant t\sigma\} \leqslant \frac{\upsilon_p}{(t\sigma)^p}.$$

(Savage,同 No. 7)

9. **Peek 不等式**:设 $\delta = \frac{v_1}{\sigma}, v_1 = E(|\xi - E\xi|)$,则当 $t \geqslant \delta$ 时,

$$P\{|\xi - E\xi| \geqslant t\sigma^2\} \leqslant \frac{1-\delta^2}{t^2 - 2t\delta + 1}.$$ ([30]316 ~ 317)

10. 设 $f(x) \geqslant m > 0$,则 $P\{\xi \geqslant t\} \leqslant Ef(\xi)/m$.([30]318)

11. 设 f 为非负偶函数,且在 $x > 0$ 上递增,$g(x) \leqslant M$,则

$$P\{|\xi| \geqslant M\} \leqslant \frac{Ef(\xi) - f(M)}{M}.$$

12. 设 f 为正值偶函数,在 $x > 0$ 时递增,且 $P\{|\xi| \leqslant M\} = 1$,则 $\forall t > 0$,下式成立

$$P\{|\xi| \geqslant t\} \leqslant \frac{Ef(\xi) - f(t)}{f(M)}.$$

13. 设 f 为正的递增函数,则 $\forall t > 0$,下式成立

$$P\{|\xi - E\xi| \geqslant t\} \leqslant \frac{E[f(|\xi - E\xi|)]}{f(t)}.$$

14. **Glasser 不等式:**令 $c = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right)$,若 $c \leqslant 1$,则

$$P\{-c_1 v_1 < \xi - E\xi < c_2 v_1\} \geqslant 1 - c,$$

式中 $v_1 = E(|\xi - E\xi|)$.

15. **Selberg 不等式:**设 $-\alpha < 0 < \beta$, $m = \min\{\alpha, \beta\}$,则

$$P\{-\alpha < \xi - E\xi < \beta\} \geqslant \begin{cases} \dfrac{4(\alpha\beta - \sigma^2)}{(\alpha+\beta)^2}, & \text{若 } \alpha\beta - m^2 \leqslant 2\sigma^2 \leqslant 2\alpha\beta, \\ \dfrac{m^2}{\sigma^2 + m^2}, & \text{若 } 2\sigma^2 \leqslant \alpha\beta - m^2, \\ 0, & \text{若 } \alpha\beta \leqslant m^2. \end{cases}$$

(以上 No. 10 ~ 15 见[30]317 ~ 319)

注 4 上述不等式均可看成 Chebyshev 型不等式. 对于独立随机变量之和, Chebyshev 不等式已在两个不同方向上得到推广和改进,即下述 No. 16 ~ 18.

16. **Kolmogorov 不等式:**设 $\xi_k (1 \leqslant k \leqslant n)$ 为独立随机变量,$E\xi_k < \infty$,$\sigma_k^2 = D\xi_k < \infty$,则 $\forall t > 0$,下式成立

$$P\{\max_{1\leqslant m\leqslant n} |S_m - E(S_m)| \geqslant t\} \leqslant (\sigma/t)^2. \tag{2.6}$$

若 $|\xi_k| \leqslant c$,($|\xi_k| \leqslant c$ 的概率为 1),则

$$P\{\max_{1\leqslant m\leqslant n} |S_m - E(S_m)| \geqslant t\} \geqslant 1 - \left(\frac{2c+t}{\sigma}\right)^2.$$ ([321]1928,99:309 ~ 319)

(2.6) 式显然是 Chevyshev 不等式:

$$P\{|S_n - E(S_n)| \geqslant t\} \leqslant (\sigma/t)^2 \tag{2.7}$$

的改进,因而成为证明强大数律和随机变量级数的收敛性的基本工具. (2.6) 式的证明采用了概率论中全新的论证方法,即当 $\xi_1, \cdots, \xi_k$ 固定时,和函数 S_{k+m} 条件数学期望的一些性质,这些性质是由 ξ_k 的独立性所衍生的.

Kolmogorov 不等式已有许多推广,例如:

(1) $\{\xi_k\}$ 的独立性用 $\{\xi_k\}$ 为绝对无偏序列代替,即若由 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ 产生的序列形成一个鞅,则(2.6) 式仍成立. (本节 No. 49)

(2)　若 g 是非负凸单调函数，$Eg(|S_n|)<\infty$，则

$$P\{\max_{1\leqslant m\leqslant n}|S_m|\geqslant t\}\leqslant\frac{Eg(|S_n|)}{g(t)}.$$

(3)　**Levy 不等式**：设 $\xi_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 是独立随机变量，$m(\xi)$ 是 ξ 的中位数（统计学中的），则 $\forall t$，下式成立

$$P\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}[S_k-m(S_k-S_n)]\geqslant t\}\leqslant 2P\{S_n\geqslant t\},$$

$$P\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k-m(S_k-S_n)|\geqslant t\}\leqslant 2P\{|S_n|\geqslant t\},$$

特别，当 $\xi_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 关于原点对称分布时，下式成立

$$P\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}S_k\geqslant t\}\leqslant 2P\{S_n\geqslant t\},P\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|\geqslant t\}\leqslant 2P\{|S_n|\geqslant t\}.$$

注　同时满足 $P\{\xi\leqslant x\}\geqslant\frac{1}{2}$ 和 $P\{\xi\geqslant x\}\geqslant\frac{1}{2}$ 的实数 x 称为 ξ 的中位数，记为 $m(\xi)$.

(4)　设 ξ_k 是独立随机变量，$\delta>0,0<p<1,P\{|S_m|>\delta\}\leqslant p,1\leqslant m\leqslant n$，则

$$P\{\max_{1\leqslant m\leqslant n}|S_m|\geqslant\delta+t\}\leqslant\frac{1}{1-p}P\{|S_n|>t\}.$$

(5)　设 $\{\xi_k\}$ 是独立随机变量列，$E(\xi_k)=0$，令 $A=\{\max|S_k|\geqslant c\},\alpha\geqslant 1$，则

$$c^\alpha P\{\sum\}\leqslant E(|S_n|^\alpha)\varphi_A\leqslant E(|S_n|^\alpha),$$

式中 $\sum$ 为 $\{\xi_k\}$ 的尾 σ 代数，φ_A 为 A 的特征函数.（有关定义及细节见[78]450）

(6)　**Hajek-Renyi 不等式**：设 $\xi_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 为独立随机变量，$E(\xi_k)=0,\sigma_k^2=D\xi_k<\infty$，$\{c_k\}$ 是正数递减序列，则 $\forall m,n\in N,\forall t>0$，下式成立

$$P\{\max_{m\leqslant k\leqslant n}(c_k|S_k|)\geqslant t\}\leqslant\frac{1}{t^2}\Big[c_m^2\sum_{k=1}^m\sigma_k^2+\sum_{k=m+1}^n c_k^2\sigma_k^2\Big].$$

(7)　**KW(Kounias-Weng) 不等式**：设 $\{\xi_k\}$ 为随机变量. $E(|\xi_k|^p)<\infty$，$\{c_k\}$ 是正数递减序列，$\forall m,n\in N,t>0$，若 $0<p\leqslant 1$，则

$$P\{\max_{m\leqslant k\leqslant n}(c_k|S_k|)\geqslant t\}\leqslant\frac{1}{t^p}\Big[c_m^p\sum_{k=1}^m E(|\xi_k|^p)+\sum_{k=m+1}^n c_k^p E(|\xi_k|^p)\Big];$$

若 $p\geqslant 1$，则

$$P\{\max_{m\leqslant k\leqslant n}(c_k|S_k|)\geqslant t\}\leqslant\frac{1}{t^p}\Big[c_m\sum_{k=1}^m(E(|\xi_k|^p)^{1/p}+\sum_{k=m+1}^n c_k(E(|\xi_k|^p))^{1/p}\Big]^p.$$

(8)　**Heyde 不等式**：设 $\{\xi_k\}$ 为随机变量，$\{\eta_k\}$ 为独立随机变量，$S_n=\sum_{k=1}^n\xi_k$.

$E(\eta_k)=0,D(\eta_k)<\infty,\alpha_k=\xi_k-\eta_k$，$\{c_k\}$ 为递减的正数列，则 $\forall m,n\in N,t>0$，$0<p<1$，下式成立

$$P\{\max_{m\leqslant k\leqslant n}(c_k|S_k|)\geqslant t\}\leqslant\frac{c_m^2\sum_{k=1}^m E(\eta_k^2)+\sum_{k=m+1}^n c_k^2E(\eta_k^2)}{(1-p)^2t^2}$$

$$+\sum_{k=m+1}^n P\{\alpha_k\neq 0\}+P\{c_n|\sum_{k=1}^n\alpha_k|\geqslant nt\}.$$

17. Chebyshev 不等式第二个方向的推广是将 Chebyshev 不等式的幂界换成带某种指数衰减的界，从而导出 **Bernstein-Kolmogorov 不等式**：

设独立随机变量 $\xi_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 满足 $E(\xi_k)=0, E(|\xi_j|^k)\leqslant\frac{1}{2}k!c^{k-2}E(\xi_j^2), k>2$,

$S_n=\sum_{k=1}^n\xi_k, B_n=\sum_{j=1}^n E(\xi_j^2), t>0$，则

$$P\{|S_n|>t\}\leqslant 2\exp\left\{-\frac{t^2}{2(B_n+ct)}\right\}. \tag{2.8}$$

特别，若 $\{\xi_k\}$ 是同分布有界随机变量，即 $E(\xi_k)=0, |\xi_k|\leqslant M, \sigma^2=D(\sum_{k=1}^n\xi_k), a=\frac{Mt^2}{\sigma^2}$，则

$$P\{|S_n|>t\}\leqslant 2\exp\left\{-\frac{t^2}{2\sigma^2(1+(a/3))}\right\}. \tag{2.9}$$

Chebyshev 不等式的这种改进，是在对被加项 ξ_k 添加某些限制之下得到的.

Kolmogorov 对(2.8) 式中的概率给出一个下界估计，而(2.9) 式用于重对数律的证明中.

关于(2.9) 式的准确度，可以通过与由中心极限定理给出的(2.9) 式的左端的近似值

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_t^\infty\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\mathrm{d}u=\frac{2}{\sqrt{2\pi}t}\left(1-\frac{\theta}{t^2}\right)\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

进行比较而得到，其中 $0<\theta<1$.

1967 年以后，Bernstein 不等式推广到多维和无穷维情形.

18. **Bernstein 不等式**：(1) 设 $\varepsilon>0$，参数 $\lambda>0$，则

$P(|\xi-E\xi|\geqslant\varepsilon)\leqslant\exp(-\varepsilon\lambda)\{E(\exp\lambda(\xi-E\xi))+E(\exp\lambda(E\xi-\xi))\}$. ([327]1990. 60(1):101 ~ 102)

(2) 设 $\{\xi_k\}$ 是 n 个独立的随机变量. 若 $P\{|\xi_k-E\xi_k|>\alpha\}=0$，式中 $\alpha<\infty$，则 $\forall t>0$，下式成立

$$P\{|S_n-E(S_n)|\geqslant nt\}\leqslant 2\exp\left\{-\frac{n^2t^2}{2\sigma^2+(2/3)\alpha nt}\right\}.$$ ([30]322)

19. **Markov 不等式**：设 ξ_k 是非负随机变量，则 $\forall t>0$，下式成立

$$P\{S_n\geqslant t\sum_{k=1}^n E(\xi_k)\}\leqslant 1/t.$$

20. **Berge 不等式**：设 ξ_1,ξ_2 是两个随机变量，$\sigma_k^2=D(\xi_k), \mathrm{cov}(\xi_1,\xi_2)=r\sigma_1\sigma_2$，则

$$P\left\{\max\left\{\frac{|\xi_1-E(\xi_1)|}{\sigma_1},\frac{|\xi_2-E(\xi_2)|}{\sigma_2}\right\}\geqslant t\right\}\leqslant\frac{1+\sqrt{1-r^2}}{t^2}.$$

21. **BRZ 不等式**(Birnbaum-Raymond-Zuckerman 不等式)：设 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 为独立随机变量，令 $\alpha_n=(n/4)\sigma^2(3+\sqrt{5}), \beta_n=3n+1+(5n^2+6n+5)^{1/2}, \forall t>0$，则当 n 为偶数时，下式成立

$$P\left\{\sum_{k=1}^n(\xi_k-E(\xi_k))^2\geqslant t^2\right\}\leqslant\begin{cases}1, & 若\ t^2\leqslant n\sigma^2,\\ \dfrac{n\sigma^2}{2t^2-n\sigma^2}, & 若\ n\sigma^2\leqslant t^2\leqslant\alpha_n,\\ \dfrac{n\sigma^2}{t^2}\left(1-\dfrac{n}{4}\left(\dfrac{\sigma}{t}\right)^2\right), & 若\ t^2\geqslant\alpha_n.\end{cases}$$

当 n 为奇数时，下式成立

$$P\left\{\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-E(\xi_k))^2\geqslant t^2\right\}\leqslant\begin{cases}1, & 若\ t^2\leqslant n\sigma^2,\\ \dfrac{(n+1)\sigma^2}{2t^2-(n-1)\sigma^2}, & 若\ n\sigma^2\leqslant t^2\leqslant\left(\dfrac{\sigma}{2}\right)^2\beta_n,\\ \dfrac{n\sigma^2}{t^2}-\dfrac{n^2-1}{4}\left(\dfrac{\sigma}{t}\right)^4, & 若\ t^2\geqslant\left(\dfrac{\sigma}{2}\right)^2\beta_n.\end{cases}$$

22.　**Guttman 不等式**：设 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 是 n 个独立同分布随机变量，记 $\xi=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$，$S^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\xi)^2$，$\mu=E(\xi_k)$，$\sigma^2=D(\xi_k)$，则当 $t\geqslant1$ 时，下式成立

$$P\left\{(\xi-\mu)^2\geqslant\frac{S^2}{n-1}+\sigma^2\left(\frac{2(t^2-1)}{n(n-1)}\right)^{1/2}\right\}\leqslant\frac{1}{t^2}.$$

23.　**Hoeffding 不等式**：设 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 为独立随机变量.

$$\xi=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k,\ E(\xi)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(\xi_k).$$

(1)　若 $0\leqslant\xi_k\leqslant1$，$1\leqslant k\leqslant n$，则 $\forall t>0$，下式成立

$$P\{\xi-E(\xi)\geqslant t\}\leqslant\left[\left(\frac{E(\xi)}{E(\xi)+t}\right)^{E(\xi)+t}\left(\frac{1-E(\xi)}{1-E(\xi)-t}\right)^{1-E(\xi)-t}\right]^n$$
$$\leqslant\exp\{-nt^2g(E(\xi))\}\leqslant\exp\{-2nt^2\},$$

式中

$$g(E(\xi))=\begin{cases}\dfrac{1}{1-2E(\xi)}\ln\left(\dfrac{1-E(\xi)}{E(\xi)}\right), & 0<E(\xi)<\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{1}{2E(\xi)(1-E(\xi))}, & \dfrac{1}{2}\leqslant E(\xi)<1.\end{cases}$$

(2)　若 $a_k\leqslant\xi_k\leqslant b_k$，$1\leqslant k\leqslant n$，则 $\forall t>0$，下式成立

$$P\{\xi-E(\xi)\geqslant t\}\leqslant\exp\left\{-\frac{2n^2t^2}{\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)^2}\right\},$$

(3)　若 $E(\xi_k)=0$，$\xi_k\leqslant b$，$1\leqslant k\leqslant n$，$0<t<b$，则

$$P\{\xi\geqslant t\}\leqslant\exp\left\{-\frac{nt}{b}\left[\left(1+\frac{\sigma^2}{bt}\right)\ln\left(1+\frac{bt}{\sigma^2}\right)-1\right]\right\}.$$

24.　**Bennett 不等式**：设 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 为独立随机变量，$E(\xi_k)=0$，$\sigma_k^2=D(\xi_k)$，$E(|\xi_k|^2)\leqslant c^{m-2}\sigma_k^2$，$m\geqslant2$，记 $\overline{\sigma^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2$，$\xi=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$，则

$$P\{\xi\geqslant t\}\leqslant\exp\left\{-\frac{nt}{c}\left[\left(1+\frac{\overline{\sigma}^2}{ct}\right)\ln\left(1+\frac{ct}{(\overline{\sigma})^2}\right)-1\right]\right\}.$$

(以上 No. 19 ～ 24 见[30]321 ～ 324)

25.　**中心极限定理的上、下限估计**：

(1)　**Berry-Esseen 不等式**：设 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 是独立同分布随机变量，令 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k$，定义正

则化和 S_n^* 为

$$S_n^* = \frac{S_n - E(S_n)}{[D(S_n)]^{1/2}}.$$

S_n^* 的分布函数为 $G_n(t) = P(S_n^* \leqslant t)$，$\varphi(x)$ 为 $N(0,1)$ 的分布函数，即 $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp(-\frac{t^2}{2})\mathrm{d}t$，则

$$\sup_t \mid G_n(t) - \varphi(t) \mid \leqslant \frac{33}{4} \cdot \frac{E \mid \xi_1 - E\xi_1 \mid^3}{n^{1/2} \cdot [D(\xi_1)]^{3/2}}, \tag{2.10}$$

Zolotarev 将 33/4 改进为 0.91，而 Beeck 进一步改进为 0.7975，若将 33/4 改记为最佳值 C.

我们问 $C = ?$

若 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 不同分布，则 Serfling 将(2.10) 式右边改为

$$C\frac{\sum_{k=1}^{n} E \mid \xi_k - E(\xi_k) \mid^3}{[D(S_n)]^{3/2}}.$$

我们问：上述 C 的最佳值是多少？([30]324 ～ 325)

(2)　1983 年 Мацкявичюс 证明了中心极限定理收敛速度的下限：对于任何数列 $a_n \geqslant 0$ 且当 $n \to \infty$ 时 $a_n \to 0$，都存在一列独立同分布的随机变量 $\xi_1, \xi_2, \cdots$，有 $E\xi_1 = a$，$0 < \sigma^2 = E(\xi_1 - a)^2 < \infty$，使得

$$\sup_x \left| P\left\{\frac{1}{\sqrt{n}\sigma}\sum_{j=1}^{n}(\xi_j - a) < x\right\} - \varphi(x)\right| \geqslant a_n,$$

$n = 1, 2, \cdots$，式中　$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t.$

注　上述结果表明，在仅有二阶矩存在的情形下，中心极限定理收敛的速度可能任意地慢. 1985 年，苏谆证明，强大数律的收敛速度也可能任意地慢.([333]1985，21：1611 ～ 1613)

1975 年 Butzer，P. L，等还给出了中心极限定理的逼近速度估计，([327]1975，13(3 ～ 4)：327 ～ 340)

26.　设 $\{\xi_k\}$ 为相互独立的随机变量，$E\xi_k = 0$，$D\xi_k = \sigma_k^2$，$1 \leqslant k \leqslant n$，则对正数 a_k，有

$$P\left[\bigcap_{k=1}^{n}\{S_k \leqslant a_k\}\right] \geqslant \prod_{k=1}^{n}\left\{\frac{a_k^2}{a_k^2 + \sum_{j=1}^{k} a_j^2}\right\}.\ ([52]162)$$

27.　设 $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ 是 n 维随机向量，$g_1(\xi)$，$g_2(\xi)$ 关于每个变量都递增使得数学期望存在. 若协方差 $\mathrm{cov}(g_1(\xi), g_2(\xi)) \geqslant 0$，则称 $\mid \xi_1 \mid, \cdots, \mid \xi_n \mid$ 是**相伴的**. 若 $E\xi_k = 0$，$D\xi_k = \sigma_k^2$，$1 \leqslant k \leqslant n$，则对于正数 a_k，有

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n}\{\mid \xi_k \mid \leqslant a_k\}\right) \geqslant \prod_{k=1}^{n}[1 - (\sigma_k / a_k)^2].\ ([52]161)$$

28.　设 $\xi_k (1 \leqslant k \leqslant n)$ 是独立的随机变量，$S_n = \sum_{k=1}^{n}\xi_k$，$\sigma_k^2 = D\xi_k$，$\sigma^2 = \sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2$，$t > 0$，则

$$P\{\bigcap_{k=1}^{n}(|S_k - E(S_k)| \leqslant t\sigma)\} \geqslant 1-(1/t^2).$$

1960 年，Marshall 将右边改进为 $t^2/(1+t^2)$.（[52]158）

29. 若 ξ_j 与 ξ_k 的协方差 $\mathrm{cov}(\xi_j,\xi_k)=0\ (j\neq k)$，则 $\forall t>0$，下式成立

$$P\{|\xi - E(\xi)| \geqslant t\bar{\sigma}\} \leqslant 1/(nt^2).\ ([101]931)$$

30. 设 $\xi_1,\cdots,\xi_n,\cdots$ 是任意的随机变量序列，将每个 ξ_k 在 $c>0$ 上截尾，即令

$$\xi_k^c = \begin{cases}\xi_k, 若\ |\xi_k| \leqslant c, \\ 0, 若\ |\xi_k| > c,\end{cases} \quad k=1,2,\cdots,n.$$

记 $S_n = \sum_{k=1}^{n}\xi_k, S_n^c = \sum_{k=1}^{n}\xi_k^c, E(S_n^c) = \sum_{k=1}^{n}E(\xi_k^c), n=1,2,\cdots,$

则对于任意正数 t，有

$$P\{|S_n - E(S_n^c)| > t\} \leqslant P\{S_n^c - E(S_n^c)| > t\} + \sum_{k=1}^{n}P\{|\xi_k| > t\}.$$

推论　若 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 是同分布的，则

$$P\{|S_n - E(S_n^c)| > t\} \leqslant P\{|S_n^c - E(S_n^c)| > t\} + nP\{|\xi_1| > t\}.$$

若 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 是独立同分布的，则

$$P\{|S_n - E(S_n^c)| > t\} \leqslant (n/2)[E(\xi_1^c)]^2 + nP\{|\xi_1| > t\}.\ ([143]315)$$

31. **Wilks 不等式**：设 n 维随机向量 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的联合分布函数为 $F(\xi)=F(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，$F_k(\xi_k)$ 为边缘分布函数，则

$$F(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n) \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n}F_k(\xi_k)\right)^{1/n}.\ ([52]160)$$

32. 设 F_k, F 为分布函数，则 $\forall$ 实数 x_k，$1-\sum_{k=1}^{n}\{1-F_k(x_k)\} \leqslant F(x_1,\cdots,x_n) \leqslant \min_{1\leqslant k\leqslant n}\{F_k(x_k)\}$ 成立的充要条件是 $\forall F_k$ 是 F 的边缘分布.（[143]141）

33. $0 \leqslant E(|\xi|) - \sum_{n=1}^{\infty}P\{|\xi| \geqslant n\} \leqslant 1.$（[143]332～333）

34. **Riesz 不等式**：设随机变量 ξ 的分布函数为 F，g 是 F 的值域上严格凸函数，φ 为 Borel 可测函数，设 $E(\xi)$，$E\varphi(\xi)$，$Eg(\xi)$ 全都存在，且 $t(x)=g(E\xi)+K(x-E\xi)$ 是 g 在 $x=E\xi$ 上的一条支柱线，$h(x)=g(x)-t(x)$，则 $\forall\varepsilon>0$，有

$$E|\varphi(\xi)| \leqslant \sup\{|\varphi(x)| : |x-E\xi| < \varepsilon\} + Eh(\xi)\sup\left\{\frac{|\varphi(x)|}{h(x)} : |x-E\xi| \geqslant \varepsilon\right\}. \tag{2.11}$$

注　利用 Riesz 不等式(2.11) 式可以证明前面 Markov 不等式(2.4) 式和下述不等式：

设 $a>0,\varepsilon>0,M=(e^{-a\varepsilon}-1+a\varepsilon)^{-1}$，则

$P\{|\xi - E\xi| > \varepsilon\} \leqslant Me^{-aE(\xi)}[E(e^{a\xi}) - e^{aE(\xi)}]$.（[143]124）

35. **Kadiyala 不等式**：设 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 为正的随机变量，$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$，$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n > 0$，$\frac{b_k}{a_k}$ 递减，$1 \leqslant k \leqslant n$. 令 $q_j(a) = (a_j\xi_j)/\sum_{k=1}^{n}a_k\xi_k$，则 $\forall t \in R^1$，有

$$P\left\{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j q_j(a)\leqslant t\right\}\geqslant P\{\sum\lambda_j q_j(b)\leqslant t\}.$$

提示：令 $r_k=\frac{b_k}{a_k},q_k=(a_kx_k)/\sum_{j=1}^{n}a_jx_j,x_k>0$，证明 $\left(\sum_{k=1}^{n}r_kq_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_kq_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\lambda_kr_kq_k$.（[50]371 ～ 372）

36.　[MCU]. 设 ξ 为离散型随机变量，其可能取值为 $1,2,\cdots$，若 $P\{\xi=k\}$ 关于 k 递减，则

$$P\{\xi=k\}\leqslant(2/k^2)E(\xi).$$

提示：$2E(\xi)=2\sum_{k=1}^{\infty}kP\{\xi=k\}\geqslant 2\sum_{k=1}^{m}kP\{\xi=m\}=P\{\xi=m\}\cdot 2\sum_{k=1}^{m}k\geqslant m^2P\{\xi=m\}$.

37.　[MCU]. 设随机变量 ξ,η 的相关系数为 ρ，$E(\xi)=E(\eta)=0,D\xi=D\eta=1$，则

$$P\{|\xi-E\xi|\geqslant\lambda\sqrt{D\xi},|\eta-E\eta|\geqslant\lambda\sqrt{D\eta}\}\leqslant\frac{1+\sqrt{1-\rho^2}}{\lambda^2}.$$

38.　[MCU]. 设 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 为独立的随机变量，则 $\forall t>0$，有

$$P\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|>2t\right\}\leqslant\frac{P\{|S_n|>t\}}{1-\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n-1}P\{|S_n-S_k|>t\}}.$$

（当上式分母为零时，右边理解为 ∞）.

39.　[MCU]. 设 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 是独立的随机变量，若 ξ_k 是对称的，即 ξ_k 与 $(-\xi_k)$ 有相同的分布，则 $\forall\alpha\in R^1$，有

$$P\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}S_k>\alpha\right\}\leqslant 2P\{S_n>\alpha\}.$$

40.　[MCU]. 设 F 和 f 分别是标准正态分布 $N(0,1)$ 的分布函数和分布密度，则 $\forall x>0$，有

$$f(x)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)<1-F(x)<\frac{f(x)}{x}.$$

41.　设 ξ 服从参数为 $(0,\sigma^2)$ 的正态分布，则 $\forall t>0$，有

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\exp\left\{-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right\}\right)\left[\frac{\sigma}{t}-\left(\frac{\sigma}{t}\right)^3\right]<P\{\xi\geqslant t\}<\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sigma}{t}\right)\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right).$$（[80]163）

42.　设 $\varphi(t)$ 是随机变量的特征函数，$\mathrm{Re}\varphi(t)$ 是 $\varphi(t)$ 的实部，则

(1)　$|\varphi(t+h)-\varphi(t)|\leqslant\sqrt{2\mathrm{Re}[1-\varphi(h)]}$；

(2)　$1-\mathrm{Re}\varphi(2t)\leqslant 4[1-\mathrm{Re}\varphi(t)]$；

(3)　当 $\varphi(t)$ 为实函数时，有

$$1-\varphi(2t)\leqslant 4[1-\varphi(t)];2[\varphi(t)]^2\leqslant 1+\varphi(2t).$$（[80]362）

(4)　$1-|\varphi(2t)|^2\leqslant 4(1-|\varphi(t)|^2)$.　（[78]387）

43.　**Kingman 不等式**：设 $p(t)\in(0,\infty)$ 是再生现象的标准 p 函数，$0<t_1<t_2<\cdots<t_n,1\leqslant k\leqslant n$，令

$$f(t_k)=p(t_k)-\sum_{1\leqslant i<k}p(t_i)p(t_k-t_i)+\sum_{1<i<j<k}p(t_i)p(t_j-t_i)p(t_k-t_j)-\cdots+$$

$(-1)^k p(t_1)p(t_2-t_1)\cdots p(t_k-t_{k-1})$； $p(t_k)=1-\sum_{j=1}^{k}f(t_j)$.

则 $p(t)$ 满足 n 阶 Kingman 不等式：

$$f(t_n)=p(t_n)-\sum_{k=1}^{n-1}f(t_k)p(t_n-t_k)\geqslant 0,\quad g(t_n)=1-\sum_{k=1}^{n}f(t_k)\geqslant 0.$$

1987 年，戴永隆进一步证明

$$g(t_{n+1})\geqslant\frac{1}{2}\Big[1+\Big(\sum_{k=1}^{n}f(t_k)\Big)^2\Big]-\sum_{k=1}^{n}f(t_k).$$

式中 $0=t_0<t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant t_{n+1},n\geqslant 1$.

设 $M=p(1)>\frac{1}{2}$，$m(M,p)=\inf\{p(t):0\leqslant t\leqslant 1\}$，则

$I(M)=\inf\limits_{p}\{m(M,p)\}\geqslant\sqrt{2M-1}$.（中山大学学报，1987，4：1 ～ 4）

44. **截尾不等式**：设 F 是 R^1 上有界的分布函数，并具有特征函数 h：$h(u)=\int_{R^1}e^{iux}\mathrm{d}F(x)$. 若 $u>0$，则对于某个常数 $c>0$，有

$$\int_{|x|\geqslant\frac{1}{u}}\mathrm{d}F(x)\leqslant\frac{c}{u}\int_0^u[h(0)-\mathrm{Re}h(t)]\mathrm{d}t.$$

45. 设 ξ_k 是独立不同分布的 Bernoulli 随机变量，$P\{\xi_k=1\}=p_k$，令 $\lambda=\sum_{k=1}^{n}p_k$，则

$$\sum_{k=0}^{n}\left|P\{S_n=k\}-\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\right|<2\sum_{k=1}^{n}p_k^2.$$

（[313]1960，10：1181 ～ 1197；[305]1994，10(1)：48）

46. **累积分布函数的 Ostrowski 型不等式**：设 ξ 是在有限区间 $[a,b]$ 上取值的随机变量，则 $\forall x\in[a,b]$，有

(1) $$\left|P\{\xi\leqslant x\}-\frac{b-E(\xi)}{b-a}\right|\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{b-a}\left|x-\frac{a+b}{2}\right|,x\in[a,b].$$

（Barnett, N. S. 等，[395]1999，39(2)：303 ～ 311）

(2) $$\left|P\{\xi\leqslant x\}-\frac{b-E(\xi)}{b-a}\right|\leqslant\left[\frac{1}{4}+\frac{(x-\frac{1}{2}(a+b))^2}{(b-a)^2}\right](b-a)\|f\|_{\infty}.$$

（Nonlinear Anal. fourm5(2000)，125 ～ 135）

(3) 设 $1<p<\infty$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

$$\left|P\{\xi\leqslant x\}-\frac{b-E(\xi)}{b-a}\right|\leqslant\frac{q}{q+1}(b-a)^{\frac{1}{q}}\left\{\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{1+\frac{1}{q}}+\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{1+\frac{1}{q}}\right\}\|f\|_p$$

$$\leqslant\frac{q}{q+1}(b-a)^{\frac{1}{q}}\|f\|_p.$$ （[303]2(4)(1999)，501 ～ 508）

(4) 设 $h\in[0,1]$，$x\in\left[a+h\left(\frac{b-a}{2}\right),b-h\left(\frac{b-a}{2}\right)\right]$，则

$$\left|(1-h)P\{\xi\leqslant x\}+\frac{h}{2}-\frac{b-E(\xi)}{b-a}\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{(b-a)(q+1)^{1/q}}\left\{2\left(\frac{h(b-a)}{2}\right)^{q+1}+\left(x-a-\frac{h(b-a)}{2}\right)^{q+1}\right.$$
$$\left.+\left(b-x-\frac{h(b-a)}{2}\right)^{q+1}\right\}^{\frac{1}{q}}\|f\|_p.$$ (Appl. Math. E-Notes, 8(2008), 246 ～ 253)

(5)　记 $\Delta=\left|P(\xi\leqslant x)-\left(\frac{x-E(\xi)}{b-a}\right)-\left(\frac{b-E(\xi)}{b-a}\right)\right|$，若 $0\leqslant m\leqslant f(x)\leqslant M$，$x\in[a,b]$，则

① $\Delta\leqslant\frac{1}{2}(b-a)(M-m)\left[\frac{1}{4}+\left(\frac{x-\frac{a+b}{2}}{b-a}\right)^2\right]$；

② $\Delta\leqslant\left(\frac{1}{b-a}-m\right)\left\{\frac{b-a}{2}+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right\}$；

③ $\Delta\leqslant\left(M-\frac{1}{b-a}\right)\left\{\frac{b-a}{2}+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right\}$.（刘证，Appl. Math. E-Notes, 7(2007), 93 ～ 101）

47.　设 ξ 是标准化随机变量，$a,t>0$，则

$$e^{-at}<\frac{P\{a\leqslant\xi\leqslant a+t\}}{P\{a-t\leqslant\xi\leqslant a\}}<e^{-at+\frac{1}{2}at^3}.$$ ([305]2000, 107(4): E10709)

48.　设 f 是 R^1 上充分光滑的概率密度函数. $q>p>1$, $1/(q+1)\leqslant r\leqslant 1$，则
$\int_{R^1}\frac{|f'|^{2pr}}{f^{\alpha}}\leqslant\left(\frac{2p-1}{q-1}\right)^{rp}\left(\int_{R^1}\frac{|f''|^{p-1}}{f^{q-p}}\right)^r$，式中 $\alpha=r(q+1)-1$. ([373]1998, 39(3): 350 ～ 354)

49.　**鞅不等式**：定义在一个具有递增 σ 代数族 $\{\sum_t\}_{t\in T}$（即 $s\leqslant t$ 时 $\sum_s\subset\sum_t\subset\sum$）的概率空间 $(\Omega,\sum,P)$ 上，使得 $E|X_t|<\infty$，X_t 为 $\sum_t$ 可测且 $E(X_t|\sum_s)=X_s$ 以概率 1 成立的随机过程 $X=(X_t,\sum_t)(t\in T\subset[0,\infty))$ 称为鞅，若 $E(X_t|\sum_s)\geqslant X_s$，称 X 为下鞅；若 $E(X_t|\sum_s)\leqslant X_s$，称 X 为上鞅.

在离散情形下，$T=N$（自然数集），在连续时间情形下，$T=[0,\infty)$，鞅是 Markov 过程论和随机积分论的基础，而且在分析数学的许多部分，如遍历理论的收敛定理、测度论中的导数和提升、奇异积分理论中的不等式等，都有广泛的应用. 鞅还可在复数域 C, R^n, Hilbert 空间或 Banach 空间中取值. 鞅论的基本结果之一就是下述几个不等式.

(1)　**Doob 不等式**：若 $X=(X_n,\sum_n)$ 是非负下鞅，令
$X_n^*=\max\{X_j:1\leqslant j\leqslant n\}$，$\|X_n\|_p=(E|X_n|^p)^{1/p}$，$p\geqslant 1$，$n\geqslant 1$，则

$$P\{X_n^*\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{E(X_n)}{\varepsilon};$$

$$\|X_n\|_p\leqslant\|X_n^*\|_p\leqslant\frac{p}{p-1}\|X_n\|_p,\ p>1;$$

$$\| X_n^* \|_1 \leqslant \frac{e}{e-1}[1 + \| X_n \ln^+ (X_n) \|_1].$$

(2) **Burkholder 不等式**：设 $X = (X_n, \sum_n)$ 是鞅，$p > 1$，$A_p = \left(\frac{18p^{3/2}}{p-1}\right)^{-1}$，$B_p = \frac{18p^{3/2}}{(p-1)^{1/2}}$，$[X]_n = \sum_{k=1}^{n} (\Delta X_k)^2$，$X_0 = 1$. 则

$$A_p \| \sqrt{[X]_n} \|_p \leqslant \| X_n \|_p \leqslant B_n \| \sqrt{[X]_n} \|_p;$$

$$A_p \| \sqrt{[X]_n} \|_p \leqslant \| X_n^* \|_p \leqslant \widetilde{B_p} \| \sqrt{[X]_n} \|_p;$$

$\widetilde{B_p} = \frac{18p^{5/2}}{(p-1)^{3/2}}$. 这是关于独立随机变量和的 Khinchin 不等式和 Marcinkiewicz-Zygmund 不等式的推广.

(3) **Davis 不等式**：存在常数 c_1, c_2，使得

$$c_1 \| \sqrt{[X]_n} \|_1 \leqslant \| X_n^* \|_1 \leqslant c_2 \| \sqrt{[X]_n} \|_1.$$

问题：c_1, c_2 的确切数值是多少？

(4) 关于下鞅以概率 1 收敛的各种定理证明中，起关键作用的是下鞅 $X = (X_n, \sum_n)$ 在 n 步中上穿区间 $[a,b]$ 次数 β_n 的数学期望 $E(\beta_n)$ 的 Doob **不等式**：

$$E(\beta_n) \leqslant \frac{E \mid X_n \mid + \mid a \mid}{b-a}.$$

(Doob, J. L., Stochastic processes, Chapman and Hall, 1953)

(5) **下鞅极值不等式**：设 $\{y_n\}$ 是一离散时间下鞅，$a > 0$，则有

$P(E) \leqslant \frac{1}{a}\int_E y_n \mathrm{d}P$，式中 $E = \{\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} y_k \geqslant a\}$. ([154]100)

50. **Levy 距离不等式**：设 F, G 为一维随机变量的分布函数，则 F, G 之间的 Levy 距离定义为 $L(F,G) = \inf\{\varepsilon : F(x-\varepsilon) - \varepsilon \leqslant G(x) \leqslant F(x+\varepsilon) + \varepsilon, \forall x\}$.

若 f, g 分别是与分布函数 F, G 相应的特征函数. 则 $\forall x > e$，有

$$L(F,G) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^x \mid f(t) - g(t) \mid \frac{\mathrm{d}t}{t} + 2e\frac{\ln x}{x}.$$

Levy 距离可推广到 R^n 上分布函数的情形，另一种推广是 Levy-Prokhorov 距离，见 [107]3:397 ~ 399.

51. **集中函数不等式**：设 t 为非负实数，ξ 为随机变量，ξ 的集中函数定义为：$Q(t,\xi) = \sup\{P\{x \leqslant \xi \leqslant x+t\} : x \in R^1\}$，$Q(t,\xi)$ 是非负，次可加，且对 $t \geqslant 0$ 递增的右连续函数，且 $\lim\limits_{t\to\infty} Q(t,\xi) = 1$. 反之，任一具备这些性质的函数都可作为某个随机变量 ξ 的集中函数.

(1) **Kolmogorov 不等式**：设 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 是独立随机变量，$t \geqslant t_k$，$1 \leqslant k \leqslant n$，则

$Q(t, s_n) \leqslant ct\left\{\sum_{k=1}^{n} t_k^2 [1 - Q(t_k, \xi_k)]\right\}^{-\frac{1}{2}}$. 式中，$c$ 为一绝对常数.

(2) 设 ξ_1, ξ_2 为独立随机变量，则 $Q(t, \xi_1 + \xi_2) \leqslant Q(t, \xi_k)$，$k = 1,2$.

(3) 设 $Q(t,\xi)$ 与 $f(x)$ 分别是 ξ 的集中函数与特征函数，则

$$Q(t,\xi) \leqslant \left(\frac{96}{95}\right)^2 \max\{t,\frac{1}{a}\}\int_{|x|<a} |f(x)| \, dx.$$

(Petrov, V. V., Sums of independent random variables, Springer, 1975)

52. 设随机变量 ξ 的概率密度函数为 $f(x,\lambda) = \frac{e^{-x}x^{\lambda}}{\lambda!}, x > 0, \lambda$ 为非负整数，则

$$P\{0 < \xi < 2(\lambda+1)\} > \lambda/(\lambda+1). \text{([143]123)}$$

53. 设 ξ 为随机变量，$\varphi(t) = E(e^{t\xi}), 0 < \varphi(t) \leqslant \infty$，则

$$P\{\xi \geqslant 0\} \leqslant \inf\{\varphi(t): t \geqslant 0\} \leqslant 1. \quad \text{([143]124)}$$

54. 设 ξ, η 是独立同分布随机变量，则

(1) $P\{|\xi - \eta| > t\} \leqslant 2P\{|\xi| > (t/2)\}$;

(2) 若 $t > 0$，使得 $P\{\xi \geqslant t\} \leqslant 1 - q, P\{\xi \leqslant -t\} \leqslant 1 - q$，则

$$P\{|\xi - \eta| \geqslant \varepsilon\} \geqslant qP\{|\xi| > t + \varepsilon\}. \text{([143]175)}$$

55. 设 $b(k,n,p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$，若 $k \geqslant np$，则

$$P\{\xi \geqslant k\} \leqslant b(k,n,p) \frac{(n+1)(1-p)}{k+1-(n+1)p};$$

当 $k \leqslant np$ 时，$P\{\xi \leqslant k\} \leqslant b(k,n,p) \frac{(n-k+1)p}{(n+1)p-k}$. ([143]241)

56. 令 $\rho(\xi) = E\left(\frac{|\xi|}{1+|\xi|}\right)$，则 $d(\xi,\eta) = \rho(\xi - \eta)$ 是概率空间上的距离函数，且

(1) $\rho(\xi + \eta) \leqslant \rho(\xi) + \rho(\eta)$. (2) $\rho(\sigma\xi) \leqslant \max\{|\sigma|, 1\}\rho(\xi)$. ([143]310)

57. **概率算子不等式**：设 F 是随机变量 ξ 的分布函数，f 及其三阶导数 $f^{(3)}$ 在 R^1 上一致有界且一致连续，记为 $f \in C^3(R^1)$. 令

$$T_F(f) = \int_{R^1} f(x+t)F'(t)\,dt.$$

若 F 是一个具有跳跃点 x_j 与跃度 p_j 的分布函数，则令

$$T_F(f) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j f(x + x_j),$$

并称 T_F 是与 F 相联系的概率算子.

(1) 设 F, G 为分布函数，则

$$\| T_F T_G(f) \| \leqslant \| T_G(f) \|.$$

(提示：注意 T_F 是线性压缩算子).

(2) 设 T_{F_k} 和 T_{G_k} 为概率算子，则

$$\| T_{F_1} T_{F_2} \cdots T_{F_n}(f) - T_{G_1} T_{G_2} \cdots T_{G_n}(f) \| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \| T_{F_k}(f) - T_{G_k}(f) \|,$$

特别地，$\| T_F^n(f) - T_G^n(f) \| \leqslant n \| T_F(f) - T_G(f) \|$.

§3 统计与信息不等式

1. **信息不等式(Rao-Cramer 不等式，或 Frechet 不等式)**：设随机向量 $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$

取值于 R^n，其概率分布由密度 $p(x \mid \theta)$ 决定，其中 $x=(x_1,\cdots,x_n)^T$，$\theta \in \Omega \subset R^1$，设统计量 $T=T(\xi)$ 满足条件 $E_\theta T=\theta+h(\theta)$. 其中 $h(\theta)$ 为可微函数，称为 T 的偏倚，θ 为未知数值参数. Fisher 信息量定义为

$$I(\theta)=E\left[\frac{\partial \ln P(\xi \mid \theta)}{\partial \theta}\right]^2.$$

若 $I(\theta) \neq 0$，则 $E_\theta \mid T-\theta \mid^2 \geqslant \dfrac{[1+h'(\theta)]^2}{I(\theta)}+[h(\theta)]^2$. (3.1)

特别地，若 T 是 θ 的无偏估计量（即 $E_\theta T=\theta$），则

$$DT=E_\theta \mid T-\theta \mid^2 \geqslant \frac{1}{I(\theta)}. \tag{3.2}$$

若(3.2)式关于某个无偏估计量，T 变为等式，则在所有无偏估计类中在最小平方风险意义下 T 是最优的，这样的估计量 T 称为**有效估计量**，例如，若 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 是独立随机变量，服从同一正态律 $N(\theta,1)$，则 $T=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k$ 是未知均值 θ 的有效估计量.

在一般情形下，(3.2)式中等号成立，仅当 $\{p(x \mid \theta)\}$ 是指数分布族，即随机向量 ξ 的概率密度可表示为

$$p(x \mid \theta)=C(x)\exp\{u(\theta)\varphi(x)-v(\theta)\}.$$

在向量参数情形下，(3.1)式有不同的推广，并且可以推广到估计此参数的函数情形. 例如，设参数空间 $\Omega \subset R^1$，参数函数 $g(\theta)$ 的任意无偏估计量为 $\varphi(\xi)$，而 $\varphi_0(\xi)$ 是使方差在 θ_0 处为最小的估计量，$\theta_0,\theta \in \Omega$，以参数 θ 为附标的密度函数 $p(x \mid \theta)$ 的均值和方差分别记为 E_θ 和 D_θ，$\pi(x \mid \theta)=\dfrac{P(x \mid \theta)}{P(x \mid \theta_0)}$. 令

$$D_{\theta_0}(\varphi(\xi))=\sup\left\{\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}g(\theta_k)g(\theta_j)\lambda^{kj}\right\},$$

式中上确界是对 $\forall n \in N$ 和 $\theta_1,\cdots,\theta_n \in \Omega$ 而取的. λ^{kj} 是以 $\lambda_{kj}=E_{\theta_0}(\pi(\xi \mid \theta_k)\pi(\xi \mid \theta_j))$ 为元素的 $n \times n$ 矩阵 (λ_{kj}) 的逆 (k,j) 元素.

在某些正则条件下（例如 $E_{\theta_0}\{[\pi(\xi \mid \theta)]^2\}<\infty$，$\theta \in \Omega$，$p(x \mid \theta)$ 在 $\theta=\theta_0$ 处有偏导数 $p'(x \mid \theta_0)$(a. e. $P(x \mid \theta_0)$,)及

$$\lim_{\Delta\theta \to 0}E_{\theta_0}\left[\frac{P(\xi \mid \theta_0+\Delta\theta)-P(\xi \mid \theta_0)}{P(\xi \mid \theta_0)\Delta\theta}-\frac{P'(\xi \mid \theta_0)}{p(\xi \mid \theta_0)}\right]^2=0.$$

则成立**信息不等式**：

$$D_{\theta_0}(\varphi(\xi)) \geqslant \frac{[g'(\theta_0)]^2}{E_{\theta_0}\left\{\left[\left.\dfrac{\partial \ln P(\xi \mid \theta)}{\partial \theta}\right|_{\theta=\theta_0}\right]^2\right\}}.$$

若在下述正则条件下，$E_{\theta_0}\{[\pi(\xi \mid \theta)]^2\}<\infty$，$\theta \in \Omega$，$p(x \mid \theta)$ 在 $\theta=\theta_0$ 处关于 θ 为 k 次可偏微(a. e. $P(x \mid \theta_0)$)；第 j 阶 $(1 \leqslant j \leqslant k)$ 偏导数 $p^{(j)}(x \mid \theta_0)$ 满足

$$\lim_{\Delta\theta \to 0}E_{\theta_0}\left[\left(\frac{\Delta^j P(\xi \mid \theta)\mid_{\theta=\theta_0}}{P(\xi \mid \theta_0)(\Delta\theta)^j}-\frac{P^{(j)}(\xi \mid \theta_0)}{P(\xi \mid \theta_0)}\right)^2\right]=0,$$

则成立 Bhattacharya 不等式：

$$D_{\theta_0}(\varphi(\xi)) \geqslant \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} g^{(i)}(\theta_0) g^{(j)}(\theta_0) K^{ij},$$

式中 $g^{(i)}(\theta_0)$ 是 $g(\theta)$ 在 θ_0 的 i 阶导数,K^{ij} 是以 $K_{ij} = E_{\theta_0}\left(\frac{P^{(i)}(\xi \mid \theta_0)}{P(\xi \mid \theta_0)} \cdot \frac{P^{(j)}(\xi \mid \theta_0)}{P(\xi \mid \theta_0)}\right)$ 为元素的矩阵(K_{ij}) 的逆的(i,j) 元素,$i,j = 1,2\cdots,k$. 若参数 $\theta = (\theta_1,\cdots,\theta_m)$ 是 m 维的,则在与一维相同的条件下,下式成立

$$D_{\theta_0}(\varphi(\xi)) \geqslant \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} g_j'(\theta_0) g_k'(\theta_0) A^{jk},$$

式中 $g_j'(\theta_0)$ 是 $g(\theta)$ 在 θ_0 关于 θ_j 的偏导数,A^{jk} 是以

$$A^{jk} = E_{\theta_0}\left(\frac{\partial \ln P(\xi \mid \theta)}{\partial \theta_j}\bigg|_{\theta=\theta_0} \cdot \frac{\partial \ln P(\xi \mid \theta)}{\partial \theta_k}\bigg|_{\theta=\theta_0}\right)$$

为元素的矩阵 $A = (A_{jk})$ 的逆的(j,k) 元素.

若 $\varphi(\xi)$ 是序贯无偏估计量,则成立 **Wolfowitz 不等式**:

$$D_{\theta_0}(\varphi(\xi)) \geqslant \frac{[g'(\theta)]^2}{E_{\theta_0}(N) I(\theta_0)},$$

式中 $I(\theta_0)$ 为信息量,N 是序贯抽样的样本大小. ([144]1196 ~ 1199)

2. **估计量的容许性不等式**:若参数函数 $g(\theta)$ 的任意估计量 $\varphi(\xi)$ 满足:

从 $r(\theta,\varphi) \leqslant r(\theta,\varphi_0)$ 可推出 $r(\theta,\varphi) = r(\theta,\varphi_0)$,$\theta \in \Omega$,则称 $\varphi_0(\xi)$ 是容许的,式中 $r(\theta,\varphi) = E_\theta(W(\theta,\varphi(\xi)))$ 是 $\varphi(\xi)$ 的**风险函数**,而 $W(\theta,\varphi(\xi))$ 表示当参数的真值为 θ 时,由 $\varphi(\xi)$ 带来的损失,形如 $W(\theta,\varphi(\xi)) = \lambda(\theta)[\varphi(\xi) - g(\theta)]^2 (\lambda(\theta) > 0)$ 的损失函数 W 称为平方损失函数. 特别当 $\lambda(\theta) = 1$ 时,$r(\theta,\varphi) = E_\theta([\varphi(\xi) - g(\theta)]^2)$ 称为 $\varphi(\xi)$ 的均方误差. 若 $\varphi(\xi)$ 是 $g(\theta)$ 的无偏估计量,则均方误差与方差 $D_\theta(\varphi(\xi))$ 一致. 若对实数 c,形如 $c\varphi(\xi)$ 的统计量作为 $g(\theta)$ 的估计量是容许的,则

$$\inf_\theta\left\{\frac{g(\theta)E_\theta(\varphi)}{E_\theta(\varphi^2)}\right\} \leqslant c \leqslant \sup_\theta\left\{\frac{g(\theta)E_\theta(\varphi)}{E_\theta(\varphi^2)}\right\}. \qquad ([144]1198)$$

3. **极小极大估计量不等式**:若估计量 $\varphi^*(\xi)$ 满足

$$\sup_\theta r(\theta,\varphi^*) = \inf_\varphi \sup_\theta r(\theta,\varphi),$$

则称 φ^* 为极小极大的估计量,若存在先验分布列$\{\xi_n\}$,使得 $\forall \theta \in \Omega$,下式成立

$$\liminf_{n\to\infty}\left[r(\theta,\varphi^*) - \inf_\varphi \int_\Omega r(\theta,\varphi) d\xi_n(\theta)\right] \leqslant 0.$$

则 φ^* 是极小极大估计量(Wald). ([144]1199)

4. **U-统计量列不等式**:设 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 是定义于同一完备概率空间$(\Omega,\sum,P)$ 且取值于 R^1 的随机变量列,$S_0 = 0$,$S_n = \sum_{k=1}^{n}\xi_k$,$T_n = \sum_{1\leqslant k<j\leqslant n}\xi_k\xi_j$,$n = 1,2,\cdots$,$T_n^* = \max_{1\leqslant k\leqslant n} |T_k|$. 令

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2} P\{T_n^* \geqslant n^{2\alpha}\}.$$

1991 年周元燊证明:设 ξ,ξ_n 为独立同分布随机变量列,$E(\xi) = 0$,$1 < r < 2$,$\alpha r > 1$,$\alpha p > 1$,则存在常数 $c = c(\alpha,p,r) > 0$,使得

$$S \leqslant c[E|\xi|^p + (E|\xi|^r)^q], \text{式中 } q = (\alpha p - 1)/(\alpha r - 1).$$

1993 年王岳宝证明：

(1)　设 ξ, ξ_n 为任意同分布的随机变量列，$0 < p < 1$，

若 $\alpha p > 1$，则 $S \leqslant cE(|\xi|^p)$；

若 $\alpha p = 1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} P\{T_n^* \geqslant n^{2\alpha}\} \leqslant cE(|\xi|^p)$.

(2)　设 ξ, ξ_n 是独立同分布随机变量列，则当 $p = 1$ 时，下式成立

$$S \leqslant c\max\{E(|\xi|), (E|\xi|)^2\};$$

当 $\alpha p = 1, E(\xi) = 0$ 时，下式成立

$$S \leqslant c\max\{E|\xi|, (E|\xi|)^2, (E|\xi|)\ln(|\xi|+1)(E|\xi|)^3\};$$

当 $\alpha p = 1, 1 < p < 2, E(\xi) = 0$ 时，下式成立

$S \leqslant c\max\{E|\xi|^p, (E|\xi|)^2, [(E|\xi|^p)(E|\xi|)]^2\}$. ([333]1993, 38(2): 189 ~ 190)

5.　**随机抽样不等式**：设 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 是取自分布函数 F 的随机样本. $\bar{\xi} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$ 称为样本均值. $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - \bar{\xi})^2$ 称为样本方差. 应注意样本统计量 $\bar{\xi}, S^2$ 为随机变量，而本章 §2 中总体参数 $E(\xi)$ 与 σ^2 等是固定的常数，它们可以是未知的.

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\xi_k - \bar{\xi}| < \frac{(n-1)S}{\sqrt{n}}.$$

但要除去所有 n 个观察都相等或所有 ξ_k 中正好 $n-1$ 个相等的情形. (Samuelson). ([143]364 ~ 365)

6.　设 F_n^* 是一个取自分布函数 F 的随机样本的经验分布，则 $\forall t > 0$，下式成立

$$P\left\{|F_n^*(x) - F(x)| \geqslant \frac{t}{2\sqrt{n}}\right\} \leqslant \frac{1}{t^2}. \quad ([143]378)$$

7.　**K-S 距离不等式**：设 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 是来自总体分布 $F(x)$ 的简单随机样本，$\varphi(A)$ 为随机事件 A 的示性函数. $F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi\{\xi_k \leqslant x\}$ 称为经验分布函数.

$d_n = \sup\{|F_n(x) - F(x)| : x \in R^1\}$ 称为 K-S 距离(Kolmogorov-Smirnov 距离).

(1)　**DKW 不等式(Dvoretzky-Kiefer-Wolfowitz 不等式)**：$\forall t > 0$，存在不依赖于 F 的有限正常数 c，使得

$P\{d_n > t\} \leqslant ce^{-2nt^2}$.

(2)　$\forall t > 0$，存在 $c > 0$，使得

$$P\{\sup_{k \geqslant n} d_k > t\} \leqslant \frac{c}{1-r} r^n,$$

式中 $r = \exp(-2t^2)$，(Serfling). ([30]324)

注　事件 A 的示性函数 $\varphi(A)$，又称为 A 的特征函数，一般记为

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 1, x \in A, \\ 0, x \notin A. \end{cases}$$

8. **Bogolyubov 不等式**：设 H,H_1,H_2 为 Hermite 算子. 自由能泛函定义为 $f(H)=-\frac{t}{n}\ln \mathrm{T_r} e^{-H/t}$，而 $\langle H_1-H_2\rangle_{H_1}=\frac{\mathrm{T_r}[(H_1-H_2)e^{-\frac{H_1}{t}}]}{\mathrm{T_r}(e^{-H_1/t})}$ 是 Hermite 算子 H_1 的热力学平均，则

$$\frac{1}{n}\langle H_1-H_2\rangle_{H_1}\leqslant f(H_1)-f(H_2)\leqslant\frac{1}{n}\langle H_1-H_2\rangle_{H_2},\tag{3.3}$$

式中广延参数 n 是粒子数或容积，依系统而定，t 为能量单位的绝对温度.

(3.3) 式及统计力学中 Green 函数与关联函数的 Bogolyubov 不等式（见[107]1:380 ~ 381）

9. **熵不等式**：设 $p_k\geqslant 0,\sum_{k=1}^{n}p_k=1,S(x)=\sum_{k=1}^{n}(np_k)^x\ln(np_k),p=\frac{n}{n-1}-\frac{1}{\ln n}$，$q=\frac{1}{\ln n}\ln\left(\frac{n-1}{\ln n}\right)$，则 $S(p)\geqslant S(q)\geqslant 0$. ([372]1995,38:13 ~ 18)

10. **Kraft 不等式**：给定两符号集 $X=\{x_1,\cdots,x_m\}$ 和 $A=\{a_1,\cdots,a_n\}$，用 A 中元素的序列作为元素构成一个新集 $B=\{b_1,\cdots,b_m\}$，并在 X 与 B 的元素间建立某种对应关系. 此过程称为**编码**，A 称为**码元素**，其元素称为**码元**. B 称为**码**，其元素称为**码字**，码元素 A 元素个数为 $m(m\geqslant 2)$ 的码称为 m **进元码**，码元素 A 各码元所占用的时间均相同的码称为**同阶码**，组成一个码字的码元个数称为**码长**，没有相同码字的码，称为**非奇异码**，在非奇异码中，若任何有限长码字序列都能被接收者唯一地分成单个码字，则该码称为**单义码**.

设码元素 A 含 d 个码元，所需编码含 m 个码字，各码字对应码长为 $n_k(k=1,2,\cdots,m)$，则单义码存在的充要条件是：

$$\sum_{k=1}^{m}d^{-n_k}\leqslant 1.\tag{3.4}$$

若一个码的任一个码字都不是其他码字的字首，则称该码为**非延长码**（或**即时码**），(3.4) 式对于非延长码也成立.

11. 约束的 Kantorovich 不等式及其在统计中的应用见[30]273 ~ 295. 此外，线性规划所研究的领域，不过是以随机方程和不等式这个总题目出现的广泛得多的理论的一个小部分，许多物理现象都可以利用这种类型的数学方程来描述，这些数学方程中所包含的参数必须通过测量来确定，或利用计算技术得到，而计算又牵涉到舍入舍出误差等. 总之，参数实际上都是随机变量.

12. Rao 不等式，设 $OA(n,k,s,t)$ 是正交表，其中 n 是行数，k 是列数，s 是每列的水平数（这里每列水平数相等），t 是强度，则参数 n 满足：

(1) 若 $t=2m,m\geqslant 1$，则 $n\geqslant\sum_{j=0}^{m}\binom{k}{j}(s-1)^j$；

(2) 若 $t=2m+1,m\geqslant 1$，则 $n\geqslant\sum_{j=0}^{m}\binom{k}{j}(s-1)^j+\binom{k-1}{m}(s-1)^{m+1}$. ([343]24(2)(2009),249 ~ 252)

第十六章　集论与图论不等式

§1　集论不等式

1.　**基数不等式**：若集合 A 与 B 之间存在满单射（即一一映射），则称 A 与 B 对等，这时称 A 与 B 有相同的基数（或势），A 的基数记为 $|A|$（有的著作中记为 $\overline{A}$ 或 card A）.

若 A 与 B 的一个子集 B_0 对等，则称 $|A|\leqslant|B|$，若 $|A|\leqslant|B|$ 且 A 不与 B 对等，则称 $|A|<|B|$. 自然数集 N 的基数称为可数基数，记为 $|N|=a$，实数集 R^1 的基数称为连续统基数，记为 $|R^1|=c$.

(1)　若 $|A_1|\leqslant|A_2|$，$|A_2|\leqslant|A_3|$，则 $|A_1|\leqslant|A_3|$.

(2)　非空集 A 的幂集 $P(A)$ 的基数 $|P(A)|>|A|$.

(3)　$a<c<2^c$.（[146]）

(4)　**König 不等式**：任何基数 α 可以看成与其基数 α 的最小序数一致，特别地，a 对应于序数 ω_0，c 对应于序数 ω_1，等等，于是全体基数类可以看成全体序数类的子类，若 $\forall t\in T.\ \alpha_t<\beta_t$，$|T|\geqslant\omega_0$，则

$$\sum\{\alpha_t:t\in T\}<\prod\{\beta_t:t\in T\}.$$

若取 $T=N$，且若 $1<\alpha_n<\alpha_{n+1}$，则

$$\alpha_{\omega_0}=\alpha_1+\alpha_2+\cdots<\alpha_1\alpha_2\cdots.$$

(5)　设集族 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 满足条件：

①　若 $\alpha_1,\alpha_2\in I$，$\alpha_1\neq\alpha_2$，则 $|A_{\alpha_1}|\neq|A_{\alpha_2}|$；

②　若集 $\{|A_\alpha|:\alpha\in I\}$ 无最大元，则

$$\left|\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\right|<\left|\prod_{\alpha\in I}A_\alpha\right|.\ ([148]19)$$

2.　**基数不变量不等式**：使每个空间对应一个无穷基数的函数，它在同胚空间上取相同值，称为**基数不变量**（或**基数特征**）. 设 X 为任意拓扑空间，一个平凡的不变量就是集合的基数 $|X|$. 它的权 $\omega(X)$ 是 X 的基的最小基数，它的密度 $d(X)$ 是 X 的稠子集的最小基数. Suslin 数 $c(X)$ 是最小的无穷基数 τ，它使得每一个两两不交的非空开集族的基数不超过 τ，Lindelöf 数 $l(X)$ 是最小的无穷基数 τ，它使得 X 的任意开覆盖都有一个基数 $\leqslant\tau$ 的子覆盖，它们之间成立不等式：

(1)　$c(X)\leqslant d(X)\leqslant\omega(X)$，$l(X)\leqslant\omega(X)$. 但 $d(X)$ 与 $l(X)$ 之间不可比较.

(2)　存在具有不可数权的可数正规 T_1 空间，使下式成立

$$d(X)\leqslant|X|,\ l(X)\leqslant|X|；$$

(3)　若 X 为 T_0 空间，则 $|X|\leqslant\exp(\omega(X))$；

(4) 设 X 为 Hausdorff 空间,则 $|X| \leqslant \exp[\exp d(x)]$, $w(x) \leqslant \exp|X|$.

[94]Ch1 ~ 2 中还有大量类似的不等式,由于涉及过多的专有名词,本书从略.

3. **Fisher 不等式**:t 设计是 m 集合 A 上的一个 k 子集(区组)系,使得 A 的每一个 t 子集恰好出现在 λ 个区组里. 设 b 是 t 设计中的区组数,则

$$b \geqslant \begin{cases} \binom{m}{s}, & \text{若 } t = 2s, m \geqslant k + s, \\ 2\binom{m-1}{s}, & \text{若 } t = 2s+1, m-1 \geqslant k+s. \end{cases}$$

([107]5:127)

4. **集合测度不等式**:设 $(X, \sum, \mu)$ 为测度空间. $E_k \in \sum$, μ^* 为外测度,则

(1) $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$;

(2) $\mu(\liminf_{k\to\infty} E_k) \leqslant \liminf_{k\to\infty} \mu(E_k)$;

(3) 令 $A_k = \bigcup_{j=k}^{\infty} E_j$,若存在 k_0,使得 $\mu(A_{k_0}) < \infty$,则

$$\mu(\limsup_{k\to\infty} E_k) \geqslant \limsup_{k\to\infty} \mu(E_k);$$

(4) 若 $\mu^*(A), \mu^*(B) < \infty$,则

$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leqslant \mu^*(A\Delta B)$,式中 $A\Delta B = (A-B) \cup (B-A)$;

(5) $\mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(B)$;

(6) 设 $\mu(E) > 0$, f 是 E 上非负可测函数,且有

$$\frac{1}{\mu(E)}\int_E f\,\mathrm{d}\mu \geqslant c_1 > 0, \quad \frac{1}{\mu(E)}\int_E f^2\,\mathrm{d}\mu < c_2.$$

令 $E_\delta = \{x \in E: f(x) > \delta c_1\}$, $\delta > 0$,则

$$\mu(E_\delta) \geqslant \mu(E)\frac{(1-\delta)^2 c_1^2}{c_2}. \quad ([119]338)$$

5. **Hausdorff 测度不等式**:设 E 是 R^2 中可测集,$\alpha \geqslant 0$, $H_\alpha(E)$ 是集 E 的 α 维 Hausdorff 测度. 记

$$B_{\alpha,\varepsilon}(E) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(\mu(B_k))^\alpha: \{B_k\} \text{ 是 } E \text{ 的 } \varepsilon \text{ 球覆盖}\right\}, \quad B_\alpha(E) = \lim_{\varepsilon\to 0} B_{\alpha,\varepsilon}(E), \quad \text{则}$$

$$H_\alpha(E) \leqslant B_\alpha(E) \leqslant \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^\alpha H_\alpha(E).$$

([344]36(9)(2006). $H_\alpha(E)$ 的定义见[118]57)

6. 设 A, B 是 R^n 中紧集,则

$$[\mu(A \cup B)]^{\frac{1}{n}} \geqslant [\mu(A)]^{\frac{1}{n}} + [\mu(B)]^{\frac{1}{n}}. \text{([22]178)}$$

7. 子集和不等式:设 $m \leqslant k \leqslant n$, $x_k, \alpha > 0$, $E = \{1, 2, \cdots, n\}$, $D \subset E$, $\mu(D) = k$ 表示 D 中元素的个数,则

$$k^{m\alpha}\binom{n}{m}\sum_{D\subset E}\left(\sum_{j\in D} x_j\right)^{-m\alpha} \leqslant \binom{n}{k}\sum_{D\subset E}\left(\prod_{j\in D} x_j^{-\alpha}\right). \text{([305]113(3)(2006), 269 ~ 270)}$$

§2　图论不等式

三有序组$(V(G),E(G),\varphi_G)$称为图，其中$V(G)$是非空结点集合，$E(G)$是边集合，φ_G是边集E到结点无序偶(或有序偶)集合上的函数.因为每条边总是关联两个结点，所以，图常记为$G=(V,E)$.在G中结点$v\in V$关联的边数称为结点度数，记为$\deg(v)$，$\Delta(G)=\max\{\deg(v):v\in V(G)\}$称为图$G$的最大度，$\delta(G)=\min\{\deg(v):v\in V(G)\}$称为图$G$的最小度；不含有平行边和环的图称为简单图，每对结点间都有边相连的简单图称为完全图.若$G_1=(V_1,E_1)$使得$E_1\subset E,V_1\subset V$，称$G_1$为$G$的子图.

1.　**Turan 不等式**：不含r点完全图K_r的n点图的边数$m\leqslant\frac{(r-2)n^2}{2(r-1)},r\geqslant 2$.

1999 年，Staton，W. 给出了一个简洁的证明. 见[305]1999，106(3)：257 ～ 258.

2.　一组整数$0\leqslant d_1\leqslant\cdots\leqslant d_n$，其和为偶数，可以实现为一个无环和无多重边的图的顶点度数，仅当$\forall m:1\leqslant m\leqslant n-1$，下式成立

$$\sum_{k=1}^{m}d_k\leqslant m(m-1)+\sum_{k=m+1}^{n}\min\{m,d_k\}.$$

3.　**Sachs 不等式**：设$\varphi(G)$为图G的色数，即使图G着色的最小颜色数，$W(G)$是图G的密度，即G的极大完全子图中的点数，则$W(G)\leqslant\varphi(G)$.([147]5)

4.　设$\delta(G)$与$\Delta(G)$是图的顶点的最小度和最大度.G_0是G的导出子图，ε为G的邻接矩阵的最大特征值，则

(1)　$\varphi(G)\leqslant 1+\max\{\delta(G_0):G_0\subset G\}$；

(2)　$\varphi(G)\leqslant 1+\Delta(G)$；

(3)　**Wilf 不等式**：若G为连通图，则$\varphi(G)\leqslant 1+\varepsilon$，仅当$G$为完全图或奇圈时等号成立.

(4)　设p,q分别为图G的点数和边数，则

$$\frac{p^2}{p^2-2q}\leqslant\varphi(G)\leqslant 1+\left(\frac{2q(p-1)}{p}\right)^{1/2}.$$

(5)　设$\beta_0(G)$为G中两两不相邻的点的最大个数，则

$$\frac{p}{\beta_0}\leqslant\varphi(G)\leqslant p+1-\beta_0.\quad([147]6\sim 8)$$

5.　设l是G中最长道路的长度，则$\varphi(G)\leqslant l+1$.

6.　图G的初等同态ε是将G的两个非相邻的点同化，则

$$\varphi(G)\leqslant\varphi(\varepsilon(G))\leqslant 1+\varphi(G).$$

7.　**Fink 不等式**：

(1)　$2\sqrt{p}\leqslant\varphi(G)+\varphi(\overline{G})\leqslant p+1$；

(2)　$p\leqslant\varphi(G)\cdot\varphi(\overline{G})\leqslant\left(\frac{p+1}{2}\right)^2$.

No. 5 ～ 7 见[147]8 ～ 9，式中$\overline{G}$是G的补图，即由图G中所有结点以及所有能使G成

为完全图的添加边所组成的图.

8. 设 $P_a(G)$ 为 G 的置换图,则

$$\varphi(G) \leqslant \varphi(P_a(G)) \leqslant \left\{\frac{4}{3}\varphi(G)\right\}. \quad ([147]11)$$

9. **Read 不等式**:$\varphi_G(\lambda)$ 表示最多用 λ 种颜色的图 G 的不同着色数,称为标定图 G 的色式,设 G 为连通图,则 $\varphi_G(\lambda) \leqslant \lambda(\lambda-1)^{p-1}$,$(\lambda \in N)$.

10. **Vizing 不等式**:设 $\varphi_1(G)$ 是图 G 的线色数,即给 G 的边指定颜色使得没有两条邻接的边具有相同颜色的最小颜色数,则

(1) $\Delta(G) \leqslant \varphi_1(G) \leqslant \Delta(G)+1$;

(2) $2\left[\frac{p+1}{2}\right]-1 \leqslant \varphi_1(G)+\varphi_1(\overline{G}) \leqslant p+2\left[\frac{p-2}{2}\right]$;

(3) $0 \leqslant \varphi_1(G)\varphi_1(\overline{G}) \leqslant (p-1)(2\left[\frac{p}{2}\right]-1)$.

11. **全色数不等式**:设 $\varphi_2(G)$ 是图 G 的全色数,即给 G 的元素(点和边)着色使得相伴的元素(即相邻的点或边,或关联的点和边)具有不同颜色所需要的最小颜色数,$K_{n_1,n_2,\cdots n_k}$ 为完全 k- 部图,则

(1) $\varphi_2(K_{n,m,p}) \leqslant \Delta(K_{n,m,p})+2$.

(2) $\varphi_2(K_{n,n,\cdots,n}) \leqslant \Delta(K_{n,n,\cdots,n})+2$.

(3) **Behzad 猜想(全着色猜想)**:$\varphi_2(G) \leqslant \Delta(G)+2$.

1971 年 Vijayaditva 证明对于 $\Delta \leqslant 3$ 时的图,该猜想是正确的.([147]17)

12. **消色数不等式**:图 G 的消色数 $\psi(G)$ 是 G 的所有完全同态的最大阶,则

(1) $\psi(G) \leqslant p-\beta_0(G)+1$. (2) $\psi(G)+\psi(\overline{G}) \leqslant p+1$.([147]18)

13. **连通度不等式**:$K(G)$ 表示图的(点)连通度,即使 G 不连通或成为一个点所要移去的点的最小数目.

(1) 若 H 是 G 的一个生成子图,则 $K(H) \leqslant K(G)$.

(2) **Whitney 不等式**:设 $\lambda(G)$ 表示 G 的线连通度,即使 G 不连通所需要移去的边的最小数目,则 $K(G) \leqslant \lambda(G) \leqslant \delta(G)$.(式中 $\delta(G)$ 见 No. 4)

(3) 设图 G 的 $p \geqslant 2$,则

$1 \leqslant \lambda(G)+\lambda(\overline{G}) \leqslant p-1$; $0 \leqslant \lambda(G)\lambda(\overline{G}) \leqslant M(p)$.

式中

$$M(p)=\begin{cases}\left[\frac{p-1}{2}\right]\left\{\frac{p-1}{2}\right\}, & \text{若 } p=0,1,2 \bmod 4,\\ \left(\frac{p-3}{2}\right)\left(\frac{p+1}{2}\right), & \text{若 } p=3 \bmod 4.\ ([147]21\sim 24)\end{cases}$$

14. **图的韧性不等式**:设 $m(G)$ 表示图 G 的分支数,$\tau(G)$ 为图 G 的韧性,即使 G 是 t- 柔韧的最大的 t,其中图 G 的 t- 柔韧是指对 G 的每个点集 A. $m(G-A)>1 \Rightarrow |A| \geqslant tm(G-A)$,则

(1) $\tau(G) \geqslant m(G)/\beta_0(G)$;

(2) 若 $\tau(G)<\infty$,则 $\tau(G)\leqslant(1/2)m(G)$;

(3) 若 $\beta_0(G)\geqslant 2$,则 $\tau(G)\leqslant\dfrac{p-\beta_0(G)}{\beta_0(G)}$. (Chvatal,1973,[147]31)

15. **图的覆盖数与独立数不等式**:图 G 的点与边覆盖数分别记为 α_0,α_1,G 的一个点(或边)集中间没有两个相邻,则称是独立的,点(或边)独立集中的最大的点(或边)称为 G 的点(或边)独立数,分别记为 β_0,β_1.

(1) $\alpha_0(G)\geqslant\delta(G)$;

(2) $\alpha_0\geqslant\beta_1,\alpha_1\geqslant\beta_0$;

(3) $\beta_0(G)\leqslant\theta(G)$,式中 θ 是 G 的最小团数,这些团的顶点之并为 $V(G)$;

(4) 设 G 是偶图,则 $q\leqslant\alpha_0(G)\beta_0(G)$,仅当 G 为完全偶图时等号成立;

(5) 设 $\alpha_{00}(G)$ 是 G 的外固数,即覆盖 G 的点集所需要的最小点数,则

$$\alpha_{00}(G)\leqslant\alpha_0(G).\ ([147]32\sim 35)$$

16. **图的点荫度不等式**:$\rho(G)$ 为 G 的点荫度,即是 G 的最小的子集数,G 的点集可以划分成这些子集使得每个子集导出一个无圈的子图,则

(1) $\rho(G)\leqslant 1+\left[\dfrac{\max\delta(G_0)}{2}\right]$,式中 G_0 是 G 的导出子图.

(2) $\rho(G)\leqslant\varphi(G)\leqslant 2\rho(G)$. ([147]39 ~ 41)

17. **Ramsey 数不等式**:图 F_1 和 F_2 的 Ramsey 数 $r(F_1,F_2)$ 定义为使得对任何 n 阶图 G,F_1 是 G 的一个子图,或 F_2 是 $\overline{G}$ 的一个子图的最小整数 n.

(1) **G-G(Greenwood-Gleason) 不等式**:

$$r(K_n,K_m)\leqslant r(K_n,K_{m-1})+r(k_{n-1},K_m),\ \forall m,n\geqslant 2. \tag{2.1}$$

若右边的项都是偶数,则成立严格不等式.

(2) **E-S(Erdös-Szekeres) 不等式**:

$$r(K_n,K_m)\leqslant\binom{n+m-2}{n-1}. \tag{2.2}$$

由此推出:$r(3,K_n)\leqslant\dfrac{n^2+n}{2}$.

(3) **Bondy-Murty 不等式**:设 $s=\min\{n,m\}$,则

$$r(K_n,K_m)\geqslant 2^{s/2}. \tag{2.3}$$

问题:为何确定 Ramsey 数,即使在完全图情形都仍然是一个未解决的问题.

([147]42 ~ 43)

(4) 刘富贵在[344]2002,32(1):97 ~ 99 中得到下述结果:设整数 $m,n,p\geqslant 3$,则

$$r(K_m,K_{n+p-2})\geqslant r(K_m,K_n)+r(K_m,K_p)-1. \tag{2.4}$$

但张忠辅举出反例证明(2.4)式不成立:$r(3,3)=6,r(3,4)=9$,但按(2.4)式,就会得出 $9=r(3,4)=r(3,3+3-2)\geqslant r(3,3)+r(3,3)-1=11$. ([344]2002,32(4):686)

我们问:使(2.4)式成立的条件是什么?

(5) $r(K_n,K_m)\geqslant\exp\left\{\dfrac{(K_n-1)(K_m-1)}{2(K_n+K_m)}\right\}$.

(6)　苏文龙对 Ramsey 数的下界作了深入的系统研究，参看[399]1999，12(6)：121 ～ 122；[364]1999，29(5)：408 ～ 413；[333]1997，42(22)：2460；1998，43(12)：1336 ～ 1337；广西民族学院学报 1997，3(2)：119 ～ 120；4：6 ～ 7；Austra. J. Comb. 1999，19：91 ～ 99 等.

18.　**广义 Ramsey 数不等式**：；图 $F_k(1\leqslant k\leqslant m)$ 的 Ramsey 数 $r(F_1,\cdots,F_m)$ 定义为使得用 m 种颜色给 K_n 的边着色时，对某种颜色 k，K_n 包含一个单色的 F_k 的最小整数 n.

(1)　$r(K_{n_1},\cdots,K_{n_m})\leqslant r(K_{n_1-1},K_{n_2},\cdots,K_{n_m})+r(K_{n_1},K_{n_2-1},\cdots,K_{n_m})+\cdots+r(K_{n_1},\cdots,K_{n_m-1})-m+2$.

(2)　$r(K_{n_1+1},\cdots,K_{n_m+1})\leqslant\dfrac{\left(\sum\limits_{k=1}^{m}n_k\right)!}{n_1!n_2!\cdots n_m!}$. ([147]48)

19.　**图值函数不等式**：图 G 的线图 $L(G)$ 定义为以 G 的边集作为 $L(G)$ 的点集. 两个点在 $L(G)$ 中相邻(邻接)，仅当它们对应的 G 的边相邻. 图 G 的圈重数 $CM(G)$ 定义为 G 的边不相交的圈的最大个数；G 的全图 $T(G)$ 是以 G 的元素(点和边)作为它的点，$T(G)$ 的两点相邻，仅当对应的元素是相伴的(相邻或关联的).

(1)　$CM(L(G))\geqslant CM(G_e)+\sum\limits_{k=1}^{p}\left\{\dfrac{d(v_k)}{3}\left[\dfrac{d(v_k)-1}{2}\right]\right\}$，式中 G_e 是由偶度点导出的子图，$[\cdot]$ 是整数部分.

(2)　$CM(T(G))\geqslant q+CM(G_e)+\sum\limits_{k=1}^{p}\left\{\dfrac{d(v_k)}{3}\left[\dfrac{d(v_k)-1}{2}\right]\right\}$，$q$ 为 G 的边数.

(3)　$\alpha_1(G)\leqslant\beta_0(T(G))\leqslant\left[\dfrac{3}{2}\alpha_1(G)\right]$，式中 $\alpha_1(G)$，$\beta_0(G)$ 分别是 G 的线覆盖数和点独立数. ([147]66 ～ 70)

20.　**图的和与积不等式**：图 G 与 H 的和 $G+H$ 是由 $G\cup H$ 及所有位于 G 的每一顶点和 H 的每一顶点之间的边组成；图 G 与 H 的卡氏积 $G\times H$ 是点集为 $V(G\times H)=V(G)\times V(H)$ 的图，边定义为：(v_1,u_1) 与 (v_2,u_2) 邻接，若 $v_1=v_2$ 且 u_1 与 u_2 邻接；或者 v_1 与 v_2 邻接且 $u_1=u_2$，$\varphi_1(G)$，$\varphi_2(G)$ 分别见 No. 10. No. 11. G 的最大度记为 $\Delta(G)$. 注意 $\Delta(G\times H)=\Delta(G)+\Delta(H)$. 若 $\varphi_1(G)\leqslant\varphi_2(H)$，则

$$\Delta(G)+\Delta(H)+1\leqslant\varphi_2(G\times H)\leqslant\varphi_2(H)+\varphi_1(G).\ ([147]77 \sim 81)$$

21.　**图嵌入不等式**：图 G 的 betti 数 $b(G)=q-p+k$，式中 k 是 G 的连通分支数；图 G 的亏格 $\gamma(G)$ 是 G 能够嵌入其中的曲面的最小亏格.

(1)　**Duke 猜想**：对任何连通图，$b(G)\geqslant 4\gamma(G)$.

已知亏格为 0，1，2 的图，上式成立，亏格为 4 或大于 4 的图，猜想不成立，但对亏格为 3 的图，上式是否成立还未解决.

(2)　若图 G 嵌在曲面 S 中，则 $q\leqslant 3p-6[1-\gamma(S)]$.

(3)　图 G 的糙度 $c(G)$ 定义为 G 中边不相重的不可平面子图的最大个数，

①　若 $m=3k+2$，$n=3r+1$，则

$$c(K_{m,n}) \leqslant kr + \min\left\{\left\lceil\frac{k+r}{3}\right\rceil, \left\lceil\frac{2r}{3}\right\rceil, \left\lceil\frac{8k+16r+2}{39}\right\rceil\right\};$$

② 若 $m = 3k+2, n = 3r+2$，则

$$c(K_{m,n}) \leqslant kr + \min\left\{\left\lceil\frac{k+2r}{3}\right\rceil, \left\lceil\frac{2k+r}{3}\right\rceil, \left\lceil\frac{16k+16r+4}{39}\right\rceil\right\}.$$

([147]123 ~ 128)

22. **图重构不等式**：$r(p,n)$ 是区别有 n 个点不标定的 p 阶图所需要的删点子图 $G_k = G - v_k$ 的最小个数，则

(1) $r(p,p) \geqslant [\frac{p}{2}] + 2$.

(2) 当 $0 < n < p$ 时，$r(p,n) \geqslant \left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil + 2$.

问题：(1) 与(2) 中的下界都不是最好的，为何求出最佳下界？

(3) **重构猜想**：$r(p,p) \leqslant p$. ([147]143 ~ 144)

23. **图的几何量不等式**：$g(G)$ 是图 G 的围长，即 G 中最短圈的长；$cr(G)$ 是 G 的周长，即 G 中最长圈的长；$e(G)$ 是 G 的点 v 的离心率，即遍历 G 的所有点 u 的 $d(v,u)$ 的最大值，$d(G)$ 是 G 的直径，即 G 的点的最大离心率，$r(G)$ 是 G 的半径，即 G 的点的最小离心率.

(1) 设 G 是连通的且不是树，则 $g(G) \leqslant 2d(G) + 1$；

(2) $r(G) \leqslant d(G) \leqslant 2r(G)$；

(3) 设 $G, \overline{G}$ 都是连通的，则 $d(G) + d(\overline{G}) \leqslant p + 1$；

(4) 设 G 是连通的，且 G 的直径 $d(G)$ 简记为 d，则

$$2d - 3 - \frac{d^2 - d - 4}{p} \leqslant \frac{p^2 - 2q}{p}.$$ ([147]188 ~ 189)

24. 我们在第 4 章 §3. 三. No. 6 中提到图论中的离散等周不等式，但大多数图的等周不等式仍不知道.

25. 图上 Harnack 型不等式：设 V 为图 G 的顶点集，E 为 G 的边集，d_v 表示与图 G 的顶点 v 相接的边的个数，x, y 是图 G 的顶点，(x,y) 表示连接 x 和 y 的边. 设 G 是局部有限图，即 $d_v < \infty$.

若 $f: V \to R^1$，则图 G 的 Laplace 算子定义为：

$$L(f,x) = \frac{1}{d_x} \sum_{(x,ax)\in E} | f(x) - f(ax) |.$$

若 $L(f,x) = \lambda f(x)$，称 f 是图 G 上以 λ 为特征值的调和特征函数. 这时成立 Harnack 不等式：

$$d_x^{-1} \sum_{(x,ax)\in E} | f(x) - f(ax) |^2 \leqslant c\lambda \max_z f^2(z). \quad (c > 0) \qquad (2.5)$$

但是，对于一般的图 G，(2.5) 式不成立.

2009 年，林勇得到有限图上的弱型 Harnack 型不等式，即：

设 G 是有限图，f 是 G 的以 λ 为特征值的特征函数，则 $\forall x \in V(G)$，$\alpha > 2$，下式成立

$$\frac{1}{d_x}\sum_{(x,ax)\in E}|f(x)-f(ax)|^2+\alpha\lambda f^2(x)\leqslant\frac{\alpha^2\lambda-2\lambda-2\alpha}{\alpha\lambda-2\lambda-2}\lambda\max_y f^2(y);$$

取 $\alpha=k+\frac{2}{\lambda}$, $k>2$, 则

$$\frac{1}{d_x}\sum_{(x,ax)\in E}|f(x)-f(ax)|^2+(k\lambda+2)f^2(x)\leqslant\left(\frac{k^2-2}{k-2}\lambda+\frac{2k}{k-2}\right)\max_y f^2(y).$$

([334]52(3)(2009),611 ~ 614)

26. 若能将无向图 G 画在平面上,使其除顶点外,无边相交,则称 G 为平面图.设 G 的顶点数为 n,边数为 m,面数为 r.

(1) 若 G 是有 k 个连通分支的平面图,且各面的次数至少为 l ($k\geqslant 2$, $l\geqslant 3$), 则

$$m\leqslant\frac{l}{l-2}(n-k+1).$$

(2) 若 G 是连通的平面图,则 $m\leqslant\frac{l}{l-2}(n-2)$.

(3) 设 G 是 n 阶 m 条边的简单平面图($n\geqslant 3$), 则 $m\leqslant 3n-6$.

(4) 若 G 中不存在长度为 k 的路,则 $m\leqslant\frac{n}{2}(k-1)$.

27. $\delta(G)\leqslant\frac{2E(G)}{V(G)}\leqslant\Delta(G)$. ([145]654)

第十七章　不等式常用证法55种

[144]666 指出,不等式是广泛使用的一种技巧性工具,但是在不等式的证明中,除了"对实数 x, $x^2 \geqslant 0$"等极其一般的原理外,统一的方法不太多,而对同一个不等式能用几种方法来证明的情形则较多. 例如,AG 不等式(第一章 § 3)、Kantorovich 不等式(第三章 No. 95)、Hilbert 不等式(第三章 No. 157,第十一章 § 2. No. 42,第十三章 No. 2)、Hadamard 不等式(第十章 § 1. No. 1)、L-K 不等式(第十二章 § 3. No. 5)等许多著名的不等式都有上十种以至上百种不同的证明方法. 20 世纪 70 年代以来,大量新不等式的涌现和原有不等式的改进,自然伴随着不等式证明方法的增多,在此基础上就有可能进一步总结出各种普遍性证法. 本章只限于从本书所收入的不等式中,总结出 55 种有代表性的常用证法,其中大多数是大中学数学教学和各种数学竞赛中常用的. 其目的仅在于开拓读者的思路,因为这里并不能包括不等式极其丰富的证明方法与技巧. 对于较复杂的不等式,除了要注意多种证法的灵活使用外,还往往用到其他领域的方法技巧.

1.　**比较法**: $a > b$ 等价于 $a - b > 0$;而 $a > b > 0$ 等价于 $a/b > 1$. 即 a 与 b 的比较转化为与 0 或 1 的比较. 使用比较法时,关键是要作适当变形,如因式分解、拆项、加减项、通分等,这是第三章中许多代数不等式的证明及其他各章初等不等式的证明所常用的证明技巧.

2.　**分析与综合法**:综合法是由已知条件和已知的不等式出发,推导出所要证明的不等式;分析法则是要逐步找出使结论成立的充分条件,最后归结为已知的不等式或已知条件. 对于条件简单而结论复杂的不等式,往往要通过分析法或分析法与综合法交替使用来寻找证明的途径. 还要注意:第一,要熟悉掌握第一章的基本不等式和后面各章中著名的不等式;第二,要善于利用题中隐含条件,例如第四章的几何不等式;第三,不等式的各种变形技巧. 例如第一章 § 3 AG 不等式的各种证明技巧.

3.　**反证法**:设所要证的不等式不成立,从原不等式的结论的反面出发,通过合理的逻辑推理导出矛盾,从而断定所要证的不等式成立. 要注意对所有可能的反面结果都要逐一进行讨论. 例如第三章 No. 18,C_p 不等式及其推广的证明,第三章 No. 132,第五章 § 1. No. 21,62,第六章 § 2. No. 5. 第六章 § 3. No. 4,18,19,第七章 § 1. No. 47,第十一章 § 1. No. 69,70,第十二章 § 3. No. 21 等.

4.　**放缩法**:要证 $a < b$,又已知(或易证)$a < c$,则只要证 $c < b$,这是利用不等式的传递性,将原不等式里的某些项适当放大或缩小,或舍去若干项等,例如第五章 § 1. No. 12 与[345]1986,1:16 ～ 20 等.

5.　**数学归纳法**:与自然数 n 有关的许多不等式,可考虑用数学归纳法证明. 但要注意:

第一,数学归纳法有多种形式. 李大元就证明了下述七种等价的形式:设 $P(n)$ 是与 n

有关的命题，则

(1)　设 $P(n_0)$ 成立，且对于任意 $k > n_0$，从 $P(k)$ 成立可推出 $P(k+1)$ 成立，则 $P(n)$ 对所大于 n_0 的 n 都成立.

(2)　设 m 是任给的自然数，若 $P(1)$ 成立，且从 $P(k)(1 \leqslant k < m)$ 成立可推出 $P(k+1)$ 成立，则 $P(n)$ 对所有不超过 m 的 n 都成立.

(3)　(反向归纳法) 设有无穷多个自然数 n(例如 $n = 2^m$)，使得 $P(n)$ 成立，且从 $P(k+1)$ 成立可推出 $P(k)$ 成立，则 $P(n)$ 对所有 n 成立. 例如，证 AG 不等式时，从 $n = 2$ 成立证 $n = 3$ 成立就比较困难，而证 $n = 4$ 成立则可成对搭配，由此想到第一步应先证 $n = 2^k$ 时成立(称为超前归纳)，第二步再证：若 $n = k(k \geqslant 2)$ 时命题成立，则 $n = k-1$ 时命题也成立(称为反向归纳).

(4)　若 $P(1)$ 成立，且 $P(n)$ 对所有满足 $1 \leqslant n \leqslant k$ 的 n 成立可推出 $P(k+1)$ 成立，则 $P(n)$ 对所有 n 成立.

(5)　(最小数原理) 自然数集的非空子集中必有一个最小数.(第二章 §2.七.No.7)

(6)　若 $P(1)$，$P(2)$ 成立，且若 $P(k)$，$P(k+1)$ 成立可推出 $P(k+2)$ 成立，则 $P(n)$ 对所有 n 成立；

(7)　(无穷递降法) 若 $P(n)$ 对某个 n 成立可推出存在 $n_1 < n$，使得 $P(n_1)$ 成立，则 $P(n)$ 对所有 n 成立.(数学教学，1987，3：3 ～ 6)

此外，还有螺旋归纳法(又叫翘翘板归纳法)：设有两个命题 $P(n)$，$Q(n)$，若 $P(1)$ 成立，又从 $P(k)$ 成立可推出 $Q(k)$ 成立，并且从 $Q(k)$ 成立可推出 $P(k+1)$ 成立，其中 k 为任给自然数，则 $P(n)$，$Q(n)$ 对所有 n 都成立，它可推广到两个以上的命题. 可参见华罗庚的《数学归纳法》，上海教育出版社，1964，李成章[99]1991(6 ～ 9)：152 ～ 162.

这些形式虽然等价，但在不同情形中使用各有方便之处. 在使用它们时，若能注意运用变形和放缩等技巧，往往可收到化难为易的奇效.

例如，第一章 §3 AG 不等式从 $G_n \leqslant A_n$ 推出 $G_{n+1} \leqslant A_{n+1}$，就总结了 8 种不同的技巧；用数学归纳法直接证 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2$ 失效，而使用"加强命题"技巧，易证 $S_n < 2 - \frac{1}{n}$；同样，第二章 §3.No.12 中用数学归纳法直接证 $S_m \leqslant 1 - \frac{1}{2^m}$ 很困难，但证 $S_m \leqslant \frac{1}{n_0}(1 - \frac{1}{2^m})$ 却容易；又如第十一章 §1.No.9，数学竞赛的命题者给出的证明用了四次数学归纳法，而使用"加强命题"技巧，只用了一次数学归纳法就得出所需的结论；第十一章 §1.No.61 直接用数学归纳法证 $A_{n+1} > B_n$ 也很困难，通过"加强命题"技巧，却易证 $A_{n+1} > 3B_n$；有些不等式与两个独立的自然数 m，n 有关，可考虑用二重数学归纳法，即若要证命题 $P(m,n)$ 对所有 m，n 成立，可分两步：① 先证 $P(1,n)$，$P(m,1)$ 对所有 m，n 成立；② 设 $P(m+1,n)$，$P(m,n+1)$ 成立，证明 $P(m+1,n+1)$ 也成立. 可参见第二章 §2.No.21.

第二，数学归纳法与其他方法的综合运用，例如第六章 §3.No.4.(3)，证明 $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\sin kx > 0$，$(0 < x < \pi)$ 就要综合运用数学归纳法、反证法与极值法；有时可将 n 换

成连续量 x，用微分法或积分法. 第三章 No. 72 中，Weierstrass 不等式可用数学归纳法，也可用概率论方法.

第三，并不是所有含 n 的不等式都能用数学归纳法证明的. 例如第九章 §2 Bieberbach 猜想，第三章 No. 156Shapiro 猜想等.

还可参看第二章 §1，第三章 No. 67，72，76，85，139，142，153，第四章 §2. No. 80，第五章 §1. No. 70，第六章 §1. No. 4，第七章 §1. No. 1，第九章 §1. No. 31，第十章 §1. No. 7；第十一章 §1. No. 7，10，14，17，19，21，26，27，30，49，52，54，60，第十三章 No. 34，63 等，都从不同侧面反映了使用数学归纳法的各种技巧.

6.　**换元法**：设 a,b,c 为三角形边长，作换元：$x=\frac{b+c-a}{2}$，$y=\frac{c+a-b}{2}$，$z=\frac{a+b-c}{2}$，就可将几何不等式 $f(a,b,c)\geqslant 0$ 转化为正数 x,y,z 的代数不等式 $g(x,y,z)\geqslant 0$. 更一般地，若对于所有非负实数 x_k，$1\leqslant k\leqslant n$，$F(x_1,\cdots,x_n)\geqslant 0$，令 $y_k=\varphi_k(x_1,\cdots,x_n)$，使得 $y_k\geqslant 0(1\leqslant k\leqslant n)$，则 $F(y_1,\cdots,y_n)\geqslant 0$. 适当选取不同的 φ_k，可以统一证明许多几何不等式、代数不等式和其他不等式. 有的代数不等式，可作三角代换，例如，在 $x^2+y^2\leqslant 1$ 的条件下，可考虑设 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$(0\leqslant r\leqslant 1)$，但有时则失效(如设 $x^2+y^2\leqslant 1$，要证 $3\leqslant|x+y|+|y+1|+|2y-x-4|\leqslant 7$ 作三角代换无用，这时可利用 $1+y\geqslant 0$，$4-2y+x\geqslant 0$，化为 $-2\leqslant|x+y|+x-y\leqslant 2$；反之，有些三角不等式，可作万能代换 $t=\mathrm{tg}\frac{x}{2}$ 或用正弦定理等化为代数不等式(应注意可能引起定义域的改变)，例如见第五章 §1. No. 15.

7.　**抛物线技巧(包括配方与判别式法)**：某些代数式配方后，化为 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的形式，若 $a>0$，则 $\Delta=b^2-4ac\leqslant 0$ 等价于 $f(x)\geqslant 0$. 有些 $f(x)$ 形式上不是代数式，例如，$f(x)=a\sin x\cos x+b(\sin x+\cos x)+1(a>0)$，令 $t=\sin x+\cos x$，就可化为 t 的二次三项式；在证柯西不等式等类似问题时，还可构造二次三项式；第六章 §1. No. 1，2 中的抛物线不等式，看起来简单，却是很有用的抛物线技巧. 有时可利用卡丹公式：三次代数多项式 $f(x)=x^3+px+q$ 有三个实根的充要条件是判别式 $\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3\leqslant 0$. 通过判别式，第三章 No. 5(1) 将二元函数不等式转化为一元函数不等式. 此外见第三章 No. 7，52，113，第五章 §1. No. 55，第九章 §1. No. 24 等.

8.　**松驰变量法(引入参数法)**：它的基本思想是引入新的变量(称为松驰变量)，将不等式转化为等式处理. 例如要证 $\sum a_kx_k\leqslant b$，可引入松驰变量 y，用 $\sum a_kx_k+y=b$，$y\geqslant 0$ 来代替，从而可用各种恒等变换技巧. 若关系式中出现隐含条件 $x_k\geqslant c_k(c_k\neq 0)$，则可引入新变量 y_k，并令 $x_k=y_k+c_k$，将它代入关系式中消去 x_k，则 $x_k\geqslant c_k$ 就变成 $y_k\geqslant 0$；对于各种平均不等式、Hölder 不等式，也可引入参数([99]2，(1989)，32～37)；若 $a\geqslant b\geqslant c$，则可令 $x=a-c$，$y=b-c$，于是将问题转化为对非负数 x,y 进行推导. (第三章 No. 48，49)

9.　**几何证法**：除了用几何方法证明几何不等式外，利用三个正数 a,b,c 能构成三角形边长的各种条件，可以沟通代数不等式与几何不等式，因而某些代数不等式可用平面几何方法、立体几何方法或解析几何方法；利用三角形的边角关系，如正弦定理、余弦定理、正切定理、射影定理、面积公式、半角公式等，可将三角形边长与内角的不等式相互转化. Fourier 级数理论中的 Bessel 不等式也可用几何方法证明.（第三章 No. 36,38,39,54,128,133；第五章 §1. No. 134 等）

10.　**复数证法**：除了用它证明第九章中的不等式外，还可证明积分不等式（注意到用复变函数论中留数理论可以计算积分）；某些初等不等式用复数方法可以得到简捷的证明，如第三章 No. 38 既可用平面几何方法（构造直角三角形），也可用复数三角不等式；甚至某些含自然数的不等式，也用到复变函数理论.（第二章 §1. No. 12；第三章 No. 157（Hilbert 不等式）；第四章 §1. No. 19(28)；第五章 §1. No. 8.；胡克[121] 中的 Milin-Lebejev 方法等）

11.　**逐步调整法**：1984 年陈永林证明了逐步调整法的一般形式：设 f 定义在集 D 上，若对 D 中任意 $x_k, y_k, k=1,2, x_1+x_2=y_1+y_2$ 满足：$f(x_1)+f(x_2)<f(y_1)+f(y_2) \Leftrightarrow |y_1-y_2|<|x_1-x_2|$，则对 D 中任意一组数 $x_k(1\leqslant k\leqslant n)$，有 $\sum f(x_k)\leqslant nf(c)$；若 f 在 D 上恒为正，且 $x_1+x_2=y_1+y_2$，满足 $f(x_1)f(x_2)<f(y_1)f(y_2)\Leftrightarrow |y_1-y_2|<|x_1-x_2|$，则对 D 中任意一组数 $x_k(1\leqslant k\leqslant n)$，有 $\prod f(x_k)\leqslant (f(c))^n$，仅当所有 x_k 相等时等号成立，式中 $c=\frac{1}{n}\sum x_k$. 可由此发现和统一证明许多几何不等式、三角不等式、A-G 不等式、Chebyshev 不等式等，详见[345]1984，12：18 ～ 19，34. 南京师院学报，1982，3：65.

1989 年华强将逐步调整法推广到多元函数 $y=f(x)$，式中 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in R^n$. 若 $\sum x_k=nc$，且对任意 $1\leqslant i<j\leqslant n$，固定 $x_k(k\neq i,j)$，y 随 $|x_i-x_j|$ 的减小而减小，则 $f(x)\geqslant f(\bar{c})$，式中 $\bar{c}=(c,\cdots,c)$. 若 y 随 $|x_i-x_j|$ 的减小而增加，则不等号反向. 若 $\prod x_k=c^n$，也有类似的结论. 特别，若 $y=f(x)$ 关于 $x_1,\cdots,x_n$ 对称（即将其中任何两个量对换后，表达式都不变），则 y 随 $|x_i-x_j|$ 减小时变化的性质只要考查 x_1,x_2 即可.（第三章 No. 150；第五章 §1. No. 73；[99]4(1989)，64 ～ 72）

12.　**面积、体积比较法**：按积分的几何意义，证明某些积分不等式，例如第十三章 No. 1(9)Polya 不等式可归结为面积或体积大小的比较；又积分作为积分和的极限，某些代数不等式、数列或级数不等式也可归结为面积、体积的比较（当然可推广到集合测度大小的比较）.（第三章 No. 112,133；第四章 §1. 六. No. 19）

13.　**抽屉原理（又叫鸽舍原理或狄利克雷原理）**：设有 $n+1$ 个（或更多）物体装入 n 个盒子，则至少有一个盒子装有两个物体，或更一般地，设有 $m_1+\cdots+m_n+1$ 个（或更多）物体放在 n 个盒子中，则不管如何放，下述 n 个事件中总有一个成立：第 k 个盒子中至少有 m_k+1 个物体（$1\leqslant k\leqslant n$）. 抽屉原理看起来非常简单，也容易用反证法证明它. 但如何设计具体的"抽屉"时，却变化多，技巧性强，因而应用广泛，特别是用于数论和组合数学中.

某些几何与分析问题也可转化为利用抽屉原理. 例如，若 n 个图形面积之和小于 S，则不能用它们来覆盖面积为 S 的图形；若 n 个正数的算术平均大于 a，则在这些数中至少有一个数大于 a 等.

在抽屉原理的推广中，有著名的**瑞姆塞定理**：设集合 S 中有 n 个元素. S 的子集中只有 m 个元素的子集有 $r = \binom{n}{m}$ 个，记为 $A_1^{(m)},\cdots,A_r^{(m)}$，把这种子集的全体分成互不相交的 k 类，则对于任意自然数 $n_j \geqslant m, 1 \leqslant j \leqslant k$，只要 n 充分大，下述 k 个事件中总有一个成立：

存在 S 的一个有 n_j 个元素的子集 S_j，S_j 的任意一个具有 m 个元素的子集都在第 j 类中，$1 \leqslant j \leqslant k$.

使上述定理成立的最小数 n，称为瑞姆赛数，它与 $m, n_j (1 \leqslant j \leqslant k)$ 有关. 对于一般给定的的 $n_j \geqslant m, 1 \leqslant j \leqslant k$，如何求出瑞姆赛数，是一个难题，目前只有一些特殊结果.（第二章 § 3. No. 15 连分数不等式，特别是 Dirichlet 不等式、Hurwitz 不等式的证明；第三章 No. 52,62；第四章 § 1. 六，No. 18）

14.　**排列组合方法**：除了用于证明第二章组合数不等式外，还可用于证明某些数论函数不等式.（第二章 § 2，六，[345]1982，4:31 ~ 32）

15.　**函数的单调性**：利用函数的单调性，不但可以证明许多不等式，还是发现和构造新不等式的基本工具，第八章 § 1 详细叙述了函数单调性概念的各种推广及其单调性判别法. 此外，可见第一章 § 3 AG 不等式、Fan Ky 不等式的加权形式，第二章 § 1. 一 No. 16，第五章 § No. 1,2,12,15，§ 3. No. 55 等的证明.

16.　**凸函数方法**：第七章 § 1 对凸函数基本概念及其推广，各种凸函数不等式作了详细论述，这是构造和证明大批不等式的基本方法. 例如第一章 § 3，AG 不等式(3. 31) 与 (3. 171) 式的证明；第三章 No. 18(C_p 不等式)，No. 27(Young 不等式)、No. 68,69,73,78,164，第四章中大量的几何不等式的证明都用到了函数的凸性.

17.　**利用中值定理**：包括微分中值定理和积分中值定理，例如第十三章 No. 41 的证明中这两个中值定理都要用到. 在现行数学分析教材中，它们都写成等式形式，例如 $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$，式中的 c，只知道与 a,b,f 有关，但对于许多应用来说，只要知道导数 $f'(x)$ 的上、下界：$m \leqslant f'(x) \leqslant M$，就得出不等式：

$$m \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant M.$$

因此，[74] 第八章指出，中值定理的实质是由不等式的形式揭示出来的. 可导条件可减弱为存在单侧导数 $f'_-(x), f'_+(x)$，或 Dini 导数.（第十二章 § 3. No. 1,32,47，第十三章 No. 9,13,41）这种中值不等式还可推广到 Banach 空间中去. 设 $E=(a,b)$，Y 是 Banach 空间，$f: E \to Y$ 是连续映射，$\varphi: E \to R^1$ 递增连续. 若存在 E 中至多可数集 A，使得 $\forall x \in E-A$，f,φ 在 x 点可导且 $= \| f'(x) \| \leqslant | \varphi'(x) |$，则 $\| f(b)-f(a) \| \leqslant \varphi(b)-\varphi(a)$.

18.　**极值方法**：包括 Lagrange 乘数法、最小二乘法等. [1] 指出，函数的极值理论是发现和证明不等式的万能武器，其中第一章 § 3 证 AG 不等式与第三章 No. 9 的变形技巧；第三章 No. 48,49,51 利用变量的对称性，用局部固定法，将多元函数的极值转化为一

元函数的极值处理.(第三章 No. 92)

最小二乘法是根据一组数据(x_k, y_k), $1\leqslant k\leqslant n$,(一般由实验或观测而得),找出一个给定类型的函数 $y=f(x)$,要求确定 f 中的参数,使得$\sum[f(x_k)-y_k]^2$ 为最小.

第一章 §3 证明 Fan Ky 不等式的加权形式,第三章 No. 1. 55;第五章 §1. No. 69;第九章 §1. No. 5 等的证明技巧,都值得注意.

优化和非线性规划中的罚函数法是一种把带约束极值问题归结为无约束优化问题的方法. 例如,考虑 R^n 中的集合 $E=\{x=(x_1,\cdots,x_n): f_k(x)\geqslant 0, 1\leqslant k\leqslant m\}$ 上的函数 φ 的极小化问题. 罚函数 $\psi(x,\alpha)$ 具有以下性质:若 $x\in E$,则 $\psi(x,\alpha)=0$;若 $x\notin E$,则 $\psi(x,\alpha)>0$,设 $x(\alpha)$ 是任何使 $M(x,\alpha)=\varphi(x)+\psi(x,\alpha)$ 取无约束(整体)最小值的点,$\psi(x,\alpha)$ 的选取方法是:点 $x(\alpha)$ 与原问题的解集 A 的距离 $d(x(\alpha),A)\to 0(\alpha\to\infty)$;否则,就使得$\lim\limits_{\alpha\to\infty}\varphi(x(\alpha))=\inf\{\varphi(x): x\in E\}$. 例如,可取 $\psi(x,\alpha)=\alpha\sum\limits_{k=1}^{m}|\min\{f_k(x),0\}|^q$, $q\geqslant 1$,常取$q=2$.

罚函数法的更一般的提法:将 $\varphi(x)$ 在集合 E 上的极小化问题,归结为某个参数函数 $M(x,\alpha)$ 在一个从应用数值极小化方法的有效性观点来看比原来的集合 E 结构简单的集合上的极小化问题. 20 世纪 80 年代以来又进一步发展为乘子罚函数法(或增广 Lagrange 函数法). R^n 中的子集 E 也推广为 Banach 空间的子空间等.

19.　**幂级数方法**:要证 $f(x)\leqslant g(x)$, $(|x|<a)$,若 f,g 在区间$(-a,a)$ 上可以展开成幂级数:$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, $g(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$,则只要证明对所有 n,成立 $a_n\leqslant b_n$. 由此可以统一证明许多不等式,还可以发现新的不等式;对于收敛的交错级数的和$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^na_n=S$,当 $a_n>0$, $a_n>a_{n-1}(n=0,1,2,\cdots)$ 时,有 $S_{2n+1}<S<S_{2n}$,其中 $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^ka_k$;有时还要与放缩技巧等其他方法结合使用. 典型的证明技巧可参看第一章 AG 不等式;第二章 §1. No. 8,11;第三章 No. 8,11,145;第五章 §1. No. 4; §2. No. 1; §3. No. 14,41,54;[152]216 ~ 219 等.

20.　**母函数方法**:对于给定的数列$\{a_n\}$,可以构造一个形式幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$,称为$\{a_n\}$ 的母函数,而$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_nx^n}{n!}$ 称为$\{a_n\}$ 的指数型母函数. 于是就把对数列不等式的研究转化为函数不等式的研究. 我们还可以定义函数列$\{f_n(x)\}$ 的母函数 $F(x,t)$:若 F 能通过形式运算(即不管这种运算是否合理)能展开成 t 的幂级数:$F(x,t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nf_n(x)t^n$,不论该级数是否收敛,只要 $f_n(x)$ 有意义,就称 $F(x,t)$ 是$\{f_n(x)\}$ 的母函数. 例如,从母函数

$$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n$$

就得到勒让德多项式 $P_n(x)$. 其他特殊函数,如雅可比多项式、Euler 多项式、埃尔米特多

项式、拉盖尔多项式等都有相应的母函数(见第六章 §2).

早在 18 世纪,欧拉就利用自然数 n 的分拆数 $r(n)$ 的母函数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}r(n)x^n$ 来研究 $r(n)$,见第二章 §2.六. 在数论中还经常用到 Dirichlet 级数型的母函数 $\sum_{n=0}^{\infty}a(n)n^{-s}$,到 19 世纪,拉普拉斯研究概率问题,发展成为一般的方法,导致把对分布函数的研究转化为对它的特征函数的研究. 近代拉普拉斯变换、Fourier 变换等各种积分变换,都是母函数方法的推广. 见专著[111],史济怀《母函数》,上海教育出版社,1981,沈燮昌等《母函数的作用》[353]1998,14(1 ~ 2).

21.　**Fourier 分析与小波分析方法**:Fourier 级数的丰富理论已成为证明不等式的基本方法,如第四章 §3 等周不等式;第六章 §2,三;第十二章 §3. No. 9Wirtinger 不等式;第十三章 No. 95(5) 等都巧妙地用到了 Fourier 级数的逐项积分和 Parseval 公式,此外见第十一章 §2. No. 51. 而第十四章 §2. No. 32 用到小波分析方法,还可参看[21]508 ~ 511.

22.　**微分方法**:为证 $f(x)<g(x)$,有时归结为证 $f'(x)<g'(x)$,可使问题简化,例如第一章 §3 AG 不等式的证明,第三章中许多代数不等式的证明. 第十三章 No. 1,57,73 等一类积分不等式,常将积分上限 b 换成变量 x,即 $\int_a^b f$ 变成 $F(x)=\int_a^x f$,对 F 求导数,这往往是十分有效的证明技巧.

23.　**差分法**:第十二章 §1 ~ 2,第十四章 No. 20,详见徐利治等[8] 和 L. M. Milne-Thomson, The Calculus of Finite Differences, Macmillan, London, 1951.

事实上,有限差分的理论是微分学的原始形式,在历史上,微分学正是由有限差分的理论产生的,所以,差分与微分有类似的性质,而且差分、差商与导数有密切的联系. ([124] 第二章 §4)

24.　**变分法**:变分法的核心问题是求泛函的极值函数和相应的极值. 20 世纪以来,在动态规划与自动控制理论等的推动下,变分法有了很大的发展. 莫尔斯于 1925 年推广了伯克霍夫的极小极大原理,得出著名的莫尔斯不等式,以后形成了大范围变分法. 见 Milnor, J. Morse 理论. [1] 第七章专门讨论了用变分法可以建立的若干特殊的积分不等式. 本书第十三章 No. 19 作了概述. 第四章 §3 等周不等式的证明,以及邵品琮用变分法证明 Opial- 华罗庚不等式. 详见[353]1982,3:15 ~ 19. 此外见[21]:500 ~ 504.

25.　**积分方法**:包括用积分的性质和积分不等式. 特别是积分的单调性. 利用积分还可证明某些数列或级数不等式,除了通常的黎曼积分、勒贝格积分外,用各种新积分(例如见[95])来证明不等式是很有前途的新方向. 如[301]1987,127:370 ~ 374 就证明 G-B 不等式(第十三章 No. 14) 对于 Henstock 积分也成立. 典型的例子可见第二章 §1. No. 8 ~ 10,22,25;第二章 §3. No. 2;第三章 No. 23; 第十二章 §3. No. 47;第十三章 No. 93,113 等.

26.　**概率方法**:除了证明概率不等式外,还可通过构造随机变量 ξ,利用概率不等式来证明和推广许多著名的不等式,并得到许多新的不等式. 例如,设 ξ,η 是相互独立的随机变量,从 $D(\xi\eta)=D\xi\cdot D\eta+(E\xi)^2D\eta+D\xi\cdot(E\eta)^2$ 得到　$D\xi\cdot D\eta\leqslant D(\xi\eta)$. 从而有

$$D(E\xi)^2(E\eta)^2 \leqslant E\xi^2(E\eta)^2 + (E\xi)^2E\eta^2. \tag{26.1}$$

给定实数列$\{a_k\}$,$\{b_k\}$,可构造二维离散型随机变量(ξ,η),使其概率质量函数为

$P(\xi = a_k,\eta = b_k) = \dfrac{1}{n^2},k,j = 1,2,\cdots,n$,则从(26.1)式可得不等式

$$(\sum a_k)^2(\sum b_k)^2 \leqslant \frac{n}{2}[(\sum a_k^2)(\sum b_k)^2 + (\sum a_k)^2(\sum b_k^2)];$$

若$\{a_k\}$,$\{b_k\}$是正的无穷数列,则可构造二维随机变量(ξ,η),使其概率质量函数为

$P(\xi = x_k,\eta = y_j) = \dfrac{a_kb_j}{ab},k,j = 1,2,\cdots$,式中$a = \sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k,b = \sum\limits_{k=1}^{\infty}b_k$. 于是$(\xi,\eta)$的边缘分布为

$$P(\xi = x_k) = \frac{a_k}{a},P(\eta = y_j) = \frac{b_j}{b},$$

则从(26.1)式,可得

$$(\sum a_kx_k)^2(\sum b_ky_k)^2 \leqslant \frac{1}{2}[(\sum a_k)(\sum a_kx_k^2)(\sum b_ky_k)^2 + (\sum b_k)(\sum a_kx_k)^2(\sum b_ky_k^2)].$$

上述概率证法的要点是:先构造一个概率分布为已知的随机变量ξ,若要证与数列$\{x_k\}$求和有关的不等式,则ξ的概率质量函数为

$$P(\xi = x_k) = p_k. \tag{26.2}$$

(26.2)式中ξ的取值就是数列中的x_k,而取各个值的p_k则视具体情况而定;若有几个数列,就相应构造几维随机变量. 若要证的是积分不等式,则该ξ的概率密度函数f就是这积分中被积函数的某一因式,然后利用概率论中某些与数学期望有关的不等式. 详见戴朝寿的两篇文章:[353]1985,11(2):51 ~ 54,33;1988,14(2):85 ~ 90 和 1991,17(2):83 ~ 85. [351]2000,3:2 ~ 4;2000,5 ~ 6:14. 用概率方法证微分不等式见第十二章 §3. No. 61.

利用(概率)熵理论和随机积分证明不等式,可见[54]5:411 ~ 417,Tokyo J. Math. 1988,11(2):323 ~ 328 等. 还有一种度量熵,广泛用于调和分析与逼近论、各种抽象空间的算子理论上,也是证明不等式的现代工具.

典型的证明技巧见第一章 §3 AG不等式的证明. 第三章 No. 17,18,31,72;第十三章 No. 68,135,136;第十四章 §2. No. 6,8,第十五章则是概率统计不等式. 另见石焕南[351]2000,3:2 ~ 4;5 ~ 6:14;1998,2:17 ~ 18,[344]2002,32(1):132 ~ 135,高等数学研究 1999 年专刊:31 ~ 33:山东师范大学学报,2002,17(1):12 ~ 14;[402]1996,12(3):146 ~ 149 等.

27. **优化理论**:利用优化不等式(又称控制不等式,见第七章 §1. No. 7)可以统一证明许多代数不等式、几何不等式、矩阵不等式和凸函数不等式. 第三章 No. 72,第十五章 §1. No. 29,34,[345]1985,9:35 ~ 37,12 及专著[6],[9],[54]3 等)

1989 年赖炎连通过讨论三种类型的约束优化问题,利用 Kuhn-Tucker 条件推出著名的钟开莱不等式、AG 不等式、Hölder 不等式及其推广等. (广西大学学报,1989,2:44 ~

52) 石焕南利用优化理论卓有成效地证明了大批代数不等式和概率统计不等式. ([100]323 ～ 327；东北师范大学学报，2001，33(增刊)：24 ～ 27；四川师范大学学报，2002，25(5)：510 ～ 511；[351]1998，2：5：19 ～ 22；6：53；1999，1：2 ～ 4；2：3 ～ 5；3：9 ～ 11；2000，3：1 ～ 2；4：12 ～ 15；2001，1：9 ～ 11，2：5 ～ 7)2003年元月，石焕南还整理了20世纪90年代以来发表的控制不等式文献，国内52篇，国外11篇，专著5部.

28. **支撑函数方法**：利用支撑不等式(第七章 §1. No. 28) 可以证明许多基本不等式、行列式不等式、初等对称多项式不等式(第三章 No. 132) 等. ([301]1986，117：23 ～ 41)

29. **Benson方法**：这个方法的要点是：(1) 选择一个适当的代数不等式来证明一个包含函数及其导数的表达式是非负的；(2) 将不等式适当变形，如两边加上一个恰当导数；(3) 对不等式两边积分. 利用这个方法可以证明大量已知的基本不等式，例如第一章的不等式和第六章 §1. No. 12；第十二章 §2. No. 9；第十三章 No. 7 等. Benson 以下述为例：

(1) 从代数不等式

$$x^{2n}-2nx+2n-1\geqslant 0 \tag{29.1}$$

出发，对于连续可微函数 $u(x)$，$P(u,x)$，$G(u,x)$，$P(u,x)>0$，

取 $x=u'\left(\dfrac{P}{G'_u}\right)^{\frac{1}{2n-1}}$，并用$\left[\dfrac{(G'_u)^{2n}}{P}\right]^{\frac{1}{2n-1}}$乘(29.1) 式两边，得到

$$P(u')^{2n}+(2n-1)\left[\frac{(G'_u)^{2n}}{P}\right]^{\frac{1}{2n-1}}-2nu'G'_u\geqslant 0; \tag{29.2}$$

(2)　在(29.2) 式两边加上 $2nG'_x(u(x),x)$；

(3)　从 a 到 b 积分，即得

$$\int_a^b\left\{P(u')^{2n}+(2n-1)\left[\frac{(G'_u)^{2n}}{P}\right]^{\frac{1}{2n-1}}+2n\,G'_x\right\}\mathrm{d}x\geqslant 2nG[u(b),b]-G(u(a),a).$$

仅当 $u'=\left[\dfrac{(G'_u)^{2n}}{P}\right]^{\frac{1}{2n-1}}$ 时等号成立. ([4] §2. 10 和[21]515 ～ 520)

30. **逻辑推理方法**：例如见第二章 §3. No. 17，第九章 §1. No. 10. 后者是 1987 年上海市中学生数学竞赛题. 可参看常庚哲等，高中数学竞赛辅导讲座，上海科学技术出版社，1987，124 ～ 137.

31. **数论方法**：数论中各种分拆技巧、模函数论方法、Tauber 型方法、解析数论方法、筛法理论、素数分布理论、各种数论函数、三角和及特征和、渐近法与连分数等都是常用的方法. 筛函数的上下界估计等，往往还要用到高深的分析技巧. 例如见第二章 §1. No. 16；第二章 §3. No. 15；第五章 §1. No. 6. 专著[17，18，76，89，93].

32. **重排方法**：函数的重排是将一个测度空间上的可测函数 f 用它的重排函数 f^* 来代替，f^* 与 f 有相同的分布函数，而 f 的分布函数与重排函数是比原来 f 好处理的对象，因而在积分不等式的建立和证明中很有用处，我们在第十三章 No. 20，21 介绍了这些概念及其基本性质，利用好 λ 不等式(见第十三章 No. 20(6))，可以通过对分布函数的估计得到函数间的积分不等式，因此函数的重排方法就成为发现和证明积分不等式的基本方法之一. Hardy 等在[1] 中用了专门的一章(第十章) 来讨论重排方法，得到了大批著名

的不等式.还有相应的离散量的重排,见第二章 §1. No. 1,第三章 No. 86,87,95,第四章中许多几何不等式的证明,第七章 §1. No. 50,第八章 §1. No. 15,16,第十一章 §2. No. 47,第十二章 §3. No. 5,第十三章 No. 20 等,[345]1986,8:26 ~ 28. 有关专著见[55,61,64,65,68,72,92,132,167].

33. **利用极限的性质**:除了运用熟知的极限的单调性、保号性、有界性(对于函数极限是局部有界性)等(如第三章 No. 9,18,第六章 §3. No. 4),还经常用到上下极限、上下确界的性质,见第八章 §3,也可构造稠密点集,使得对这些特殊点集成立的不等式过渡到更一般点集都成立的不等式,见第一章 §1,四(不等式延拓原理)等. 还可利用已知的极限.

34. **利用行列式、矩阵的性质**:除了用于证明第十章的有关不等式外,还可以证明许多代数不等式和几何不等式. 例如,实二次型可用矩阵表示:

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{jk}x_jx_k=X'AX,\text{式中}$$

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&&\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},$$

$X'=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $a_{jk}=a_{kj}$. f 为正定的充要条件中,要求 f 的系数矩阵 $A=(a_{jk})$ 的 n 个顺序主子式 D_k 都大于零,即

$$D_k=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1k}\\\cdots&\cdots&\\a_{k1}&\cdots&a_{kk}\end{vmatrix}>0,\text{而 } f \text{ 为负定的充要条件则要求}(-1)^kD_k>0,k=1,2,\cdots,n,$$

对于要证明某些特殊的代数不等式:$a\leqslant b$,可找一映射 φ,使得矩阵 B 对应于代数表达式 b:$b=\varphi(B)$,再对 B 作行变换得到矩阵 A,使得 $a=\varphi(A)$. 例如,可用这种方法证明 $8abc\leqslant(a+b)(b+c)(c+a)$,式中 a,b,c 为非负数. 详见 Eurocal Leipzig 1987,87:403 ~ 411,Lecture Notes in Comput. Sci 378,Springer 1989 和本书第一章 §1 和[12,13],[54]2 等.

35. **拟线性化方法**:设 X,Y 是两个赋范线性空间,$L(x,y)$ 是 $X\times Y$ 上的函数,$\|y\|$ 是 y 在 Y 中的范数. 由 $L(x,y)$ 定义一个新的函数

$$\varphi(x)=\max\{L(x,y):\|y\|\leqslant 1\}. \tag{35.1}$$

于是,$L(x,y)$ 作为 x 的函数对所有 y 都成立的某些性质,例如正性、线性、凸性等都将反映到 $\varphi(x)$ 的相应性质之中. 而 $L(x,y)$ 的这些性质往往比 $\varphi(x)$ 的相应性质更容易证明,这就是所谓**拟线性化技巧**. 例如,若对于所有 y,$L(x,y)$ 是 x 的线性泛函,即

$$L(\alpha x_1+\beta x_2,y)=\alpha L(x_1,y)+\beta L(x_2,y),$$

则 $\varphi(x_1+x_2)\leqslant\varphi(x_1)+\varphi(x_2)$,即得到 φ 的次可加性;又如,利用拟线性化技巧,将 Hölder 不等式写成等式形式:

$$\|a\|_p=\max\{\sum|a_kb_k|:\|b\|_q\leqslant 1,p>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\},\text{令}$$

$R(x) = \{x = (x_1, \cdots, x_n) : \| x \|_q \leqslant 1, p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\}$，则

$$\| a + b \|_p = \max_{R(x)} \{ \sum (| a_k | + | b_k |) | x_k | \} \leqslant \max_{R(x)} \sum | a_k x_k | + \max_{R(x)} \sum | b_k x_k |$$

$= \| a \|_p + \| b \|_p$. 这就是 Minkowski 不等式.

有时在(35.1)式中 max 要换成 sup. 例如积分形式的 Hölder 不等式可写成：

$$\| f \|_p = \sup\{ \int | fg | : \| g \|_q \leqslant 1, p > 1, (1/p) + (1/q) = 1\}. \tag{35.2}$$

见第一章 §2 和 §3. No. 13，第十三章 No. 69. [2] 第一章 §19 ～ 26 等. 这些技巧还广泛用于 Fourier 分析与小波分析、矩阵分析、变分法等分支中，如第十三章中各种极大函数、BMO 空间等.

36.　**变换方法**：除了本书提到的连续量的各种变换，如 Fourier 变换、Laplace 变换等，常用的离散量变换有：

(1)　**Abel 变换**：见第二章 §1，一，第三章 No. 82，第六章 §3. No. 32，34 等，[8] 详细介绍了 Abel 变换技巧.

(2)　**Möbius 变换**：见第九章 §2. No. 4.

(3)　**级数的 Kummer 变换**：已知无穷级数 $\sum_k a_k$ 收敛，$\sum_k b_k = B$，且 $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lambda \neq 0$，

则 $\sum_k a_k = \lambda B + \sum_k \left(1 - \frac{\lambda b_k}{a_k}\right) a_k$.

(4)　**级数的 Euler 变换**：设 $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k = S$，则

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2^{-(k+1)} \Delta^k a_0, \text{式中} \quad \Delta^k a_0 = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} a_{k-j}.$$

(5)　Mellin 变换：见第十三章 No. 138.

此外，还有**斯特林变换、组合变换**，第三章 No. 82，95；第十二章 §2. No. 5 的卷积变换技巧等.

37.　**利用不动点定理**：设 $x_{n+1} = f(x_n)$，若连续函数 f 有不动点 a，即 $f(x) = x$ 有实根 a. 当 f 递增时，若 $x < a$ 时 $f(x) > x$，而 $x > a$ 时 $f(x) < x$，则当 $x_1 < a$ 时，$\{x_n\}$ 为递增数列，而当 $x_1 > a$ 时，$\{x_n\}$ 为递减数列；当 f 递减时，若 $x < a$ 时，$f[f(x)] > x$. 而 $x > a$ 时 $f[f(x)] < x$，则对任意自然数 n，有

$$x_{2n-1} < x_{2n+1} < a < x_{2n} < x_{2(n-1)}.$$

可由此统一证明许多由递推关系式确定的数列不等式.（第十一章 §1. No. 62 和 [348]1989，9：10 ～ 13）还可参看马意海的“广义极小极大不等式及不动点定理”（应用数学与力学，1991，12(5)：465 ～ 472）.

反之，也可利用不等式的性质找不动点. 例如，设 $f: N \to N$ 满足 $f(n+1) > f(f(n))$，则所有的 n 都是 f 的不动点，即 $f(n) = n$.（19 届 IMO，第六章 §2. No. 26）还用到泛函分析的对偶定理.

1997 年，Momcilo, B. 进一步考虑了赋范线性空间 X 上的泛函 $f: X \to R^1$，为了研究 f

的极小值，即 $f(x) \geqslant a, \forall x \in X$，通过寻找映射 $F: X \to X$，使得 F 关于 f 单调，即 $f(F(x)) \leqslant f(x), \forall x \in X$，仅当在 F 的不动点等号成立，类似寻找映射族的公共不动点集来研究 f 的极小集.([403]1997,30(4):2325 ～ 2328)

38.　**覆盖方法**：通过构造易求面积的特殊图形的集合，然后用其并集覆盖所研究的图形，根据面积原理，便可证明和发现许多几何不等式(第四章). 从有限覆盖定理到可数覆盖(Lindelöf 定理)、Vitali-Wiener 覆盖、Whitney 覆盖、Besicovitch 覆盖、各种嵌入技巧等，都是处理各种困难问题的有力工具.(第十三 ～ 十六章和[65]、[75]、[86]、[132]、[141] 等)

39.　**物理方法**：将不等式用一个适当的物理模型来描述，然后根据物理定律来作证明. 例如 1887 年 Rogers, L. J. 在"数学使者"上发表了一个不等式，Hölder 发现其表达式看上去像质心公式. 他推出了获得这种不等式的一般方法，若质量分布在向下凸的曲线 $y = f(x)$ 上，则其质心在该曲线的上方，其代数表达式是一个不等式. Hölder 试了各种函数 f，得到相应的不等式中，大部分是已知的，但有一个是新的，就是著名的 Hölder 不等式. 用物理方法证 A-G 不等式可见 Bull. Inst. Math. Appl. 1985, 192(21)；根据势能最小原理(当一个力学系统处于稳定静止状态时所具有的势能最小)，得到偏微分方程中的**能量不等式**.(第十三章 No. 26) 反之，变分不等式和变分原理为固体力学的现代发展提供了统一的框架和有力工具. 1989 年郭友中系统研究了固体力学中的不等式问题.(应用数学和力学，1989, 10, (1): 1 ～ 21；第四章 § 1. No. 18；第八章 § 1. No. 22) 还可用质心公式证；用光学、热学、电磁学等有关定律证明不等式.([301]1980, 76: 209 ～ 212 等) 另见本书第十三章 No. 7, 25, 26 中的能量方法，No. 141 等.

40.　**动态规划法**：若 n 个变数 x_k 满足约束条件：$x_k \geqslant 0, g_j(x) \leqslant 0, x = (x_1, \cdots, x_n)$，其中 $1 \leqslant k \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m$，求目标函数 $f(x)$ 的极值就是一个规划问题，至今还无一般解法. 但动态规划法包含一些精心制订的规则，这些规则允许消去一些非同时变式，从而缩小了在其中求函数极值的集合，这是用微积分方法难以求得的最大最小值. 自从 R. 贝尔曼 1953 年发表"动态规划理论导引" 和 1957 年出版专著"动态规划" 以来，动态规划法在理论和实际应用方面都得到迅速的发展. 用这些方法可以证明比古典变分法更复杂的泛函极值问题，还可以证明许多基本不等式，例如见第三章 No. 61，[54]5: 419 ～ 432，[345]1987, 6: 32 ～ 35 等.

41.　**泛函方程法**：王中烈于 1979 ～ 1986 年连续发表了六篇论文，系统地阐明了如何用泛函方程法证明一大批著名的不等式，如 Hölder 不等式、Minkowski 不等式、AG 不等式及其各种平均不等式的推广、Fan Ky 不等式等.([301]1979, 71: 423 ～ 430；1980, 78: 522 ～ 530；1981, 80: 31 ～ 35；1982, 86: 96 ～ 98；1983, 96: 119 ～ 129；1986, 118: 287 ～ 308)

42.　**内插外推方法**：它的基本思想是，如果我们知道一个算子 T 在某个函数空间族上满足某些不等式，能否由此推出在该函数空间族的一些中间空间上(内插) 或在两端空间上(外推) 满足什么不等式? 例如第九章 § 2. No. 32(三线定理) 就是 L^p 空间基本的内插定理；利用 Marcinkiewicz 内插定理，从

$$|\{x: |T(f,x)| > \alpha\}| \leqslant \left(\frac{A_k}{\alpha}\|f\|_{p_k}\right)^{q_k}, \quad \alpha > 0, k = 1, 2,$$

可推出不等式：$\| Tf \|_q \leqslant c \| f \|_p$，式中 $f \in L^p(R^n), 0 < \theta < 1$，$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_1} + \frac{1}{p_2}, \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_1} + \frac{1}{q_2}$.

关于外推技巧，我们仅以 Yano 的结果为例：设$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$为一测度空间，$M(\Omega)$是实或复值可测函数集合，$T$是从$M(\Omega)$到$M(\Omega)$的次线性算子. 若$T$是限制$(p,p)$型，即对于$\Omega$中任一测度为有限的可测集$E$，有 $\| T\varphi_E \|_p \leqslant C_p \| \varphi_E \|_p$，式中$\varphi_E$为$E$的特征函数，$1 < p < 2$，常数$C_p$满足：对某个$s > 0, C_p \leqslant c/(p-1)^s$，则$T$满足：对$\Omega$中任一可测子集$E$，$\mu(E) < \infty$和任意$f \in L(1+\log^+ L)^s$，有

$$\int_E | Tf | \leqslant c_1(1+\mu(E)) + c_2\int_E | f | (1+\log^+ L)^s.$$

式中c_1, c_2与E, f无关. (J. Math. Soc. Japan, 1951, 3:296 ～ 305)

1988 年 Bahman 等用外推方法改进了 L^p 范数和矩量的古典凸性不等式. (Invent. Math. 1988, 306(15):651 ～ 654) 此外，第十四章还用到 H^p 空间的内插方法. ([86]、[65]、[72]、[87]、[142]) 其他插值不等式见第十二、十三、十四章.

43.　**函数分解方法**：前面幂级数法、Fourier 级数与小波级数法实质上都是特殊的函数分解方法. 此外，在近代调和分析中广泛使用的 Hardy 空间中的原子分解、分子分解、块分解、各种权函数的分解等，都成了证明不等式的现代工具. 例如，当 $0 < p \leqslant 1$ 时，L^p 空间的性质不好，但在 H^p 空间中仍保持好的性质. (第十一章，第十三、十四章，[45]，[85]，[86]，[87]，[88]，[92]，[125]，[133]，[137])

44.　**机械化方法**：用电子计算机辅助证明不等式，除第五章 §1. No. 103 外，还解决了许多著名的难题. 例如，Shapiro 关于循环不等式的猜想的完全解决(第三章 No. 156)，证明了从封闭凸曲线C上某点开始，取其周长的所有三等分点，顺次用直线段连结诸点所得三角形周长不小于C周长的一半；利用吴文俊关于方程解法中的零点分解定理，可以证明大量的三角不等式、几何不等式、多项式不等式等. (Systems Science and Math. Sci. 1988, 1(1):1 ～ 17)

不等式型定理的机器证明一直被视为自动推理领域中一个困难的问题，主要原因是相关算法在本质上依赖于实代数与实几何，其计算复杂度会随着维数(参数的个数)的增加而快速增长. 杨路提出的降维算法能有效地处理含参数的根式，并能最大限度地缩减维数，根据降维算法和胞腔分解编制的 Maple 通用程序"BOTTEMA"已在 PC 上实现，该程序验证了包含上百个未解决的问题在内的上千个几何与代数不等式. 刘保乾利用该软件证明了几千个三角形不等式([134]、[170]). 另见林东岱等，数学与数学机械化，山东教育出版社，2001.

45.　**信息论方法**：信息论是研究信息的传输、存储、处理、分类的数学模型和质量估计. 信息传输理论主要研究信息传输的最优和拟优方法、编码和译码的最优化、信号输入和输出的变换方法，广泛用到数理统计(主要是随机过程统计)，平稳随机过程的预测和滤波理论、博奕论等，有许多结果都是以不等式的形式表达的，有兴趣的读者可参看以下几篇论文：①de Guzman, Adolfo, M., Matimyas Mat. 1990, 13(1):1 ～ 10；②Tripathi, G.

P. , Kapur, J. N. , "Information-theoretic proofs of some inequalities", Proc. Nat. Acad. Sci. India sect. A1991, 61(4): 481 ~ 493; 该文提出了三种信息论方法: (1) 利用熵和有向散度的凸性; (2) 利用概率分布族的极大熵不小于族中每个元的熵; (3) 利用熵和相应的有向散度的单调性. ③Budimir, I. Matic, M. , Mond, B. 等研究了 AG 不等式和 Jensen 不等式等著名不等式在信息论中的应用. ([304]2001, 2(1) Article 5, 11)

46. **对称化方法**: 对称化是指每个对象 F 结合一个具有某种对称性(同一类的)对象 F^*. 通常, 对称化用 R^n(或常曲率空间)中的闭集 F, 也用于映射; 进一步, 对称化构造成使得 F^* 连续依赖于 F, 对称化保持对象的一些特征同时单调地改变另一些特征. 对称化被用于几何学、数学物理和函数论中极值问题的求解, 第一个对称化由 Steiner 于 1836 年引进, 用于等周不等式的证明. (第四章 §3, 三)

对称化方法在函数论中的应用基于在各种形式的对称化下区域的容量与内半径改变的单调性质, 例如对称化原理: 设 $w = f(z)$ 是单位圆盘 $D: |z| < 1$ 内的解析函数, $f(0) = w_0$, $f'(0) = a_1$, D_f 是 $w = f(z)$ 在 D 内的值域, D_f^* 是 D_f 关于过 $w = w_0$ 的直线或射线的对称化集, $r(D_f^*, w_0)$ 是 D_f^* 关于 w_0 的内半径, 则

$$r(D_f^*, w_0) \geqslant |a_1|. \tag{46.1}$$

(46.1) 式中仅当 $w = f(z)$ 在 D 内单叶且 D_f^* 与 D_f 重合(在 Steiner 对称化下)或为 D_f 绕 w_0 旋转所得(在 Polya 对称化下), 可见对称化方法是不等式证明中用得十分广泛的方法之一.

47. **利用基本不等式**: 善于利用已知不等式, 特别是基本不等式去发现和证明新的不等式, 是广泛应用的基本技巧, 例如各种距离空间中关于距离的三角不等式, 或各种赋范线性空间中关于范数的三角不等式, 要利用 Minkowski 不等式, 而后者又要利用 Hölder 不等式, 而 Hölder 不等式的证明和改进又依赖于 Young 不等式及其各种改进, Young 不等式本身又可用积分法、微分法、凸函数方法等多种方法证明, 读者可从本书中找到大量类似的例子.

48. **利用微分恒等式, 积分恒等式, Riccati 方程** $f'(x) = a(x)[f(x)]^2 + b(x)f(x) + c(x)$, 式中 $a(x), b(x), c(x)$ 是已知函数和 **Jocobi 乘子**, 是[21]504 ~ 507 证明积分不等式的基本方法之一.

例 1　利用积分恒等式

$$\frac{1}{a} = \int_0^\infty e^{-at}\,\mathrm{d}t \qquad (a > 0) \tag{48.1}$$

证 AG 不等式及其他代数不等式. (第一章 §3. 一. 3)

例 2　利用复数 Lagrange 恒等式

$$\left(\sum_{k=1}^n |z_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^n |w_k|^2\right) - \left|\sum_{k=1}^n z_k w_k\right|^2 = \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^n |\bar{z}_k w_j - \bar{z}_j w_k|^2 \tag{48.2}$$

证明 Cauchy 不等式

$$\left|\sum_{k=1}^n z_k w_k\right|^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^n |z_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^n |w_k|^2\right). \tag{48.3}$$

例3　利用 Montgomery 恒等式:使 f' 在$[a,b]$上可积,则

$$f(x)=\frac{1}{b-a}\left\{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t+\int_a^b K(x,t)f'(t)\mathrm{d}t\right\}, \tag{48.4}$$

式中,$K(x,t)$ 是 Peano 核:

$$K(x,t)=\begin{cases}t-a, & a\leqslant t\leqslant x,\\ t-b, & x<t\leqslant b.\end{cases} \tag{48.5}$$

利用 Taylor 公式,(48.4) 可推广为

$$f(x)=\frac{1}{b-a}\left\{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t-\sum_{k=0}^{n-2}f^{(k+1)}(x)\frac{(b-x)^{k+2}-(a-x)^{k+2}}{(k+2)!}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(n-1)!}\int_a^b K_n(x,t)f^{(n)}(t)\mathrm{d}t\right\}, \tag{48.6}$$

式中

$$K_n(x,t)=\begin{cases}-\dfrac{1}{n}(a-t)^n, & a\leqslant t\leqslant x,\\ -\dfrac{1}{n}(b-t)^n, & x<t\leqslant b.\end{cases} \tag{48.7}$$

利用这些积分恒等式可以证明 Ostrowski 型不等式的种种改进和推广.

(第十三章 No.8,[330]36(2005),199 ~ 218;38(2007),37 ~ 49,111 ~ 120,335 ~ 339)

例4　利用 Euler 公式证明 Ostrowski 不等式的种种推广和改进.(第八章 No.8)

49.　**谱论方法**:这是 Mitrinovic 等在[21]第十七章中作为积分不等式的证明方法之一.我们以特征值问题

$$y''+\lambda y=0,\quad y(0)=y(\pi)=0 \tag{49.1}$$

为例,它有特征值 $\lambda_n=n^2(n\in N)$ 和相应的特征函数 $y_n=\sin nx$.根据线性微分方程的谱论,我们有

$$n^2=\lambda_n=\inf\left\{\frac{\int_0^\pi(u')^2}{\int_0^\pi u^2};u\in D_n\right\}. \tag{49.2}$$

式中,$D_1=\{u\in AC[0,\pi]:u(0)=u(\pi)=0,u'\in L^2[0,\pi]\}$,

$D_n=\{u\in D_1:\int_0^\pi(uy_k)=0,1\leqslant k\leqslant n-1\},n\geqslant 2$,于是得出

$$\int_0^\pi u^2\leqslant\frac{1}{n^2}\int_0^\pi(u')^2, \tag{49.3}$$

仅当 $u=c\sin nt$ 时等号成立,式中 $u\in AC[0,\pi],u'\in L^2[0,\pi]$.

$u(0)=u(\pi)=0,\int_0^\pi u(t)\sin kt\,\mathrm{d}t=0,1\leqslant k\leqslant n-1$.([21]507 ~ 508)

50.　**Sturm-Louiville 问题的特征值的极小性质.**这也是 Mitrinovic 等在[21]第十七章中作为积分不等式的证明方法之一,Sturm-Louiville 特征值问题是:

$$(ry')'+(\lambda p-q)y=0,$$

$$\beta_a y(a) - \alpha_a r(a) y'(a) = 0, \quad \beta_b y(b) + \alpha_b r(b) y'(b) = 0,$$

式中，$p, q, r \in C[a,b]$，$r > 0$，$p \geqslant 0$（但 $p \not\equiv 0$），$\alpha_a^2 + \beta_a^2 > 0$，$\alpha_b^2 + \beta_b^2 > 0$。（[21]510～515）

51. **降维方法**：这是杨路等在不等式的机器证明中使用的非常有效的方法，它的基本思路是，要证明多元函数不等式 $F(x_1, \cdots, x_n) \geqslant 0$，$x = (x_1, \cdots, x_n)$，$e = (1, \cdots, 1)$，可构造低维的辅助函数列 $\{F_k(x_k)\}_{k=1}^n$，式中 $F_k(x_k) = F(\underbrace{x_k, \cdots, x_k}_{k个}, x_{k+1}, \cdots, x_n)$，

若：(1) $F(1, \cdots, 1) = 0$.

(2) $F(tx_1, \cdots, tx_n) = t^r F(x_1, \cdots, x_n)$，$t > 0$，$r \in R^1$.

(3) $0 < x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \Rightarrow F_k(x_k) \geqslant F_{k+1}(x_{k+1})$，$k = 1, 2, \cdots, n-1$，则

$$F(x_1, \cdots, x_n) \geqslant 0.$$

事实上 $F(x) = F_1(x_1) \geqslant F_2(x_2) \geqslant \cdots \geqslant F_k(x_k) \geqslant F_{k+1}(x_{k+1}) \geqslant \cdots \geqslant F_n(x_n) = x_n^r F(e) = 0$。（[170]或[351]2008(1)：19～20）

52. **Pade逼近方法**：Pade逼近是幂级数的一种最佳有理逼近.

设被逼近的函数 f 由形式幂级数定义：

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k. \tag{52.1}$$

并设该级数在原点的邻域 $|x| \leqslant 1$ 内收敛，m, n 为非负整数.

若存在多项式 $P_m(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$，$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$，满足条件：

(1) $f(x) - \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)} = 0(x^{m+n+1})$；

(2) $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ 不可约（即 P_m 与 Q_n 无公因子）；

(3) 分母 $Q_n(x)$ 满足标准化条件：$Q_n(0) = b_0 = 1$.

则称 $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ 是 $f(x)$（在 $x = 0$ 处）的 (m, n) 阶 Pade 逼近，记为

$$\left[\frac{m}{n}\right] = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} \quad (\text{或记为}[m,n]).$$

从条件(1)得

$$f(x)Q_n(x) - P_m(x) = 0(x^{m+n+1}). \tag{52.2}$$

由此得到一个以 a_k, b_k 为未知数的线性方程组：

$$\begin{cases} a_0 = c_0 \\ a_1 = c_1 + c_0 b_1 \\ a_2 = c_2 + c_1 b_1 + c_0 b_2 \\ \vdots \\ a_m = c_m + c_{m-1} b_1 + \cdots + c_0 b_m \\ 0 = c_{m+1} + c_m b_1 + \cdots + c_{m-n+1} b_n \\ \cdots \\ 0 = c_{m+n} + c_{m+n-1} b_1 + \cdots + c_m b_n \end{cases} \tag{52.3}$$

式中当 $k<0$ 时 $c_k=0$，当 $j>n$ 时 $b_j=0$.

(52.3) 称为 Pade 方程组. 在方程组(52.3) 中，未知数 a_k, b_k 有 $m+n+2$ 个，而方程只有 $m+n+1$ 个，所以，方程组总有非零解. 但当(m,n) 固定后，对任意满足(52.3) 的多项式 $P_m(x)$，$Q_n(x)$ 所产生的 Pade 近似式$\frac{p_m(x)}{Q_n(x)}$ 却是唯一的.

由(52.2)，

$$f(x)Q_n(x)-P_m(x)=x^{m+n+1}\sum_{k=0}^{\infty}r_kx^k \tag{52.4}$$

于是误差可用$\left|f(x)-\frac{p_m(x)}{Q_n(x)}\right|\leqslant\frac{r_0\mid x\mid^{m+n+1}}{\mid Q_n(x)\mid}$ 来估计.

由此可见，Pade 逼近在原点附近具有良好的精确度，当 $|x|$ 增大时，误差就很快增大. Pade 将$\left[\frac{m}{n}\right]$依自然顺序排列成 Pade 表：

$$\begin{array}{cccc}
\left[\frac{0}{0}\right] & \left[\frac{0}{1}\right] & \left[\frac{0}{2}\right] & \cdots \\
\left[\frac{1}{0}\right] & \left[\frac{1}{1}\right] & \left[\frac{1}{2}\right] & \cdots \\
\left[\frac{2}{0}\right] & \left[\frac{2}{1}\right] & \left[\frac{2}{2}\right] & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots &
\end{array} \tag{52.5}$$

实验表明，在 $m+n$ 为定数的情形下，在所有(m,n) 阶 Pade 逼近中，以 m 和 n 相等或相近时，逼近效果最好，所以通常应选取 Pade 表中主对角线上及其两侧的元素，即$\left[\frac{n}{n}\right]$，$\left[\frac{n}{n\pm1}\right]$，以便取得更好的逼近效果. 若将 Pade 逼近中的幂级数展开换成 Chebyshev 展开：

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kT_k(x),\qquad x\in[-1,1] \tag{52.6}$$

就得到 Mahley 逼近，它比 Pade 逼近的精确度要高.

例如，要估计 $\operatorname{th}\alpha x$ $(-1\leqslant x\leqslant1)$，可先求出$\frac{\operatorname{th}\alpha x}{x}$ 的(2.4) 阶 Pade 逼近$\left[\frac{2}{4}\right]=\frac{P_2(x)}{Q_4(x)}$，式中，$P_2(x)=\alpha+\frac{2}{21}\alpha^3x^2$，　$Q_4(x)=1+\frac{3}{7}\alpha^2x^2+\frac{\alpha^4}{105}x^4$.

再用 $x\left[\frac{2}{4}\right]=x\frac{P_2(x)}{Q_4(x)}$ 作为 $\operatorname{th}\alpha x$ 的有理逼近式.(第五章 § 3. No. 37(3))

一般地，记 $r_{m,n}(x)=\frac{p_m(x)}{Q_n(x)}$，则 f 的 Pade 逼近满足不等式

$$r_{n-1,n}(x)\leqslant f(x)\leqslant r_{n,n}(x), \tag{52.7}$$

式中 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}r_{n,n}(x)=\lim\limits_{n\to\infty}r_{n-1,n}(x)$，而且

$$(-1)^{1+k}\{r_{m+1+k,m+1}(x)-r_{m+k,m}(x)\}\geqslant 0,\quad k=-1,0,1,\cdots.$$

$$(-1)^{1+k}\{r_{m+k,m}(x)-r_{m+k+1,m-1}(x)\}\geqslant 0, k=-1,0,1,\cdots.$$ ([22]666～668)

由于有理函数具有一些好的性质，例如，用有理函数可以逼近在有限点处值为无穷的函数，有理函数在计算机上计算比较容易而且快速，利用 Pade 表中存在的递推关系建立了大量适用于计算机计算的算法，利用 Pade 逼近构造过程中的局部数据（幂级数的系数），就可以研究相应的解析函数的整体性质（如解析延拓、奇异点的特征与分布等）. Pade 逼近与连分式、正交多项式、矩问题、位势论及泛函分析之间都有深刻的联系和相互影响.

53. **矩方法**

它的基本思想是：设质点 A,B 分别有质量 m_1,m_2，这些质点的矩 T 满足：

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{BT}}=\frac{m_2}{m_1}\qquad(\text{即}\overline{AT}\cdot m_1=\overline{BT}\cdot m_2).$$

若平面上点 $M_k=(x_k,y_k)$ 具有质量 m_k，则矩 $T(x_T,y_T)$ 是

$$x_T=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}m_kx_k}{\sum\limits_{k=1}^{m}m_k},\qquad y_T=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}m_ky_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}m_k}.\tag{53.1}$$

若 M_k 均在凸区域 D 的边界上，直线 $x=x_T$ 与 D 的交点分别为 P_1,P_2，则

$$\overline{x_TP_1}\leqslant y_T\leqslant\overline{x_TP_2}\quad .\tag{53.2}$$

利用这个基本不等式就很容易证明著名的关于凸函数的 Jensen 不等式（第七章 § 1. 二，No. 1）、Chebyshev 不等式（第一章 § 3. No. 9）、重排不等式（第三章 No. 86）、控制不等式（第七章 § 1. 二，No. 7）、矩不等式（第八章 § 1. No. 25）等.

54. **B-Q 方法（即泛对称转化法）**

利用一些函数空间的具体结果和转化原则，由 B-Q 方法就可导出一系列嵌入不等式，由所得的不等式，再利用转化原则就可得到许多转化定理、逆定理和最优逼近在不同范数下的误差估计. 例如，在一定条件下，通过某种算子 T，由 f 转化到另一空间中的 f^*，由范数 $\|\cdot\|$ 转化为另一空间中的范数 $\|\cdot\|_*$，就可将不等式 $\|f-P_\lambda\|\leqslant\varepsilon(\lambda)$ 转化为 $\|f^*-TP_\lambda\|_*\leqslant D(\lambda)$.

一般来说，事物集 X 及其一定的联系 T（称为泛结构）形成的统一体 $S=(X,T)$，就是形式泛系. 它可以描述广义的系统、转化与对称，广义的系统与转化概念侧重事物的联系与运动，而广义的对称或泛对称概念侧重的是变与相对不变、自由与约束的联系与转化，由此研究的逼近转化嵌入不等式、解析函数的嵌入不等式等. 详见[172] 和本书第六章 § 1. No. 64.

55. **最值单调定理方法**

2008 年，张小明和褚玉明得到了一个称为最值单调性的定理：设 $f:[a,b]^n\to R^1$ 有连续偏导数，$c\in[a,b]$，记

$$D_k = \{(x_1, \cdots, x_{n-1}, c): \min_{1\leqslant k\leqslant n-1}\{x_k\} \geqslant c, x_j = \max_{1\leqslant k\leqslant n-1}\{x_k\} \neq c\} \cap [a,b]^n.$$

若在 D_k 内，$\frac{\partial f}{\partial x_k} > 0$，则对于 $c \leqslant y_k \leqslant b(1 \leqslant k \leqslant n-1)$，不等式 $f(y_1, \cdots, y_{n-1}, c) \geqslant f(c, \cdots, c)$ 成立，且仅当 $\forall\, y_k = c(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ 时等号成立，当$\frac{\partial f}{\partial x_k} < 0$ 时相应的不等式见第八章 §1. No. 52 或[163].

利用这些定理来研究 Hilbert 不等式、Hardy 不等式等，往往起到独特的作用.（第十三章 No. 2 ～ 4 等；[163]）

应强调指出的是，不等式的证明方法远不止这 55 种，例如有限元法、样条函数理论、连分数理论和第十三章 No. 20 函数重排不等式、好 λ 不等式都是证明算子与泛函不等式的有力工具. 我们侧重的是本书所涉及到的大中学数学教学与研究及各类数学竞赛中常用的比较初等的方法. 代数几何中著名的黎曼不等式、丘成桐 — 宫冈洋一关于一般型代数曲面不等式、集论拓扑学中著名的基函数不等式、图论中的不等式等的证明方法，由于涉及更为专门的数学知识，我们没有收入. 就是上述 55 种证法的分类，也不一定恰当，读者需要理解这些方法的实质并根据不同的实际情况灵活加以运用.

附录:212 个未解决的问题

著名数学家 Halmos,P. R. 指出:"问题是数学的心脏","解决问题的最困难的部分之一是提出正确的问题."([305]1980,87:519~524)

本书第 1 版提出了 21 个未解决的问题,第二版提出了 100 个未解决的问题,第三版提出了 152 个未解决的问题均受到初学者的欢迎.据作者所知,在这些问题中,现已解决的有 40 多个.第四版对这些已解决的问题已从这个附录中抽出,补充了新的问题,使得未解决的问题达到 212 个.这些新提出的问题,仍只限于与新收入的不等式有关的问题.这些问题难易悬殊,受作者水平和资料之限,也不一定提得恰当,还有些问题可能已解决,仅供读者参考.读者可以从本书中提出更多的问题.实际上,在不等式理论中未解决的问题和值得进一步研究的问题是没有止境的,一旦解决了一个特殊的问题,它的解决本身(或由它无解所产生的危机)又会提出其他有待解决的问题来取代它.因此,学会自己提出问题,进一步自己提出有意义的问题,是研究工作者所需要具备的一种基本功.

1. 第一章 §2(2.52) 与(2.53) 式中的条件 $Q<1$ 或 $Q>1$ 能否放宽?

2. 第一章 §3 二. No. 5. (3.31) 与(3.32) 式中成立的最小 λ 是多少?

3. 第一章 §3 二.(二)No. 10 单参数平均 $J_p(a,b)$ 不等式,$p\ln J_p(a,b)$ 是否为凸函数?

4. 第一章 §3. 三(三)No. 6. (5) 马统一关于混合 AG 不等式的猜想.

5. 第一章 §3 三(三)No. 10. 关开中关于广义 k 次对称平均不等式(3.150) 的猜想.

6. 第一章 §3 三.(三)No. 10. (6) 中 $P_n(a,k)$,$P_n^*(a,k)$,$Q_n(a,k)$ 有什么关系?

7. 第一章 §3 三(三) 中 Fan Ky 不等式的推广(3.165) 和(3.166) 式成立的条件是什么?

8. 第一章 §3 三(三) 中陈计关于(3.169) 式、(3.170) 式成立的条件是什么?

9. 第一章 §2 三 No. 10(9) L^p 空间中的 Orlicz 不等式中的最佳常数 c 是多少?

10. 第一章 §3 二(二)No. 13 中所建立的二元单参数平均之比的不等式如何从二元推广到多元?

11. 第一章 §3 二(二)No. 21 中对于幂平均、Gini 平均、Lehmer 平均等是否也能建立相应的 Hölder 不等式、Minkouski 不等式、Chebyshev 不等式?

12. 第一章 §3 三(三)No. 9 中,反向 Chebyshev 不等式中常数 $C(p,q)$ 的最佳值是多少?

13. 第一章 §3 三(三)No. 10 中文家全关于 Hardy 函数不等式的若干猜想.

14. 第一章 §3 三(三)No. 17 中郭白妮、祁锋猜想.

15. 第二章 §1.一. No.5 褚小光关于 $S_n(m) = \sum_{k=1}^{n} k^m$ 不等式的三个猜想.

16. 第二章 §1.一. No.6 $S_p(n) = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $f(p) = \frac{S_p(n)}{S_p(n+1)}$ 是否在$(-\infty, \infty)$上关于 p 严格递减?

17. 第二章 §2. No.22 $f(n) = \frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{2^k - 1}$ 的上、下界是什么?

18. 第二章 §1.三. No.27 中郭白妮、祁锋提出的问题.

19. 第二章 §1.一. No.1 中 $\sigma_k = \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{n_j}$ 的最优上界是什么?

20. 第一章 §2.七. No.1 中计数不等式的 Heilbron 不等式中,λ_n,z_n 的最好上、下界各是什么?当(2.78)式成立时,c_1 的最大值和 c_2 的最小值是什么?

21. 第二章 §2.七. No1.(7) 中(2.82)式中 α_n 的下确界是什么?

22. 第二章 §2.七. No.2 中 $P_n(3)$,$P_n(4)$ 的最优上下界是什么?

23. 第二章 §3. No.4.(3.36)式中,$\Delta(x)$ 的阶是多少?

24. 第二章 §3. No.4.(4) 中(3.38)式是否成立?

25. 第二章 §3. No.5 中关于 Möbius 函数不等式(3.49)是否成立?它与著名的 Riemann 猜想等价.

26. 第二章 §3. No.16 中 Montgomery 关于(3.111)式的猜想,Diophantus 不等式的新旧猜想见 Bulletin(New Series) of AMS;1990,23(1):37 ~ 75.

27. 第二章 §3. No.21 中 Vinogradov 的猜想.

28. 第三章 No.9(3) 中 4 个常数 $c_1 \sim c_4$ 的最佳值是什么?

29. 第三章 No.23(6) 中如何求出 $c_1(p)$、$c_2(p)$ 的最佳值?

30. 第三章 No.34(38) 和(39) 中所定义的 $f(p_k, \lambda_k, r)$ 的上下界是多少?

31. 第三章 No.34(40)、(42) 中所定义的 $f(\lambda_k)$ 的上、下界,蒋明斌的猜想.

32. 第三章 No.34(43) 中所定义的 $f(p)$ 的上下界是什么?

33. 第三章 No.74 中蒋明斌猜想.

34. 第三章 No.107(4) 简超猜想和杨志明提出的问题.

35. 第二章 §3. No.2 中 $\pi(x) - \frac{x}{\ln x}$ 的上界估计仍是当代数论的难题之一.

36. 第三章 No.151(3)、(4) 中所定义的 $S_n(a)$、$S_n(a, p, \lambda)$ 的上下界问题.

37. 第三章 No.157(9) 中褚、张的猜想.

38. 第三章 No.173 中使不等式成立的 S_n 的最佳范围.

39. 第三章 No.175 中所定义的 $f_n(p, q, \lambda)$ 在 $\prod_{k=1}^{n} a_k = 1$ 时的上、下界问题.

40. 第三章 No.176 中蒋明斌猜想.

41. 第三章 No.177 中所定义的 $g(p, q, \lambda)$ 的上下界问题.

42. 第三章 No.178 中蒋明斌的 2 个猜想.

43. 第三章 No.179 中所定义的 $f(p)$ 的最佳上下界问题.

44. 第四章 §1.二.No.177 所定义的 $f(p,q)$ 的上下界问题.

45. 第四章 §1.二.No.178 所定义的 $g(p,q)$ 的上下界问题.

46. 第四章 §1.二.No.179 所定义的 $h(p,q)$ 的上下界问题.

47. 设 $A_n(a),G_n(a),H_n(a)$ 分别是正数列 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 的算术平均、几何平均、调和平均.1958 年徐利治提出,下述不等式:

$$G_n(a)\leqslant\frac{1}{2}(A_n(a)+H_n(a))$$

仅当 $n=2$ 时成立,而当 $n\geqslant 3$ 时不一定能成立.([8]一版 122 ~ 123,二版140),问 $n\geqslant 3$ 时,加上什么条件能使以上不等式成立?

48. 第四章 §1.六.No.19(44) 中褚小光、张志华的两个猜想.

49. 第四章 §1.六.No.19(45) 中刘健的两个猜想.

50. 第四章 §1.六.No.19(46) 中褚小光的猜想.

51. 第三章 No.20 中 Lyons 猜想.

52. 第三章 §No.34(19) 中最优上下界是什么?

53. 第三章 No.35 中马统一的猜想.

54. 第三章 No.40 中 $|f_1|$ 和 $|\sum_k\sqrt{k}a_k|$ 的最优下界是什么?

55. 第三章 No.65 中(65.6) 式中 $\left(1+\frac{1}{p}\right)^p$ 是否还可改进?最佳常数是什么?

56. 第三章 No.71 中 Keogh 猜想.

57. 第三章 No.76 中 Alzer 提出的问题.

58. 第三章 No.86(5) 中倪仁兴、张森国关于幂指和排序不等式的猜想.

59. 第三章 No.132 中 Briggs 关于初等对称多项式不等式的猜想.

60. 第三章 No.146 中关于使得(146.1) 式成立的关于 p,n 的充要条件是什么?

61. 第三章 No.150,设 $a_k>0,\sum_{k=1}^n a_k=1,p>0,S_n=\sum_{k=1}^n\frac{a_k^p}{a_k+a_{k+1}}$ 的最优上下界是什么?

62. 第三章 No.156(12) 中杨定华的猜想.

63. 第三章 No.157(7) 中常数 $c(p,q)$ 的渐近性态是什么?

64. 第四章 §1.一.*No*.32 中 λ 的最小值是什么?陈琦猜想.

65. 第四章 §1.一.No.38 中刘保乾 — 张小明的一系列猜想.

66. 第四章 §1.二.No.9 的下界如何改进?

67. 第四章 §1.二.No.52 中 $f(x,y,z)$ 的上下界是什么?

68. 第四章 §1.二.No.98 中 $\sum|\mathrm{ctg}nA|^t$ 的最佳下界是什么?

69. 第四章 §1.三.No.13 的证明如何简化?下界是什么?

70. 第四章 §1.四(三)No.35 中文家金、单墫提出的两个问题.

71. 第四章 §1.四(五)No.52 ~ 53 中的几个问题.

72. 第四章 §1.六.No.1.(3)(4) 中 Abi-Khuzam 问题.

73. 第四章 §1.六.No.14 中陈计等的猜想.

74. 第四章 §1.六.No.16(2) 中最优上界是什么?

75. 第四章 §1.六.No.19(28) $\sum(h_1h_2)^t$ 与 $\sum(ab)^t$ 的大小关系如何?

76. 第四章 §1.六.No.19(28) 中陈计、李广兴猜想.

77. 第四章 §1.六.No.19(42) 中 $(h_ah_{a1})^\lambda+(l_bl_{b1})^\lambda+(t_ct_{c1})^\lambda$ 的上下界是什么?

78. 第四章 §1.七.No.1 中尹华焱猜想.

79. 第四章 §2.一.(二)No.3 中凸四边形不等式问题.

80. 第四章 §2.一.(二)No.6 中 $t\neq3$ 时,$\sum(p-a)^{-t}$ 的上下界是多少?

81. 第四章 §2.三.No.5 中安振平猜想.

82. 第四章 §2.三.(二)No.6 中双圆 n 边形不等式的问题.

83. 第四章 §2.三.(二)No.7 中 B－L 不等式推广的猜想.

84. 第四章 §2.三.(二)No.8 中与凸 n 边形不等式有关的下界问题.

85. 第四章 §2.三.(二)No.12 中王振、陈计的三个猜想.

86. 第四章 §2.三.(二)No.13 中凸 n 边形 C-B 角不等式的两个猜想.

87. 第四章 §2.三.(二)No.14 中两个 n 边形面积不等式问题.

88. 第四章 §2.四.No.2(8) 中四面体不等式的猜想.

89. 第四章 §2.四.No.3(7) 中林祖成、朱火芬的猜想.

90. 第四章 §2.四.No.9(8) 中唐立华的两个猜想.

91. 第四章 §2.七.(三)No.1 中 n 维单形元素的不等式问题.

92. 第四章 §2.七.(三)No.3 中杨世国猜想.

93. 第四章 §3.二.No.9 中费叶思 — 托特问题.

94. 第四章 §3.三(二)No.6 中 Riemann 几何学中的等周不等式问题.[19]443 还提出了等周不等式的若干猜想.

95. 第五章 §4.Stolarsky 关于双曲函数不等式四个未解决的问题.

96. 第六章 §1.No.19 中 $p\neq2$ 时,$c(n,p)$ 是否关于 n 递减?

97. 第六章 §1.No.19 中 Zbigniew 猜想.

98. 第六章 §1.No.27(4) 中周颂平关于 Turan 不等式推广的问题.

99. 第六章 §1.No.28 中 Schoenberg 与 Rahman 的两个猜想.

100. 第六章 §1.No.39 中(1.14)式当 $n>3$ 时是否成立?

101. 第六章 §1.No.47 中常数 c 的最佳值是多少?Smale 的两个猜想.

102. 第六章 §1.No.49 中 S-B 猜想,Erdös 猜想,Newman 猜想.

103. 第六章 §3No.60 中 Erdös 猜想.

104. 第七章 §1 中关于函数凸性的几十种不同概念中,哪些是最核心的概念?这些概念之间有什么联系?

105. 第八章 §1.No.37 中当 $8\leqslant n\leqslant12$ 时的结论是什么?

106. 第八章 §3.二.Lindelöf 猜想.

107. 第八章 §3.七.中常数 K 的最佳值是什么?

108. 第九章 §1.No.42.(4) 中的最佳下界是什么?

109. 第九章 §2.四.No.5 中胡克不等式中 Hayman 常数 d_n 的最佳上下界是什么?

110. 第九章 §2.四.No.6 中当 $n>3$ 时 $|b_n|$ 的最佳上界是多少?

111.　第九章 §2.四.No.16中胡克提出的两个问题.

112.　第四章 §2.三.(二)No.17中所定义的 S_n, T_n, $T_n(p)$ 的上下界是什么?

113.　第四章 §2.七.R^n 中单形不等式能否推广到距离空间中的单形上去?

114.　第四章 §2.七.(三)No.4,5中单形元素 h_k, r_k 的和式的上下问题.

115.　第五章 §3.三(二) 如何给出 Gage 等周不等式(3.63)的分析证明?

116.　第五章 §1.No.7中朱灵提出的问题.

117.　第五章 §1.No.104(6),(8)式中,如何求出(104,1)和(104,4)式中的最佳常数 c_1, c_2 的值.

118.　第六章 §1.No.46(3)的 (p,q) 型范数不等式中的最佳常数问题.

119.　第六章 §1.No.58中多项式 T_n 的范数不等式(1.15)中的最佳常数问题.

120.　第六章 §1.No.60中 Szëgo 不等式中的最佳常数问题.

121.　第六章 §1.No.62(8)中 R_n 的上下界问题.

122.　第六章 §1.No.64(1.17)式中的最佳常数问题.

123.　第七章 §1中,杨镇杭提出用一元函数来定义多元函数的凸性,与本书定义1有什么异同?

124.　第七章 §1定义23中,f 关于 g 为凸函数的充要条件是什么?

125.　第八章 §3.No.11.(9)中陈昌平的两个猜想.

126.　第八章 §3.No.11.(14)中张小明、褚玉明的猜想.

127.　第九章 §1.No.7(5)中的最佳常数问题.

128.　第九章 §2.四.No.25中求 A 的最佳上界.

129.　第十章 §1.No.18幂不等式成立的条件是什么?

130.　第十一章 No.23中数列 $\{a_n\}$ 的上下界问题.

131.　第十一章 §2.No.37(14)加权 Hardy 型不等式中最佳常数问题.

132.　第十一章 §2.No.39中张小明、褚玉明的猜想.

133.　第九章 §2.四.No.21中 $K(f,r)$ 的精确上界是多少?

134.　第九章 §2.五.No.35中 Gabriel 不等式中常数 A 的最佳值是什么?

135.　第九章 §2.五.No.50中 Minda 猜想.

136.　第十章 §1.No.19中 Minkowski 猜想遗留的问题.

137.　第十章 §2.一.No.20中的若干猜想.

138.　第十一章 §1.No.12中的三个猜想.

139.　第十一章 §1.No.22中陈计提出的问题.

140.　第十一章 §1.No.29中 f, f_n, S_n, g_n 的最优上下界是什么?

141.　第十一章 §2.No.10中,华罗庚不等式中的常数 c 的最佳值是多少?

142.　第十一章 §2.No.31中常数 $K(p,c)$ 的最佳值是什么?

143.　第十一章 §2.No.37(10)中 Johnson 提出的三个未解决的问题.

144.　第十一章 §2.No.42.(9)和(13)中常数 c 的最佳值是多少?

145.　第十一章 §2.No.44定理3中 $c(p,q)$ 是否为最佳值?

146.　第十二章 §2.No.1中(2.9)式中常数42是否为最佳值?

147.　第十二章 §2.No.4中(2.18)式中的精确常数是多少?

148. 第十二章 §3. No. 5 中 L-K 不等式未解决问题和若干猜想.([303]2000,3(1):15 ~ 24)

149. 第十二章 §3. No. 9 中 Wirtinger 不等式中常数 $c(n,k,p,q)$ 的最佳值问题.

150. 第十二章 §3. No. 47 中如何从 $f^{(n)}(x) \leqslant f(x)$ 推出 $f^{(k)}(x)$ 的上界?$1 \leqslant k \leqslant n-2$.

151. 第十二章 §3. No. 53 中当 $n > 4$ 时 $(-1)^n f^{(n)}(x) \geqslant 0$ 是否成立?

152. 第十三章 No. 2(3) 中 Hilbert-Riesz 不等式中 $c(p,q)$ 的最佳值是什么?

153. 第十三章 No. 2(3) 中常数 $K(p,q)$ 是否为最佳值?

154. 第十三章 No. 3(9) 中常数 $c(p,q,\lambda)$ 的最佳值如何确定?

155. 第十三章 No. 3(10) 中的最佳常数问题.

156. 第十三章 No. 17(3) 中,当 $n > 7$ 时常数 A_n 的最佳值是多少?

157. 第十三章 No. 29 中,Sobolev 不等式(7) 中常数 c 的最佳值是多少?

158. 第十三章 No. 39 中使得 $(-1)^{n+1-k} \dfrac{\partial \varphi(x)}{\partial x_k} > 0$ 的充要条件是什么?

159. 第十三章 No. 93 中的常数 $A(\beta,p,\alpha)$ 如何估计?

160. 第十三章 No. 125,126 中常数和 No. 128 中 $G(k,m)$ 的最佳上下界是什么?

161. 第十四章 §1. No. 3 中 c 的最佳值是多少?

162. 第十四章 §1. No. 4 中(1.9) 式成立与内积空间的关系问题.

163. 第十四章 §2. No. 6. (5) 中常数 c 的最佳值是多少?

164. 第十四章 §2. No. 7. (15) 中谢庭藩一周颂平猜想.

165. 第十四章 §2. No. 21. (3) 中 Howell 猜想.

166. 第十二章 §3. No. 13(1) 中 Sobolev 不等式中 $C(2,q)$,$C(1,q)$ 的最佳值问题.

167. 第十二章 §3. No. 13(7) 中的最佳常数问题.

168. 第十二章 §3. No. 60 中 $c(p)$ 的最佳值问题.

169. 第十三章 No. 2(14) 中非权范数下的最佳常数问题.

170. 第十三章 No. 2 匡继昌综合报告"Hilbert 不等式研究的新进展"(北京联合大学学报,24(1)(2010),53 ~ 59) 中所提出的研究问题.

171. 第十三章 No. 3(20) 分数阶 Hardy 不等式中的最佳常数问题.

172. 第十三章 No. 3(24) 中常数 C 的最佳值问题.

173. 第十三章 No. 3(12),f 的 Laplace 变换 $L(f,x) = \int_0^\infty f(y)e^{-xy}\mathrm{d}y$,当 $1 < p \leqslant 2$ 时有下式成立

$$\| L(f) \|_{p'} \leqslant \left(\frac{2\pi}{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \| f \|_p \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right).$$

式中 $\left(\dfrac{2\pi}{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$ 是否为最佳常数?

174. 第十三章 No. 28(8) 中 Hardy-Sobolev 问题.

175. 第十三章 No. 29(9) 中当 $p \neq 2$ 时 $c(p)$ 的最佳值问题.

176. 第十三章 No. 141 中 Polya 猜想.

177. 第十四章 §1. No. 30 中当 p 不是整数时,相应的不等式是否仍成立?

178. 第十四章 §2. No. 31. Fourier 变换不等式中的最佳常数问题.

179. 第十五章 §1. No. 39 中的最佳常数问题.

180. 第十五章 §1. No. 40 中常数 c 的确定.

181. 给定一个复多项式 $p_n(z)$,是否存在 p_n 的一个临界点 θ,即 $p'_n(\theta)=0$,使得 $\frac{|p_n(z)-p_n(\theta)|}{|z-\theta|}\leqslant C|p'_n(z)|$? $C=$?

(平均值问题) 见 Smale, Steve, Mathematical Problems for the next century. Math: frontiers and perspectives, 271 ~ 294

182. 第十四章 §2. No. 24. GW 算子不等式中常数 c_1, c_2 的估计式是什么?

183. 第十四章 §2. No. 25. Gamma 算子不等式中的最佳常数是什么?

184. 第十四章 §2. No. 30(18) 中 p 的范围能否改善?

185. 第十四章 §2. No. 30. (21) H-L 嵌入不等式中邓东皋 — 韩永生提出的问题.

186. 第十四章 §2. No. 32(2) 中分数次积分算子不等式中最佳常数问题.

187. 第十四章 §2. No. 32(3) 中的最佳常数问题.

188. 第十四章 §2. No. 34(5) 中 Pichorides 猜想.

189. 第十五章 §1. No. 19 中 $E\{\min\{\xi,k\}\}$ 的上界问题.

190. 第十五章 §1. No. 25 中 Moran 不等式中的下界问题.

191. 第十五章 §1. No. 26 中邵启满猜想.

192. 第十五章 §1. No. 36 中文家金关于方差平均 $D_r(x,p)$ 关于 r 递增的猜想.

193. 第十五章 §2. No. 25(1) 中最佳常数问题.

194. 第十五章 §2. No. 49 中鞅不等式中的最佳常数问题.

195. 第十六章 §1. No. 2 中基数函数不等式,在[94],特别是其中第1—2章有大量不等式研究问题,因为涉及过多专有名词,有兴趣的读者可查阅原文.

196. 第十六章 §2. No. 11. Behzad 中全着色猜想.

197. 第十六章 §2. No. 17 中 Ramsey 数的确定问题.

198. 第十六章 §2. No. 17(4) 中,(2.4) 式成立的条件是什么?

199. 第十六章 §2. No. 21 中 Duke 猜想.

200. 第十六章 §2. No. 22 中图的重构猜想.

201. 第十六章 §2. No. 24 中图的等周不等式,除极少数重要的图类的最好的等周不等式外,大多数图的等周不等式还不知道.

202. 设任意三角形位于闭单位正方形内,Funar 猜想:该三角形内切圆半径 $r\leqslant\frac{\sqrt{5}-1}{4}$. ([305]1984, 81:588)

203. Funar猜想:设任意三角形位于宽为 d 的闭凸图形 K 内,r_1, r_2 分别是三角形和 K 的内切圆半径,猜想:$1/2\leqslant\sup(r_1/r_2)\leqslant 1$. 已经证明 $1/4\leqslant(\sup r_1)/d\leqslant 1/2$. ([305]1984, 91:588)

204. Garfunkel关于三角形Malfatti圆不等式的猜想:$\Delta M_1M_2M_3$ 的 Malfatti 圆是指与三角形的两边和其他两个圆相切的内切圆. 设这三个 Malfatti 圆的圆心分别为 O_1, O_2,

O_3,若圆 O 是与这三个圆相外切并与 $\Delta G_1G_2G_3$ 的边相切的最小圆. $\Delta G_1G_2G_3$,$\Delta M_1M_2M_3$,$\Delta O_1O_2O_3$ 的周长分别记为 L_1,L_2,L_3,猜想 $L_1 \geqslant L_2 + L_3$,仅当 $\Delta O_1O_2O_3$ 为等边时等号成立.([381]1986,12:108)

205. 设 a_k,b_k,S_1,S_2 分别是两个 n 边形的边长和面积.令 $c_k = (a_k^q + b_k^q)^{1/q}$,$q \geqslant 1$,则当 $2 \leqslant q \leqslant 4$ 时,以 $\{c_k\}$ 为边长的 n 边形的最大面积 S 满足 $S^{q/2} \geqslant S_1^{q/2} + S_2^{q/2}$. $q > 4$ 时上式不成立.问 $1 \leqslant q < 2$ 时上式是否成立?(宁波大学学报,1991,1:17 ~ 20)

206. Erdös-Guy 关于格点不等式的猜想:设 (x, y) 为格点,即坐标均为整数的点,$1 \leqslant x, y \leqslant n$,选择 k,使得 $\binom{k}{2}$ 个格点之间的距离互不相同,问 k 的最大值是什么?容易看出,$k \leqslant n$,而 Erdös-Guy 证明 $n^p < k < cn/(\ln n)^{1/4}$,式中 $p = (2/3) - \varepsilon$,$\varepsilon > 0$,并猜想 $k < cn^{2/3}(\ln n)^{1/6}$.该书还进一步提出了其他问题.([93]132 ~ 133. F. 2)

207. Erdös 关于欧拉函数 $\varphi(n)$ 不等式的猜想:设 $\varphi(n)$ 是不超过 n 且与 n 互素的自然数的个数.(第二章 §3. No. 3) 设 $a_1 < a_2 < \cdots < a_{\varphi(n)}$ 是小于 n 且与 n 互素的整数. Erdös 猜想:$\sum_k (a_{k+1} - a_k)^2 < \frac{cn^2}{\varphi(n)}$.([93]54. B40)

208. 焦争鸣问题:设 A 为 Hermite 矩阵,B 为斜 Hermite 矩阵,下式是否成立

$\operatorname{tr}(AB)^n \geqslant \operatorname{tr}(A^nB^n)$?当 A 是斜 Hermite 矩阵时,不等号是否反向?当 $n = 2$ 时已证明(山东师范大学学报,1992,4:19 ~ 20)

209. 设 S 表示在区域 $1 < |z| < \infty$ 中单叶亚纯函数 $F(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n}$ 所组成的函数类,G 是 $F \in S$ 的逆函数,而 G 在 ∞ 邻域的展开式是 $G(\omega) = \omega - \sum_{k=1}^{\infty} B_k \omega^{-k}$.

1951 年 Springer, G. 证明 $|B_3| \leqslant 1$,并猜想

$$|B_{2k-1}| \leqslant \frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!}. \tag{209.1}$$

Schober, G.,任福尧等证明 $k \leqslant 17$ 时(209.1) 式成立. 1989 年王冠闽就所有 $b_k > 0$ 等一些特殊情形证明(149.1) 式成立,但对于 $|B_k|$ 的上界仍未解决.([335]1992,2:197 ~ 201)

210. 最优求积问题:设 $f \in L[0, 2\pi]$,

$$\int_0^{2\pi} f = \sum_{k=1}^{m} a_k f(x_k) + R_m(f), \quad \text{式中 } 0 \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_m < 2\pi.$$

若存在 $\{a_k^*\}$ 和 $\{x_k^*\}$,使得

$$\int_0^{2\pi} f - \sum_{k=1}^{m} a_k^* f(x_k^*) = \inf_{\{a_k\}\{x_k\}} \sup_{f \in [0, 2\pi]} R_m(f),$$

则称 $\sum_{k=1}^{m} a_k^* f(x_k^*)$ 为最优求积,相应的 $R_m^*(f) = \int_0^{2\pi} f - \sum_{k=1}^{m} a_k^* f(x_k^*)$ 为最优误差.

对于不同函数类 f,相应的最优求积公式的存在性、唯一性及解析表达式,看起来是简单的定积分逼近问题,其解决方法往往需要非常深刻的分析技巧和泛函分析、拓扑等思想和方法,这是一个值得进一步研究的问题,可参看[68] 和 MR99f:26026.

211. 本书所涉及的积分,一般指(L) 积分,由于(L) 积分是一种绝对积分,还不能完全包含黎曼积分和牛顿积分,于是各种新的积分就成了研究中的一个热点. 如

Henstock积分、Perron积分、Denjoy积分、Bochner积分、A积分等,将本书中涉及(L)积分的不等式换成其他积分,原来的不等式还成不成立?有什么新的结果?例如第十三章No. 14Gronwall不等式对于Henstock积分也成立.目前关于新积分不等式的结果还很少,是一个值得关注的新研究方向.

212. 许多经典不等式在本质上确定了各种不同的抽象空间中线性算子或线性泛函的范数,反之,许多函数空间的特征是用不等式刻划的,美国数学评论(MR)2000新的分类法增加了39B62(泛函不等式),39B72(泛函方程和不等式系统)也是一个值得关注的研究方向.

此外,2007年刘保乾提出了一百个待解决的三角形二元对称不等式问题,见[351]2007(4):460～464.

参 考 文 献

1. Hardy, G. H. , Littlewood, J. E. , Polya, G. Inequalities. Cambridge, 2nd Ed. 1952. (不等式. 越民义译. 北京:科学出版社, 1965)

2. Beckenbach, E. F. , Bellman, R. , Inequalities, Springer-Verlag, 1961

3. Bottema. O, Djordjevic, R. , Mitrinovic, D. S. , Vasic, P. M. Geometric inequalities. Noordhoff, 1969

4. Mitrinovic, D. S. , Vasic, P. M. , Analytic inequalities. Springer-Verlag, 1970(张小萍, 王龙译. 北京:科学出版社, 1987)

5. Shisha. O. (ed.) Inequalities, Ⅰ (1967), Ⅱ (1970), Ⅲ (1972), New York: Academic Press

6. Marshall, A. W. , Olkin, I. , Inequalities: Theory of majorization and its applications. Academic Press, 1979

7. 单墫. 几何不等式. 上海:上海教育出版社, 1980

8. 徐利治, 王兴华. 数学分析的方法及例题选讲(修订版). 北京:高等教育出版社, 1983

9. 王伯英. 控制不等式基础. 北京:北京师范大学出版社, 1989

10. Bullen, P. S. , Mitrinovic, D. S. , Vasic, P. M. , Means and their inequalities. Kluwer, 1988

11. Wilf, H. S. , Finite sections of some classical inequalities, Springer-Verlag, 1970

12. Marcus, M. Minc, H. , A survey of matrix theory and matrix inequalities. Boston, 1964(中译本:矩阵理论与矩阵不等式概要. 张福振, 杜吉佩译. 大连:大连理工大学出版社, 1990)

13. Minc, H. 非负矩阵. 杨尚骏等译编. 沈阳:辽宁教育出版社, 1991

14. Mikhlian, S. G,. Constants in some inequalities of analysis. John Wiley, 1986

15. Burago, Yu, D. and Zelgaller, V. A. , Geometric inequalities(译自俄文, 1980) Springer-Verlag, 1988

16. Lakshmikantham, V, Leela, S,. Differential and integral inequalities. Theory and applications, Vol. 1～2, New York, 1969

17. Mitrinovic. Popadic. Inequalities in number theory, 1978

18. Baker. Diophantine inequalities, 1986

19. Mitrinovic, D. S. , Pecaric, J. E. , Volonec, V. , Recent advances in geometric inequalities. Kluwer Academic Publishers, 1989

20. Mitrinovic, D. S. , Pecaric, J. E. , Differential and integral inequalities, Naucna Knjiga, Belgrade, 1988

21. Mitrinovic, D. S. , Pecaric, J. E. , Fink, A. M. Inequalities involving functions and their integrals and derivatives, Kluwer Acad. Publ. Dordrecht, 1991
22. Mitrinovic, D. S. , Pecaric, J. E, Fink, A. M. , Classical and new inequalities in analysis, Kluwer Acad. Publ, Dordrecht, 1993
23. Mitrinovic, D. S. , Pecaric, J. E. , Inequalities and norms, Belgrade, 1991.
24. Garsia, A. . Martingale Inequalities, Benjamin, 1973
25. Marshall, A. W, *et al*. Monotonicity of ratios of means and other applications of majorization in inequalities, New York, 1967
26. Inequalities: Fifty years on from Hardy, Littlewood, and Polya, Ed; W. Norrie Everitt, Marcel Dekker, 1991
27. Opic B, Kufner A. Hardy-type inequalities, Longman Scieatific, 1990
28. Kwong, Man Kam Zettl, Anton, Norm inequalities for derivatives and differences, Lecture Notes in Mathematics 1536, Springer-Verlag, Berlin, 1992
29. 胡克. 基础不等式的创建改进与应用. 南昌:江西高校出版社, 1998
30. 王松桂, 贾忠贞. 矩阵论中不等式. 合肥:安徽教育出版社, 1994
31. 陈计, 叶中豪. 初等数学前沿(Vol. 1.). 南京:江苏教育出版社, 1996
32. 单墫. 几何不等式在中国. 南京:江苏教育出版社, 1996
33. 李炯生, 黄国勋. 中国初等数学研究(1978～1988). 北京:科学技术文献出版社, 1992
34. 杨世明. 三角形趣谈. 上海:上海教育出版社, 1989
35. 杨之. 初等数学研究的问题与课题. 长沙:湖南教育出版社, 1993
36. 杨世明. 中国初等数学研究文集(1980～1990). 郑州:河南教育出版社, 1992
37. 沈文选. 单形论导引. 长沙:湖南师范大学出版社, 2000
38. 单墫. 数学奥林匹克题典. 南京:南京大学出版社, 1995
39. Everitt, W. N. Inequalities, Dekker, 1991
40. Kokilashvili, V. , *et al*. Weighted inequalities in Lorentz and Orlicz spaces, World Sci. Publ, 1991
41. Agarwal, R. P. Difference equations and inequalities: Theory, methods and applications, Marcel Dekker Inc, 1991
42. Mamedov, Ya. D. , Asrov, S. , Ataev, S. Theorems on inequalities (Russian) Ashabad, YLYM, 1980
43. Martynyuk, A. A. , Lakshmikantham, V. , Leela, S. Stability of motion: the method of integral inequalities, (Russian) Kiev, 1989
44. Kinderlehrer, D. , Stampacchia, G. An introduction to variational inequalities and their applications, Academic Press, 1980
45. Garcia-Cuerva. J. , Rubio de Francia, J. L. Weighted norm inequalities and related topics, North Holland, 1985
46. Bainov, D. , Simeonov, P. Integral inequalities and applications, Kluwer Acad. Publ,

Dordrecht, 1992
47. Kapur, J. N. Inequalities theory applications and measurements, New Delhi, 1997
48. Cloud, Michael J., Drachman, Byron, C. Inequalities (With applications to enginearing), Springer-Verlag, New York, 1998
49. Amiel, Y., Cowell, A. Thinking about inequality, Cambridge Univ. Press, 1999
50. Milovanovic, G. V. (ed), Recent progress in inequalities, Kluwer Academic Publishers Dordrecht, 1998
51. Bullen, P. S. A dictionary of inequalities, Longman, Harlow, 1998
52. Tong Y. L. Probability inequalities in multivariate distributions, Academic Press, 1980
53. Kazarinoff, N. D. Geometric Inequalities. (中译本:卡扎里诺夫. 几何不等式. 刘西垣译. 北京:北京大学出版社, 1986)
54. General inequalities 1～7, Proceedings of 1～7 international conferences on general inequalities, (①1976, ②1978, ③1981, ④1983, ⑤1986, ⑥1990, ⑦1995)
55. Schumaker, L. Spline functions: Basic theory, John Wiley, 1981
56. Polya, G., Szegö, G. Problems and theorems in analysis, Vol. 1～2, Springer-Verlag, 1972(中译本:G. 波利亚, G. 舍贵. 数学分析中的问题和定理, 第 1～2 卷. 张奠宙等译. 上海:上海科学技术出版社, 1981, 1985)
57. Zygmund, A. Trigonometric series, Vol. 1～2, 2nd ed. Cambridge Univ. Press, 1979
58. 夏道行, 等. 实变函数论与泛函分析(第二版). 北京:高等教育出版社, 1985
59. Sansone, G. Orthogonal functions, Interscience, 1959
60. 那汤松, И. П. 函数构造论. 何旭初, 唐述钊译. 北京:科学出版社, 1958
61. 考涅楚克, H. П. 逼近论的极值问题. 孙永生译. 上海:上海科学技术出版社, 1982
62. 徐利治, 等. 逼近论. 北京:国防工业出版社, 1985
63. 萨多夫尼奇, B. A., 等, 大学奥林匹克数学竞赛试题解答集. 王英新, 李世华译. 长沙:湖南科学技术出版社, 1981
64. Folland, G. B. Real analysis(Modern techniques and their applications) 2nd ed., John Wiley & Sons, Inc., 1999
65. Stein, E. M., Weiss, G. Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces, Princeton. 1971. (中译本:欧氏空间上的 Fourier 分析引论. 张阳春译. 上海:上海科学技术出版社, 1987)
66. 普特南数学竞赛(1938～1980). 刘裔宏, 等译. 长沙:湖南科学技术出版社, 1983
67. Newman, D. J. A Problem seminar, Springer-Verlag, 1982
68. 孙永生. 函数逼近论. 北京:北京师范大学出版社, 1989(下册为孙永生, 房艮孙合著, 1990)
69. Powell, M. J. D. Approximation theory and methods. Cambridge, 1981
70. 王仁宏. 无界函数逼近. 北京:科学出版社, 1983

71. 谢庭藩,周颂平. 实函数逼近论. 杭州:杭州大学出版社, 1998
72. Stein,E. M. Singular integrals and differentiability properties of functions. 1970.(中译本:奇异积分与函数的可微性. 程民德等译. 北京:北京大学出版社, 1986)
73. George,C. Exercises in integration,Springer-Verlag, 1984
74. Dieudonne,J. Foundations of modern analysis,Academic Press,Vol. 1(1969). Vol. 2 (1974)(中译本:J. 迪厄多内. 现代分析基础,第一卷. 郭瑞芝,苏维宜译. 第二卷. 沈永欢译. 北京:科学出版社, 1982,1986)
75. Mazja,V. G. Sobolev spaces,Springer-Verlag, 1985
76. 华罗庚. 数论导引. 北京:科学出版社, 1957
77. 陈湘能,等. 国际最佳数学征解问题分析. 长沙:湖南科技出版社, 1983
78. 严士健,等. 概率论基础. 北京:科学出版社, 1982
79. Meinardus,G. 函数逼近:理论与数值方法. 赵根榕,赵冰译. 北京:高等教育出版社, 1986
80. 周概容. 概率论与数理统计. 北京:高等教育出版社, 1984
81. 陈文忠. 算子逼近论. 厦门:厦门大学出版社, 1989
82. 嘉德克,B. K. 多项式一致逼近函数导论. 沈燮昌,等译. 北京:北京大学出版社, 1989
83. Donoghue,W. F. Distribution and Fourier transforms,Academic Press, 1969
84. Edwards,R. E. Fourier series,Vol. 1. (1979),Vol. 2. (1982),2nd ed,Springer-Verlag
85. Katznelson,Y. An introduction to harmonic analysis,2nd ed. Dover Pub. 1968
86. Guzman,M. D. Real variable methods in Fourier analysis,North-Holland, 1981
87. Torchinsky,A. Real-variable methods in Harmonic analysis,Academic Press, 1986
88. Strömberg,J-O,Torchinsky,A. Weighted Hardy spaces,Springer-Verlag, 1989
89. Parent,D. P. Exercies in number theory,Springer-Verlag, 1984
90. 陈建功. 三角级数论. 上海:上海科学技术出版社,上册,1964,下册,1979
91. Butzer,P. L. ,Nessel,R. J. Fourier 分析与逼近论. 第一卷上册. 郑维行等译. 北京:高等教育出版社, 1985
92. Schmeisser,H-J. ,Triebel,H. Topics in Fourier analysis and function spaces,John Wiley, 1987
93. Guy,R. K. Unsolved problems in number theory,Springer-Verlag, 1981
94. Kunen,K. , *et al*, Handbook of set-theoretic topology,Vol. 1～2. North-Holland, 1984
95. Bullen,P. S. , *et al* (Eds.) New integrals,Springer-Verlag, 1990
96. Croft,H. T. , *et al*, Unsolved problems in geometry,Springer-Verlag, 1991
97. Gamkrelidze,R. V. Analysis 1～3,Springer-Verlag,1986～1988
98. Hewitt,E. ,Stromberg,K. R. Real and abstract analysis,Springer-Verlag, 1978.(中译本:实分析与抽象分析. 孙广润译. 天津:天津大学出版社, 1994)
99. 数学竞赛(1～22). 长沙:湖南教育出版社, 1989～1994

100. 杨学枝. 不等式研究. 拉萨:西藏人民出版社, 2000
101. Abramowitz, M. Stegum I. A. (eds), Handbook of mathematical functions. New York, 1972
102. Hardy, G. H., Wright, E. M. An introduction to the theory of numbers, Oxford Univ. Press, 1979
103. Rao, M. M. Measure theory and integration, John Wiley & Sons, 1987
104. Diestel, J. Sequences and series in Banach spaces, Springer-Verlag, 1984
105. 数学奥林匹克题库编译小组. (前)苏联中学生数学竞赛题解. 天津:新蕾出版社, 1991
106. Hayman, W. K. Research problems in function theory, 1967
107. 数学百科全书(前苏联)(1~5 卷). 北京:科学出版社, 1994~2000
108. Polya, G. and Szegö, G. Isoperimetric inequalities in mathematical physics, Princeton Univ, Press, 1951
109. Cheney, E. W. Introduction to approximation theory, McGraw-Hill Book. Co., 1996. (中译本:逼近论导引. 徐献瑜, 等译. 上海:上海科学技术出版社, 1981)
110. Alexits, G., Turan, P. Fourier analysis and approximation theory, Vol. 1—2, 1978
111. Wawrzynczyk, A. Group representations and special functions, D. Reidel Pub. Comp. 1984
112. Timan, A. F. Theory of approximation of functions of a real variable, Oxford-London, 1963
113. Rockafellar, R. T. Convex analysis, Princeton, 1970
114. Ahlfors, L. V. Complex analysis, McGraw-Hill, 1979(中译本:阿尔福斯. 复分析. 上海:上海科学技术出版社, 1984)
115. 那汤松, И. П. 实变函数论. 北京:高等教育出版社, 1956
116. 张石生. 变分不等式和相补问题. 上海:上海科学技术出版社, 1991
117. Ziemer, W. P. Weakly differentiable functions, Springer-Verlag, 1989
118. 匡继昌. 实分析与泛函分析. 北京:高等教育出版社, 2002
119. 周民强. 实变函数论. 北京:北京大学出版社, 2001
120. 华罗庚. 高等数学引论. 北京:科学出版社, 第一卷, 1963, 第二卷, 1981
121. 胡克. 单叶函数的若干问题. 武汉:武汉大学出版社, 2001
122. 戈鲁辛. 复变函数的几何理论. 北京:科学出版社, 1956
123. Horn, R. A. JohsonC. R. Topics in matrix analysis, London: Cambridge Univ, Press, 1991
124. 关治, 陆金甫. 数值分析基础. 北京:高等教育出版社, 1998
125. 迈耶, 等. 小波与算子(第 1~2 卷). 北京:世界图书出版公司, 1992, 1994
126. Butzer, P. L., *et al*, Linear operators and approximation, 1972
127. 沈燮昌. 多项式最佳逼近的实现. 上海:上海科学技术出版社, 1984

128. Borwein, P., Erdelyi, T. Polynomials and polynomial inequalities, Springer-Verlag, 1995
129. Stein, E. M. Harmonic analysis: Real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals, Princeton: Princeton University Press, 1993
130. Zwillinger, D. Handbook of integration, Boston: Jones and Bartlett Publishers, 1992
131. Agarwal, R. P. Pan, Peter Y. H. Opial inequalities with applications in differential and difference equations, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995
132. 程民德,等. 实分析. 北京:高等教育出版社, 1993
133. 龙瑞麟. H_p 鞅论. 北京:北京大学出版社, 1985
134. 刘保乾, BOTTEMA. 我们看见了什么——三角形几何不等式研究的新理论、新方法和新结果. 拉萨:西藏人民出版社, 2003
135. Pachpatte, B. G. Inequalities for differential and integral equations, Academic Press, 1998
136. Mikhlin, S. G. Prössdorf, S. Singular integral operators, Springer-Verlag, 1986
137. 邓东皋,韩永生. H^p 空间论. 北京大学出版社, 1992
138. Nikolskii, S. M. Approximation of functions of several variables and imbedding theorems. Springer-Verlag, 1975
139. 徐利治,陈文忠. 渐近分析方法及应用. 北京:国防工业出版社, 1991
140. Lecture Notes in Mathematics, (LNM) 1679, Springer-Verlag, 1998
141. Wheeden, R. L., Zygmund, A. Measure and integral: An introduction to real analysis, Marcel Dekker, INC, 1977
142. 周民强. 调和分析讲义. 北京:北京大学出版社, 1999
143. Rohatgi, V. K. An introduction to probability theory and mathematical statistics, John Wiley & Sons, Inc. 1976. (中译本:概率论及数理统计导论. 高尚华译. 北京:高等教育出版社, 1983)
144. 日本数学会. 数学百科辞典(中译本). 北京:科学出版社, 1984
145. 徐利治. 大学数学解题法诠释. 合肥:安徽教育出版社, 1999
146. Hausdorff, F. Set theory, Chelsea, reprint, 1978. (中译本:豪斯道夫. F, 集论, 科学出版社, 1960)
147. Capobianco, M., Molluzzo. J, 图论的例和反例. 聂祖安译. 长沙:湖南科学技术出版社, 1988
148. Arkhangelskii, A. V., Ponomarev, V. I. Fundamentals of general topology: Problems and exercises, D. Reidel Publishing Company, 1984
149. de Souza, P. N., Silva, J-N. Berkeley problems in mathematics, (中译本:伯克利数学问题集. 北京:科学出版社, 2003)
150. 徐利治. 现代数学手册(1~5 卷). 武汉:华中科技大学出版社, 2001
151. Marshall, F., Govind, M. Inequalities in statistics and probability, Lincoln, Neb.,

1982

152. Larson, L. C. Problem-solving through problems, Springer-Verlag, 1983.（中译本：美国大学生数学竞赛例题选讲. 潘正义译. 科学出版社，2003）
153. Wang Kunyang, Li Luoqing, Harmonic analysis and approximation on the unit sphere, 北京：Science Press, 2000
154. 中国大百科全书(数学). 北京：中国大百科全书出版社，1988
155. Rassias, Th. M., (ed.) Functional equations and inequalities, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999
156. Rassias, Th. M. and Srivastava, H-M., (eds.), Analytic and geometric inequalities and their applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999
157. Milovanovic, G. V. et al. Topics in polynomials: extremal problems, inequalities, zeros, World Sci. Publ. Co. Singapore, 1994
158. He Tian-Xiao et al. Analysis, combinatorics and computing, Nova Sci. Pub. Inc. New York, 2002
159. 胡克. 解析不等式的若干问题(第二版). 武昌：武汉大学出版社，2007
160. 张晗方. 几何不等式导引. 北京：中国科学文化出版社，2003
161. 张小明. 几何凸函数. 合肥：安徽大学出版社，2004
162. 杨必成. 算子范数与 Hilbert 不等式. 北京：科学出版社，2009
163. 张小明，褚玉明. 解析不等式新论. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2009
164. 第四届全国不等式学术年会论文集. 2009
165. 第三届全国不等式学术年会论文集. 2005
166. 林正炎，白志东. 概率不等式. 北京：科学出版社，2006
167. Lieb, E, H, Loss, M. Analysis. (2nd Ed), International Pess. 2001
168. Alois Kufner, Lech Maligranda and Lars－Erik Persson, The Hardy inequality, Pilsen, 2007
169. Pachpatte. B. G. Integral and finite difference inequalities and applications, Elsevier Science, B. V. 2006
170. 杨路，夏壁灿. 不等式的机器证明与自动发现. 北京：科学出版社，2008
171. Widder, D. V. The Laplace transform. Princeton, 1946
172. 吴学谋，逼近转化论与数学中的泛系概念. 长沙：湖南科技出版社，1984
173. E. DiBenedetto, Emmanuele, Real Analysis, Birkhausor Boston, 2002

本书引用较多的数学杂志

301. J. Math. Anal. Appl. (Journal of Mathematical Analysis and Applications).
302. JIA (Journal of Inequalities and Applications)
303. MIA (Mathematical Inequalities & Applications)
304. JIPAM (Journal of Inequalities in Pure & Applied Mathematics).

305. Amer. Math. Monthly (The American Mathematical Monthly).
306. MR (Mathematical Reviews).
307. Zbl. Math. (Zentralblatt Math)
308. Proc, Amer. Math. Soc. (Proceedings of the American Mathematical Society).
309. Trans. Amer. Math. Soc. (Transactions of the American Mathematical Society).
310. Amer. J. Math. (American Journal of Mathematics)
311. Ann. of Math. (Annals of Mathematics).
312. Comm. Pure Appl. Math. (Communications on Pure and Applied Mathematics).
313. Pacific J. Math. (Pacific Journal of Mathematics).
314. J. Func. Anal. (Journal of Functional Analysis).
315. Adv. Math. (Advances in Mathematics).
316. Illinois J. Math. (Illinois Journal of Mathematics).
317. J. London Math. Soc. (Journal of the London Mathematical Society).
318. Proc. London Math. Soc. (Proceedings of the London Mathematical Society).
319. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. (Mathematical Proceeding of the Cambridge Philosophical Society).
320. Quart. J. Math. (The Quarterly Journal of Mathematics).
321. Math. Ann. (Mathematische Annalen).
322. Acta Math. (Acta Mathematia). (Uppsala)
323. Canad. J. Math. (Canadian Journal of Mathematics).
324. Duke Math. J. (Duke Mathematical Journal).
325. Math. Gaz. (Mathematical Gazette).
326. Internat, J. Math. and Math. Sci. (International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences).
327. J. Approx. Theory(Journal of Approximation Theory).
328. Constr. Approx. (Constructive Approximation).
329. Studia Mathematica.
330. Tamkang J. Math. (Tamkang Journal of Mathematics).
331. Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz.
332. ATA(Approximation Theory and its Applications, 2002 年起改名为"Analysis in Theory and Applications").
333. 科学通报(北京)
334. 数学学报(北京)(Acta Math. Sinica)
335. 数学进展(北京)
336. 数学年刊(上海)
337. 应用数学学报(北京)(Acta Math. Appl. Sinica)
338. 数学物理学报(武汉)

339. 数学研究与评论(大连)
340. 数学杂志(武汉)
341. 东北数学(长春)
342. 数学季刊(河南)
343. 高校应用数学学报(杭州)
344. 数学的实践与认识(北京)
345. 数学通报(北京)
346. 工程数学学报(西安)
347. 数学研究(原"厦门数学通讯")(厦门)
348. 数学通讯(武汉)
349. 中国数学文摘(北京)
350. 湖南数学通讯(长沙)
351. 不等式研究通讯(全国不等式研究会主办)
352. 杭州大学学报
353. 曲阜师范大学学报
354. Math. Z. (Mathematische Zeitschrift)
355. Mat. Vesnik
356. 数学理论与应用(原"湖南数学年刊")(长沙)
357. Soochow J. Math.
358. Discrete Math.
359. Bull. Austral Math. Soc.
360. Arch Math. (Archiv der Mathematik, Basel)
361. Real Anal. Exch.
362. Publ. Math. Debrecen.
363. Gaz. Mat. (Bucharest)
364. 中国科学(北京)
365. Anal. Math. (Analysis Mathematica)(Budapest)
366. Bull London Math. Soc.
367. Aequationes Math.
368. Indiana Unv. Math. J. (Bloomington).
369. Acta Sci. Math. (Szeged)
370. Internat. J. Math. Educat. Sci. Tech.
371. Math. Mag. (Mathematics Magazine)
372. Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.
373. J. Aust. Math. Soc. (The Journal of the Australian Mathematical Society (Sydney))
374. Canad. Math. Bull.
375. 高等数学(1985～1987)(上海)

376. Bull. Amer. Math. Soc.
377. Proc. Roy. Soc. Lond. A (Proceedings of the Royal Society of London. Series A (London)).
378. Rend. Circ. Mat. Palermo.
379. Proc. Cambridge Phil. Soc.
380. Proc. Japan Acad.
381. Crux Math.
382. 系统科学与数学(北京)
383. Notices of the American Mathematical Society.
384. 应用数学(武汉)
385. SIAM. J. Math. Anal. (Philadelphia)
386. Linear Algebra and Its Applications.
387. Linear and Multilinear Algebra.
388. Indian J. Pure Appl. Math.
389. Studia Sci. Math. Hungar.
390. Journal for Analysis and its Applications.
391. Acta Math. Hungar
392. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A.
393. Quart. Appl. Math.
394. Comput. Math. Appl.
395. Kyungpook Math. J.
396. J. Analyse Math.
397. Arch. Rational Mech. Anal.
398. J. Nonlinear Convex Anal.
399. Appl. Math. Lett. (Applied Mathematics Letters).
400. Proc. Indian Acad. Sci Math. Sec.
401. Rocky Mountain J. Math.
402. 大学数学(合肥)
403. Nonlinear Anal.
404. Nieuw Arch Wisk
405. Mat. Zametki
406. C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I. Math.
407. Internat. J. Pure and Applied Math.
408. Math. Research Letters.
409. 高等数学研究(西安)
410. 应用泛函分析学报(北京)
411. 应用数学和力学(重庆)

412. Applied Math. and Comp.
413. Aust. J. Math. Anal. Appl.
414. 纯粹数学与应用数学(西安)
415. Demonstratio Mathematica.
416. Collect. Math.
417. Math. Nachr.
418. Appl. Anal. (Applicable Analysis)